MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliar: Vicente Salinas

Tutoria

15 de Mayo del 2019

P1. Sea $A \subseteq R$ no vacío y acotado superiormente, y $\lambda > 0$ .Si definimos el conjunto $\lambda A = \{x \in \mathbb{R} | x = \lambda a, a \in A\}$, pruebe que $\sup(A)$ y $\sup(\lambda A)$ existen y que cumplen $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

P2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente, sea $s \in \mathbb{R}$ una cota superior de A. Pruebe que:
s es supremo de $A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tal que $s - \varepsilon \leqslant a$

P3. Pruebe los siguientes límites

a) $\dfrac{n+1}{n^4} = 0$

b) $\sqrt{\dfrac{2n+1}{n-2}} - 1 = 1$

c) $\cos(n!\pi)$

d) $\dfrac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} = 0$

Repaso

P4. *a*) Demuestre las siguientes propiedades sabiendo que f, g son funciones crecientes en $[a, b]$:
(*i*) $(\forall x \in [a, b])$ si $f, g > 0$, entonces $(fg)(x)$ es creciente.
(*ii*) $(\forall x \in [a, b]) - f(x)$ es decreciente.
(*iii*) Si f no cambia de signo, entonces $\dfrac{1}{f}$ es decreciente en $[a, b]$.
(*iv*) Sea h creciente en $[f(a), f(b)]$, se tiene que $(hof)(x)$ es creciente en $[a, b]$.
(*b*) Se dice que una función es lineal si y sólo si:
$(\forall x, y \in Dom(f)) f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(cx) = cf(x)$, con c constante.

P5. Considere la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de ella. La recta perpendicular a OP por P corta al eje OX en B y la proyección del punto P sobre el eje OX es A. Demuestre que el trazo AB tiene longitud constante.

P6. Considere la función f definida por:
$f(x) = \dfrac{1}{[x] + [-x]}$
Donde $[x]$ denota la parte entera de x. Determine el dominio, recorrido y paridad de f. Bosqueje su gráfico.

P7. Considere un triángulo de lados a, b y c, con ángulos opuestos α, β y γ.
(*a*) Pruebe que: $b\cos(\gamma) - c\cos(\beta) = \dfrac{b^2 - c^2}{a}$
(*b*) Suponga que si verifica que: $\operatorname{sen}^2(\gamma) = \operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\beta)$. Pruebe que el triángulo es rectángulo.
(*c*) Pruebe que: $\dfrac{a-b}{a+b} = \tan(\frac{\alpha-\beta}{2})\tan(\frac{\gamma}{2})$