MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 9: Axioma del supremo II y Sucesiones

10 de Mayo del 2019

P1. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verican las siguientes propiedades:

a) $A \cup B = \mathbb{R}$.

b) Todo elemento de A es menor que todo en B.

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

Como A es no vació y acotado superiormente (basta tomar algún elemento de B, como cota superior), por lo tanto por axioma del supremo se tiene que $s = \sup(A)$, por ende $\forall a \in A, a \leqslant s$, falta probar que $\forall b \in B, s \leqslant b$, esto es directo, pues todo $b \in B$, cumple que es cota superior de A y como s es el suprempo, se tiene que es la menor de las cotas, es decir, $s \leqslant b, \forall b \in B$, este es nuestro α.
Para probar que es único, supongamos que existen 2 diferentes, s_1, s_2 tal que:
$\forall a \in A, \forall b \in B$, $a \leqslant s_1 < s_2 \leqslant b$, notemos que $a \leqslant s_1 < \frac{s_1+s_2}{2} < s_2 \leqslant b$, con esto se tiene que $\frac{s_1+s_2}{2} \notin A \cup B$ (pues es mayor estricto que todos los de A y menor estricto que todos los de B), pero como $A \cup B = \mathbb{R}$, se tiene que: $\frac{s_1+s_2}{2} \notin \mathbb{R}$, lo que es una contradicción. Finalmente α único.

P2. En este problema usted demostrar a que todo conjunto A acotado inferiormente y no vacío posee ínfimo, el cual se relaciona con el supremo de $-A$, donde $-A = \{y = -x : x \in A\}$
Para ello se pide lo siguiente:
a) Considere el caso particular $A = (-1, 0] \cup [1, \infty)$. En este caso, encuentre $-A$, $\sup(-A)$ e $\inf(A)$.

$-A = (-\infty, -1] \cup [0, 1)$, $\inf(A) = -1$ y $\sup(-A) = 1$

b) Demuestre que si c es una cota superior arbitraria de $-A$, entonces $-c$ es cota inferior de A.

Si c es cota superior, entonces $\forall -a \in -A$, se cumple que: $-a \leqslant c$ o equivalentemente, $\forall -a \in -A, a \geqslant -c$ o equivalentemente $\forall a \in A, a \geqslant -c$, por lo tanto $-c$ es cota inferior de A.

c) Demuestre que si $s = \sup(-A)$ entonces $-s$ es ínfimo de A. Con esto habrá demostrado que cuando A es no vacío y acotado inferiormente siempre existe su ínfimo.

Como s es $\sup(-A)$, entonces s es cota superior de $-A$, por lo tanto se tiene por la parte anterior que $-s$ es cota inferior de A, ahora solo falta probar que es la mayor de las cotas.
Supongamos que existe una cota inferior mayor llamemosla I, entonces se cumple que $\forall a \in A$, $-s < I \leqslant a$ y multiplicando por -1, se obtiene que:
$\forall -a \in -A, s > -I \geqslant -a$, pero esto contradice que s es supremo de $-A$, por lo tanto $-s$ es la mayor de la cotas inferiores de A, es decir, el ínfimo de A

P3. Pruebe que:

a) $\text{ínf}\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\} = 0$

Se puede notar que $0 \leqslant \dfrac{1}{n}$, por lo tanto es cota inferior, ahora falta demostrar que es la mayor de las cotas. Supongamos que existe una cota mayor:
$r \in \mathbb{R}$, $0 < r \leqslant \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Por densidad de que se tiene que $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que:
$0 < \dfrac{p}{q} < r \leqslant \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ y esto implica:
$0 < \dfrac{1}{q} < \dfrac{p}{q} < r \leqslant \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ lo que es una contradicción, pues $\dfrac{1}{q} < r < \dfrac{1}{q}$, por lo tanto 0 es el ínfimo.

b) $\sup\{\frac{n}{n+1}|n \in \mathbb{N}\} = 1$

Como $n \leqslant n + 1 \Rightarrow \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$, por lo tanto 1 es cota superior:
Supongamos que existe una cota mas pequeña:
$r \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n}{n+1} \leqslant r < 1$, por densidad de $\mathbb{Q}$ se tiene que:
$\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que:
$\forall n \dfrac{n}{n+1} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{q-1}{q} \leqslant 1$, lo que es una contradicción (similar a la parte *a*)), por lo tanto 1 es supremo.

c) $\sup\{q \in \mathbb{Q}|q^2 \leqslant 3\} = \sqrt{3}$

Como ya probamos en la clase pasada $A \subseteq B \Rightarrow \sup(A) \leqslant \sup(B)$, por lo tanto:
$\sup\{q \in \mathbb{Q}|q^2 \leqslant 3\} \leqslant \sup\{q \in \mathbb{R}|q^2 \leqslant 3\} = \sqrt{3}$, por lo tanto falta solo probar que es la menor de la cotas. Suponiendo que existe un $r \in R$ tal que $\forall q \in \{q \in \mathbb{Q}|q^2 \leqslant 3\}, q \leqslant r < \sqrt{3}$,por densidad esto implica que, existe un $q_2 \in Q$ tal que:
$\forall q \in \{q \in \mathbb{Q}|q^2 \leqslant 3\}, q \leqslant r < q_2 < \sqrt{3}$ elevando al cuadrado:
$q^2 \leqslant r^2 < q_2^2 < 3$ y por lo tanto se contradice que r es cota superior pues $q_2 \in \{q \in \mathbb{Q}|q^2 \leqslant 3\}$. Por ende $\sqrt{3}$ es supremo.

P4. Use la denición de convergencia de una sucesión para demostrar las siguientes igualdades.

a) $\text{lím} \dfrac{2n-5}{2n-7} = 1$

Sea $\varepsilon > 0$.
$$\left|\frac{2n-5}{2n-7} - 1\right| = \left|\frac{2n-5}{2n-7} - \frac{2n-7}{2n-7}\right| = \frac{2}{2n-7} = \frac{1}{n-\frac{7}{2}} \leqslant \frac{1}{n-4}$$
Por arquimediana se tiene que $\forall r > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$ Por lo tanto tomando $r = \varepsilon$, se tiene que sea $n_0 = n_1 + 4$, se tiene que $\forall n \geqslant n_0 \iff \forall n - 4 \geqslant n_1$, por lo tanto se tiene que:
$\forall \varepsilon > 0$, $n_0 = n_1 + 4$, tal que $\left|\dfrac{2n-5}{2n-7} - 1\right| = \dfrac{1}{n-4} \leqslant \varepsilon$

b) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \dfrac{2}{3}$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} - \frac{2n^2+4n+\frac{4}{3}}{3n^2+6n+2}\right| = \frac{4n+\frac{1}{3}}{3n^2+6n+2} \leqslant \frac{4n+2n}{3n^2} = \frac{2}{n}$$

Por arquimediana se tiene que $\forall r > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$ Por lo tanto tomando $r = \dfrac{\varepsilon}{2}$, se tiene que sea $n_0 = n_1$, se tiene que $\forall n \geqslant n_0 \iff \forall n \geqslant n_1$, por lo tanto se tiene que:

$\forall \varepsilon > 0$, $n_0 = n_1$, tal que $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} - \dfrac{2}{3}\right| \leqslant \dfrac{2}{n} \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

c) $\lim \sqrt{4+\dfrac{1}{2n}} = 2$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left|\sqrt{4+\frac{1}{2n}} - 2\right| = \left|\sqrt{4+\frac{1}{2n}} - 2\right| \frac{\left|\sqrt{4+\frac{1}{2n}} + 2\right|}{\left|\sqrt{4+\frac{1}{2n}} + 2\right|} = \frac{\left|4+\frac{1}{2n} - 4\right|}{\left|\sqrt{4+\frac{1}{2n}} + 2\right|} = \frac{\frac{1}{n}}{3n^2+6n+2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Por arquimediana se tiene que $\forall r > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$ Por lo tanto tomando $r = \varepsilon$, se tiene que sea $n_0 = n_1$, se tiene que $\forall n \geqslant n_0 \iff \forall n \geqslant n_1$, por lo tanto se tiene que:

$\forall \varepsilon > 0$, $n_0 = n_1$, tal que $\left|\sqrt{4+\dfrac{1}{2n}} - 2\right| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$

P5. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.

Suponiendo que es racional:

$\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$ dos co-primos.

$\Rightarrow 5 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 5q^2 \Rightarrow p = 5l, l \in \mathbb{N}$, pues debe ser múltiplo de 5. Con esto reemplazando se tiene que:

$p^2 = 5q^2 \iff 25l^2 = 5q^2 \iff 5p^2 = q^2 \Rightarrow q = 5r, r \in \mathbb{N}$, pues q debe ser múltiplo de 5.

Lo que es una contradicción, pues ambos son divisibles por 5, por lo tanto no serian primos relativos.