MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 10: Límites y Sucesiones

Por definir

P1. Pruebe los siguientes límites por definición

a) $\dfrac{n+2019}{n^5} = 0$

b) $\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n-3} - 1} = 1$

c) $\cos(n!\pi) = 1$

d) $\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1} = 0$

P2. Calcule los siguientes límites:

a) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+2}$

b) $\left(1 + \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

d) $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

e) $\sqrt[n]{n+\sin(n!)}$

f) $\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

g) $\dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n}$

h) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)^n$

P3. Considere las sucesiones (X_n) e (Y_n) definidas por:

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad\qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n!n}$$

a) Pruebe que (X_n) e (Y_n) son sucesiones monótonas.

b) Usando lo anterior pruebe que ambas sucesiones convergen, que lo hacen al mismo límite, que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n < l < Y_n$ y que $2{,}5 < l < 2{,}7$.

P4. Considere la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$P_0 > 0, P_{n+1} = \frac{bP_n}{a+P_n}$$

donde a, b son constantes positivas.
(i) Demuestre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, los únicos valores posibles de su límite son 0 y $b-a$.
(ii) Pruebe que si $a > b$, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.
(iii) Suponga ahora que $a < b$ y $0 < P_0 < b-a$.
- Pruebe que $0 < P_n < b-a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.
- Determine $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Recuerdos y Consejos

(Propiedad Arquimediana). El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > 1$.

Definición (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) converge a L o bien que los términos s_n tienden a L (lo cual anotaremos $s_n \to L$) si se cumple que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0) s_n \in [L` - \varepsilon, L + \varepsilon]$.
Sucesiones nulas (s_n) se llamara sucesión nula si $s_n \to 0$.
Sucesiones acotada (s_n) se llamara sucesión acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| \leqslant M$.
Teorema El producto de una sucesión nula y acotada, es una sucesión nula.

Álgebra de límites
$\lim u_n + v_n = \lim u_n + \lim v_n$
$\lim u_n v_n = (\lim u_n)(\lim v_n)$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (Si $\lim v_n \neq 0$)
$\lim \lambda u_n = \lambda \lim u_n$

Límites conocidos
$s_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + ... + b_1 n + b_0}$ para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Si $p < q$, se tiene que $s_n \to 0$
Si $p = q$, se tiene que $s_n \to \dfrac{a_p}{b_q}$
Si $p > q$, se tiene que $\dfrac{1}{s_n} \to 0$, por lo tanto s_n es no acotada
$\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$
$\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$
Teorema del Sándwich
Sean u_n, v_n dos sucesiones tal que convergen a l y $\exists n_0$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$, entonces $a_n \to l$
Teorema Sea (s_n) una sucesión creciente y acotada superiormente (o decreciente y acotada inferiormente), entonces s_n converge.

Mas resultados
Si $q \in (-1, 1)$, $\lim q^n = 0$
Si $q = 1$, $\lim q^n = 1$
Si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$, no converge
Si $q_n \to q$, con $q \in (-1, 1)$, $\lim q_n^n = 0$
Si $q_n \to q$, con $q \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, entonces q_n^n no converge
Sea $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$
Si $a_n \to a > 0$, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$
$\sqrt[n]{n} \to 1$
Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo y $q \in (-1, 1)$, $n^k q^n \to 0$
Sea $h_n \to 0$ y $n h_n \to 0$, entonces $(1 + h_n)^n = 1$
Definición $e := \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$