MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 11

04 de Junio de 2019

P1. Se define por recurrencia la sucesión u_n mediante

$$u_1 = 1; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \forall n \geqslant 1$$

a) Probar por inducción que $u_n < 6$

b) u_n es estrictamente creciente

c) Decida si u_n converge y en tal caso calcule su límite

P2. Se definen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, llamadas coseno y seno hiperbólicos respectivamente:
i) Calculé $f(0)$ y $g(0)$. Calculé la paridad de f y g.
ii) Pruebe que $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$
iii) Pruebe que $f(x \pm y) = f(x)f(y) \pm g(x)g(y)$ y $g(x \pm y) = g(x)f(y) \pm f(x)g(y)$

P3. Considere la suceción de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geqslant 2$, con condición inicial $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$

a) Encuentre dos soluciones de $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, de la forma $F_n = f^n$

b) Considerando la condición inicial encuentre una solución general como combinación lineal de estas dos soluciones.

c) Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

d) Sea el problema $G_n = G_{n-1}G_{n-2}, \forall n \geqslant 3$, con $G_1 = G_2 = e$, encuentre G_n

P4. Demuestre que $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \dfrac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

Propuesto Semana 10

P5. Sea a_n una sucesión de números reales tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \text{ donde } a \in (0,1)$$

a) Pruebe que $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N_0, a_{n+1} < a_n$

b) Muestre que a_n converge y que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Recuerdos y Consejos

Definición La función exponencial esta definida mediante la expresión:

$$exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Desigualdad fundamental: $1 + x \leqslant e^x$

Si $x < 1$: $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

El logaritmo satisface las siguientes desigualdades

$1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$

La función a^x se define como $a^x = e^{x\ln(a)}$