MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Guía

Repaso Control

P1. Calcule $\min, \max, \sup$ e $\inf$ de los siguientes conjuntos:

a) $(-20, 19) \cup (19, 97)$

b) $\mathbb{Q} \cap [-\pi, \pi)$

c) $\left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \leqslant 0\right\}$

P2. Considere dos conjuntos $V, W \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos tales que:

$$\forall x \in V, \forall y \in W \quad x + y < 0$$

Demuestre que ambos conjuntos son acotados superiormente y que además

$$\sup(V) + \sup(W) \leqslant 0$$

P3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente, demuestre que el conjunto $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ tiene supremo e infimo, y que

$$f(\sup(A)) \leqslant \inf(f(A)) \leqslant \sup(f(A)) \leqslant f(\inf(A))$$

P4. Se sabe que $r \in \mathbb{R}$ satisface $r^3 + 4r = 4$. Demuestre que r es irracional.

P5. Pruebe los siguientes límites por definición

a) $\frac{n-28}{n^8+18} = 0$

b) $\frac{4n^4+2}{5n^5+6n+1} = 0$

c) $\frac{n\sqrt{n}-n+3}{n^3+n-7} = 0$

d) $\frac{n(-1)^n}{1-(n+3)^4} = 0$

e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1$

f) $\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}}$

Semana 10

P6. Calculé los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k}\right)^2$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+10^{n+1}}{5^n+10^n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n^2+n+1}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

P7. Considere la función $f(x) = x(2-x)$ y la sucesión (a_n) definida por la recurrencia:

$$a_0 \in (0,1), a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Grafique f encontrando los intervalos de crecimiento y su máximo.

b) Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$

c) Justifique que la sucesión es convergente, que su límite es no nulo y calculé ese límite.

P8. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Deduzca que $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^n = e$

P9. Considere la sucesión (u_n) definida por: $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$

i) Calculé $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y deduzca si (u_n) es creciente o decreciente.

ii) Demuestre que (u_n) es convergente.

P10. Para $0 \leqslant a \leqslant b$, considere las sucesiones dadas por las siguientes recurrencias:

$$x_1 = a \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

$$y_1 = b \qquad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$$

a) Pruebe que $0 \leqslant x_n \leqslant y_n, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Pruebe que x_n e y_n son sucesiones convergentes.

c) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$

d) Llamanda L al límite (de x_n y de y_n), demuestre que $\sqrt{ab} \leqslant L \leqslant \frac{a+b}{2}$

Semana 11

P11. Calculé los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\pi^n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln(n))$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[n^2\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)-1\right]$

Indicación: $1+x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$

P12. a) Demuestre que para cada $x \in \mathbb{R}_+$ se tiene que:

$$exp(x) \geqslant 1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}$$

b) Sean a, b reales considere el polinomio de grado 2 $p(x) = x^2 + bx + a$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{exp(x)}{p(x)} = \infty$$

c) Demuestre que si $q(x) = ax^3$ con $a > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{exp(x)}{q(x)} = \infty$$

P13. Considere la sucesión de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geqslant 2$, con condición inicial $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$

a) Encuentre dos soluciones de $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, de la forma $F_n = f^n$

b) Considerando la condición inicial encuentre una solución general como combinación lineal de estas dos soluciones.

c) Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

d) Sea el problema $G_n = G_{n-1}G_{n-2}, \forall n \geqslant 3$, con $G_1 = G_2 = e$, encuentre G_n

P14. Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.