Auxiliar 11

P1 a) CB: $u_1 = 1 < 6$ ✓

Hipotesis $\exists k \in \mathbb{N}$ Tq $u_k < 6$

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{3} + 4 < \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}} + 4 = 6$$

Por recursión

Hipotesis

$\Rightarrow$ Se cumple la Inducción $\Rightarrow \forall n \quad u_n < 6$

b) Estudiemos $u_{n+1} - u_n$

Usando que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 4$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{2u_n}{3}$$

Como $u_n < 6 \Rightarrow -u_n > -6$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}u_n > -4$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{2}{3}u_n > 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_n$ est creciente

c) Como u_n es creciente y acotada por arriba, por teorema u_n converge.

Como u_n converge, llamemos l al límite

$\Rightarrow u_n \to l \quad , \quad u_{n+1} \to l$

$\Rightarrow l = \dfrac{l}{3} + 4 \quad \left(\text{usando } u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 4 \right)$

$\Rightarrow \dfrac{2l}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{l = 6}$

$\boxed{P2}$ $f(0) = \dfrac{e^{0} + e^{-0}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$g(0) = \dfrac{e^{0} - e^{-0}}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

$f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = f(x)$ $\boxed{\text{Par}}$

$g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\left[\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right] = -g(x)$ $\boxed{\text{Impar}}$

b) $f(x)^2 - g(x)^2 = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$

$= \left(\dfrac{2e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{2e^{x}}{2}\right) = e^{0} = 1$

c) $f(x)f(y) = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)$

$= \dfrac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{4}$

$$g(x)\,g(y) = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{4}$$

$$f(x)f(y) + g(x)\,g(y) = \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= f(x+y)$$

<u>Propuesto</u>: $f(x-y) = f(x)\,f(y) - g(x)\,g(y)$

$$f(x)\,g(y) = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-(x-y)} - e^{-(x+y)}}{4}$$

$$f(y)\,g(x) = \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-(x-y)}-e^{-(x+y)}}{4}$$

$$f(x)\,g(y)+f(y)\,g(x) = \frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= g(x+y)$$

Propuesto: $\boxed{g(x-y) = f(y)\,g(x) - f(x)\,g(y)}$

P3 Considerando $F_N = f^N$

a) Se tiene que

$$f^{N+1} = f^N + f^{N-1} \quad \text{o equivalentemente}$$

$$f^2 - f - 1 = 0 \iff f = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Para facilitar los calculos $\boxed{f_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ y

$$\boxed{f_v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

b) La combinación lineal sería con $a, b \in \mathbb{R}$

$$F_N = a f_4^N + b f_v^N$$

Usando los valores de $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= a f_4 + b f_v \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow a = -b \\ &\Rightarrow 1 = b(f_v - f_4) = b(-\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad y \quad \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{f_\varphi^N - f_\nu^N}{\sqrt{5}}$$

c) Notemos que $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow -f_\varphi < f_\nu < f_\varphi$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{f_\nu}{f_\varphi} < 1 \quad (\star)$$

$$\frac{F_{N+1}}{F_N} = \frac{f_\varphi^{N+1} - f_\nu^{N+1}}{f_\varphi^N - f_\nu^N} = \frac{f_\varphi - f_\nu \left(\frac{f_\nu}{f_\varphi}\right)^N}{1 - \left(\frac{f_\nu}{f_\varphi}\right)^N}$$

Por $(\star)$ $\left(\frac{f_\nu}{f_\varphi}\right)^N \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{F_{N+1}}{F_N} = \frac{f_\varphi \cdot 1 - 0}{1 - 0} = f_\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

d) La idea es llevar este problema al anterior, notando que la función que transforma producto en suma es ln()

$$\Rightarrow G_N = G_{N-1} \cdot G_{N-2} \quad , G_1 = e = G_2$$

Usando $\tilde{F}_N = \ln(G_N)$

$$\tilde{F}_N = \tilde{F}_{N-1} + \tilde{F}_{N-2} \quad , \quad \tilde{F}_1 = 1 = \tilde{F}_2$$

Que es el problema anterior.

$$\Rightarrow \ln(G_N) = \tilde{F}_N = \frac{f_\varphi - f_v}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_N = e^{\frac{f_\varphi - f_v}{\sqrt{5}}}}$$

La P4 está en la nube resolución del aux