Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
03 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 11

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcule
$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Solución
Notemos que

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \ln(k+1)-\ln(k).\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la suma obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)$$

que es una suma telescópica cuyo valor es $\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$. Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Por otra parte, por propiedades del logaritmo tenemos que $\frac{1}{n}\ln(n+1) = \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right)$ y como sabemos que $\sqrt[n]{n+1}\to 1$, por propiedad demostrada en el apunte $\ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right)\to \ln(1)=0.$ ■

P2. Demuestre que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

Solución
Comencemos viendo el crecimiento de (x_n). Para ello, analicemos el signo de la diferencia de términos sucesivos, es decir

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

en donde para la última igualdad se han utilizado las propiedades del logaritmo.

De la Desigualdad Fundamental para el logaritmo sabemos que

$$\ln(x)\le x-1, \quad \forall x>0.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \le \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{1+n-n-1}{n+1} = 0$$

es decir
$$x_{n+1}-x_n \le 0.$$

Por lo tanto (x_n) es decreciente. Si demostramos que (x_n) es acotada inferiormente, tendremos que es convergente. En efecto, veamos que $0 < x_n, \forall n \geq 2$.

En primer lugar notemos que de la Desigualdad Fundamental del logaritmo obtenemos que

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Si sumamos estas desigualdades tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

pero del problema anterior sabemos que la suma de la izquierda vale $\ln(n)$, y así

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Observemos que la suma restante la podemos reescribir como

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} &\Longrightarrow \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = x_n \\ &\Longrightarrow 0 \leq x_n. \end{aligned}$$

Se sigue que como (x_n) es decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente.

Nota: Este límite se conoce como la constante de Euler-Mascheroni y se suele anotar como γ.

Analicemos ahora la sucesión (y_n). De su definición es directo que $y_n \leq x_n$, en particular, $y_n \leq \gamma$. Si logramos demostrar que es creciente, tendremos que es convergente. Con este fin, estudiemos la diferencia de términos sucesivos

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(x_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Notando que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Nuevamente la Desigualdad Fundamental del logaritmo nos dice que $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n}$ y entonces

$$y_{n+1} - y_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

En conclusion, (y_n) es creciente y como teníamos que es acotada superiormente, converge.

Para ver que los límites son iguales basta notar que

$$y_n = x_n - \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim y_n = \lim x_n - \lim \frac{1}{n} = \lim x_n . \blacksquare$$

P3. Para $x > 0$, calcule $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.
Solución
En primer lugar notemos que $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$, y por lo tanto $n(\sqrt[n]{x}-1) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right)$. Buscaremos calcular el límite usando el límite conocido

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$$

donde $a_n \to 0$. En efecto, notemos que $\frac{1}{n}\ln(x) \to 0$ y además que

$$\begin{aligned} n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right) &= n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{\frac{1}{n}\ln(x)}{\frac{1}{n}\ln(x)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1}{\frac{1}{n}\ln(x)} \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

En conclusión, por Álgebra de Límites tenemos que $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x). \blacksquare$

P4. Calcule $\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a 0.
Solución
Notemos que

$$(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1}\right).$$

Observemos que se puede reescribir el argumento de la exponencial como

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1} &= \frac{\ln(1 + a_n)}{2a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{1}{\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$ y $\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n} \to 1$ cuando $a_n \to 0$, por Álgebra de Límites concluimos que $\frac{\ln(1+a_n)}{\exp(2a_n)-1} \to \frac{1}{2}$, y por propiedad demostrada en el apunte

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \sqrt{e}. \blacksquare$$

P5. Las tasas de interés de tres instituciones son 6% anual, 0,5% mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de α: $0, 1$ y $\ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interes es $t\%$, entonces el capital aumenta en ese periodo en un factor $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
Solución
Si llamamos C_0 al capital inicial, entonces para cada institución tenemos que el capital luego de cinco años será

- 6% anual $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5$
- 0,5% mensual $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{60}$
- $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{100(e^{0,3\alpha}-1)}{100}\right) = C_0 e^{0,3\alpha}$.

Recordando que para la exponencial tenemos $x+1 \leq e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ obtenemos, para las primeras dos instituciones

- $C_0 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \leq C_0 \left(e^{6/100}\right)^5 = C_0 e^{0,3}$
- $C_0 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{60} \leq C_0 \left(e^{0,5/100}\right)^6 0 = C_0 e^{0,3}$

Luego, si $\alpha \geq 1$ tenemos que la tercera institución proporciona una mayor rentabilidad. Si $\alpha = 0$, la tercera institución no presenta utilidad y luego será la última en el ranking.

Para ver como se comparan las otras dos instituciones notemos en primer lugar que su rentabilidad no depende de α, por lo que podemos evaluar numéricamente obteniendo

- $\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \approx 1,34$
- $\left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{60} \approx 1,35$

Por ende, la segunda institución siempre da mayor rentabilidad que la primera.

En resumen, dependiendo de α tenemos lo siguiente

	Valor de α		
Lugar	0	1	$\ln 3$
1^{er}	2	3	3
2^{do}	1	2	2
3^{er}	3	1	1

P6. Para la función $f(x) = \ln(1+e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Solución

Rápidamente notamos que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Para ver los ceros de f debemos resolver la ecuación $\ln(1+e^x) = 0$ en el dominio de f. No es dificil verificar que esta ecuación no posee solución, pues $f(x) = 0 \iff 1 + e^x = 0$ y sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq 0$. Luego f no tiene ceros, es decir, $Z(f) = \phi$.

Trivialmente, f es creciente por ser composición de funciones crecientes. Además f es siempre positiva, pues $f(x) < 0 \iff 1 + e^x < 1 \implies e^x < 0$ lo que no es posible.

Supongamos que y es tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x obtenemos

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln(1+e^x) \\ &\iff e^y = 1 + e^x \\ &\iff e^y - 1 = e^x \\ &\iff \ln(e^y - 1) = x. \end{aligned}$$

Notemos que para que esto tenga sentido, debe ser que $e^y - 1 > 0$, es decir, $e^y > 1 \implies y > 0$. Luego, la ecuación tiene solución sólo si $y > 0$. Con todo lo anterior, y observando que

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & \tilde{f}(x) = f(x) \end{array}$$

es biyectiva, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1). \end{array}$$

Repitiendo el proceso para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, observamos que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Para encontrar los ceros de f, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $x \in \operatorname{Dom} f$. Así

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \\ &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff e^{2x} = 1 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $Z(f) = \{0\}$.

Es fácil ver que f es creciente, por ser álgebra de funciones crecientes.

Notemos que f es impar, y entonces sólo nos basta analizar el intervalo $(0, +\infty)$. Para ver dónde es positiva, debemos resolver la inecuación $f(x) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Luego, f es positiva en $(0, +\infty)$ y por imparidad es negativa en $(-\infty, 0)$.

Sea ahora un y tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x tenemos

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff 2y = e^x - e^{-x} \\ &\iff 2ye^x = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Llamemos $u = e^x$, entonces tenemos la ecuación $u^2 - 2uy - 1 = 0$ que es cuadrática en u y resolviendo

$$u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

y recordando que $x = \ln u$ obtenemos

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

donde descartamos la solución negativa pues $\ln x$ está definida solamente para números positivos.

Observemos que f es biyectiva tal como está definida y luego tiene sentido

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Observación: La función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ *se llama Seno Hiperbólico y se anota* $\operatorname{senh} x$.