MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 12

07 de Junio de 2019

P1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{x\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{x\pi}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{\cos\left(\frac{(x-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{\cos\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\frac{\frac{(x-1)\pi}{2}}{\sin\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^{a(x-\pi)}-e^{b(x-\pi)}}{x^2-\pi^2}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{a(x-\pi)}-e^{b(x-\pi)}}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{e^{a(x-\pi)}-1}{x^2-\pi^2}-\lim_{x\to\pi}\frac{e^{b(x-\pi)}-1}{x^2-\pi^2}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{e^{a(x-\pi)}-1}{a(x-\pi)}\frac{a}{x+\pi}-\lim_{x\to\pi}\frac{e^{b(x-\pi)}-1}{b(x-\pi)}\frac{b}{x+\pi}=\frac{a}{2\pi}+\frac{b}{2\pi}=\frac{a+b}{2\pi}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}xe^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to 0}xe^{-1}\leqslant\lim_{x\to 0}xe^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\leqslant\lim_{x\to 0}xe^{1}$$

Como ambos se van a 0, entonces el límite es 0

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

Llamemos al límite L, entonces calcularemos el $\ln(L)$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{x^2+1})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}\frac{\ln(1+\frac{x}{x^2+1})}{\frac{x}{x^2+1}}=(1)(1)=1$$

e) $\lim_{x\to 1} \left\lfloor \frac{2}{x^2+1} \right\rfloor$

Pendiente

f) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Tomando las sucesiones $a_n \frac{1}{2n\pi}$ y $b_n \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$$

Por lo tanto no converge, pues el límite es único

P2. Calcule los siguientes por definición $\varepsilon - \delta$:

a) $\lim_{x\to 8} \sqrt{x+1}$

Sea $\varepsilon > 0$, $|x-8| \leqslant \delta$

$$|\sqrt{x+1}-3| \leqslant \frac{|((\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)|)}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{|x+1-9|}{\sqrt{x+1}+3} \leqslant |x-8| \leqslant \delta$$

Por lo tanto tomando $\delta \leqslant \varepsilon$, se tiene.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x+1}$

Sea $\varepsilon > 0$, $|x-2| \leqslant \delta$

$$\left|\frac{x(x-2)}{x+1} - 0\right| \leqslant \left|\frac{x(x-2)}{x+1}\right|$$

Suponiendo que $\delta \leqslant 1 \Rightarrow |x-2| \leqslant 1 \Rightarrow x \in [1,3]$

$$\left|\frac{x(x-2)}{x+1}\right| \leqslant \left|\frac{4(x-2)}{3}\right| \leqslant 32|x-2| \leqslant 2\delta$$

Por lo tanto tomando $\delta \leqslant \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$, se tiene.

c) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $\varepsilon > 0$, $|x| \leqslant \delta$

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x| \leqslant \delta$$

Por lo tanto tomando $\delta \leqslant \varepsilon$, se tiene.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

Sea $\varepsilon > 0$, $|x-1| \leqslant \delta$

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x-1 \iff \frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x)}{x-1} \leqslant 1 \iff \frac{1}{x} - 1 \leqslant \frac{\ln(x)}{x-1} - 1 \leqslant 0$$

$\left|\dfrac{x-1}{x}\right| \geqslant \left|\dfrac{\ln(x)}{x-1} - 1\right| \geqslant 0$ Por lo tanto $\left|\dfrac{\ln(x)}{x-1} - 1\right| \leqslant \left|\dfrac{x-1}{x}\right|$

Suponiendo que $\delta \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

$$\left|\frac{\ln(x)}{x-1} - 1\right| \leqslant \left|\frac{x-1}{x}\right| \leqslant \frac{|x-1|}{\frac{1}{2}} \leqslant 2\delta$$

Por lo tanto tomando $\delta \leqslant \text{mín}\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\}$, se tiene.

P3. *a)* Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Determine el valor de a tal que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{x-1} = (1)\frac{1}{-1} = -1$$

b) La función:

$$g(x) = \begin{cases} \pi\dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\sin((1+x)\pi)}{x} & \text{si } x < 0 \\ -\pi & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

¿Es continua?

Claramente se tienen que para $x \neq 0$

Para que sea continua tiene uqe cumplirse que en $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$

Por la parte anterior $\lim\limits_{x\to 0} \pi\dfrac{e^x - 1}{x^2 - 1} = \pi \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - 1} = -\pi$

$$\lim_{x\to 0} \pi\frac{\sin(x+1)\pi}{x} = \pi \lim_{x\to 0} \frac{\sin((x+1)\pi)}{x\pi} = -\pi \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} = -\pi$$

Por lo tanto es continua.