MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 13

14 de Junio de 2019

P1. Calcule los siguientes por definición $\varepsilon - \delta$:

a) $\lim\limits_{x \to 4} x\sqrt{x+3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+4x+1}{x+1}$

P2. *a*) Considere la función:

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi \dfrac{\tan(4x)}{x^2 - \pi x} & \text{si } x < \pi \\ \dfrac{8\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{x - \pi} & \text{si } x > \pi \\ 8 & \text{si } x = \pi \end{cases}.$$

¿Es continua?

P3. Estudiar las asíntotas para las siguientes funciones:

a) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

b) $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

P5. Sean f, g dos funciones que satisfacen la relación:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_2) \geqslant f(x_|) + g(x_1)(x_1 - x_2)$$

a) Muestre que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, g(x_2)(x_1 - x_2) \geqslant f(x_2) - f(x_1) \geqslant g(x_1)(x_1 - x_2)$$

b) Probar que si g es acotada, entonces $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

c) Probar que si:

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$

P6. Usando la denición de límite al infinito. Demuestre que $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Ind: Para $\varepsilon > 0$, escoja $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Recuerde que arctan es creciente y acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$.

Propuestos

P1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(e^{\frac{2}{x}}-1)}{x}$ **R=2**

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+3x+1\right)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$**R=4**

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x}e^{2019x}$ **R=0**

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ **R=0**

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\dfrac{1}{x^2}}{2x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}$ **R=0**

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(\tan\left(\frac{1}{2x}\right))}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ **R=**$\frac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right))$ **R=**$2a$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)}$ **R=0**

P2. Estudie las asíntotas de $f(x) = (2-e^{-x})(2x+5)$

P3. Demuestre que para todo polinomio $p(x)$ se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)e^x = 0$.

Recuerdos y Consejos

Límites conocidos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Límite de la composición:
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L$

Límites laterales
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Definición límite $\varepsilon - \delta$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in Dom(f))|x-x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$

Límite por sucesiones
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff (\forall x_n)$ tal que $x_n \to x_0$ se cumple que $f(x_n) \to f(x_0)$

Continuidad de una función
Si $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \forall x_0 \in \mathbb{R}$, f se dice continua.

Asíntotas
Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$, se dice que f tiene una asíntota vertical, $x = x_0$.
Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$, se dice que f tiene una asíntota horizontal hacia el ∞, $y = L$ (similar con $-\infty$).
Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = n$, se dice que f tiene una asíntota oblicua hacia el ∞, $y = mx + n$ (similar con $-\infty$).