Pauta Auxiliar 13

P1) a) $\forall \varepsilon > 0 \,, \exists \delta > 0$ Tq $|x-4| \le \delta \Rightarrow |x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{7}| \le \varepsilon$

$$|x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{7}| = \frac{|x^2(x+3) - 16\cdot 7|}{|x\sqrt{x+3} + 4\sqrt{7}|} = \frac{|x^3+3x^2-16\cdot 7|}{|x\sqrt{x+3} + 4\sqrt{7}|}$$

Suponiendo que $\delta \le 1 \Rightarrow |x-4| \le 1 \Rightarrow x \in [3,5]$

Con esto es claro que $|x\sqrt{x+3} + 4\sqrt{7}| \ge 1$

$$\Rightarrow |x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{3}| \le |x^3+3x^2-16\cdot 7| = |x-4|\,|(x^2+7x+4)|$$

$$\le |x-4|\,(25+35+4) \le 64\,\delta$$

Por lo tanto tomando $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{64}, 1\right\}$

$$\Rightarrow |x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{7}| \le \varepsilon$$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+4x+1}{x+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$

$$\left| \frac{x^2+4x+1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \right| = |x| \left| \frac{x+3}{x+1} \right|$$

Suponiendo que $\delta \leq 1/2 \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1+x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2+4x+1}{x+1} - 1 \right| \leq |x| \frac{\left(\frac{7}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \leq 7\delta$$

Tomando $\delta = \text{Min} \left\{ \frac{\varepsilon}{7}, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \left| \frac{x^2+4x+1}{x+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$

P2 a) $\lim_{x\to\pi^-} g(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{2\pi \tan(4x)}{x^2-\pi x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{2\pi}{\cos(4x)\,x} \cdot \frac{\sin(4x)}{x-\pi}$

Notando que $\sin(4x) = \sin(4x-4\pi) = \sin(4(x-\pi))$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^-} g(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{2\pi}{\underbrace{\cos(4x)}_{1}\underbrace{x}_{\pi}} \cdot 4 \cdot \underbrace{\frac{\sin(4(x-\pi))}{4(x-\pi)}}_{1}$$

$$= \frac{2\pi}{1\cdot\pi} \cdot 4 \cdot 1 = 8$$

$$\lim_{x\to\pi^+} g(x) = \lim_{x\to\pi^+} 8\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} 8\frac{\left[\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0}\cos(x) - \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1}\sin(x)\right]}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} 8\overbrace{\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}}^{1} = 8$$

$\boxed{\text{Obs: Se usó que } \sin(x-\pi) = -\sin(x)}$

Como ambos límites coinciden con $g(\pi)$

$\Longrightarrow$ g es continua

P3 a) Estudiar las asintotas

$\frac{x^3}{(x+1)^2}$

<u>Asintotas Vertical:</u> $x=-1$, pues $\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$ o $-\infty$

<u>No hay verticales, pues</u> $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty$

Veamos Asintotas oblicuas

$\frac{x^3}{x(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}x^2}{\cancel{x}(x+1)^2} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-1}{x^2+2x+1} = -2$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}-2x^2-x}{(x+1)^2} = -2$

$\Rightarrow y = x-2$ es Asintota

6) $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

Asintotas Verticales: Candidato $x=0$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \text{No es Asintota}$$

Asintotas Horizontales: $\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty$

No hay Asintotas (Similar para $x \to -\infty$)

Asintotas Oblicuas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1\right) \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{\sin(u)}{u} - 1\right) \frac{1}{u}$$

Por desigualdad del Apunte $\sin(|u|) \leq |u|$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(|u|)}{|u|} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin(|u|)}{|u|} - 1\right) \frac{1}{u} \leq 0$$

Por otro lado $|x| \leq \tan(|x|) \Rightarrow \cos(|x|) \leq \frac{\sin(|x|)}{|x|}$

$$\Rightarrow \frac{\cos(|x|)-1}{|x|} \leq \left(\frac{\sin(|x|)}{|x|}-1\right)\frac{1}{|x|}$$

$$\Rightarrow \lim_{u\to 0^+} \cancel{\frac{\cos(u)-1}{u}}^{\,0} \leq \left(\frac{\sin(u)}{u}-1\right)\frac{1}{u} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\sin(u)}{u}-1\right)u^{-1}=0$$

Por lo tanto $y = x$ es Asintoto vertical

Similarmente $\lim_{x\to -\infty} x^2\sin(\frac{1}{x})-x=0$

Hagan el propuesto de Asintotas

P4 Subida en Material docente como respuestas de Semana

P5 PDQ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)$ t_q $\forall x \geq m$ $\left|\operatorname{Artan}(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon$

Siguiendo la indicación sea $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$

$$\Rightarrow \quad x \geq \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \underset{\substack{\operatorname{Artan}(\cdot) \\ \text{creciente}}}{\Rightarrow} \operatorname{Artan}(x) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Artan}(x) - \frac{\pi}{2} \geq -\varepsilon$$

Para la otra cota recordar que $\operatorname{Artan}(x) \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

$$\Rightarrow \operatorname{Artan} - \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\operatorname{Artan}(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon$$