MA1101-4 Introdución al Álgebra.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 20 de mayo de 2019.

Auxiliar recupera

P1.- Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:
$\forall x,y\in(0,\infty), f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, y $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

a) Pruebe que $f(1)=0$ y que $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y), \forall x,y\in(0,\infty)$.

Prueba

Para ver que $f(1)=0$ primero tenemos que $1=1\cdot 1$, luego usando la propiedad del producto definida en el enunciado se tiene que $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$.
Así $f(1)=2f(1)$ y restando $f(1)$ a ambos lados de la igualdad se tiene que $0=f(1)$.
Para ver que $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x}{y}\right) &= f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) && \text{Usando prop. de la multiplicación}\\
&= f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) && \text{usando prop. del inverso}\\
&= f(x)-f(y)
\end{aligned}$$

b) Demuestre, usando inducción, que $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(n!)$, $\forall n\geq 1$.

Demostración

- Caso base: Para $n=1$ se tiene que $\sum_{k=1}^{1} f(k)=f(1)=f(1!)$.
- Paso inductivo. Supongamos que $\exists n\geq 1$ tal que $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(n!)$.

PDQ: $\sum_{k=1}^{n+1} f(k)=f((n+1)!)$.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} f(k)+f(n+1) && \text{Usando Hipótesis inductiva}\\
&= f(n!)+f(n+1) && \text{Usando propiedad de la multiplicación}\\
&= f(n!\cdot(n+1))\\
&= f((n+1)!)
\end{aligned}$$

c) Demuestre, sin usar inducción (i.e. con sumas conocidas), que:

$$\sum_{k=1}^{n} kf\left(1+\frac{1}{k}\right)=(n+1)f(n+1)-f((n+1)!)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kf\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k+1}{k}\right) && \text{Usando prop. del producto}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(f(k+1)-f(k)) && \text{Distribuyendo}\\
&= \sum_{k=1}^{n} kf(k+1)-kf(k) && \text{Sumando } f(k+1)-f(k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)f(k+1)-kf(k)-f(k+1) && \text{Distribuyendo las sumas}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)f(k+1)-kf(k)-\sum_{k=1}^{n} f(k+1) && \text{1ra suma usamos telescopica}\\
&= (n+1)f(n+1)-1\cdot f(1)-\sum_{k=1}^{n} f(k+1) && \text{cambio variable j=k+1}\\
&= (n+1)f(n+1)-1\cdot f(1)-\sum_{j=2}^{n+1} f(j) && \text{Suma conocida de parte b)}\\
&= (n+1)f(n+1)-1\cdot f(1)-f((n+1)!) && \text{Usando que } f(1)=0\\
&= (n+1)f(n+1)-f((n+1)!)
\end{aligned}$$

En donde en la penúltima igualdad se usó que como f(1)=0 entonces $\sum_{j=1}^{n} f(j) = \sum_{j=2}^{n} f(j)$.

P2.- Sea $E \neq \phi$ y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación Ω por:

$$X\Omega Y \iff A\backslash X = A\backslash Y$$

i) Demuestre que Ω es una relación de equivalencia.

Demostración

- Refleja: Sea $X \in \mathcal{P}(E)$, entonces es directo que $A\backslash X = A\backslash X$ po lo tanto $X\Omega X$.
- Transitiva: Sea $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tal que $X\Omega Y$ e $Y\Omega Z$. PDQ: $X\Omega Z$.
  Como $X\Omega Y$ entonces $A\backslash X = A\backslash Y$ (1)
  Como $Y\Omega Z$ entonces $A\backslash Y = A\backslash Z$ (2)
  Juntando (1) y (2) se tiene que $A\backslash X = A\backslash Y = A\backslash Z$, luego por transitividad de la igualdad de conjuntos se tiene que $A\backslash X = A\backslash Z$ y por lo tanto $X\Omega Z$.
- Simetría: Sea $X, Y \in \mathbb{P}(E)$ tal que $X\Omega Y$. Entonces $A\backslash X = A\backslash Y$.
  Notamos que la definición de $Y\Omega X$ es la misma que la de $X\Omega Y$ por lo tanto si $X\Omega Y$, entonces se tiene que $Y\Omega X$ (en este caso el argumento es corto ya que la definición de ambas relaciones, $X\Omega Y$ e $Y\Omega X$, es exactamente la misma).

ii) Demuestre que

$$\mathcal{P}(E)\backslash\Omega = \{[X]_\Omega | X \in \mathcal{P}(A)\}$$

Indicación: Puede serle útil demostrar que $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$.

Demostración

Para fijar ideas, por definición el conjunto cociente de esta relación se define como $\mathcal{P}(E)/\Omega = \{[X]_\Omega | X \in \mathcal{P}(E)\}$, luego lo que debemos probar es que el conjunto cociente se reduce a las clases de equivalencia de los subconjuntos de A, y no de E (recordar que $A \subseteq E$). Procediendo por doble inclusión.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $[X]_\Omega \in \{[X]_\Omega | X \in \mathcal{P}(A)\}$. Luego, $X \subseteq A$ y $A \subseteq E$, por lo tanto $X \subseteq E$ y es una clase de equivalencia de Ω, entonces $[X]_\Omega \in \mathcal{P}(E)/\Omega$. (también es válido si se argumenta que por definición ya que $\{[X]_\Omega | X \in \mathcal{P}(A)\}$ es un subconjunto de clases de equivalencia).

$\boxed{\subseteq}$ Para probar que cualquier clase de equivalencia esta contenida en $\{[X]_\Omega | X \in \mathcal{P}(A)\}$, una forma es probar que cualquier elemento $X \subseteq E$ esta relacionado con algún conjunto Y contenido en A, ya que si estan relacionados, sus clases de equivalencia son iguales y así todas las clases de equivalencia estan dadas por las clases de los subconjuntos de A.

Para probar que todo conjunto $X \subseteq E$ esta relacionado con algún subconjunto de A, siguiendo la indicación consideremos el conjunto $X \cap A$ que es subconjunto de A. Además este conjunto cumple que

$$\begin{aligned} A \backslash (A \cap X) &= A \cap (X \cap A)^c \\ &= A \cap (X^c \cup A^c) \\ &= (A \cap X^c) \cup (A \cap A^c) \\ &= (A \cap X^c) \cup \phi \\ &= A \cap X^c \\ &= A \backslash X \end{aligned}$$

Es decir, $A \backslash (A \cap X) = A \backslash X)$. Es decir, cualquier subconjunto X de E está relacionado con un un subconjunto de A y así $[X]_\Omega = [X \cap A]_\Omega$ y por lo tanto todas las clases de equivalencia se puede describir por las clases de los subconjuntos de A.