Aux 7

P1 Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

1- ¿Es f biyectiva?

¡no! notemos que

$$3x^2y - y^3 = 0 \to 3x^2 = y^2 \text{ si } y \neq 0$$

así $y = \pm\sqrt{3}|x|$

por otro lado

$$x^3 - 3xy^2 = x^3 - 3x \cdot 3x^2 = -8x^3$$

así $f(x, \pm\sqrt{3}|x|) = (0, -8x^3)$

así $f(1, \pm\sqrt{3}) = (0, -8)$

$\therefore f(1, +\sqrt{3}) = f(1, -\sqrt{3})$

entonces f no es inyectiva

$\therefore$ no es biyectiva //

2-) Muestre que la función es localmente inversible en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Calcule el valor de Df^{-1} en esos puntos.

calculemos Df, basta calcular

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (3x^2 - 3y^2, 6xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-6xy, 3x^2 - 3y^2)$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$Df(x,y) = 3\begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$|Df(x,y)| = 3\begin{vmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2]$$

$$= 3[x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2]$$

$$= 3[x^4 + 2x^2y^2 + y^4]$$

$$= 3(x^2+y^2)^2$$

asi $|Df(x,y)| \neq 0 \iff (x,y) \neq 0$

$\therefore$ f es localmente invertible $\forall (x,y) \neq 0$

y por el teorema de la funcion inversa

$Df^{-1}(y_0) = [Df(x,y)]^{-1}$ donde

$Y_0 = f(x,y)$.

Recordamos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

así

$$[DF(x,y)]^{-1} = \frac{1}{(3x^2-3y^2)^2+(6xy)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3x^2-3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9x^4-18x^2y^2+9y^4+36x^2y^2}\begin{pmatrix} 3x^2-3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9x^4+18x^2y^2+9y^4} \cdot 3 \begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9[x^4+2x^2y^2+y^4]} \cdot 3 \begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

P2| Sea $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función continua

1-| Pruebe que si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q F^{n_0} (donde $F^n = F \circ F \circ \ldots \circ F$ n veces) es contractante entonces F tiene un punto fijo y es único.

Sol| como F^{n_0} es contractante

Tenemos $\exists! \, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q $F^{n_0}(\bar{x}) = \bar{x}$

así tenemos $F(F^{n_0}(\bar{x})) = F(\bar{x})$

y por tanto $F^{n_0+1}(\bar{x}) = F(\bar{x})$

$F^{n_0+1}(\bar{x}) = F^{n_0}(F(\bar{x})) = F(\bar{x})$

así $y = F(\bar{x})$ tenemos

$F^{n_0}(y) = y$

entonces por unicidad

$$y = \bar{x} \to F(\bar{x}) = \bar{x}$$

$\therefore \bar{x}$ es pto fijo.

sea $F(y)=y$ punto fijo

entonces $F^{n_0}(y)=F^{n_0-1}(F(y))=F^{n_0-1}(y)$

así seguimos inductivamente

y tenemos $F^{n_0}(y)=y$, de esto

por unicidad $y=\bar{x} \therefore \bar{x}$ es el

único punto fijo de F.

2-) Sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ t.q $\forall n\in\mathbb{N}$

$S_n \geq 0$ donde

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$$

suponga que F cumple lo siguiente

$$\|F^n(x)-F^n(y)\| \leq S_n \|x-y\| \quad \forall x,y$$

Pruebe que existe un único pto fijo de F

Sol

Como $S_n \geq 0$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n < +\infty$

asi como la serie converge

$S_n \to 0$ esdecir

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \; |S_n| \leq \varepsilon$

sea $\varepsilon = 1/2$ entonces $\exists n_0$ t.q

$|S_{n_0}| \leq 1/2 \Rightarrow S_{n_0} \leq 1/2$

asi $\|F^{n_0}(x) - F^{n_0}(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$

$\therefore F^{n_0}$ es contractante

asi por 1-1 concluimos lo pedido//

P3 Sea $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación que verifica las siguientes propiedades $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

(1). $\alpha \|x-y\|^2 \leq \langle F(x)-F(y), x-y \rangle$

(2). $\|F(x)-F(y)\| \leq \beta \|x-y\|$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ son constantes dadas. Demostraremos que bajo estas condiciones F es biyectiva y continua.

1- Pruebe que F es inyectiva y continua

Sol

- continuidad: Por (2) F es β-Lipschitz $\therefore$ F es continua

- Inyectividad: sea $F(x)=F(y)$

así por (1)

$\langle \overset{0}{F(x)-F(y)}, x-y \rangle \geq \alpha \|x-y\|^2$

$\Rightarrow \alpha \|x-y\|^2 \leq \langle 0, x-y \rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha \|x-y\|^2 = 0$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 = 0, \quad \alpha > 0$

$\Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$, $\|\cdot\|$ norma

$\therefore$ F es inyectiva//

2-] Para probar sobreyectividad de F, siga los siguiente pasos. Para $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ fijos, definamos la aplicación:

$$\phi_{y,\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \phi_{y,\lambda}(x) = x - \lambda(F(x) - y)$$

a) Demuestre q $\phi_{y,\lambda}$ es una función Lipschitz

Sol//

$$\|\phi_{y,\lambda}(x) - \phi_{y,\lambda}(z)\| = \|x - \lambda(F(x) - y) - [z - \lambda(F(z) - y)\|$$

$$= \|x - z + \lambda(F(z) - F(x))\|$$

$\leq \|x-z\| + \|\lambda(F(x)-F(z))\|$

$= \|x-z\| + \lambda \|F(x)-F(z)\|$

$\leq \|x-z\| + \lambda \cdot \beta \|x-z\|$ [Por (2)]

$= [1+\lambda\beta] \|x-z\|$

$\therefore$ $\phi_{\gamma,\lambda}$ es lipTschitz de constante

$L = 1+\lambda\beta$

b) Demuestre que para λ adecuado $\phi_{\gamma,\lambda}$ es contractante

Sol

Por el desarollo anterior no podemos concluir lo pedido

Para esto trabajemos

$\|\phi_{\lambda,\gamma}(x) - \phi_{\lambda,\gamma}(z)\|^2$

$$= \| x - z + \lambda (F(z) - F(x)) \|^2$$

$$= \| x - z \|^2 + 2 \langle x - z , \lambda (F(z) - F(x)) \rangle$$
$$+ \| \lambda (F(z) - F(x)) \|^2$$

$$\leq \| x - z \|^2 + 2 \langle x - z , \lambda (F(z) - F(x)) \rangle$$
$$+ \lambda^2 \beta \| x - z \|^2 \quad [(2)]$$

$$= \| x - z \|^2 - 2\lambda \langle x - z , F(x) - F(z) \rangle$$
$$+ \lambda^2 \beta^2 \| x - z \|^2$$

$$\leq \| x - z \|^2 - 2\lambda \cdot \alpha \| x - z \|^2 + \| x - z \|^2 \lambda^2 \beta^2$$

$$= (1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2 \beta^2) \| x - z \|^2$$

q tenemos $\lambda^2 \beta^2 - 2\lambda\alpha + 1 < 1$

$$\rightarrow \quad \lambda^2 \beta^2 - 2\lambda\alpha < 0$$

$\rightarrow \lambda \beta^2 - 2\alpha < 0$

$\rightarrow \lambda < \dfrac{2\alpha}{\beta^2}$

implica que

$\|\phi_{\lambda,\gamma}(x) - \phi_{\lambda,\gamma}(z)\|^2 \leq L \|x-z\|^2$

con $L = \lambda^2 \beta^2 - 2\lambda\alpha + 1 < 1$

asi $\|\phi_{\lambda,\gamma}(x) - \phi_{\lambda,\gamma}(z)\| \leq \sqrt{L} \|x-z\|$

y $\|x-z\| < 1$

$\therefore$ $\phi_{\lambda,\gamma}$ es contractante

Scanned by CamScanner

c) Usando el Teorema del punto fijo de Banach concluya lo pedido

Sol

como $\phi_{y,\lambda}$ es contractante

$\exists! \, x \in \mathbb{R}^n$ t.q

$\phi_{y,\lambda}(x) = x$

así $\cancel{x} = \cancel{x} - \lambda(F(x) - y)$

$\rightarrow \quad 0 = -\lambda(F(x) - y)$

$\rightarrow \quad F(x) = y$

así $\forall y \in \mathbb{R}^n \; \exists! \, x \in \mathbb{R}^n$ t.q $F(x) = y$

así tenemos que f es sobreyectiva y

$\therefore$ biyectiva //

Scanned by CamScanner

P4) Sea $K > 1$ y $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

una función sobreyectiva, no necesariamente continua, T.q

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \cdot K \quad \forall x, y$$

Pdq: existe un único punto fijo

Indicación: Pruebe que f es inyectiva y aplique la desigualdad a f^{-1}

Sol

Inyectividad

Sea $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \|x - y\| \cdot K \leq \cancel{\|f(x) - f(y)\|}^{\,0}$

$\Rightarrow K\|x - y\| = 0$

$\Rightarrow x = y$ //

sea $u = f(x)$, $v = f(y)$

$\rightarrow \quad x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$

así

$$\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \, k \leq \|u - v\|$$

$$\rightarrow \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{k} \|u - v\|$$

$\frac{1}{k} < 1 \quad \therefore$ es contractante

así

$\exists! \, \bar{u} \in \mathbb{R}^n \ / \ q \quad f^{-1}(\bar{u}) = \bar{u}$

$\therefore \exists! \, \bar{u} \in \mathbb{R}^n \ / \ q \quad f(\bar{u}) = \bar{u}$ //

P5 Considere la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\ x^2+y^2+z^2,\ x^3+y^3+z^3)$$

1- determine todos los puntos para los cuales f es localmente invertible

Sol,

calculemos Df

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$ vistos como columnas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, 2x, 3x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (1, 2z, 3z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (1, 2y, 3y^2)$$

así

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 3x^2 & 3z^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 6z^2y - 6zy^2 - [6xz^2 - 6x^2z] + 6xy^2 - 6x^2y$$

$$= 6z^2y - 6x^2y + 6y^2x - 6z^2x + 6x^2z - 6zy^2$$

$$= 6y(z^2 - x^2) + 6x(y^2 - z^2)$$

$$=6[z^2y-y^2z+xy^2-xz^2+x^2z-x^2y]$$

$$=6[z^2y-y^2z+xy^2\underbrace{-xyz+xyz}_{0}-xz^2$$

$$+x^2z-x^2y]$$

$$=6[\cancel{y}[z^2-yz+xy-xz]$$

$$+-x[-yz+z^2-xz+xy]$$

$$=6[y-x][z^2-z(x+y)+xy]$$

$$=6[y-x][z-x][z-y]$$

ui $[Df]\neq 0$ si $x\neq y\neq z$

hay que calcular la inversa de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$$

la cual es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{yz}{(x-z)(y-z)} & -\dfrac{y+z}{2(x-z)(x-y)} & \dfrac{1}{3(x-z)(x-y)} \\[2ex] \dfrac{x(xz+yz)}{(x^2-y^2)(z-y)} & -\dfrac{x+z}{2(x-y)(z-y)} & \dfrac{1}{3(x-y)(z-y)} \\[2ex] -\dfrac{xy}{(x-z)(z-y)} & \dfrac{x+y}{2(x-z)(z-y)} & -\dfrac{1}{3(x-z)(z-y)} \end{pmatrix}$$

así tenemos $Y_0 = f(x,y,z)$

est. q $Df^{-1}(Y_0) = \underbrace{[Df(x,y,z)]^{-1}}_{\text{lo calculado}}$ //