Auxiliar 9

$f'(x) = 0$

Profesor: Ángel Pardo
Auxiliares: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

Resumen

1. Hiperplano Tangente de f en x_0: (x,z) pertenecen al grafo del hiperplano ssi $z = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$
2. Vector normal: el vector normal al hiperplano tangente está dado por $n(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}$
3. La dirección maxima de crecimiento de f esta dada por $v_* = \frac{\nabla f(x_0)}{||f(x_0)||_2}$
4. $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$ es un óptimo local entonces $\nabla f(x_0) = 0$
5. $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$
   a) Si x_0 es mínimo local, entonces $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva
   b) Si x_0 es punto critico y $Hf(x_0)$ es definida positiva, entonces x_0 es un mínimo local estricto.

P1 Calcule el plano tangente de las siguientes conicas en el punto (x_0, y_0).

a) $x^2 + y^2 = R^2$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

c) **[Propuesto]** $\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$

P2. a) **[Propuesto]** Muestre que la eucación del plano tangente a la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

b) Encuentre todos los puntos de la elipsoide anterior para los cuales el plano tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OZ

P3. Supongamos que estamos sobre el punto $(-1, 5, 8)$ en un cerro cuya superficie está dada por la ecuación:

$$74 - x^2 - 7xy - 4y^2 - z = 0$$

El eje Y apunta hacia el norte y el eje X hacia el este, y las distancias se miden en metros.

a) Si nos movemos al sur ¿subimos o bajamos? ¿Con qué rapidez?

b) ¿En que dirección está el descenso más rápido?

c) ¿En que direcciones no hay ascenso ni descenso?

d) Encuentre el punto de altura máxima del cerro y determine dicha altura (en caso de existir, si no existe justifique).

P4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función que cumple:

$$\Delta f(x) = -1, \forall x \in D$$

Donde Δ se conoce como el laplaciano de f y significa:

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

Muestre que f no puede tener mínimo local.

P5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$

a) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos de f

P6. Suponga que tiene n puntos del plano $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ como resultados de algún experimento. El objetivo de este problema es encontrar la función afín que se ajuste lo mejor posible al conjuntos de puntos, es decir encontrar los parámetros m, b tal que la función afín $y = mx + b$ se ajuste mejor a los datos obtenidos. Como los puntos (x_i, y_i) no necesariamente estan una recta, para cada par de puntos existe un error asociado:

$$e_i = y_i - (mx_i + b),\ \forall i = \{1, ..., n\}$$

Una manera de determinar m, b es con el método de los mínimos cuadrados, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

El problema anterior es equivalente a resolver el siguiente problema:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$$

a) Encuentre candidatos de optimo para el segundo problema (asumiendo todo lo necesario para que el mínimo exista)

b) Pruebe que el resutlado encontrado efectivamente se trata de un mínimo.

c) Que condiciones agregaría para que el mínimo siempre existá.