MA2001-5 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

Auxiliar 14 - The End Is Near

1. Coordenadas Polares, para $\rho \in (0,\infty)$ y $\phi \in [0,2\pi)$:
$$T(\rho,\phi) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi))$$
Entonces:
$$|det(DT(\rho,\phi))| = \rho$$
2. Coordenadas Cilindricas, para $\rho \in (0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi)$ y $z \in \mathbb{R}$:
$$T(\rho,\phi,z) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi), z)$$
Entonces:
$$|det(DT(\rho,\phi,z))| = \rho$$
3. Coordenadas Esfericas, para $r \in (0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi)$ y $\phi \in [0,2\pi)$:
$$T(r,\theta,\phi) = (r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$
Entonces:
$$|Det(DT(r,\theta,\phi))| = r^2\sin(\theta)$$

Teorema de Cambio de Variables (TCV)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $D \in \Omega$ abierto con $\text{Adh}(D) \subseteq \Omega$ tal que $T : D \to T(D)$ es un difeomorfismo invertible (con $DT(x)$ invertible para todo $x \in D$). Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_{T(D)} f = \int_D (f \circ T) \cdot |det(DT)|$$

P1. ***Integral de una función impar sobre un dominio simetrico***
Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto simetrico (es decir $x \in A \iff -x \in A$). Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función impar ($f(x) = -f(-x)\ \forall x \in A$) continua y acotada, entonces:

$$\int_A f = 0$$

P2. ***Coordenadas generalizadas y el determinante de su jacobiano***

a) Sean $a, b > 0$. Considere la siguiente transformación de coordenadas:
$$T(\rho,\phi) = (a\rho\cos(\phi), b\rho\sin(\phi))$$
Muestre que se cumple:
$$|det(DT(\rho,\phi))| = ab\rho$$

b) **[Propuesto]** Sea $a, b, c > 0$. Generalice el resultado anterior para el siguiente cambio de variable:
$$T(\rho,\phi,z) = (a\rho\cos(\phi), b\rho\sin(\phi), cz)$$

c) **[Propuesto]** Sean $a, b, c > 0$. Considere la siguiente transformación de coordenadas:
$$T(r,\theta,\phi) = (ar\cos(\phi)\sin(\theta), br\sin(\phi)\sin(\theta), cr\cos(\theta))$$
Muestre que se cumple:
$$|Det(DT(r,\theta,\phi))| = abcr^2\sin(\theta)$$

P3. *Calcular*

a) Calcule para $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$:
$$\int_0^\infty \int_0^\infty exp(-(x^2 + 2xy\cos(\alpha) + y^2))dxdy$$

b)
$$\int_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dxdydz$$
donde V es el dominio restringido por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2$ y el plano $z = 0$

c) $\int_D (x^4 + y^4)dxdydz$ con $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1\}$

d) Muestre que:
$$\int_0^a \int_y^a \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy = \frac{\pi a}{4}$$

e) Considere la función $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ encuentre el valor de:
$$\int_R e^{\sqrt{f(x,y,z)}} dxdydz$$
donde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) \leq 16\}$

f) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función definida como $g(x, y, z) = (3y + 4z,2x - 3z, x + 3y)$. Sea $S = [0, 1]^3$. Encuentre el $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que cumpla:
$$\int_{g(S)} (2x + y - 2z)dxdydz = \alpha \int_S zdxdydz$$

P4. *Crossover EDO*

El objetivo de este problema es calcular la integral:
$$\int_0^\infty \int_x^\infty e^{-(x-y)^2} \sin^2(x^2 + y^2) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dydx$$
Para esto usaremos herramientas de ecuaciones diferenciales (:o) . Con ese proposito en mente s-*iga los siguientes paso:

a) Escriba la integral en alguna coordenada conveniente.

b) Considere la siguiente función:
$$f(t) = \frac{\sin^2(at)}{t^2}$$
Muestre que f es de orden exponencial.

Obs: g es de orden exponencial si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es tal que $|g(t)| \leq Me^{\alpha t}$ y g es continua por pedazos (Se dice $g \in \mathcal{C}_\alpha$)

c) Construya una EDO para la transformada de Laplace de la función f de la parte *b*. Para esto recuerde que:
$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{s^n} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

d) Usando lo anterior considere que la siguiente transformada de Laplace tiene un valor conocido:
$$\mathcal{L}[sin^2(at)](s) = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$
Y resuelva la edo encontrada en la parte c

Indicación: Recuerde que si $g \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces la transformada existe y cumple $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[g(t)](s) = 0$. **Hint:** Calcule primitivas, encuentre las constantes una vez consiga la transformada de f.

e) Calcule el resultado de la integral con el resultado anterior.