MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 15: Preparación examen.

6 de Julio de 2019

P1. a) Considere el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ -1 \leq z \leq 1\}$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^2}\sin(y) + xy^2, e^{x^2}\cos(z) + x^2y, x^2)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del **manto** del cilindro C, es decir, a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \ , \ -1 \leq z \leq 1\}$.

b) Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xy, -xz)$$

Y la semiesfera dada por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.

P2. a) Calcule el valor de la integral compleja:

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z\sin(z)} dz$$

Donde C es la circunferencia centrada en el origen de radio $r = \frac{3\pi}{2}$ en el plano complejo.

b) Sea Γ_R la circunferencia de radio $R > 0$ centrada en el origen en el plano complejo. Calcule, para todos los valores posibles de R, el valor de la integral compleja:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

c) Para $b > 0$, demuestre que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xb)dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2xb)dx = e^{-b^2}\int_0^b e^{x^2}dx$$

P3. Resuelva el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0 \ ; \ x \in (0,1) \ , \ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ ; \ t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \ ; \ x \in (0,1)$$
$$u_t(x,0) = f(x) \ ; \ x \in (0,1)$$

Tome $f(x) = \sin(\pi x)$ y $f(x) = \cos(\pi x)$.