Auxiliar 10

Queda poquitoo!

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

P1. Una compra-venta de autos paga una cantidad X por un vehículo y lo vende a una cantidad Y. las variables X e Y tienen densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathbb{E}(Y|X)$.

c) Si quisiera invertir en el negocio de compra y venta de autos. ¿Cuál es el valor esperado de la compra y el valor esperado de la venta?

P2. La cantidad de llamadas telefónicas recidibas en una empresa durante t horas es una variable *Poisson*(μt). Se produce una falla en el sistema telefónico, durante este periodo las llamadas recibidas no pudieron ser atendidas. La duración de esta falla es una variable *Exponencial* de parámetro λ. Sea X la cantidad de llamadas no antendidas durante la falla.

Calcule, utilizando esperanzas condicionales, el valor esperado de X.

P3. Una gallina pone X huevos, donde X es una variable aleatoria *Poisson* de parámetro λ. Cada uno de esos huevos es fecundado con probabilidad p, es decir; cada huevo tiene probabilidad p de nacer, obteniendo así una cantidad de pollos que definiremos con la variable Y ($Y =$ Cantidad de pollos salidos de X). Muestre que la correlación entre X e Y es $\rho(X,Y) = \sqrt{p}$.

- Sean Y_1, Y_2 v.a. conjuntamente contínuas, con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Se definen las **funciones de densidad marginal** de Y_1 e Y_2 como:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1$$

- Sean Y_1, Y_2 v.a. con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$. Se define la **densidad condicionada** de Y_1 dado $Y_2 = y_2$ como:

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)}$$

  siempre que $f_{Y_2}(y_2) > 0$. De manera análoga se determina $f(y_2|y_1)$.

- **Teorema:** si Y_1, Y_2 son v.a. contínuas con densidad $f(y_1, y_2)$ y funciones marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$. Entonces se dice que Y_1 e Y_2 son **independientes** si, y sólo si;

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$

  Para todo par de números reales (y_1, y_2).

- Sean X, Y dos variables aleatorias, se define la **covarianza** de X e Y como:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- Sean X, Y dos variables, aleatorias. Se tiene:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- Sean X,Y dos variables aleatorias, entonces:

$$\text{X,Y independientes} \Rightarrow Cov(X, Y) = 0$$

- Sean X, Y variables aleatorias. Se define la **correlación** de X e Y como:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

- Si X e Y son dos variables aleatorias cualesquiera, se define la esperanza condicional de X para un valor $Y = y_o$ dado como: Si $f(x|y_o)$ es la densidad condicional,

$$\mathbb{E}(X|Y = y_o) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y_o) dx$$

  para el caso contínuo, y:

$$\mathbb{E}(X|Y = y_o) = \sum_{todoY} x \mathbb{P}(x|Y = y_o)$$

  para el caso contínuo.

- Se cumple que:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

  para X e Y dos variables aleatorias cualesquiera.

Soluciones:

P1. *a)* Calculemos la densidad marginal de X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^6 \frac{x}{36}dy = \frac{x(6-x)}{36}$$

Recordemos que para calcular la densidad marginal, la componente x de la densidad conjunta queda fija al momento de integrar en y, por eso es que el intervalo de intergación es $(x, 6)$.

Para la densidad marginal de Y tenemos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y \frac{x}{36}dx = \frac{1}{36}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{y^2}{72}$$

b) Para calcular las esperanzas condicionales necesitamos conocer las densidades condicionales. Sea $Y = \bar{y}$ un valor fijo para la variable aleatoria Y, entonces:

$$f(x|\bar{y}) = \frac{f_{X,Y}(x,\bar{y})}{f_Y(\bar{y})} = \frac{2x}{\bar{y}^2}$$

es la densidad condicional de X. De la misma forma, calculamos la densidad condicional de Y para algún valor $X = \bar{x}$:

$$f(y|\bar{x}) = \frac{f_{X,Y}(\bar{x},y)}{f_X(\bar{x})} = \frac{1}{6-\bar{x}}$$

Ahora podemos calcular las esperanzas condicionales. Para X dado $Y = \bar{y}$:

$$\mathbb{E}(X|Y=\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} x \cdot f(x|\bar{y})dx = \int_0^{\bar{y}} \frac{2x^2}{\bar{y}^2}dx = \frac{2}{\bar{y}^2}\left(\frac{\bar{y}^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2\bar{y}}{3}$$

De la misma forma, calculamos la esperanza condicional de Y dado un valor $X = \bar{x}$:

$$\mathbb{E}(Y|X=\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^6 y \cdot f(y|\bar{x})dy = \int_{\bar{x}}^6 \frac{y}{6-\bar{x}}dy = \frac{1}{6-\bar{x}}\left(\frac{6^2}{2} - \frac{\bar{x}^2}{2}\right) = \frac{6+\bar{x}}{2}$$

c) Calcularemos la esperanzas mediante las espranzas condicionales. Consideremos $g(\bar{y}) = \mathbb{E}(X|Y=\bar{y})$ y calculemos la esperanza de la función g, puesto que:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(g(Y))$$

Para calcular la esperanza de $g(Y)$ debemos ocupar la densidad marginal de Y, $f_Y(y) = y^2/72$. Entonces:

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_0^6 g(y) \cdot f_Y(y)dy = \int_0^6 \frac{2y}{3} \cdot \frac{y^2}{72}dy = \frac{1}{108}\left(\frac{6^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = 3$$

$$\implies \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 3$$

Para la esperranza de Y ocuparemos el mismo proceso. Tomemos la función $h(\bar{x}) =$

$\mathbb{E}(Y|X=\bar{x})$ y calculemos la esperanza de esta función con la densidad marginal para X.

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_0^6 h(x)\cdot f_X(x)dx = \int_0^6 \frac{6+x}{2}\cdot\frac{x(6-x)}{36}dx = \frac{1}{72}\int_0^6 x(6^2-x^2)dx$$

$$= \frac{1}{72}\left(6^2\int_0^6 xdx - \int_0^6 x^3dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) - \frac{1}{72}\left(\frac{6^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right) = 4{,}5$$

Entonces concluímos que:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(h(X)) = 4{,}5$$

P2. Denotemos por T a la duración del tiempo en que falló el sistema en horas, sabemos de antemano que T distribuye exponencial de parámetro λ.
Notemos que X depende directamente de el valor que tome la variable T, si la duración de la falla es mayor, la probabilidad de que lleguen más llamadas que no serán atendidas es más alta. Por lo tanto, calcularemos la esperanza condicionando a algún valor de T.

Supongamos que conocemos la duraación de la falla, digamos $T = t_o$, entonces la cantidad de llamadas recibidas en las t_o horas es una variable *Poisson* de parámetro μt_o. Entonces la esperanza condicional es la esperanza de la variable Poisson de ese parámetro:

$$\mathbb{E}(X|T=t_o) = \mathbb{E}(Poisson(\mu t_o)) = \mu t_o$$

Entonces definimos la función $h(T) = \mu T$ el valor esperado de las llamadas no atendidas en un periodo de tiempo de duración T, además sabemos que T tiene densidad $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. Entonces calculemos la esperanza de $h(T)$:

$$\mathbb{E}(h(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)f_T(t)dt = \int_0^{\infty}\mu\lambda t e^{-\lambda t}dt = \mu\lambda\left(\left.\frac{te^{-\lambda t}}{-\lambda}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt\right)$$

$$= \mu\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{\mu}{\lambda}$$

Por las propiedades de las esperanzas condicionales obtenemos la esperanza de X:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|T)) = \mathbb{E}(h(T)) = \frac{\mu}{\lambda}$$

P3. Podemos observar que; si fijamos un valor para X, entonces la variable Y corresponde a una *Binomial*.
Por ejemplo, si decimos que $X = k$, es decir, sabemos que la gallina puso k huevos, entonces cada huevo tiene probabilidad p de ser fecundado. Al unir el caso de cada huevo, nos queda una variable *Binomial* de parámetros k (cantidad de intentos = huevos) y p (probabilidad de éxito).

Conociendo esto, podemos decir que, calcular la esperanza condicional de Y dado un valor $X = k$, en realidad es calcular la esperanza de una variable $Binomial(k,p)$, cuyo valor conocemos: $\mathbb{E}(Y|X=k)=kp$. De forma más general, tenemos:

$$\mathbb{E}(Y|X)=Xp$$

Ahora definamos la variable aleatoria XY, la multiplicaicón de X con Y. Por teorema tenemos que:

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X))$$

Pero al condicionar sobre X, es decir, al fijar valores para X, el valor XY sólo posee aleatoriedad gracias a la variable Y. O sea que X es constante para la esperanza condicional, por lo tanto puede salir:

$$\mathbb{E}(XY|X)=X\mathbb{E}(Y|X)$$

Luego, como $\mathbb{E}(Y|X)$ es un término conocido, reemplazamos todo en la ecuación inicial:

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X))=\mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X))$$

$$=\mathbb{E}(X\cdot Xp)=p\mathbb{E}(X^2)$$

Finalmente, recordando la esperanza y la varianza de una $Poisson(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X)=\lambda$$

$$Var(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\lambda$$

$$\implies \quad \mathbb{E}(X^2)=Var(X)+\mathbb{E}(X)^2=(\lambda^2+\lambda)$$

Entonces tenemos que:

$$\mathbb{E}(XY)=p\mathbb{E}(X^2)=(\lambda^2+\lambda)p$$

Lo último dato faltante para el coeficiente de correlación es la esperanza y varianza de Y. Volvemos a ocupar nuestra relación entre la esperanza condicional y la esperanza de la variable:

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))=\mathbb{E}(Xp)=p\mathbb{E}(X)=p\lambda$$

Del mimso modo, podemos conocer la esperanza de Y^2 sabiendo la esperanza y varianza de una binomial.

$$\mathbb{E}(Y^2)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^2|X))$$

La esperanza condicional de Y^2 entonces será la misma que el momento de segundo orden de una variable *Binomial* pero dependiendo de X como la cantidad de realizaciones, es decir $\mathbb{E}(Y^2|X)=Var(Binomial(X,p))+\mathbb{E}(Binomial(X,p))^2=Xp(1-p)+X^2p^2$.

Entonces:

$$\mathbb{E}(Y^2)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^2|X))=\mathbb{E}(Xp(1-p)+X^2p^2)$$

$$=p(1-p)\mathbb{E}(X)+p^2\mathbb{E}(X^2)$$

$$=p(1-p)\lambda+(\lambda^2+\lambda)p^2$$

$$=p\lambda+p^2\lambda^2$$

$$\implies \quad Var(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)^2$$

$$=p\lambda+p^2\lambda^2-p^2\lambda^2=p\lambda$$

Entonces, recapitulemos los datos que hemos encontrado:

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\mathbb{E}(Y) = p\lambda$
- $Var(Y) = p\lambda$
- $\mathbb{E}(XY) = (\lambda^2 + \lambda)p$

Entonces el coeficiente de correlación es:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{(\lambda^2 + \lambda)p - \lambda(p\lambda)}{\sqrt{\lambda(p\lambda)}}$$

$$= \frac{\lambda p}{\lambda\sqrt{p}} = \sqrt{p}$$

Por lo tanto el coeficiente de correlación entre X e Y es $\sqrt{p}$.