FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA3403, Primavera 2018
Prof. V. Acuña.

Guia #3

1. Si Y_1 es el tiempo total entre la llegada de un cliente a la tienda y su salida de la ventanilla de servicio, y si Y_2 es el tiempo que pasa en la la de espera antes de llegar a la ventanilla, la densidad conjunta de estas variables está dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1}, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq \infty \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

La variable aleatoria $Y_1 - Y_2$ representa el tiempo que pasa en la ventanilla de servicio. Encuentre $E(Y_1 - Y_2)$ y $V(Y_1 - Y_2)$. ¿Es altamente probable que un cliente seleccionado aleatoriamente pase más de 4 minutos en la ventanilla de servicio?

2. Si Y denota el número de tiros del dado hasta que se vea cada una de las seis caras,$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$ donde Y_1 es el intento en el que se lanza la primera cara del dado, $Y_1 = 1$, Y_2 es el número de tiros adicionales necesario para que salga una cara diferente a la primera, Y_3 es el número de tiros adicionales necesario para que salga una cara diferente a las dos primeras caras distintas, $\ldots$, Y_6 es el número de tiros adicionales necesario para que salga la última cara restante, después de que todas las otras se hayan visto.

   a) Demuestre que $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ para $i, j = 1, 2, \ldots, 6, i \neq j$.
   b) Use el Teorema visto en clases para hallar $V(Y)$.
   c) Proponga un intervalo que contenga a Y con probabilidad de al menos $3/4$.

3. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de Bernoulli con parámetro p.

   a) Encuentre la función generadora de momento para la variable aleatoria Y_1 de Bernoulli.
   b) Encuentre la función generadora de momento para $W = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$.
   c) ¿Cuál es la distribución de W?

4. Un tipo de elevador tiene una capacidad máxima de peso Y_1, que está normalmente distribuida con media de 5000 libras y desviación estándar de 300 libras. Para un cierto edificio equipado con este tipo de elevador, la carga del elevador, Y_2, es una variable aleatoria normalmente distribuida con media de 4000 libras y desviación estándar de 400 libras. Para cualquier tiempo determinado en el que el elevador está en uso, calcule la probabilidad de que sea sobrecargado, suponiendo que Y_1 y Y_2 son independientes.

5. La Environmental Protection Agency se ocupa del problema de establecer criterios para las cantidades de sustancias químicas tóxicas permitidas en lagos y ríos de agua dulce. Una medida común de toxicidad para cualquier contaminante es la concentración de éste que mataría a la mitad de la especie de prueba en un tiempo determinado (por lo general 96 horas para especies de peces). Esta medida se denomina CL50 (concentración letal que mata 50 % de la especie de prueba). En muchos estudios, los valores contenidos en el logaritmo natural de mediciones del CL50 están distribuidos normalmente y, en consecuencia, el análisis está basado en datos del ln(CL50). Estudios de los efectos del cobre en cierta especie de peces (por ejemplo la especie A) muestran que la varianza de mediciones de ln(CL50) es alrededor de 0.4 con mediciones de concentración en miligramos por litro.

   a) Si han de completarse $n = 10$ estudios sobre el CL50 para cobre, encuentre la probabilidad de que la media muestral de ln(CL50) difiera de la verdadera media poblacional en no más de 0,5.
   b) Si deseamos que la media muestral difiera de la media poblacional en no más de 0.5 con probabilidad 0.95, ¿cuántas pruebas deben realizarse?

6. Considere 2 trenes (A y B) que deben transportar N personas diarias (entre los 2). Si cada

persona al azar e independientemente elige un tren para viajar, determinaremos la cantidad de asientos, m, que debe llevar cada tren para asegurar con probabilidad 0.99 que todas las personas irán sentadas. Para esto:

a) Si X_A : número de personas que suben al tren A. ¿Qué distribución tiene X_A? ¿y para N grande?

b) Plantee condiciones sobre X_A para asegurar que todos los pasajeros viajen sentados (tanto en el tren A, como en el B).

c) Imponga la condición de probabilidad y determine m considerando N grande.

7. La nota de los alumnos del curso MA3403 puede ser considerada como una va normal de media μ y varianza σ^2. Si se sabe que se aprueba con nota igual o superior a 4, se reprueba con nota menor a $3,7$ y queda pendiente con nota mayor o igual a $3,7$ y menor a 4.

   a) Suponga que $\mu = 4{,}2$, $\sigma = 0{,}8$ y el total de alumnos es 110. Si se elige un grupo de 10 alumnos, sin reposición, calcule la probabilidad de que "a lo más dos de ellos estén reprobados y al menos 9 estén aprobados".

   b) Si del curso se eliminan los reprobados, ¿cuál es la densidad de nota de los restantes? Calcule su esperanza.

   c) Suponga que μ es desconocido y se escoge una muestra de alumnos de tamaño n (de manera independiente). Determine n de tal forma que la media muestral $\overline{X}$ difiera de la media poblacional μ en menos de 0,5 con probabilidad 0,95.

8. Supongamos que T es la va que representa el tiempo en que falla cierto componente, y del cual se sabe que $T \sim \exp(\beta)$. Suponga que tiene una m.a.s $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Se desa encontrar una estimación insesgada del tiempo esperado de falla, es decir $1/\beta$. Para ello, se proponen dos estimadores:

   - $F_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1} nT_i$, y
   - $F_2 = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$.

   Analice ambos estimadores en términos del sesgo y varianza, y argumente cual estimador usaría usano como criterio aquel de mnos varianza. Si ahora se incurriera en un costo por realizar las mediciones, ¿su elección sería la misma?.

9. Suponga que Y_1, Y_2, Y_3 denotan una muestra aleatoria de una distribución exponencial con función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, & y > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

   Considere los siguientes cinco estimadores de u:

$$\hat{\theta}_1 = Y_1,\ \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{2},\ \hat{\theta}_3 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3},$$

$$\hat{\theta}_4 = min\{Y_1, Y_2, Y_3\},\ \hat{\theta}_5 = \bar{Y}.$$

   a) ¿Cuáles de estos estimadores son insesgados?

   b) Entre los estimadores insesgados,¿cuál tiene la varianza más pequeña?

10. Si Y tiene una distribución binomial con parámetros n y p, entonces $\hat{p}_1 = Y/n$ es un estimador insesgado de p. Otro estimador de p es $\hat{p}_2 = (Y + 1)/(n + 2)$.

   a) Deduzca el sesgo de $\hat{p}_2$.

   b) Deduzca ECM($\hat{p}_1$) y ECM($\hat{p}_2$).

   c) ¿Para qué valores de p es ECM($\hat{p}_1$) $<$ ECM($\hat{p}_2$)?