MA3403-6. Probabilidades y Estadística
Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Pablo Araya y Javier Santibáñez.
Fecha: Jueves 25 de Abril, 2019.

Auxiliar 5

Resumen

Definición 1. Una v.a X se dice **continua** si existe una función $f_x : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (llamada **densidad de probabilidad de X**) tal que $\forall A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$$

Definición 2. Se define la **Función de distribución acumulada** $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de una v.a. X (continua o discreta) por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Definición 3 (Esperanza)**.** Se define la esperanza de una variable aleatoria X como sigue:

- **Discreta:** $\mathbb{E}(X) = \sum_{m \in R_X} m \cdot \mathbb{P}(X = m)$
- **Continua:** $\mathbb{E}(X) = \int_{R_X} x f_X(x)dx$

Proposición 1. *Se tienen las siguientes propiedades.*

- $\mathbb{E}(aX + Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- *Si* X, Y *son indep. entonces* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- *Para* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función y* X *v.a. discreta, se tiene que* $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \mathcal{R}_X} g(k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$. *Análogo para* X *continua.*

Problemas

P1. En Economía se dice que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a. X es:

- **Averso al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$.
- **Favorable al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$.
- **Neutral al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$.

Si $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$
b) $U(t) = ln(t)$
c) $U(t) = a + bt$

¿Puede sacar alguna conclusión sobre el tipo de función U en cada caso?

P2. Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda\mathbb{E}((X + 1)^{n-1})$$

P3. Suponga que un haz de luz (de una linterna) se hace girar alrededor de su centro, que se encuentra en la coordenada $(0, 1)$. Cuando la linterna ha dejado de girar, se denotará a X la variable aleatoria que describe la coordenada de la intersección del haz con el eje x. Si el haz no está apuntando hacia el eje x, se repite el experimento). El punto X está determinado por el ángulo θ que se forma entre la linterna y el eje y, que a partir de la experiencia física parece estar distribuido uniformemente entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$. Determine la función de densidad de X, y explique por qué no tiene esperanza.

P4. En una urna hay n bolitas, de las cuales r son rojas y $b = n - r$ son blancas. Se extraen k bolitas al azar sin reposición. Calcule la cantidad esperada de bolitas rojas extraídas.
Indicación: Defina una variable indicatriz adecuada por cada bolita roja y utilice la linealidad de la esperanza.

P5. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.