

MA3403. Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.

Auxiliares: Pablo Araya y Javier Santibáñez.

Fecha: Jueves 13 de Junio, 2019.



Auxiliar 10

Resumen

Definición 1 (Test de Hipótesis). Sea θ un parámetro desconocido. Supongamos tenemos dos afirmaciones con respecto a θ las cuales denotaremos H_0 : **Hipótesis Nula** y H_1 : **Hipótesis Alternativa**. Un test es un criterio para decidir cuando rechazar una hipótesis.

Definición 2 (Región de Rechazo). Un test tiene asociado un conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^n$ que llamamos **Región de Rechazo** donde si el vector de datos x pertenece a R entonces se rechaza la hipótesis nula. Típicamente tendrá la siguiente forma:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \leq c\}$$

donde U es un estadístico adecuado y c una constante que se adecua para lograr un nivel deseado.

Definición 3 (Nomenclatura Hipotesis). Diremos que H_0 es

- **Simple:** Si $H_0 : \theta = \theta_0 \in \mathbb{R}$ conocido.
- **Compuesta:** Si no es simple.

Definición 4 (Tipos de errores).

	Rechazar H_0	No rechazar H_0
H_0 es cierta	Error tipo I	✓
H_1 es cierta	✓	Error tipo II

Definición 5 (Potencia de un test).

$$Potencia = \mathbb{P}(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = 1 - \mathbb{P}(\text{Error Tipo II})$$

Lema 1 (Neyman-Person). Sea X_1, \dots, X_n una M.A.S. cuya distribución común tiene un único parámetro desconocido θ y sea:

- $H_0 : \theta = \theta_0$
- $H_1 : \theta = \theta_1$

Entonces, dado α fijo, el test con potencia máxima tiene región de rechazo de la forma:

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{L(x; \theta_0)}{L(x; \theta_1)} \leq k \right\}$$

donde L es la función de verosimilitud y k una constante

Problemas

P1. Un director de un cierto colegio afirma que los estudiantes del colegio son más inteligentes que el promedio. Una muestra aleatoria de los IQ de 30 estudiantes tienen un promedio de 112.5. El promedio de IQ de la población es de 100 con desviación estándar de 15. ¿Hay suficiente evidencia que respalde la afirmación del director?

P2. El dueño de una revista afirma que, de acuerdo a la experiencia de años anteriores, el 60% de las personas suscritas a la revista renuevan su suscripción, pero el editor de la revista afirma que las preferencias del público han cambiado y que el porcentaje de renovación es estrictamente menor que 60%. Para resolver esta discrepancia, se toma una muestra de 200 personas con suscripción y se observa que 108 de ellas la renovaron este año. Para $\alpha = 2,5\%$, ¿debe rechazarse la afirmación del dueño y fallar a favor del editor?

P3. La duración media de una canción en su aplicación de música favorita es de 4 minutos, con varianza 2,25. Usted pone 100 canciones al azar en una lista de reproducción.

- a) Sin usar el TCL, obtenga una cota inferior para la probabilidad de que la lista dure entre 6 horas 20 minutos y 7 horas.
- b) Usando el TCL, aproxime la probabilidad anterior.

P4. Suponga que Y representa una única observación de una población con densidad

$$f(y|\theta) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Encuentre el test de máxima potencia con $\alpha = 0,05$ para $H_0 : \theta = 2$ versus $H_a : \theta = 1$.