**MA3403. Probabilidades y Estadística**
**Profesor:** Roberto Cortez M.
**Auxiliares:** Pablo Araya y Javier Santibáñez.
**Fecha:** Jueves 27 de Junio, 2019.

# Auxiliar 12

## Resumen

**Definición 1** (Test Bondad de Ajuste)**.** Sea $X$ una v.a. discreta con $R_X = \{a_1, ..., a_k\}$ y anotemos $p_j = \mathbb{P}(X = a_j)$ los cuales son desconocidos. Consideremos $p_1^0, ..., p_k^0$ valores conocidos tales que $\sum_{j=1}^k p_j^0 = 1$.

- **Hipotesis:**
  - $H_0 : (\forall j \in \{1, ..., k\})\ p_j = p_j^0$
  - $H_1 : (\exists j \in \{1, ..., k\})\ p_j \neq p_j^0$
- **Estadístico:** Sea $X_1, ..., X_n$ una mas de $X$. Se define el estadístico $\Delta$ que bajo $H_0$ distribuye $\chi^2_{k-1}$ y tiene la siguiente forma $\Delta = n\sum_{j=1}^k \frac{(\hat{p}_j - p_j^0)^2}{p_j^0}$ donde $\hat{p}_j = \dfrac{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i = a_j\}}}{n}$.
- **Región de Rechazo:** $\{\triangle > c\}$ donde $c$ es una constante que se determina según el $\alpha$ escogido.

**Definición 2** (Test Tabla de Contingencia)**.** Sean $X, Y$ v.a.'s discretas con $R_X = \{a_1, ..., a_r\}, R_Y = \{b_1, ..., b_s\}$ y anotemos:

- $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)$
- $p_i^X = \mathbb{P}(X = a_i)$
- $p_j^Y = \mathbb{P}(Y = b_j)$

los cuales son desconocidos.

- **Hipótesis:**
  - $H_0 : X,\ Y$ son independientes
  - $H_1 : X,\ Y$ no son independientes
- **Estadístico:** Sea $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una mas de $(X, Y)$. Se define el estadístico $\Delta$ que bajo $H_0$ distribuye $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ y tiene la siguiente forma $\Delta = n\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\hat{p}_{ij} - \hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y)^2}{\hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y}$ donde:
  - $\hat{p}_{i,j} = \dfrac{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 1_{\{X_k = a_i, Y_l = b_j\}}}{n}$
  - $\hat{p}_i^X = \dfrac{\sum_{k=1}^n 1_{\{X_k = a_i\}}}{n}$
  - $\hat{p}_j^Y = \dfrac{\sum_{k=1}^n 1_{\{Y_k = a_j\}}}{n}$
- **Región de Rechazo:** $\{\Delta > c\}$ donde $c$ es una constante que se determina según el $\alpha$ escogido.

## Problemas

**P1.** Como premio por un semestre de intensos experimentos, a un ratoncito de laboratorio se le da un buffet de 4 variedades de quesos, de tipos A, B, C y D. Se le da a escoger 80 veces, y el ratoncito prefirió dichas variedades 14, 28, 22 y 16 veces cada una, respectivamente. Plantee las hipótesis del test que verifica si el ratoncito tiene preferencia por alguna de las variedades, calcule el $p$-valor y concluya usando $\alpha = 1\,\%$.

**P2.** Se realizó un estudio para determinar el efecto del cuidado infantil temprano en el tipo de apego entre madres y bebés. En el estudio, 93 infantes fueron clasificados como *seguros* o *ansiosos* usando el paradigma *strange-situation* de Ainsworth. De manera adicional, los bebés fueron clasificados de acuerdo al número de horas promedio por semana que pasan en cuidado infantil. Los datos se muestran en la siguiente tabla:

| Apego / Horas en Cuidado Infantil | Bajo (0-3 horas) | Medio (4-19 horas) | Alto (20-54 horas) |
|---|---|---|---|
| Seguros | 24 | 35 | 5 |
| Ansiosos | 11 | 10 | 8 |

¿Existe suficiente evidencia para indicar dependencia entre el tipo de apego y las horas en cuidado infantil? Realice un test al nivel 5 %, estudie el $p$-valor.

**P3.** Al discutir los efectos del cambio climático en su ciudad natal, usted argumenta que los inviernos son notoriamente más fríos que hace dos décadas, mientras que una amiga suya plantea que eso no es posible porque los efectos del cambio climático son a más largo plazo. Para zanjar la discusión, se accede a los datos de la temperatura más fría del año entre 1989 y 1996, y lo mismo entre 2009 y 2016, obteniendo promedios de 2,5 y 1,2 y desviaciones estándar de 1,0 y 1,0, respectivamente. Suponiendo muestras normales con igual varianza, plantee las hipótesis correspondientes, calcule el $p$-valor del test, e indique su conclusión para un nivel de 5 %.

**P4.** Se dice que $X$ tiene distribución Weibull de parámetros $\beta, \delta > 0$ (i.e. $X \sim W(\beta, \delta)$) si:

$$f(x) = \beta \delta x^{\delta - 1} e^{-\beta x^{\delta}}, \quad x > 0.$$

*a*) Si $Y = X^{\delta}$, muestre que $Y \sim exp(\beta)$.

*b*) Sea $X_1, \ldots, X_{25}$ una $m.a.s$ de $X \sim W(2, 2)$. Calcule, usando TCL:

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{25} X_i^2 > 15)$$

*c*) Considere $X_1, \ldots, X_n$ una $m.a.s.$ de $X \sim W(\beta, \delta)$, con $\delta$ conocido. Determine el E.M.V. ($\hat{\lambda}$) de $\lambda = 1/\beta$. ¿Qué distribución tiene $\hat{\lambda}$ para $n$ grande?

*d*) Usando $\hat{\lambda}$, construya un intervalo de confianza (con confianza $1 - \alpha$ para el parámetro $\lambda$), considerando que $n$ es grande.