

5 *física*
PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

TIPLER
MOSCA

VOLUMEN 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FÍSICA**

TERCERA EDICIÓN

Paul A. Tipler

Emeritus Professor of Physics
Oakland University



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Prefijos para las potencias de 10

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a

Algunos datos físicos

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g	$9,81 \text{ m/s}^2 = 32,2 \text{ pies/s}^2$
Radio de la Tierra	R_T	6370 km = 3960 mi
Masa de la Tierra	M_T	$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa del Sol		$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masa de la Luna		$7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$
Velocidad de escape en la superficie de la Tierra		11,2 km/s = 6,95 mi/s
Temperatura y presión en condiciones normales		$0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$ $1 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa}$
Distancia Tierra-Luna		$3,84 \times 10^8 \text{ m} = 2,39 \times 10^5 \text{ mi}$
Distancia Tierra-Sol (media)		$1,50 \times 10^{11} \text{ m} = 9,30 \times 10^7 \text{ mi}$
Velocidad del sonido en aire seco (condiciones normales)		331 m/s
Densidad del aire		$1,29 \text{ kg/m}^3$
Densidad del agua		1000 kg/m^3
Calor de fusión del agua	L_f	$333,5 \text{ kJ/kg}$
Calor de vaporización del agua	L_v	$2,257 \text{ MJ/kg}$

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Ro	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Y	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Unidades físicas y sus abreviaturas

A	amperio	lb	libra
Å	angstrom (10^{-10} m)	L	litro
atm	atmósfera	m	metro
Btu	unidad térmica británica	MeV	megaelectrón voltio
Bq	becquerel	Mm	megámetro (10^6 m)
C	culombio	mi	milla
$^{\circ}$ C	grado Celsius	min	minuto
cal	caloría	mm	milímetro
Ci	curie	ms	milisegundo
cm	centímetro	N	newton
din	dina	nm	nanómetro (10^{-9} m)
eV	electrón voltio	pt	pinta
$^{\circ}$ F	grado Fahrenheit	qt	cuarto de galón
fm	fémímetro, fermi (10^{-15} m)	rev	revolución
ft	pie	R	roentgen
Gm	gigámetro (10^9 m)	Sv	seivert
G	gauss	s	segundo
Gy	gray	T	tesla
g	gramo	u	unidad de masa unificada
H	henry	V	voltio
h	hora	W	vatio
Hz	hertz	Wb	weber
in	pulgada	a	año
J	julio	yd	yarda
K	kelvin	μ m	micrómetro (10^{-6} m)
kg	kilogramo	μ s	microsegundo
km	kilómetro	μ C	microculombio
keV	kiloelectrón voltio	Ω	ohmio

Prefacio

Esta tercera edición de la *Física*, titulada ahora *Física para Científicos e Ingenieros* es un texto de física elemental para un curso de dos a tres semestres en estudios superiores de ciencia e ingeniería. Se supone que el alumno ha estudiado o estudia simultáneamente cálculo infinitesimal. El libro se divide en seis partes: Mecánica, Oscilaciones y ondas, Termodinámica, Electricidad y Magnetismo, Óptica y Física Moderna. Existen dos versiones de este texto: la versión estándar con 35 capítulos que incluye dos de física moderna (Relatividad y Orígenes de la Teoría Cuántica) y una versión más extensa de 42 capítulos (disponible en un volumen o en dos), que posee siete capítulos adicionales de física moderna (Mecánica Cuántica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos, Partículas elementales y Astrofísica y Cosmología), de los cuales seis son nuevos.

Las unidades SI se utilizan casi exclusivamente en todo el texto. Las únicas excepciones se encuentran en el capítulo 4, donde se plantean unos ejercicios sobre los factores de conversión de unidades de fuerza (por ejemplo, entre libras-peso y newtons) y en el capítulo 16 al discutir los factores R de materiales aislantes.

Nuestros objetivos fundamentales al escribir este libro han sido:

1. Conseguir una introducción equilibrada de los conceptos y fenómenos más importantes de la física clásica y moderna de modo que se refleje la belleza y grandiosidad de la física, y al mismo tiempo proporcione una base sólida para un estudio posterior.
2. Exponer la física de modo lógico y coherente para que interese y sea accesible a todos los estudiantes.
3. Procurar que los alumnos ganen confianza en su comprensión de la física y en su destreza para resolver los problemas.
4. Estimular a los alumnos mediante la exposición de múltiples aplicaciones de la física en la vida cotidiana, en la tecnología actual y en el estudio del cosmos.

A continuación se describen algunas de las características de esta nueva edición.

Modernización y consolidación

Cada uno de los capítulos ha sido ampliamente revisado para hacer más concreta la presentación y proporcionar una introducción clara, lógica y sucinta a las ideas fundamentales de la física. Por ejemplo,

El trabajo y la energía se tratan en un solo capítulo (capítulo 6) en el que se discuten las aplicaciones del teorema del trabajo y la energía y la conservación de la energía mecánica a la resolución de problemas mecánicos, así como la ley generalizada de conservación de la energía. Se discuten ampliamente las dificultades que surgen en la aplicación del teorema del trabajo y la energía a los cuerpos extensos, así como la conversión de la energía interna en energía mecánica. El concepto de pseudotrabajo se presenta en el capítulo 7 después de introducir el centro de masas. El tratamiento de la velocidad de escape se desplaza al capítulo 10 (Gravedad).

La discusión del movimiento rotacional se verifica ahora en un solo capítulo (capítulo 8) y se ha reorganizado de modo que el momento angular y los cuerpos en rotación puedan ser discutidos antes del tratamiento completamente vectorial de la rotación.

El capítulo sobre oscilaciones (capítulo 12) se ha desplazado de modo que precede inmediatamente a los capítulos sobre ondas mecánicas. Al discutir la resonancia se ha tenido en cuenta la coherencia de las ecuaciones con las del capítulo 28 (Circuitos de corriente alterna) que describen la resonancia de los circuitos *LRC*. Muchos de los conceptos de ondas se introducen en el capítulo 13 (Ondas sobre cuerdas) y así, el capítulo 14 se dedica enteramente a las ondas sonoras. La reflexión, refracción, interferencia y difracción se discuten cualitativamente en tanto se aplican a todo tipo de ondas, pero todos los cálculos de detalle se aplazan hasta los capítulos de óptica (capítulo 30 a 33).

La termodinámica se ha escrito de nuevo y está ahora organizada en tres capítulos (capítulos 15 a 17). La introducción al concepto de temperatura es ahora más física y la sección sobre la interpretación cinética de la temperatura se ha ampliado con la inclusión de la distribución de Maxwell-Boltzmann.

La electricidad y el magnetismo (capítulo 18 a 29) se han revisado extensamente con atención especial para reforzar su accesibilidad. La carga eléctrica, los campos eléctricos debidos a cargas aisladas y el comportamiento de cargas puntuales y dipolos en un campo eléctrico vienen incluidos en el capítulo 18 (Campos eléctricos I). En el capítulo 19 (Campos eléctricos II), se calculan los campos producidos por distribuciones continuas de carga mediante la ley de Coulomb, la ley de Gauss o ambas. El tratamiento ampliado del modelo clásico de la conducción, junto con una discusión cualitativa de la teoría moderna en el capítulo 22 (Corriente eléctrica), complementan la introducción más detallada de la teoría de bandas de los sólidos en el capítulo 39 de la versión más extensa de este libro.

En el capítulo 25 (Fuentes del campo magnético) se establece la ley de Biot-Savart en función del campo creado por una carga móvil, así como del creado por un elemento de corriente. A continuación se calcula el campo creado por una espiral de corriente, un solenoide y un alambre rectilíneo antes de discutir la ley de Ampère. El estudio del flujo magnético se incluye ahora en el capítulo 26 (Inducción magnética), la imanación de una barra magnética se ha desplazado al capítulo 27 (Magnetismo en la materia) y la discusión de la corriente de desplazamiento de Maxwell se incluye en el capítulo 29 (Ecuaciones de Maxwell y Ondas electromagnéticas).

En la óptica (capítulos 30 a 33) el material sobre el ojo, microscopios y telescopios está incluido en un nuevo y corto capítulo sobre instrumentos ópticos (capítulo 32) que incluye también una nueva sección sobre la cámara fotográfica. En el capítulo 30 (Luz) se ha añadido una discusión sobre el arco iris. La difracción de la luz se trata primero cualitativamente y luego se le da un tratamiento riguroso y matemático según la técnica de los fasores en el capítulo 33 (Interferencia y difracción.)

Mediante esta modelización y consolidación, la extensión del libro no se ha incrementado a pesar del número importante de nuevos ejemplos, problemas, fotografías y figuras.

Física moderna y aplicaciones contemporáneas

Aparte de los capítulos especiales sobre física moderna (dos en la versión estándar y nueve en la versión extensa), toda la nueva edición viene impregnada por la física aplicada y moderna. En el capítulo 5 (Leyes de Newton II) se incluye una sección sobre métodos numéricos para abordar la solución de problemas mediante ordenador. Una serie de problemas de ordenador suplementan los incluidos al final de cada capítulo.

En la exposición de la física clásica se han suministrado fundamentos sólidos para el estudio de la física moderna. Así, en el capítulo 14 (Sonido) se introducen los paquetes de onda y la velocidad de grupo, conceptos básicos para el estudio de las ondas electrónicas en el capítulo 36 (Mecánica cuántica) de la versión ampliada. De igual modo, la distribución energética de Maxwell-Boltzmann se expone en el capítulo 15 (Temperatura), de forma que pueda utilizarse en la discusión de las propiedades eléctricas de los sólidos en el capítulo 39 y los diodos y triodos de las lámparas de vacío se discuten en el capítulo 28 (Circuitos de corriente alterna) para que sirvan de base al tratamiento de los dispositivos semiconductores en el capítulo 39.

Una novedad en esta edición son los cientos de fotografías, casi todas en color, que complementan y amplifican el texto y proporcionan ejemplos efectivos de las aplicaciones contemporáneas de la física.

Los 18 ensayos incluidos, de los cuales 15 son nuevos, ofrecen una visión fascinante de las aplicaciones e importancia de la física. Así Ralph Llewellyn relata como las leyes de conservación desempeñaron un papel crucial en el descubrimiento del neutrino (capítulo 7). James Walkes ha creado una introducción más ordenada al fenómeno del caos (capítulo 12). Jerrold Krenz ofrece un análisis sorprendente de todos los factores que contribuyen al calentamiento global de la Tierra (capítulo 16). Syun-ichi Akasofu ha escrito un ensayo delicioso sobre las auroras boreales y el campo magnético terrestre (capítulo 26). Robert Greenler proporciona una visión del arco iris en el infrarrojo (capítulo 30). En la versión ampliada del texto, Samuel Williamson presenta algunas aplicaciones de los dispositivos de interferencia cuántica de los superconductores o SQUIDS (capítulo 39). Los ensayos amplían y complementan los capítulos donde aparecen, y proporcionan un cambio delicioso de ritmo para estudiantes y profesores.

Ejemplos, ejercicios y problemas

La comprensión de la física y el desarrollo de la destreza en la solución de problemas se refuerzan mediante el uso extensivo e integral de ejemplos, ejercicios incluidos en el texto y series graduadas de problemas. De los 380 ejemplos resueltos de la versión estándar de 35 capítulos, 238 son nuevos. Casi todos los ejemplos son numéricos y se han escrito para asegurar la correspondencia con los problemas planteados al final de cada capítulo (especialmente los de nivel medio.) Los ejemplos resueltos frecuentemente están emparejados con un ejercicio numérico del texto (con su respuesta inmediata) que solicita del alumno la realización de un cálculo simple para extender el ejemplo y reforzar la comprensión. Muchos de los ejemplos simples, de una sola etapa, en la segunda edición se han convertido en ejercicios incluidos en el texto, muchos de los ejemplos no numéricos se han transformado en material del texto, bajo una indicación apropiada. A pesar de estas conversiones, el número de ejemplos resueltos se ha incrementado aproximadamente en un 50 por ciento.

Los problemas planteados al final de cada capítulo se han agrupado en tres niveles de dificultad. Los problemas del Nivel I son relativamente fáciles y de una sola etapa. Están ajustados a las secciones apropiadas del capítulo, de modo que el alumno puede rápidamente encontrar ayuda, si la necesita. Los problemas del Nivel II requieren una comprensión más sofisticada y no están divididos por secciones. Se ha invertido un gran esfuerzo en proporcionar una selección extensa de estos problemas de nivel medio. Los problemas del Nivel III son los más complejos y serán de ayuda a los estudiantes más avanzados. Por término medio en cada capítulo se plantean unos 35 problemas del Nivel I, 20 del Nivel II y 12 del Nivel III. El número de problemas de nivel medio se ha incrementado en más del 40 por ciento.

Matemáticas

La enseñanza de la física elemental es complicada por el amplio espectro de procedencia de los alumnos que acceden a su estudio. Unos poseen ya conocimientos

tos de la física y de cálculo por sus estudios previos; otros no han estudiado física y están comenzando el primer curso de cálculo. Para acomodar esta diversidad de antecedentes se expone en el apéndice A una revisión general de matemáticas (que incluye álgebra, geometría, trigonometría, números complejos y cálculo).

En el propio texto, el tratamiento matemático requerido se incrementa gradualmente a fin de que aquellos estudiantes que están estudiando simultáneamente el cálculo no se encuentren en desventaja. Los conceptos y métodos matemáticos nuevos, motivados por la física son inmediatamente aclarados con un ejemplo. Las derivadas e integrales se presentan en el capítulo 2 (Movimiento unidimensional) como una componente intrínseca de la discusión del desplazamiento y la velocidad instantánea. El producto escalar se introduce en el capítulo 6 cuando se necesita para discutir el trabajo y la energía, y el producto vectorial, se introduce en el capítulo 8 al tratar el momento y el movimiento de rotación. Unas pocas secciones, más sofisticadas matemáticamente son opcionales y están localizadas al final de los capítulos a fin de que no interrumpen el flujo de las ideas y puedan fácilmente omitirse.

El incremento gradual del nivel matemático a lo largo del texto, combinado con los ejercicios relativamente sencillos que se incluyen, así como numerosos problemas del Nivel 1, ayudarán a los alumnos menos preparados a ganar confianza en el estudio. Al mismo tiempo, el amplio espectro de complejidad de los problemas planteados y que culminan en el Nivel 3, asegura que todos los estudiantes encuentren un reto y un estímulo al nivel apropiado de su capacidad.

Fácil revisión

Varias características pedagógicas ayudarán a los estudiantes a revisar el material que acaban de estudiar. Las ecuaciones importantes, las leyes y las tablas se destacan mediante un fondo de color. Para una rápida referencia se han dispuesto titulares en los márgenes de las páginas. Los términos claves se han impreso en letras negritas, se definen en el texto y se relacionan en la sección de revisión de cada capítulo. En algunas secciones de cada capítulo se incluyen preguntas de reflexión. Éstas pueden ser rutinarias, de fácil respuesta a partir del texto que las precede, o bien pueden tratarse de preguntas abiertas que sirvan de base para una discusión en la clase.

Cada capítulo concluye con un resumen, en el cual se exponen las leyes importantes y los resultados obtenidos en dicho capítulo, además de relacionar las ecuaciones más utilizadas para resolver los problemas. Al final de cada capítulo hay una lista de las sugerencias bibliográficas, la revisión, y el conjunto de problemas ordenados por niveles en orden creciente. La revisión contiene: A) unos objetivos que establecen una lista de conocimientos; B) una relación de términos que el estudiante debe saber identificar y definir; y C) un conjunto de cuestiones sobre las que hay que considerar si son verdaderas o falsas.

Uso del color

El color se ha utilizado para mejorar la eficacia pedagógica de las ilustraciones, cuya mayor parte se han diseñado de nuevo para realzar su claridad y dimensionalidad. Los estudiantes apreciarán, por ejemplo, la forma en que el color se ha utilizado para distinguir entre vectores y sus componentes, entre los vectores fuerza y los vectores velocidad en el mismo diagrama o entre superficies de un conductor y superficies gaussianas. Las convenciones utilizadas en las ilustraciones, tales como el emplazamiento de los vectores fuerza en un diagrama, se han elegido con eficacia pedagógica como objetivo primario.

Comparación con la segunda edición

Los profesores familiarizados con la edición anterior pueden comprobar con tranquilidad que las características que contribuyeron a su utilidad no han dismi-

nuido en esta revisión. Todos los cambios introducidos lo han sido para incrementar y complementar lo que ya estaba bien fundamentado. A continuación relacionamos algunos de los cambios establecidos para facilitar el manejo de esta edición a aquéllos que utilizaron como enseñantes la segunda edición:

La lista de objetivos pedagógicos que antes se encontraban al comienzo de cada capítulo, ahora aparecen en la lista de revisión, después del resumen.

Las revisiones de álgebra y trigonometría se han desplazado del capítulo 1 al apéndice A.

La velocidad relativa se encuentra en el capítulo 3 (Movimiento en dos y tres dimensiones).

Cada una de las tres leyes del movimiento de Newton se discute en una sección separada del capítulo 4 (Leyes de Newton I). Las interacciones básicas se relacionan a continuación con una breve discusión cualitativa. En el capítulo 4 las aplicaciones se limitan a los problemas que implican una sola partícula. Una breve discusión de la fricción por rodadura se ha incluido en el capítulo 5. (Leyes de Newton II).

El equilibrio estático se trata ahora separadamente en un nuevo capítulo (capítulo 9).

Las discusiones sobre la distribución de Maxwell-Boltzmann y la bomba de calor se han agregado a la unidad de termodinámica, mientras que se han eliminado la desigualdad de Clausius y la prueba de la existencia de la entropía.

El capítulo 29 (Ecuaciones de Maxwell y Ondas electromagnéticas) incluye ahora la corriente de desplazamiento de Maxwell, la energía y el momento de las ondas electromagnéticas y el espectro electromagnético.

La transformación de Lorentz se trata al principio del capítulo 34 y se utiliza para simplificar la discusión sobre la sincronización de los relojes y la simultaneidad.

Cierto número de supresiones se verificaron para dar mayor fluidez al texto o para dar cabida a tópicos de la física contemporánea. Así se incluyen los umbrales de reacción, la naturaleza vectorial del desplazamiento angular, las líneas de campo gravitatorio, la fuerza ascensional en sistemas de referencia acelerados, la capacidad de una esfera aislada, el betatrón, el puente de Wheatstone y el vector magnético H .

Agradecimientos

Muchas personas han contribuido en esta edición. Desearía agradecer a todos los que utilizaron la primera o segunda edición y me ofrecieron sus comentarios y sugerencias. Sus cartas fueron valiosas y bien acogidas.

Ralph Llewellyn (University of Central Florida) escribió el excitante e informativo capítulo sobre astrofísica y cosmología (capítulo 42) en la versión ampliada.

Muchos nuevos e interesantes problemas que completan cada capítulo fueron proporcionados por Howard Miles (Washington State University), Lawrence B. Golden y James Kleim (Pennsylvania State University), Robert Rundel (Mississippi State University) y William E. Fasnacht (United States Naval Academy). Ellos nos proporcionaron también una de las series de soluciones resueltas para todos los problemas del texto.

Lawrence Golden y James Klein escribieron también el suplemento sobre investigaciones con ordenador.

James Walker (Washington State University) preparó las respuestas relacionadas al final del texto, así como las soluciones que se han publicado aparte (*Manual de Soluciones*, sólo para profesores) y nos ofreció muchas sugerencias valiosas para mejorar y clarificar los problemas de final de capítulo.

Robin Macqueen (University of British Columbia) contribuyó con sus sugerencias a las Lecturas Suplementarias de cada capítulo.

La exactitud de los cálculos numéricos en los ejemplos y ejercicios ha sido comprobada por Robert Weidman (Michigan Technological University), Chelcie Liu (City College of San Francisco), y Edward Brown (Manhattan College). Este último nos ha ofrecido múltiples sugerencias en sus revisiones sobre los problemas de final de capítulo.

John Schulz, con la ayuda de Nancy Dyer, Lana Berkovich, Lee Chase, y Paul Doherty seleccionó y obtuvo muchas de las espectaculares fotografías que aparecen en esta edición.

Gene Mosca (United States Naval Academy) aplicó su profundo conocimiento de la enseñanza de la física a la revisión de la *Study Guide*, escrita originalmente por Granvil C. Kyker.

David Mills (College of the Redwoods) preparó un banco de ensayos con 3000 cuestiones conceptuales y numéricas de elección múltiple.

El *Libro de Recursos para profesores* fue preparado por Robert Allen (Inver Hills Community College), John Davis (University of Washington), John Risley (North Carolina State University), James Walker (Washington State University), Vicki Williams (Pennsylvania State University) y yo mismo. Este manual comprende una amplia selección de demostraciones, listas de programas de software de dominio público, comercialmente disponibles, para uso en la enseñanza de la física elemental, una guía de películas y videos, sugerencias de trabajos para casa, preguntas de reflexión exigentes y una relación de respuestas completas para todos los problemas de fin de capítulo.

Roger Clapp (University of South Florida), Manuel Gómez Rodríguez (Universidad de Puerto Rico, Río Piedras), John Russel (Southeastern Massachusetts University) y Jim Smith (University of Illinois, Champaign-Urbana) revisaron la segunda edición completa: John Russell revisó también partes del segundo borrador manuscrito, y Jim Smith revisó el primer borrador completo de la tercera edición. Sus comentarios sustanciales y constructivos y sus sugerencias fueron una fuente continua de inspiración durante los muchos meses de este proyecto.

Muchos otros profesores han proporcionado revisiones amplias y de valor inestimable. Todos ellos han contribuido de un modo fundamental y profundamente apreciado a la calidad de esta revisión. Por todo ello deseo agradecer a:

Edward Brown, Manhattan College	Doug Kurtze, Clarkson University
James Brown, The Colorado School of Mines	Lui Lam, Los Alamos National Laboratory
Walter Borst, Texas Technological University	Chelcie Liu, City College of San Francisco
Christopher Cameron, University of Southern Mississippi	Robert Luke, Boise State University
Bob Coakley, University of Southern Maine	Eric Matthews, Wake Forest University
Andrew Coates, University College, London, United Kingdom	Konrad Mauersberger, University of Minnesota, Minneapolis
Miles Dressler, Washington State University	Duncan Moore, University of Rochester
Allin Gould, John Abbott College, C.E.G.E.P. Canada	Gene Mosca, United States Naval Academy
Dennis Hall, University of Rochester	Elizabeth Nickles, Albany College of Pharmacy
Grant Hart, Brigham Young University	Harry Otteson, Utah State University
Jerold Izatt, University of Alabama	Jack Overley, University of Oregon
Alvin Jenkins, North Carolina State University	Larry Panek, Widener University
Lorella Jones, University of Illinois, Champaign-Urbana	Malcolm Perry, Cambridge University, United Kingdom
Michael Kambour, Miami-Dade Junior College	Brooke Pridmore, Clayton State College
Patrick Kenealy, California State University at Long Beach	Arthur Quinton, University of Massachusetts, Amherst
	John Risley, North Carolina State University
	Robert Rundel, Mississippi State University

Michael Simon, *Houstonian Community College*

Richard Smith, *Montana State University*

Larry Sorenson, *University of Washington*

Thor Stromberg, *New Mexico State University*

Colin Thomson, *Queens University, Canada*

Brian Watson, *St. Lawrence University*

Robert Weidman, *Michigan Technological University*

Stan Williams, *Iowa State University*

Thad Zaleskiewicz, *University of Pittsburgh, Greensburg*

George Zimmerman, *Boston University*

Finalmente, agradezco a todo el personal de Worth Publishers su ayuda y su aliento, en particular a Steven Tenney, Valerie Neal y Betsy Mastalski.
Berkeley, California

Paul Tipler

Suplementos

Para estudiantes

Study Guide, Volúmenes 1 y 2

Student's Solutions Manual

Computer Investigations

Para profesores

Solutions Manual, Volúmenes 1 y 2

Test Bank, Volúmenes 1 y 2

Computerized Test-Generation System (IBM y Macintosh)

Instructor's Resource Manual

Transparencies, Volúmenes 1 y 2

Sobre el autor

Paul Tipler nació en la pequeña ciudad agrícola de Antigo, Wisconsin, en 1933. Realizó sus estudios medios en Oshkosh, Wisconsin, de donde su padre era superintendente de las Escuelas Públicas. Recibió el título de *Bachelor of Science* en la Universidad de Purdue en 1955 y el de *Philosophical Doctor* en la Universidad de Illinois, en donde estudió la estructura de los núcleos. Impartió la enseñanza durante un año en la *Wesleyan University* de Connecticut mientras redactaba su tesis. Después se desplazó a la Universidad de Oakland en Michigan, donde fue uno de los primeros miembros del Departamento de Física, y desempeñó un papel importante en el desarrollo de los planes de estudio. Durante los siguientes 20 años explicó casi todas las disciplinas de física y escribió la primera y segunda ediciones de sus ampliamente difundidos textos *Física Moderna* (1969, 1978) y *Física* (1976, 1982). En 1982 se desplazó a Berkeley, California, donde ahora reside y donde escribió *College Physics* (1987). Además de la física, sus aficiones incluyen la música, excursionismo y camping. Es un excelente pianista de jazz y un buen jugador de póker.

Índice abreviado

Tomo 1

Capítulo 1 Sistemas de medida 1

Parte 1 Mecánica 19

- Capítulo 2 Movimiento en una dimensión 20
- 3 Movimiento en dos y tres dimensiones 47
- 4 Leyes de Newton I 77
- 5 Leyes de Newton II 107
- 6 Trabajo y energía 135
- 7 Sistemas de partículas y conservación del momento lineal 182
- 8 Rotación 227
- 9 Equilibrio estático de un cuerpo rígido 275
- 10 Gravedad 295
- 11 Mecánica de sólidos y de fluidos 331

Parte 2 Oscilaciones y ondas 367

- Capítulo 12 Oscilaciones 368
- 13 Ondas en una cuerda 409
- 14 Sonido 439

Parte 3 Termodinámica 485

- Capítulo 15 Temperatura 486
- 16 Calor, y primer principio de la termodinámica 517
- 17 Energía utilizable 563

- Apéndice A Revisión de matemáticas AP-1
- B Unidades SI AP-21
- C Datos numéricos AP-22
- D Factores de conversión AP-25
- E Tabla periódica de los elementos AP-27
- Origen de las ilustraciones OI-1
- Respuestas a los problemas R-1
- Índice alfabético I-1

Tomo 2 Parte 4 Electricidad y magnetismo 597

Capítulo 18	Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga	598
19	Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga	624
20	Potencial eléctrico	656
21	Capacidad, dieléctricos y energía electrostática	690
22	Corriente eléctrica	716
23	Circuitos de corriente continua	749
24	Campo magnético	781
25	Fuentes del campo magnético	811
26	Inducción magnética	840
27	Magnetismo en la materia	878
28	Circuitos de corriente alterna	898
29	Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas	943

Parte 5 Óptica 973

Capítulo 30	Luz	974
31	Óptica geométrica	1012
32	Instrumentos ópticos	1041
33	Interferencia y difracción	1061

Parte 6 Física moderna 1099

Capítulo 34	Relatividad	1100
35	Los orígenes de la teoría cuántica	1145

Apéndice A	Revisión de matemáticas	AP-1
B	Unidades SI	AP-21
C	Datos numéricos	AP-22
D	Factores de conversión	AP-25
E	Tabla periódica de los elementos	AP-27
	Origen de las ilustraciones	OI-1
	Respuestas a los problemas	R-1
	Índice alfabético	I-1

Índice analítico

Parte 4

Electricidad y magnetismo 597

Capítulo 18

- Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga** 598
- 18-1 Carga eléctrica 599
 - 18-2 Conductores y aislantes y carga por inducción 601
 - 18-3 Ley de Coulomb 603
 - 18-4 Campo eléctrico 607
 - 18-5 Líneas de campo eléctrico 612
 - 18-6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos 614
 - 18-7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos 616
- Resumen 618
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 619

Capítulo 19

- Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga** 624
- 19-1 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb 625
 - 19-2 Ley de Gauss 631
 - 19-3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss 635
 - 19-4 Carga y campo en la superficie de los conductores 644
 - 19-5 Deducción matemática de la ley de Gauss (Opcional) 649
- Resumen 650
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 651

Capítulo 20

- Potencial eléctrico** 656
- 20-1 Potencial eléctrico y diferencia de potencial 657
 - 20-2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales 660
 - 20-3 Energía potencial electrostática 664
 - 20-4 Cálculo del potencial eléctrico en distribuciones continuas de carga 665
 - 20-5 Campo eléctrico y potencial 671
 - 20-6 Superficies equipotenciales, distribución de carga y ruptura dieléctrica 674
- Resumen 680
- Ensayo** Richard Zallen, *Electrostática y xerografía* 682
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 685

Capítulo 21

- Capacidad, dieléctricos y energía electrostática 690
- 21-1 Condensador de placas paralelas 691
 - 21-2 Condensador cilíndrico 693
 - 21-3 Dieléctricos 694
 - 21-4 El almacenamiento de la energía eléctrica 698
 - 21-5 Combinaciones de condensadores 702
- Resumen 708
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 709

Capítulo 22

- Corriente eléctrica 716
- 22-1 Corriente y movimiento de cargas 716
 - 22-2 Ley de Ohm y resistencia 720
 - 22-3 Energía en los circuitos eléctricos 725
 - 22-4 Combinaciones de resistencias 731
 - 22-5 Modelo microscópico de la conducción eléctrica 735
- Resumen 738
- Ensayo* Elizabeth Pflagl Nickles, *Conducción en células nerviosas* 740
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 744

Capítulo 23

- Circuitos de corriente continua 749
- 23-1 Reglas de Kirchhoff 750
 - 23-2 Circuitos RC 760
 - 23-3 Amperímetros, voltímetros y ohmímetros 767
- Resumen 772
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 773

Capítulo 24

- El campo magnético 781
- 24-1 Fuerza ejercida por un campo magnético 782
 - 24-2 Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético 787
 - 24-3 Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes 798
 - 24-4 Efecto Hall 801
- Resumen 804
- Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 806

Capítulo 25

- Fuentes del campo magnético 811
- 25-1 Campo magnético creado por las cargas puntuales móviles 812

- 25-2 Campo magnético creado por corrientes eléctricas:
Ley de Biot y Savart 815
- 25-3 Definición del amperio 826
- 25-4 Ley de Ampère 828
Resumen 832
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 833

Capítulo 26

- Inducción magnética 840**
- 26-1 Flujo magnético 841
- 26-2 Fem inducida y ley de Faraday 843
- 26-3 Ley de Lenz 846
- 26-4 Fem de movimiento 848
- 26-5 Corrientes de Foucault o turbillonarias 852
- 26-6 Generadores y motores 854
- 26-7 Inductancia 857
- 26-8 Circuitos LR 859
- 26-9 Energía magnética 862
Resumen 864
Ensayo Syun-Ichi Akasofu, *Las Auroras* 866
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 871

Capítulo 27

- Magnetismo en la materia 878**
- 27-1 Imantación y susceptibilidad magnética 879
- 27-2 Momentos magnéticos atómicos 882
- 27-3 Paramagnetismo 884
- 27-4 Ferromagnetismo 886
- 27-5 Diamagnetismo 890
Resumen 892
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 894

Capítulo 28

- Circuitos de corriente alterna 898**
- 28-1 Corriente alterna en una resistencia 899
- 28-2 Corriente alterna en bobinas y condensadores 902
- 28-3 Fasores 907
- 28-4 Circuitos LC y LCR sin generador 908
- 28-5 Circuitos LCR con un generador 912
- 28-6 Transformadores 920
- 28-7 Rectificación y amplificación 923
Resumen 927
Ensayo John Dentler, *Motores eléctricos* 929
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 937

Capítulo 29

- Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 943**
- 29-1 Corriente de desplazamientos de Maxwell 944
 - 29-2 Ecuaciones de Maxwell 947
 - 29-3 Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas (Opcional) 947
 - 29-4 Energía y cantidad de movimiento en una onda electromagnética 953
 - 29-5 Espectro electromagnético 957
 - Resumen 962
 - Ensayo* C. W. F. Everitt, *James Clerk Maxwell (1831-1879)* 964
 - Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 967

Parte 5

Óptica 973

Capítulo 30

- Luz 974**
- 30-1 Velocidad de la luz 976
 - 30-2 Propagación de la luz: Principio de Huygens 981
 - 30-3 Reflexión 982
 - 30-4 Refracción 985
 - 30-5 Principio de Fermat 995
 - 30-6 Polarización 997
 - Resumen 1003
 - Ensayo* Robert Greenler, *Más allá del Arco-iris (visible)* 1004
 - Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 1007

Capítulo 31

- Óptica geométrica 1012**
- 31-1 Espejos planos 1012
 - 31-2 Espejos esféricos 1015
 - 31-3 Imágenes formadas por refracción 1022
 - 31-4 Lentes delgadas 1025
 - 31-5 Aberraciones 1034
 - Resumen 1035
 - Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas 1036

Capítulo 32

- Instrumentos ópticos 1041**
- 32-1 El ojo 1041
 - 32-2 La lupa o microscopio simple 1046
 - 32-3 La cámara fotográfica 1047
 - 32-4 Microscopio compuesto 1050
 - 32-5 Anteojos y telescopios 1052

Resumen	1056
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas	1058

Capítulo 33

Interferencia y difracción	1061
33-1 Diferencia de fase y coherencia	1061
33-2 Interferencia en películas delgadas	1063
33-3 El interferómetro de Michelson	1066
33-4 Diagrama de interferencia de dos rendijas	1068
33-5 Suma de ondas armónicas utilizando fasores	1071
33-6 Diagrama de interferencia de tres o más focos igualmente separados	1073
33-7 Diagrama de difracción de una sola rendija	1076
33-8 Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas	1080
33-9 Difracción de Fraunhofer y de Fresnel	1082
33-10 Difracción y resolución	1083
33-11 Redes de difracción	1085
Resumen	1090
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas	1091

Parte 6

Física moderna 1099

Capítulo 34

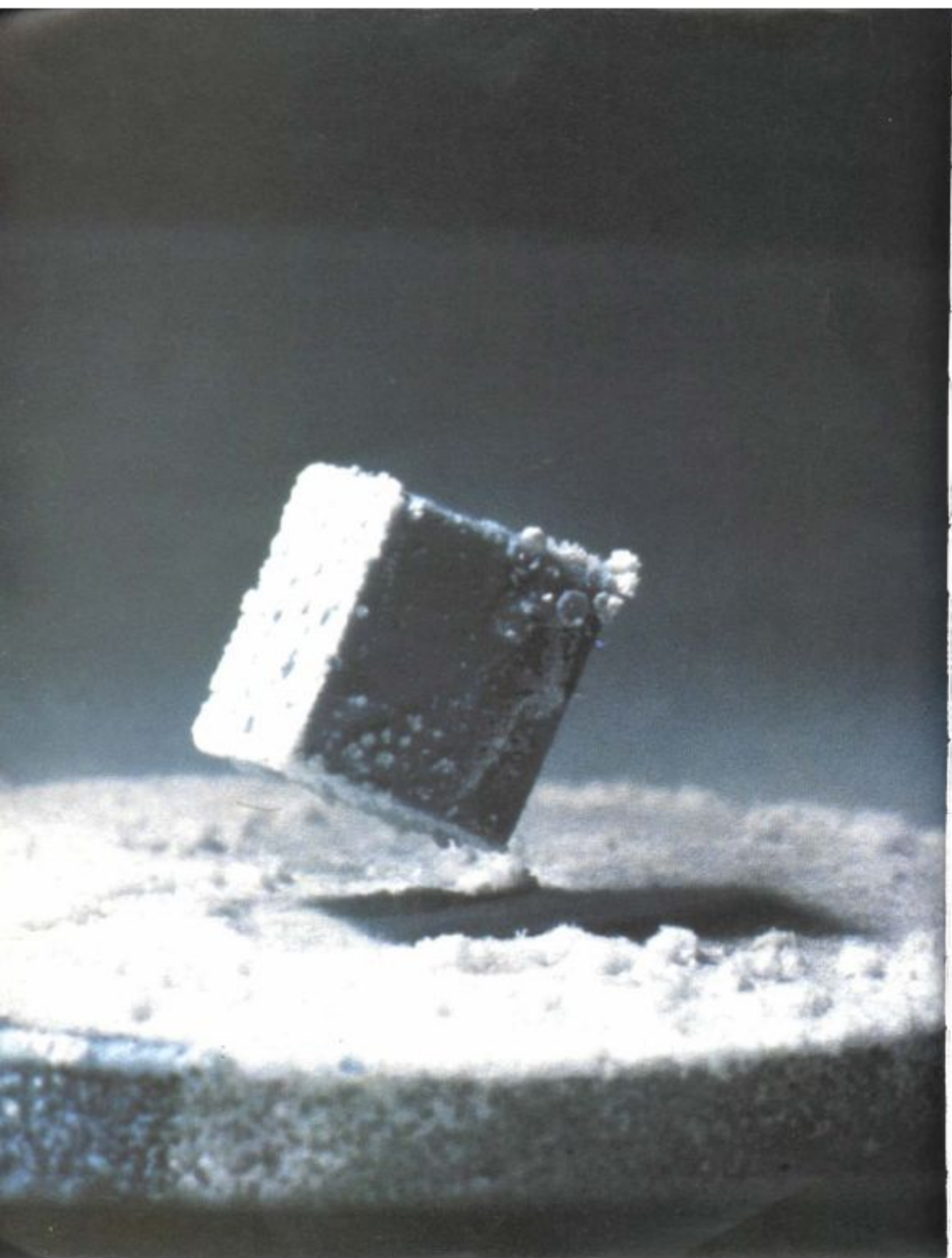
Relatividad	1100
34-1 Relatividad newtoniana	1101
34-2 El experimento de Michelson-Morley	1103
34-3 Postulados de Einstein	1106
34-4 La transformación de Lorentz	1107
34-5 Sincronización de relojes y simultaneidad	1113
34-6 Efecto Doppler	1118
34-7 Paradoja de los gemelos	1119
34-8 Transformación de la velocidad	1122
34-9 Cantidad de movimiento relativista	1124
34-10 Energía relativista	1126
34-11 Relatividad general	1132
Resumen	1135
Sugerencias bibliográficas, Revisión, Problemas	1138

Capítulo 35

Los orígenes de la Teoría Cuántica	1145
35-1 El origen de la constante cuántica: Radiación del cuerpo negro	1147
35-2 El efecto fotoeléctrico	1148
35-3 Rayos X	1152

FÍSICA**

TERCERA EDICIÓN



Parte

4

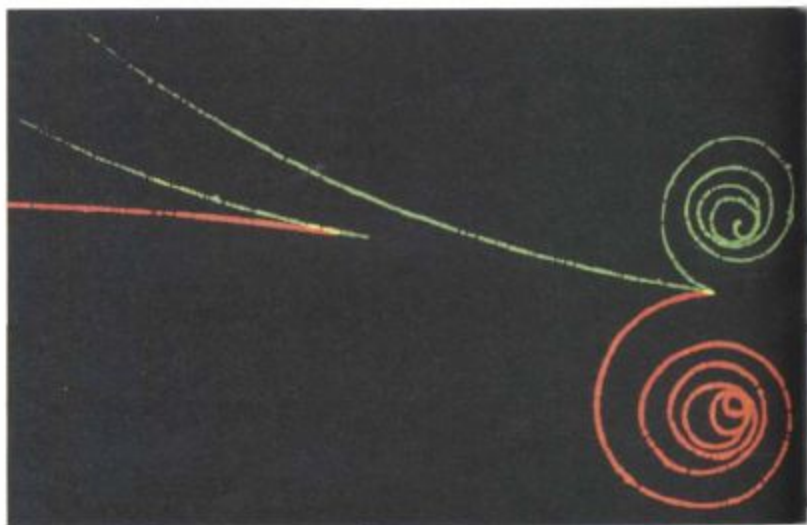
Electricidad y
magnetismo

Un pequeño imán permanente de forma cúbica levita sobre un disco de material superconductor de óxido de cobre-bario-ytrio, refrigerado por nitrógeno líquido a 77 K. A temperaturas inferiores a 92 K, el disco se hace superconductor. El campo magnético del cubo origina corrientes eléctricas que circulan en el disco superconductor de tal modo que el campo magnético resultante en éste es cero. Estas corrientes producen su campo magnético que repele al cubo.

Capítulo 18

Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga

Producción de pares. Un electrón de carga $-e$ y un positrón de carga $+e$ se crean por la interacción de radiación electromagnética con la materia. Las trayectorias de las partículas cargadas opuestamente, hechas visibles en una cámara de burbuja, se desvían en direcciones contrarias por medio de un campo magnético.



La electricidad está hoy tan arraigada que apenas le prestamos atención. Sin embargo, hace un siglo, el alumbrado eléctrico era escaso y no existían estufas eléctricas, motores, radios ni televisores. Aunque el uso práctico de la electricidad se ha desarrollado fundamentalmente en el siglo veinte, su estudio tiene una larga historia. Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos. Estos observaron que al frotar el ámbar, éste atraía pequeños objetos como pajitas o plumas. Ciertamente, la palabra «eléctrico» procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektron*.

En este capítulo comenzaremos el estudio de la electricidad con una pequeña discusión sobre el concepto de carga eléctrica, seguida de una breve introducción al concepto de conductores y aislantes y al modo en que un conductor toma una carga. A continuación estudiaremos la ley de Coulomb que describe la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Posteriormente introduciremos el campo eléctrico y veremos cómo puede describirse mediante las líneas de campo, las cuales indican la magnitud y dirección del campo. Por último, discutiremos el comportamiento de las cargas puntuales y los dipolos en campos eléctricos.

18-1 Carga eléctrica

Consideremos un experimento simple en el que interviene la atracción eléctrica. Una barra de plástico se frota con un trozo de piel y se suspende de una cuerda que puede girar libremente. Si aproximamos a esta barra, una segunda barra de plástico, frotada también con una piel, observaremos que las barras se repelen entre sí (figura 18-1). El mismo resultado se obtiene si repetimos el mismo experimento con dos barras de vidrio que han sido frotadas con seda. Sin embargo, si utilizamos una barra de plástico frotada con piel y una varilla de vidrio frotada con seda, observaremos que las barras se atraen entre sí.

Al frotar el plástico con piel o el vidrio con seda, estas sustancias se «electrifican» o «cargan». Repitiendo el experimento con diversos tipos de materiales encontramos que todos los objetos cargados pueden clasificarse en dos grupos: aquellos que se cargan como la barra de plástico frotada con una piel y los que se cargan como la varilla de vidrio frotada con un paño de seda. El gran hombre de Estado y científico americano, Benjamín Franklin, propuso un modelo de electricidad explicando este fenómeno. Sugirió que todo objeto posee una cantidad «normal» de electricidad y cuando dos objetos se frotan entre sí, parte de la electricidad se transfiere de un cuerpo al otro; así pues, uno tiene un exceso y el otro una deficiencia de valor igual. Franklin describió las cargas resultantes con los signos *más* y *menos*. Al tipo de carga adquirida por una barra de vidrio frotada con un paño de seda le llamó positiva, lo cual significaba que el paño de seda adquiría una carga negativa de igual magnitud. Según esta elección de Franklin, el plástico frotado con una piel adquiere una carga negativa y la piel adquiere una carga positiva de igual magnitud. Como vimos en nuestro experimento, dos objetos que transportan el mismo tipo de carga —es decir, dos objetos ambos positivos o ambos negativos— se repelen entre sí, mientras que si transportan cargas opuestas se atraen mutuamente (figura 18-2).

Hoy sabemos que cuando el vidrio se frota con un paño de seda, se transfieren electrones del vidrio a la seda y por tanto, ésta adquiere un número en exceso de electrones y el vidrio queda con un déficit de estas partículas. Según la clasificación de Franklin, que todavía se utiliza, la seda se carga negativamente, y se dice que los electrones transportan una carga negativa.

Ahora sabemos que la materia está formada por átomos eléctricamente neutros. Cada átomo posee un pequeño núcleo que contiene protones dotados cada uno con una carga positiva y neutrones de carga nula. El número de protones en el núcleo es el número atómico Z del elemento. Rodeando al núcleo existe un número igual de electrones negativamente cargados. El electrón y el protón son partículas muy distintas. Así, la masa del protón es aproximadamente 2000 veces mayor que la del electrón. Sin embargo, sus cargas son exactamente iguales pero opuestas en signo. La carga del protón es e y la del electrón $-e$, siendo e la **unidad fundamental de carga**. Todas las cargas se presentan en cantidades enteras de la unidad fundamental de carga e . Es decir, la **carga está cuantizada**. Toda carga Q presente en la naturaleza puede escribirse en la forma $Q = \pm Ne$ siendo N un número entero*. La cuantización de la carga eléctrica no se observa normalmente, porque N es casi siempre un número muy grande. Por ejemplo, al cargar una barra de plástico frotándola con un trozo de piel se transfieren del orden de 10^{15} electrones a la barra.



Figura 18-1 Dos barras de plástico que han sido frotadas con piel se repelen mutuamente.

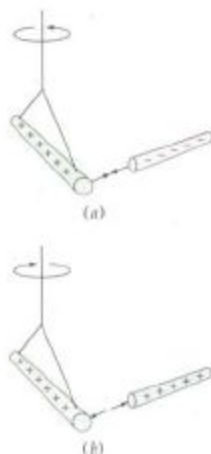
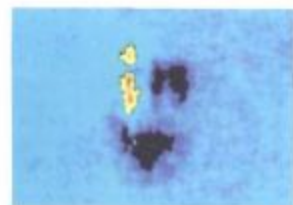


Figura 18-2 (a) Los objetos portadores de cargas de signo opuesto se atraen entre sí. (b) Los objetos portadores de cargas de igual signo se repelen entre sí.

* En el modelo quark de las partículas elementales, se supone que los protones, neutros y otras partículas están formadas por entes llamados quarks que transportan cargas de $\pm \frac{1}{3}e$ o $\pm \frac{2}{3}e$. Aparentemente los quarks no pueden observarse individualmente, sino sólo en combinaciones que dan lugar a una carga neta de $\pm Ne$ o 0.

Carga cuantizada. Estos iones individuales de mercurio han sido atrapados en una configuración del campo eléctrico llamada trampa de Paul. En la fotografía del falso color, los iones están preferentemente localizados en las zonas rojas. Los iones vecinos están separados por varios micrómetros.



Carga por contacto. Una muestra de plástico de anchura 0,02 mm fue cargada en contacto con una pieza de níquel. Aunque el plástico posee una carga neta positiva, se aprecian regiones de carga negativa (oscuras) y regiones de carga positiva (amarillo). La fotografía se tomó barriendo una aguja cargada, de anchura 10^{-7} m, sobre la muestra y midiendo la fuerza electrostática sobre la aguja.

Cuando los objetos están en íntimo contacto, como ocurre al frotarlos entre sí, los electrones se transfieren de un objeto al otro. Un objeto queda con un número en exceso de electrones y se carga, por tanto, negativamente y el otro queda con un déficit de electrones y su carga es positiva. En este proceso la carga no se crea, sino simplemente se transfiere. La carga neta de los dos objetos considerada globalmente no cambia. Es decir, *la carga se conserva*. La ley de conservación de la carga es una ley fundamental de la naturaleza. En ciertas interacciones entre partículas elementales puede ocurrir que los electrones se creen o aniquilen. Sin embargo, en todos estos procesos se producen o destruyen cantidades iguales de cargas negativas y positivas, de manera que la carga del universo no varía. Por ejemplo, siempre que se crea un electrón de carga $-e$, se crea también una partícula llamada *positrón* de carga $+e$. (Este proceso se llama *producción de pares*.)

La unidad SI de carga es el culombio, el cual se define en función de la unidad de corriente o intensidad eléctrica, el *amperio*. (El amperio se define a partir de medidas de fuerza magnética que discutiremos en el capítulo 25. Es la unidad de corriente utilizada en los circuitos eléctricos usuales.) El *culombio* (C) es la cantidad de carga que fluye a través del área transversal de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el mismo es de un amperio. La unidad fundamental de carga eléctrica e está relacionada con el culombio por

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Unidad fundamental de carga

En el laboratorio pueden obtenerse cargas entre unos 10 nC ($1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$) y $0,1 \mu\text{C}$ ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$) disponiendo ciertos objetos en contacto íntimo, o simplemente frotando sus superficies. Tales procedimientos llevan consigo la transferencia de muchos electrones.

Ejemplo 18-1

Una moneda de cobre tiene una masa de 3 g. El número atómico del cobre es $Z = 29$ y su masa atómica es 63,5 g/mol. ¿Cuál es la carga total de los electrones en la moneda?

Determinemos en primer lugar el número de átomos en 3 g de cobre. Como un mol de cobre contiene un número de átomos igual al número de Avogadro y su masa es de 63,5 g, el número de átomos en 3 g de cobre es

$$N = (3 \text{ g}) \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{63,5 \text{ g/mol}} = 2,84 \times 10^{22} \text{ átomos}$$

Cada átomo contiene $Z=29$ electrones, de modo que la carga total Q es

$$Q = (2,84 \times 10^{22} \text{ átomos}) (29 \text{ electrones/átomo}) (-1,6 \times 10^{-19} \text{ C/electrón}) \\ = -1,32 \times 10^4 \text{ C}$$

Cuestión

1. ¿Al frotar el lomo de un gato, éste queda cargado positiva o negativamente?

18-2 Conductores y aislantes y carga por inducción

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**. En otros materiales, tales como la madera o vidrio todos los electrones están ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se denominan **aislantes**.

En un simple átomo de cobre existen 29 electrones ligados al núcleo por atracción electrostática entre los electrones cargados negativamente y los núcleos cargados positivamente. Los electrones más externos están ligados más débilmente que los más internos a causa de su mayor distancia al núcleo y a la repulsión de los electrones más internos. Cuando un gran número de átomos de cobre se combinan en una pieza de cobre metálico, el enlace de los electrones de cada átomo individual se modifica por interacciones con los átomos próximos. Uno o más de los electrones externos de cada átomo queda en libertad para moverse por todo el metal, del mismo modo que una molécula de gas se mueve en el interior de una caja. El número de electrones libres depende del metal particular, pero típicamente oscila alrededor de un electrón por átomo. El átomo de cobre privado de uno de sus electrones exteriores transporta una carga positiva y se llama *ion positivo*. En el cobre metálico, los iones de cobre se distribuyen regularmente formando una *red*. Normalmente, un conductor es eléctricamente neutro porque existe un ion reticular que transporta una carga positiva $+e$ por cada electrón libre portador de una carga negativa $-e$. Un conductor puede tomar una carga neta por adición o extracción de electrones libres.

La figura 18-3 muestra un **electroscopio**, que es un dispositivo para la detección de carga eléctrica. Dos láminas de oro se adhieren a un vástago conductor que posee una esfera en su parte superior y quedan aislados de la estructura del aparato. Cuando están descargadas, las hojas cuelgan juntas verticalmente. Cuando se toca la esfera con una barra de plástico cargada negativamente, parte de esta carga se transfiere a la esfera y alcanza las láminas de oro que se separan en virtud de la repulsión eléctrica de sus cargas negativas. Tocando la bola con una barra de vidrio positivamente cargada, también las láminas de oro se separan. En este caso, la barra de vidrio cargada positivamente atrae los electrones de la esfera metálica, dejando las hojas de oro cargadas positivamente.

En la figura 18-4 puede verse una larga barra metálica en contacto con la bola de un electroscopio. Cuando el extremo más alejado de esta barra entra en contacto con una barra de plástico cargada, las hojas del electroscopio divergen porque los electrones de la barra de plástico son conducidos a lo largo de la barra metálica hasta el electroscopio. Si la barra metálica es sustituida por un palo de madera y su extremo más alejado se pone en contacto con una barra de plástico cargada, no ocurre nada. La madera es un aislante que no conduce la electricidad.



Figura 18-3 Electroscopio. Las dos hojas de oro se conectan a una barra metálica terminada en la parte superior por una esfera de metal. Cuando una carga negativa se deposita sobre la bola metálica, es conducida a las hojas y éstas se repelen entre sí.



Figura 18-4 Una barra metálica está en contacto con la esfera de metal del electroscopio. Al tocar el extremo de la barra con otra de plástico cargada negativamente, parte de la carga es conducida a lo largo de la barra metálica al electroscopio, como evidencia la separación de las hojas de oro.

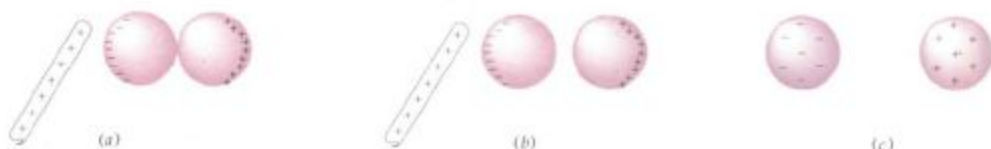


Figura 18-5 Carga por inducción. (a) Los dos conductores esféricos en contacto adquieren cargas opuestas pues la barra cargada positivamente atrae los electrones hacia la esfera de la izquierda dejando la esfera de la derecha con cargas positivas. (b) Si las esferas se separan sin mover la barra de su posición, las esferas retienen sus cargas iguales y opuestas. (c) Al quitar la barra, las esferas quedan uniformemente cargadas con cargas iguales y opuestas.

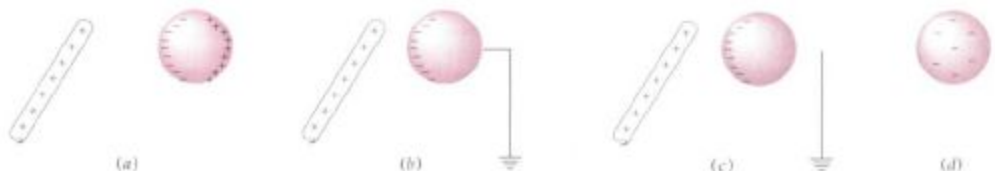
Existe un método simple y práctico de cargar un conductor aprovechando el movimiento de los electrones libres en un metal. Como se indica en la figura 18-5 tenemos dos esferas metálicas sin cargar en contacto. Al acercar a una de las esferas una barra cargada, los electrones libres fluyen de una esfera a la otra. Si la barra está cargada positivamente, atrae a los electrones cargados negativamente y la esfera más próxima a la barra adquiere electrones de la otra. La esfera más próxima adquiere carga negativa y la más alejada queda con una carga neta igual, pero positiva (figura 18-5a). Si las esferas se separan antes de retirar la carga (figura 18-5b), quedarán con cargas iguales y opuestas (figura 18-5c). Un resultado semejante se obtiene con una barra cargada negativamente, la cual hace que los electrones pasen de la esfera más próxima a la más alejada. En ambos casos las esferas se cargan sin ser tocadas por la barra y la carga de la barra no se modifica. Este proceso se llama **inducción electrostática** o **carga por inducción**. Si un conductor esférico cargado se pone en contacto con una esfera idéntica sin carga, la carga de la primera esfera se distribuye por igual en ambos conductores. Si las esferas se separan entonces, cada una de ellas quedará con la mitad del exceso de carga originalmente en la primera esfera.

La propia Tierra constituye un conductor que para muchos propósitos puede considerarse como infinitamente grande. Cuando un conductor se pone en contacto con el suelo se dice que está **conectado a tierra**. Esto se representa esquemáticamente mediante un cable de conducción que termina en unas pequeñas líneas horizontales como indica la figura 18-6b. Es posible usar la tierra para cargar un simple conductor por inducción. En la figura 18-6a se acerca una barra cargada positivamente a una esfera conductora sin carga. Los electrones libres son atraídos al lado próximo de la barra positiva, dejando el extremo opuesto con carga positiva. Si se conecta a tierra la esfera con la barra cargada presente, aquella adquiere una carga opuesta a la de la barra, ya que los electrones de la Tierra se desplazan a lo largo del cable conductor y neutralizan la carga positiva existente en el lado derecho de la esfera (figura 18-6b). La conexión a tierra se interrumpe antes de retirar la barra para completar la carga por inducción (figura 18-6c). Retirando entonces la barra, la esfera queda con carga negativa y uniformemente distribuida como indica la figura 18-6d.

Cuestión

2. ¿Pueden cargarse los aislantes por inducción. lo mismo que los conductores?

Figura 18-6 (a) La carga libre sobre una esfera conductora se polariza a causa de la barra cargada positivamente, de tal modo que la esfera tiene una carga negativa en el lado más próximo a la barra y una carga positiva en el otro extremo. (b) Si la esfera se conecta a tierra por medio de un alambre, los electrones del suelo neutralizan la carga positiva en el lado derecho y la esfera queda negativamente cargada. (c) La carga negativa permanece si el cable se desconecta antes de separar la barra. (d) Al quitar la barra, la esfera queda cargada negativa y uniformemente.





(Izquierda) El pararrayos de este edificio está conectado a tierra para guiar la corriente eléctrica desde el relámpago hasta el suelo. (Derecha) Estas damas utilizan sombreros con cadenas metálicas que arrastran por el suelo, supuestamente para protegerse contra los rayos.

18-3 Ley de Coulomb

La fuerza ejercida por una carga sobre otra fue estudiada por Charles Coulomb (1736-1806) mediante una balanza de torsión de su propia invención. El aparato experimental de Coulomb era esencialmente el mismo que se describió en el experimento de Cavendish (capítulo 10) con las masas reemplazadas por pequeñas esferas cargadas. La atracción gravitatoria de las esferas es completamente despreciable comparada con la atracción o repulsión eléctrica producida por las cargas depositadas en las esferas por frotamiento. En el experimento de Coulomb las esferas cargadas eran mucho menores que la distancia entre ellas, de modo que las cargas podían considerarse como puntuales. Coulomb utilizó el fenómeno de inducción para producir esferas igualmente cargadas y poder variar la carga depositada sobre las esferas. Por ejemplo, comenzando con una carga q_0 sobre cada esfera, podía reducir la carga a $\frac{1}{2}q_0$ conectando a tierra una de las esferas para descargarla y después poniendo las dos esferas en contacto. Los resultados de los experimentos de Coulomb y otros científicos sobre las fuerzas ejercidas por una carga puntual sobre otra, se resumen en la ley de Coulomb:

La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las cargas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

La figura 18-7 muestra las fuerzas ejercidas entre dos cargas del mismo signo y entre dos cargas de signo contrario.



Balanza de torsión de Coulomb.

Figura 18-7 (a) Las cargas iguales se repelen, mientras que (b) las cargas opuestas se atraen.

La ley de Coulomb puede establecerse más simplemente utilizando una expresión matemática. Sean q_1 y q_2 las dos cargas puntuales separadas una distancia r_{12} , que es el módulo del vector r_{12} que señala desde la carga q_1 a la carga q_2 (figura 18-8). La fuerza ejercida F_{12} por la carga q_1 sobre la carga q_2 viene dada entonces por

Ley de Coulomb

$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad 18-2$$

en donde $\hat{r}_{12} = r_{12}/r_{12}$ es el vector unidad que señala desde q_1 hacia q_2 y k es la constante de Coulomb que tiene el valor

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \quad 18-3$$

La fuerza F_{21} ejercida por q_2 sobre q_1 es el valor negativo de F_{12} según la tercera ley de Newton. Es decir, F_{21} posee el mismo módulo de F_{12} pero su sentido es opuesto. La magnitud de la fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre otra carga q_2 situada a la distancia r viene dada por

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \quad 18-4$$

Si ambas cargas tienen el mismo signo, es decir, si ambas son positivas o ambas negativas, la fuerza es repulsiva. Si las dos cargas tienen signos opuestos la fuerza es atractiva. Obsérvese la semejanza entre la ley de Coulomb y la ley de Newton de la gravedad (ecuación 10-2). Ambas son leyes que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia. Sin embargo, la fuerza gravitatoria entre dos partículas es proporcional a las masas de las partículas y es siempre atractiva, mientras la fuerza eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas y puede ser atractiva o repulsiva.

Ejemplo 18-2

Dos cargas puntuales de $0,05 \mu\text{C}$ cada una están separadas por una distancia de 10 cm. Determinar (a) la magnitud de la fuerza ejercida por una carga sobre la otra y (b) el número de unidades fundamentales de carga que posee cada una de ellas.

(a) Según la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza es

$$\begin{aligned} F &= \frac{kq_1q_2}{r^2} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(0,05 \times 10^{-6} \text{ C})(0,05 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,1 \text{ m})^2} \\ &= 2,25 \times 10^{-3} \text{ N} \end{aligned}$$

(b) El número de electrones requerido para producir una carga de $0,05 \mu\text{C}$ se obtiene de

$$\begin{aligned} q &= Ne \\ N &= \frac{q}{e} = \frac{0,05 \times 10^{-6} \text{ C}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3,12 \times 10^{11} \end{aligned}$$

Un número de este orden no revela que la carga eléctrica está cuantizada. Podríamos añadir o quitar un millón de electrones a esta carga sin que los instrumentos ordinarios pudieran detectarlo.

Puesto que la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria entre dos partículas varían en razón inversa con el cuadrado de su separación, la relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia que separa las partículas. Podemos, pues, comparar las intensidades relativas de estas fuerzas para partículas elementales tales como dos protones, dos electrones o un electrón y un protón.

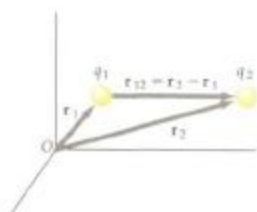


Figura 18-8 Carga q_2 en la posición r_2 y carga q_1 en r_1 ambas respecto al origen O . La fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 está en la dirección y sentido del vector $r_{12} = r_2 - r_1$ si ambas cargas tienen el mismo signo, y en sentido opuesto si sus signos son opuestos.

Ejemplo 18-3

Calcular la relación que existe entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercida entre dos protones.

Como cada protón tiene carga $+e$, la fuerza eléctrica desarrollada entre ambos es repulsiva y tiene la magnitud

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}$$

La fuerza gravitatoria, dada por la ley de Newton de la gravedad, es atractiva y posee la magnitud

$$F_g = \frac{Gm_p^2}{r^2}$$

en donde m_p es la masa de un protón. La relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia de separación r :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p^2}$$

Sustituyendo los valores $k=8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$, $e=1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$, $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, y $m_p=1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, se obtiene

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})^2} = 1,24 \times 10^{36}$$

Ejercicio

En el átomo de hidrógeno, el electrón está separado del protón por una distancia de aproximadamente $5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$ en valor medio. ¿Cuál es la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón? (Respuesta: $8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$)

Como hemos visto en el ejemplo 18-3, la fuerza gravitatoria entre dos partículas elementales es tan pequeña comparada con la fuerza eléctrica entre ambas (siempre que estén cargadas), que puede despreciarse al describir sus interacciones. Gracias a que las grandes masas, como la Tierra, contienen casi exactamente el mismo número de cargas positivas y negativas, la fuerza gravitatoria es importante. Si las cargas eléctricas de estos cuerpos no se cancelasen exactamente, las fuerzas eléctricas entre ellos sería mucho mayor que las fuerzas gravitatorias.

En un sistema de cargas, cada una de ellas ejerce una fuerza dada por la ecuación 18-2 sobre las restantes. Así, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema.

Ejemplo 18-4

Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x ; $q_1=25 \text{ nC}$ está en el origen, $q_2=-10 \text{ nC}$ está en $x=2 \text{ m}$, y $q_3=20 \text{ nC}$ está en $x=3,5 \text{ m}$ (figura 18-9). Determinar la fuerza neta ejercida por q_1 y q_2 sobre q_3 .

La fuerza ejercida por q_1 sobre q_3 separada $3,5 \text{ m}$ viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{10} &= \frac{kq_1q_3}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3,5 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &= (0,367 \mu\text{N})\mathbf{i} \end{aligned}$$

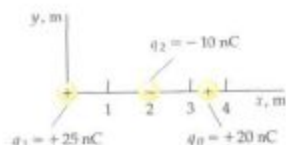


Figura 18-9 Cargas puntuales sobre el eje x (ejemplo 18-4).

en donde hemos utilizado \hat{i} para designar el vector unitario \hat{r}_{10} desde la carga q_1 a q_0 , el cual apunta en la dirección x . La fuerza sobre q_0 debida a q_2 situada a 1,5 m de distancia es

$$\begin{aligned} F_{20} &= \frac{kq_2q_0}{r_{20}^2} \hat{r}_{20} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(-10 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(1,5 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &= (-0,799 \mu\text{N})\hat{i} \end{aligned}$$

La fuerza total ejercida por las cargas q_1 y q_2 sobre q_0 es, por tanto,

$$\begin{aligned} F_{\text{total}} &= F_{10} + F_{20} \\ &= (0,367 \mu\text{N})\hat{i} - (0,799 \mu\text{N})\hat{i} = (-0,432 \mu\text{N})\hat{i} \end{aligned}$$

Obsérvese en el ejemplo 18-4 que la carga q_2 situada entre q_1 y q_0 no tiene efecto alguno sobre la fuerza F_{10} ejercida por q_1 sobre q_0 , e igualmente la carga q_2 no tiene efecto sobre la fuerza ejercida por q_2 sobre q_0 . La fuerza neta ejercida sobre una carga (tal como q_0 en este ejemplo) por un sistema de cargas se determina por la simple superposición de las fuerzas separadas ejercidas por cada carga del sistema. Este principio de superposición de las fuerzas eléctricas se ha comprobado experimentalmente.

Para que un sistema de cargas permanezca estacionario deben existir otras fuerzas no eléctricas actuando sobre las cargas, de modo que la fuerza resultante de todas las fuentes que actúan sobre cada carga sea cero. En el ejemplo anterior y en los siguientes supondremos la existencia de tales fuerzas, de modo que todas las cargas permanecen estacionarias.

Ejemplo 18-5

La carga $q_1 = +25 \text{ nC}$ está en el origen, la carga $q_2 = -15 \text{ nC}$ está sobre el eje x en $x=2 \text{ m}$, y la carga $q_0 = +20 \text{ nC}$ está en el punto $x=2 \text{ m}$, $y=2 \text{ m}$ como se indica en la figura 18-10a. Determinar la fuerza sobre q_0 .

Como q_2 y q_0 tienen signos opuestos, la fuerza ejercida por q_2 sobre q_0 es atractiva y en la dirección y negativa, como se indica en la figura. Viene dada por

$$\begin{aligned} F_{20} &= \frac{kq_2q_0}{r_{20}^2} \hat{r}_{20} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(-15 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2 \text{ m})^2} \hat{j} \\ &= (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N})\hat{j} \end{aligned}$$

La distancia entre q_1 y q_0 es $2\sqrt{2} \text{ m}$. La fuerza ejercida por q_1 sobre q_0 es

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{kq_1q_0}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2\sqrt{2} \text{ m})^2} \hat{r}_{10} \\ &= (5,62 \times 10^{-7} \text{ N}) \hat{r}_{10} \end{aligned}$$

en donde \hat{r}_{10} es el vector unitario dirigido a lo largo de la línea que une q_1 con q_0 .

La suma vectorial de estas dos fuerzas se determina más fácilmente escribiendo las fuerzas en función de sus componentes rectangulares. Como F_{10} forma un ángulo de 45° con los ejes x y y , sus componentes x e y son iguales

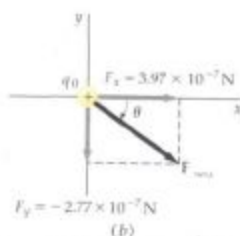
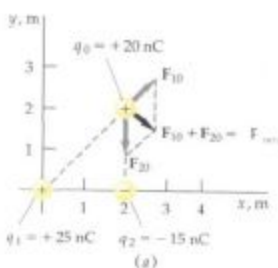


Figura 18-10 (a) Diagrama de fuerzas del ejemplo 18-5. La fuerza resultante sobre la carga q_0 es el vector suma de las fuerzas F_{10} debida a q_1 y F_{20} debida a q_2 . (b) Diagrama que muestra la fuerza neta en (a) y sus componentes x e y .

entre sí y valen $F_{12}/\sqrt{2}$:

$$F_{12x} = F_{12y} = \frac{5,62 \times 10^{-7} \text{ N}}{\sqrt{2}} = 3,97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Los componentes x e y de la fuerza resultante son, por tanto,

$$F_x = F_{12x} + F_{21x} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + 0 = 3,97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_y = F_{12y} + F_{21y} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N}) \\ = -2,77 \times 10^{-7} \text{ N}$$

La magnitud de la fuerza neta o resultante es

$$F_{\text{neto}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3,97 \times 10^{-7} \text{ N})^2 + (-2,77 \times 10^{-7} \text{ N})^2} \\ = 4,84 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Esta fuerza apunta hacia la derecha y hacia abajo como indica la figura 18-10b formando un ángulo θ con el eje x dado por

$$\text{tg } \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2,77}{3,97} = -0,698 \\ \theta = -34,9^\circ$$

Cuestiones

3. Comparar las propiedades de la carga eléctrica con las de la masa gravitatoria. Discutir las semejanzas y las diferencias.
4. Si el convenio de signos para las cargas se variase de modo que la carga electrónica fuese positiva y la del protón negativa, ¿debería escribirse la ley de Coulomb del mismo modo o de modo diferente?

18-4 El campo eléctrico

La fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia, semejante a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra. Para evitar el problema de la acción a distancia se introduce el concepto de **campo eléctrico** E . Una carga crea un campo eléctrico E en todo el espacio y este campo ejerce una fuerza sobre la otra carga. La fuerza es así ejercida por el campo en la posición de la segunda carga, más que por la propia primera carga que se encuentra a cierta distancia.

La figura 18-11 muestra una serie de cargas puntuales, q_1 , q_2 y q_3 dispuestas arbitrariamente en el espacio. Si situamos una carga q_0 en algún punto próximo a este sistema de cargas, sobre ella se ejercerá una fuerza. La presencia de la carga q_0 cambiará generalmente la distribución original de las restantes cargas, particularmente si las cargas están depositadas sobre conductores. Sin embargo, podemos elegir q_0 suficientemente pequeña para que su efecto sobre la distribución de carga sea despreciable. En estas condiciones diremos que se trata de una **carga de ensayo** o **testigo**, pues se utiliza para estudiar el campo creado por otras cargas sin perturbarlas. La fuerza neta ejercida sobre q_0 es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre q_0 por cada una de las otras cargas del sistema. Según la ley de Coulomb, cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0 y por tanto, la fuerza resultante será proporcional a q_0 . El campo eléctrico E en un punto se define como la fuerza resultante sobre una carga de ensayo positiva q_0 dividida por q_0 :

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (q_0 \text{ pequeña})$$

18-5

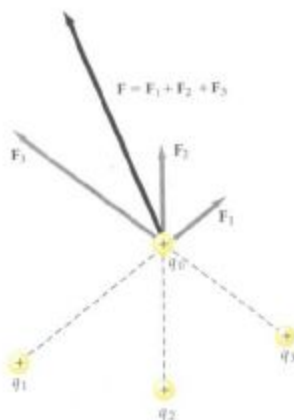


Figura 18-11 Una pequeña carga testigo q_0 en las proximidades de un sistema de cargas q_1 , q_2 y q_3 experimenta una fuerza F proporcional a q_0 . La relación F/q_0 es el campo eléctrico E en la posición de la carga testigo.

Definición de campo eléctrico

Esta definición es semejante a la del campo gravitatorio terrestre, expresada en la sección 4-3 como la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre un cuerpo. El campo gravitatorio terrestre g describe la propiedad del espacio alrededor de la Tierra, tal que cuando una masa m se sitúa en algún punto, la fuerza ejercida por la Tierra es mg .

La unidad SI del campo eléctrico es el newton por culombio (N/C). En la tabla 18-1 se relacionan las magnitudes de algunos de los campos eléctricos encontrados en la naturaleza.

Obsérvese que el campo eléctrico es un vector que obedece al principio de superposición. Es decir, el campo eléctrico resultante producido por un sistema de cargas se determina calculando el campo eléctrico debido a cada carga del sistema por separado y después sumando estos vectores para obtener el campo eléctrico resultante.

Tabla 18-1 Algunos campos eléctricos en la naturaleza

	E , N/C
En los cables domésticos	10^{-3}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^2
En la luz solar	10^6
Bajo una nube tormentosa	10^8
En la descarga de un relámpago	10^8
En un tubo de rayos X	10^7
En el electrón de un átomo de hidrógeno	0×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	2×10^{21}

El campo eléctrico E es un vector que describe la condición en el espacio creada por el sistema de cargas puntuales. Desplazando la carga ensayo q_0 de un punto a otro, podemos determinar E en todos los puntos del espacio (excepto el ocupado por la carga q). El campo eléctrico E es, por tanto, una función vectorial de la posición.

La fuerza ejercida sobre una carga ensayo q_0 en cualquier punto está relacionada con el campo eléctrico en dicho punto por

$$F = q_0 E \quad 18-6$$

Ejemplo 18-6

Cuando se coloca una carga testigo de 5 nC en un punto determinado, sufre la acción de una fuerza de 2×10^{-4} N en la dirección de x . ¿Cuál es el campo eléctrico E en dicho punto?

Como la fuerza sobre la carga testigo positiva posee la dirección x , el vector campo eléctrico posee también esa dirección. Por definición (ecuación 18-5), el campo eléctrico es

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{(2 \times 10^{-4} \text{ N})\mathbf{i}}{5 \times 10^{-9} \text{ C}} = (4 \times 10^4 \text{ N/C})\mathbf{i}$$

Ejercicio

¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un electrón situado en el punto (en el ejemplo 18-6) donde el campo eléctrico es $E = (4 \times 10^4 \text{ N/C})\mathbf{i}$ [Respuesta: $(-6,4 \times 10^{-15} \text{ N})\mathbf{i}$]

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual q_1 en la posición r_1 puede calcularse a partir de la ley de Coulomb. Si situamos una pequeña carga testigo positiva q_0 en algún punto P a la distancia r_{10} , la fuerza que actúa sobre ella es

$$F_{10} = \frac{kq_1q_0}{r_{10}^2} \hat{r}_{10}$$

en donde \hat{r}_{00} es el vector unitario que apunta de q_1 a q_0 . El campo eléctrico en el punto P debido a la carga q_1 es, por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{kq_1}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} \quad 18-7$$

Ley de Coulomb para el campo
E creado por una carga puntual

en donde r_{10} es la distancia de la carga al punto P llamado **punto del campo** y \hat{r}_{10} es un vector unitario que apunta desde la carga hasta P . Esta es la ley de Coulomb referida al campo eléctrico creado por una sola carga puntual. El campo eléctrico resultante debido a una distribución de cargas puntuales se determina sumando los campos originados por cada carga separadamente:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0} \quad 18-8$$

Campo eléctrico debido a un
sistema de cargas puntuales

Ejemplo 18-7

Una carga positiva $q_1 = +8 \text{ nC}$ se encuentra en el origen y una segunda carga positiva $q_2 = +12 \text{ nC}$ está sobre el eje x a la distancia $a = 4 \text{ m}$ (figura 18-12). Determinar el campo eléctrico resultante (a) en el punto P_1 sobre el eje x en $x = 7 \text{ m}$ y (b) en el punto P_2 sobre el eje x en $x = 3 \text{ m}$.

(a) El punto P_1 en $x = 7 \text{ m}$ está a la derecha de ambas cargas. El campo eléctrico en P_1 debido a cada carga está en la dirección x positiva. La distancia desde el punto del campo a la carga q_1 es $x = 7 \text{ m}$, y a la carga q_2 es $x - a = 7 \text{ m} - 4 \text{ m} = 3 \text{ m}$. El campo eléctrico resultante en P_1 es, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{kq_1}{x^2} \mathbf{i} + \frac{kq_2}{(x-a)^2} \mathbf{i} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(7 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &\quad + \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &= (1.47 \text{ N/C})\mathbf{i} + (12.0 \text{ N/C})\mathbf{i} = (13.5 \text{ N/C})\mathbf{i} \end{aligned}$$

(b) El punto P_2 en $x = 3 \text{ m}$ está comprendido entre las cargas. Una carga testigo positiva situada en P_2 experimentaría una fuerza repulsiva hacia la derecha debida a la carga $+8 \text{ nC}$ y una fuerza repulsiva hacia la izquierda debida a la carga $+12 \text{ nC}$. La distancia a la carga $+8 \text{ nC}$ es $x = 3 \text{ m}$ y a la carga $+12 \text{ nC}$ es $a - x = 4 \text{ m} - 3 \text{ m} = 1 \text{ m}$. El campo eléctrico resultante en P_2 será pues:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{kq_1}{x^2} \mathbf{i} - \frac{kq_2}{(a-x)^2} \mathbf{i} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &\quad - \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(1 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &= (7.99 \text{ N/C})\mathbf{i} - (108 \text{ N/C})\mathbf{i} = (-100 \text{ N/C})\mathbf{i} \end{aligned}$$

El campo eléctrico en el punto P_2 está en la dirección x negativa, ya que la contribución al campo debida a la carga $+12 \text{ nC}$ que está a 1 m de distancia es superior a la debida a la carga $+8 \text{ nC}$ que está a 3 m . A medida que nos desplazamos hacia la carga $+8 \text{ nC}$ en el origen, la magnitud del campo debi-

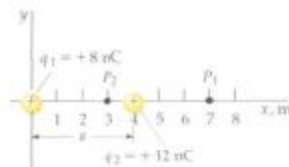


Figura 18-12 Las dos cargas puntuales sobre el eje x del ejemplo 18-7. El campo eléctrico resultante está dirigido hacia la derecha en el punto P_1 y hacia la izquierda en el punto P_2 .

da a esta carga crece y la debida a la carga $+12$ nC disminuye. Existe, por tanto, un punto entre las cargas en donde el campo eléctrico neto es cero. En este punto una carga testigo positiva no experimentaría una fuerza neta, ya que la fuerza repulsiva hacia la derecha debida a la carga $+8$ nC se equilibraría con la fuerza repulsiva hacia la izquierda debida a la carga $+12$ nC. En puntos más próximos a la carga $+8$ nC en el origen, el campo eléctrico apunta en la dirección x positiva.

Ejercicio

Determinar el punto del eje x en la figura 18-12 donde el campo eléctrico es cero. (Respuesta: $x=1,80$ m)

Ejemplo 18-8

Determinar el campo eléctrico en un punto P_3 sobre el eje y en $y=3$ m, creado por las cargas del ejemplo 18-7.

En la figura 18-13a se muestran los campos debidos a cada una de las cargas en el punto P_3 sobre el eje y . El campo E_1 debido a la carga $+8$ nC está en la dirección y positiva y su magnitud es

$$E_1 = \frac{kq_1}{y^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} = 7,99 \text{ N/C}$$

El campo E_2 debido a la carga $+12$ nC se encuentra en la dirección de la línea que va desde dicha carga al punto P_3 . Esta distancia, por el teorema de Pitágoras vale 5 m. La magnitud de E_2 es

$$E_2 = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(5 \text{ m})^2} = 4,32 \text{ N/C}$$

El campo E_2 tiene un componente en la dirección y positiva igual a $E_2 \cos \theta$ y un componente en la dirección x negativa igual a $-E_2 \sin \theta$. En el triángulo de la figura 18-13a puede verse que $\cos \theta = \frac{3}{5} = 0,6$ y $\sin \theta = \frac{4}{5} = 0,8$.

Los componentes x e y de E_2 son, por tanto

$$E_{2x} = -E_2 \sin \theta = -(4,32 \text{ N/C})(0,8) = -3,46 \text{ N/C}$$

y

$$E_{2y} = E_2 \cos \theta = (4,32 \text{ N/C})(0,6) = 2,59 \text{ N/C}$$

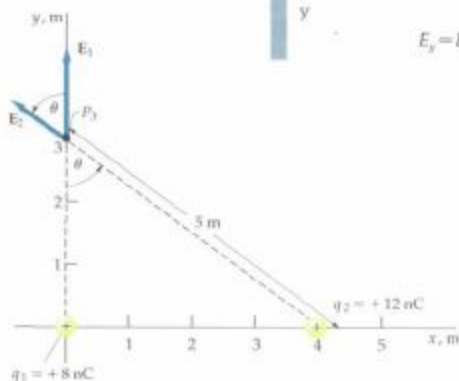
Los componentes x e y del campo eléctrico resultante E serán:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 0 + (-3,46 \text{ N/C}) = -3,46 \text{ N/C}$$

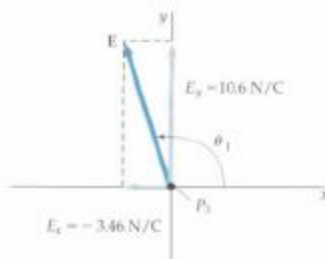
y

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 7,99 \text{ N/C} + 2,59 \text{ N/C} = 10,6 \text{ N/C}$$

Figura 18-13 Ejemplo 18-8. (a) Sobre el eje y , el campo eléctrico E , debido a la carga q_1 , está dirigido a lo largo del eje y , y el campo E_2 debido a la carga q_2 forma un ángulo θ con el eje y . El campo eléctrico resultante es el vector suma $E = E_1 + E_2$. (b) El campo eléctrico resultante y sus componentes x e y .



(a)



(b)

La magnitud del campo eléctrico neto es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-3,46 \text{ N/C})^2 + (10,6 \text{ N/C})^2} = 11,2 \text{ N/C}$$

El campo eléctrico resultante E forma un ángulo θ_1 con el eje x (véase figura 18-13b) dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{E_y}{E_x} = \frac{10,6 \text{ N/C}}{-3,46 \text{ N/C}} = -3,06 \\ \theta_1 &= 108^\circ \end{aligned}$$

Ejemplo 18-9

Una carga $+q$ se encuentra en $x = a$ y una segunda carga $-q$ en $x = -a$ (figura 18-14). Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto del campo P muy alejado en comparación con la separación de las cargas.

El punto P sobre el eje de las x está a una distancia $x - a$ de la carga positiva y una distancia $x + a$ de la carga negativa. El campo eléctrico en P debido a estas dos cargas es, por tanto

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{(x-a)^2} \mathbf{i} + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \mathbf{i} = kqi \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right]$$

Reduciendo los términos entre paréntesis a un común denominador, resulta

$$\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} = \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2}$$

Para $x \gg a$, podemos despreciar a^2 en comparación con x^2 en el denominador. Por tanto,

$$\frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \approx \frac{4ax}{x^4} = \frac{4a}{x^3}$$

Así, el campo eléctrico en P vale aproximadamente

$$\mathbf{E} = \frac{4kqa}{x^3} \mathbf{i}$$

Un sistema de dos cargas iguales y opuestas q separadas por una pequeña distancia L se denomina **dipolo eléctrico**. Su característica fundamental es el **momento dipolar eléctrico** \mathbf{p} , o vector que apunta de la carga negativa a la positiva y cuya magnitud es el producto de la carga q por la separación L (figura 18-15). Si L es el vector desplazamiento de la carga positiva contado desde la carga negativa, el momento dipolar es

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$$

18-9

Para el dipolo mostrado en la figura 18-14, el desplazamiento de la carga positiva es $L = 2a\mathbf{i}$ y el momento dipolar eléctrico es

$$\mathbf{p} = 2aq\mathbf{i}$$

En función del momento dipolar, el campo eléctrico sobre el eje del dipolo en un punto a gran distancia x tiene la magnitud

$$E = \frac{2kp}{x^3} \quad 18-10$$

Es decir, el campo eléctrico en un punto alejado del dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.

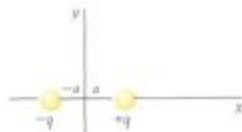


Figura 18-14 Una carga puntual $+q$ en $x = a$ y otra también puntual $-q$ en $x = -a$, según el ejemplo 18-9. Esta distribución de cargas se denomina dipolo eléctrico.



Figura 18-15 Un dipolo está formado por dos cargas iguales y opuestas separadas por cierta distancia L . El momento dipolar apunta de la carga negativa a la positiva y su magnitud es $p = qL$.

Definición del momento dipolar eléctrico

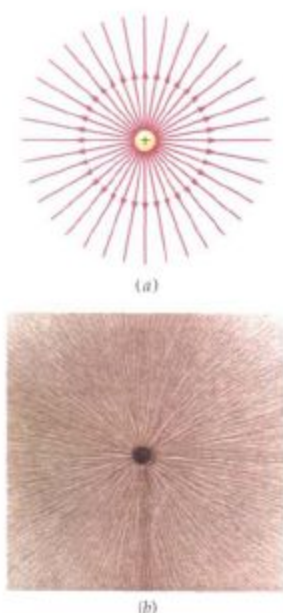


Figura 18-16 (a) Líneas de campo eléctrico o líneas de fuerza, de una sola carga puntual positiva. Si la carga fuera negativa, las flechas invertirían su dirección. (b) Trocitos de hilo suspendidos en aceite. El campo eléctrico del objeto cargado en el centro induce cargas opuestas en los extremos de cada trocito de hilo, haciendo que se alineen por sí mismos paralelamente al campo.

18-5 Líneas de campo eléctrico

Resulta conveniente representar el campo eléctrico dibujando las líneas que indican la dirección del campo en cualquier punto. El vector campo E es tangente a la línea en cada punto e indica la dirección del campo eléctrico en dicho punto. Las líneas del campo eléctrico se llaman también líneas de fuerza, ya que muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva.

En todo punto próximo a una carga positiva, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la carga. Las líneas de campo eléctrico, por tanto, divergen desde un punto ocupado por una carga positiva. Igualmente, el campo eléctrico próximo a una carga puntual negativa apunta radialmente hacia esta carga y, por tanto, las líneas de campo eléctrico están dirigidas siempre hacia una carga negativa.

La figura 18-16 muestra las líneas de campo eléctrico de una sola carga puntual positiva. A medida que nos alejamos de la carga, el campo eléctrico se debilita y las líneas se separan. Existe una conexión entre el espaciado de las líneas y la intensidad del campo eléctrico. Consideramos una superficie esférica de radio r con su centro en la carga. Nos interesa conocer el número de líneas que existen por unidad de área de la esfera, a lo que llamaremos densidad de las líneas. Si r crece, el área de la superficie crece, pero el mismo número de líneas pasan a su través. Por tanto, el número de líneas por unidad de área decrece cuando r aumenta. Como el área de la superficie esférica es $A = 4\pi r^2$, el número de líneas por unidad de área que atraviesan la esfera decrece en razón inversa con el cuadrado de la distancia a la carga puntual. Es decir, lo mismo que ocurre con la intensidad del campo eléctrico $E = kq/r^2$, que también disminuye en razón inversa con el cuadrado de esta distancia. Por tanto, si adoptamos el convenio de dibujar un número fijo de líneas desde una carga puntual, siendo proporcional dicho número al valor de la misma, y si dibujamos las líneas simétricamente alrededor de la carga puntual, la intensidad del campo vendrá indicada por la densidad de las líneas. Cuanto más próximas se encuentran las líneas, más intenso es el campo eléctrico.

La figura 18-17 muestra las líneas de fuerza para dos cargas puntuales positivas iguales, q separadas por una distancia a . Construiremos este diagrama sin calcular el campo en cada punto. Repetimos el hecho de que la contribución al campo de cada una de las cargas varía en función de $1/r^2$, donde r es la distancia desde la carga. En un punto próximo a una de las cargas, el campo se debe aproximadamente a esta carga sola, pues la otra está tan alejada que podemos despreciar su contribución al campo. Así pues, sobre una esfera de radio muy pequeño alrededor de una de las cargas, las líneas de campo son radiales e igualmente espaciadas. Puesto que las cargas son iguales, dibujaremos un número igual de líneas saliendo de cada una de ellas. A una distancia muy grande de las cargas, los detalles del sistema carecen de importancia. Por ejemplo, si las dos

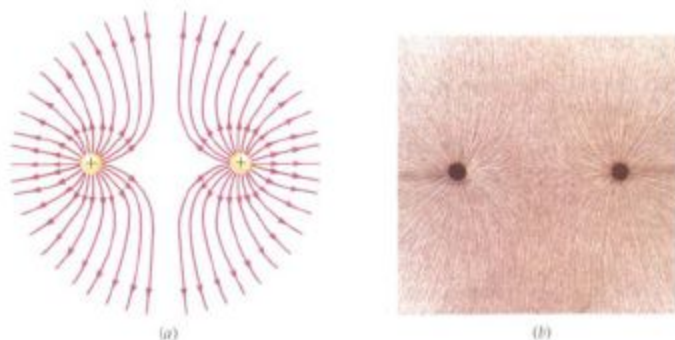


Figura 18-17 (a) Líneas de campo eléctrico debidas a dos cargas puntuales positivas. Las flechas se invertirían si ambas cargas fueran negativas. (b) Líneas de campo eléctrico de dos cargas iguales del mismo signo indicadas por trocitos de hilo suspendidos en aceite.

cargas estuvieran separadas 1 mm y las observásemos desde un punto situado a 100 km, parecerían una carga única. Así, en una esfera de radio r , donde r es mucho mayor que a , el campo es aproximadamente igual que el engendrado por una capa puntual de magnitud $2q$ y las líneas están igualmente espaciadas aproximadamente. Simplemente observando la figura podemos deducir que el campo eléctrico que existe en el espacio entre las cargas es débil, ya que el número de líneas en esta región es muy inferior al número de líneas que existen a la derecha o a la izquierda de las cargas, en donde las líneas están más juntas. Por supuesto esta información también puede obtenerse mediante el cálculo directo del campo en los puntos de estas regiones.

El razonamiento utilizado en los ejemplos precedentes puede aplicarse para dibujar las líneas de fuerza de cualquier sistema de cargas puntuales. En un lugar próximo a cada una de las cargas, las líneas del campo poseen la misma separación y según el signo de la carga se alejan o se acercan a ella. Lejos de todas las cargas, la estructura pormenorizada del sistema no es importante, y las líneas del campo son las mismas que las correspondientes a una única carga puntual igual a la carga neta del sistema. Para una futura referencia resumimos a continuación las reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico:

1. Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas (o en el infinito).
2. Las líneas se dibujan simétricamente saliendo o entrando en la carga.
3. El número de líneas que abandonan una carga positiva o entran en una carga negativa, es proporcional a la carga.
4. La densidad de líneas (número de ellas por unidad de área perpendicular a las mismas) en un punto es proporcional al valor del campo en dicho punto.
5. A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas de campo están igualmente espaciadas y son radiales como si procediesen de una sola carga puntual igual a la carga neta del sistema.
6. No pueden cortarse nunca dos líneas de campo.

La regla 6 se deduce del hecho de que E tiene una dirección única en cualquier punto del espacio (excepto en el punto ocupado por una carga puntual o donde $E=0$). Si se cortasen dos líneas, existirían dos direcciones para E en el punto de intersección.

En la figura 18-18 se muestran las líneas de campo eléctrico para un dipolo eléctrico. Muy cerca de la carga positiva, las líneas son radiales y dirigidas hacia fuera. Muy cerca de la carga negativa, las líneas son radiales y dirigidas hacia dentro. Puesto que las cargas tienen el mismo valor, el número de líneas que empiezan en la carga positiva es igual al número de las que terminan en la carga negativa. En este caso el campo es más intenso en la región entre las cargas, como lo indica el hecho de que la densidad de líneas del campo en esta región sea muy elevada.

Reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico

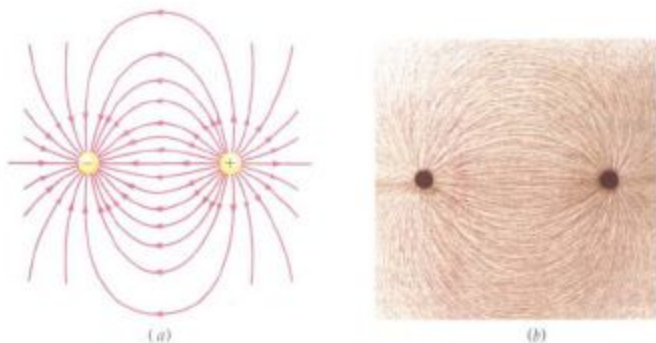


Figura 18-18 (a) Líneas de campo eléctrico correspondientes a un dipolo. (b) Las mismas líneas de campo indicadas por trocitos de hilo suspendidos en aceite.

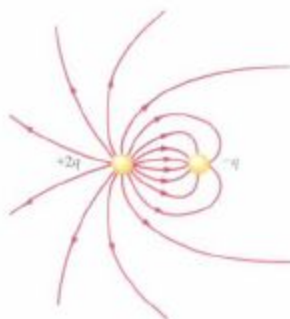


Figura 18-19 Líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual $+2q$ y otra segunda carga puntual $-q$. A distancias grandes de las cargas, las líneas son iguales a las que se obtienen con una sola carga $+q$.

La figura 18-19 muestra las líneas de campo eléctrico para una carga negativa $-q$ situada a una distancia a de otra positiva $+2q$. Puesto que la carga positiva tiene un valor doble que la carga negativa, han de salir de la carga positiva el doble de líneas que entran en la carga negativa. Es decir, la mitad de las líneas que comienzan en la carga positiva $+2q$ entran en la carga negativa $-q$ y la otra mitad abandonan el sistema. En una esfera de radio r , en donde r es mucho mayor que la separación de las cargas, las líneas que abandonan el sistema están espaciadas de modo aproximadamente simétrico y señalan radialmente hacia fuera lo mismo que las líneas procedentes de una sola carga puntual positiva $+q$. Así, a grandes distancias de las cargas, el sistema parece originado por una sola carga $+q$. A una distancia grande de un sistema de cargas, sólo importa la carga neta. El convenio que indica la intensidad del campo eléctrico por medio de las líneas de fuerza es válido porque el campo eléctrico varía inversamente con el cuadrado de la distancia a una carga puntual.

Como el campo gravitatorio de una masa puntual también varía inversamente con el cuadrado de la distancia, el concepto de líneas de fuerza también es útil para dibujar el campo gravitatorio. Cerca de una masa puntual, las líneas de campo gravitatorio convergen hacia la masa, del mismo modo que las líneas de campo eléctrico convergen hacia una carga negativa. Sin embargo, no hay puntos en el espacio en donde las líneas del campo gravitatorio sean divergentes como las líneas de campo eléctrico se comportan cerca de una carga positiva, pues la fuerza gravitatoria es siempre atractiva y nunca repulsiva.

18-6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico E , experimenta la acción de una fuerza qE . Como hemos visto, las fuerzas gravitatorias que actúan sobre una partícula son usualmente despreciables en comparación con las fuerzas eléctricas. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración

$$a = \frac{q}{m} E$$

siendo m la masa de la partícula.* Si el campo eléctrico se conoce, puede determinarse la relación carga a masa de la partícula a partir de la aceleración medida. Por ejemplo, en el caso de un campo eléctrico uniforme, la trayectoria de la partícula es una parábola semejante a la de un proyectil en un campo gravitatorio uniforme. La medida de la desviación de los electrones en un campo eléctrico uniforme fue utilizada por J.J. Thomson en 1897 para demostrar la existencia de los electrones y para medir su relación carga a masa. El osciloscopio y el tubo de imágenes de un televisor son ejemplos de aparatos basados en el movimiento de los electrones en campos eléctricos.

Daremos ahora algunos ejemplos de movimientos de electrones en campos eléctricos constantes. Los problemas de este tipo pueden resolverse utilizando las fórmulas de la aceleración constante obtenidas en el capítulo 2, o las ecuaciones correspondientes al movimiento de proyectiles del capítulo 3.

Ejemplo 18-10

Un electrón se proyecta en un campo eléctrico uniforme $E = (1000 \text{ N/C})$ con una velocidad inicial $v_0 = (2 \times 10^6 \text{ m/s})$ en la dirección del campo (figura 18-20). ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de detenerse?

* Con frecuencia la velocidad de un electrón en un campo eléctrico es una fracción importante de la velocidad de la luz; en este caso, las leyes de Newton del movimiento deben sustituirse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.

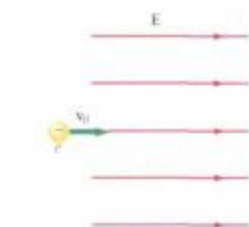


Figura 18-20 Un electrón proyectado en un campo eléctrico uniforme con una velocidad inicial paralela al campo (ejemplo 18-10).



Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos utilizado en la televisión de color. Los haces de electrones procedentes del cañón electrónico, a la derecha, activan sustancias fosforescentes sobre la pantalla a la izquierda, dando lugar a un punto brillante cuyo color depende de la intensidad relativa de cada haz. Los campos eléctricos establecidos entre las placas deflectoras en el cañón (o bien campos magnéticos creados por bobinas) desvían los haces. Estos barren la pantalla siguiendo una línea horizontal, se desvían hacia abajo y barren otra línea. La pantalla entera es barrida cada 1/30 s.

Como la carga del electrón es negativa, la fuerza $-eE$ que sobre él actúa posee una dirección opuesta a la del campo. Por tanto, se trata de un problema de aceleración constante en el cual la aceleración de una partícula se opone a su velocidad inicial y se desea determinar la distancia que la partícula recorre en su dirección original. Utilizando la ecuación de aceleración constante que relaciona la distancia con la velocidad:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Haciendo $x_0 = 0$, $v = 0$, $v_0 = 2 \times 10^6$ m/s y $a = -eE/m$, resulta

$$x = \frac{mv_0^2}{2eE} = \frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ N/C})} = 1,14 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Ejemplo 18-11

Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniforme $E = (-2000 \text{ N/C})\mathbf{j}$ con una velocidad inicial $v_0 = (10^6 \text{ m/s})\mathbf{i}$ perpendicular al campo (figura 18-21). (a) Comparar el peso del electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él. (b) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido 1 cm en la dirección x ?

(a) La fuerza eléctrica sobre el electrón es $-eE$ y la fuerza gravitatoria sobre él, es decir, su peso, es mg . Como el campo eléctrico está dirigido hacia abajo, la fuerza eléctrica sobre el electrón negativo está dirigida hacia arriba. La fuerza gravitatoria está naturalmente dirigida hacia abajo. La relación de sus magnitudes es

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})(9,8 \text{ N/kg})} = 3,6 \times 10^{13}$$

Como en la mayor parte de los casos, la fuerza eléctrica es muy grande en comparación con la fuerza gravitatoria que es del todo despreciable.

(b) El electrón tardará un tiempo

$$t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s}$$

para recorrer una distancia de 1 cm en la dirección x . En este tiempo el electrón se verá desviado una distancia hacia arriba, antiparalela al campo, dada por

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

Sustituyendo los valores conocidos de e , m , E y t se tiene

$$y = 1,76 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,76 \text{ cm}$$

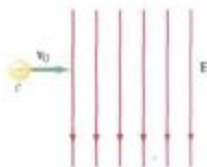


Figura 18-21 Un electrón proyectado en un campo eléctrico uniforme con una velocidad inicial perpendicular al campo (ejemplo 18-11).

El centro de la carga negativa coincide con el centro de la carga positiva



Figura 18-22 Diagramas esquemáticos de las distribuciones de carga de un átomo o molécula no polar. (a) En ausencia de un campo eléctrico externo, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. (b) En presencia de un campo eléctrico externo, los centros de las cargas positiva y negativa se desplazan produciendo un momento dipolar inducido en la dirección del campo externo.

18-7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos

Aunque los átomos y las moléculas son eléctricamente neutros se ven influidos por los campos eléctricos debido a que contienen cargas positivas y negativas. Podemos considerar que un átomo está formado por un núcleo muy pequeño cargado positivamente, rodeado por una nube de electrones cargada negativamente. Como el radio del núcleo es aproximadamente 100 000 veces más pequeño que el de la nube electrónica, podemos suponer que se trata de una carga puntual. En algunos átomos y moléculas, la nube electrónica es esféricamente simétrica, de modo que su «centro de carga» está en el centro del átomo o molécula coincidiendo con la carga positiva. Un átomo o molécula de este tipo se dice que es **no polar**. Sin embargo, en presencia de un campo eléctrico externo, el centro de la carga positiva no coincide con el centro de la carga negativa. El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre el núcleo cargado positivamente en la dirección del campo, y una fuerza sobre la nube electrónica cargada negativamente en dirección opuesta. Las cargas positivas y negativas se separan hasta que la fuerza atractiva que ejercen entre sí, compensa las fuerzas debidas al campo eléctrico externo (figura 18-22). Esta distribución de carga se comporta como un dipolo eléctrico.

El momento dipolar de un átomo o molécula no polar en un campo eléctrico externo se denomina **momento dipolar inducido**. Posee la misma dirección que el campo eléctrico. Si éste es uniforme, no existe fuerza neta sobre el dipolo, ya que las fuerzas que actúan sobre las cargas positiva y negativa son iguales y opuestas. Sin embargo, si el campo eléctrico no es uniforme, existirá una fuerza externa neta actuando sobre el dipolo. La figura 18-23 muestra una molécula no polar en el campo eléctrico de una carga puntual positiva q . El momento dipolar inducido es paralelo a E en la dirección radial a partir de la carga puntual. El campo es más intenso en el centro de la carga negativa, porque está más próximo a la carga puntual; la fuerza neta está dirigida hacia la carga puntual y en esta dirección el dipolo es atraído. Si la carga puntual fuera negativa, el dipolo inducido estaría en dirección opuesta y también sería atraído por dicha carga. La fuerza producida por un campo eléctrico no uniforme sobre una partícula eléctricamente neutra es la responsable de la familiar atracción de pequeños trozos de papel por un peine cargado. Al mismo fenómeno se deben las fuerzas que mantienen un globo cargado electrostáticamente sobre una pared o techo de una habitación. En este caso, la carga sobre el globo proporciona el campo eléctrico no uniforme que polariza (es decir, induce momentos dipolares) las moléculas de la pared o del techo, y después los atrae.

En algunas moléculas, el centro de la carga positiva no coincide con el centro de la carga negativa, incluso en ausencia de un campo eléctrico externo. Estas **moléculas polares** se dice que tienen un momento dipolar eléctrico permanente. Cuando se coloca una molécula de este tipo dentro de un campo eléctrico uniforme, no existe sobre ella ninguna fuerza neta, pero aparece un par que tiende a hacer girar la molécula, de modo que el dipolo se alinea con el campo. La figura 18-24 muestra las fuerzas ejercidas sobre un dipolo de momento $\mathbf{p} = q\mathbf{L}$ en un campo eléctrico uniforme E . Ya vimos en la sección 9-4 que el momento ejercido por dos fuerzas iguales y opuestas, o par, es el mismo alrededor de cualquier punto en el espacio. En la figura vemos que el momento alrededor de la carga negativa tiene la magnitud $F_1 L \sin \theta = qEL \sin \theta = pE \sin \theta$. El momento está dirigido normalmente al papel, hacia dentro, de tal modo que tiende a situar el momento dipolar \mathbf{p} en la dirección del campo eléctrico E . El momento del par puede escribirse convenientemente como el producto vectorial del momento dipolar \mathbf{p} y el campo eléctrico E :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad 18-11$$

Cuando el dipolo gira un ángulo $d\theta$, el campo eléctrico realiza un trabajo

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta$$

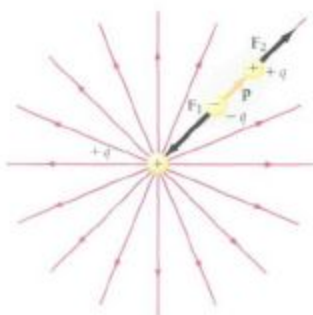


Figura 18-23 Molécula no polar en el campo eléctrico no uniforme de una carga puntual positiva. El momento dipolar eléctrico inducido \mathbf{p} es paralelo al campo de la carga puntual. Como ésta se encuentra más próxima al centro de la carga negativa que al centro de la carga positiva, existe una fuerza neta de atracción entre el dipolo y la carga puntual.

El signo menos es debido a que el momento tiende a disminuir θ . Igualando este trabajo con la disminución de energía potencial, resulta

$$dU = -dW = +pE \sin \theta \, d\theta$$

e integrando

$$U = -pE \cos \theta + U_0$$

Es costumbre elegir como energía potencial cero la energía potencial correspondiente a una situación en la que el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, es decir, cuando $\theta = 90^\circ$. Entonces $U_0 = 0$, y la energía potencial del dipolo es

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad 18-12$$

En un campo eléctrico no uniforme, una molécula polar experimenta una fuerza neta, ya que el campo eléctrico tiene magnitudes distintas en los centros de la carga positiva y negativa. Un ejemplo de molécula polar es el HCl, formado esencialmente por un ion hidrógeno positivo de carga $+e$ combinado con un ion cloro negativo de carga $-e$. Otro ejemplo de molécula polar es el agua (figura 18-25). El momento dipolar de la molécula de agua es el principal responsable de la absorción energética que experimentan los alimentos en un horno de microondas. Como todas las ondas electromagnéticas, las microondas poseen un campo eléctrico oscilante que puede hacer vibrar a los dipolos eléctricos. La vibración del momento dipolar eléctrico de la molécula de agua en resonancia con el campo eléctrico oscilante de las microondas da lugar a la absorción de energía transportada por las microondas.

El diámetro de un átomo o molécula es del orden de $10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$. Por ello, una unidad conveniente para el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas es la carga electrónica fundamental e multiplicada por la distancia de 1 nm . Por ejemplo, el momento dipolar del NaCl en esta unidad posee una magnitud de unos $0,2 \text{ e}\cdot\text{nm}$.

Ejemplo 18-12

Un dipolo con un momento de magnitud $0,02 \text{ e}\cdot\text{nm}$ forma un ángulo de 20° con un campo eléctrico uniforme de magnitud $3 \times 10^5 \text{ N/C}$. Determinar (a) la magnitud del momento del par que actúa sobre el dipolo y (b) la energía potencial del sistema.

(a) La magnitud del momento del par es

$$\begin{aligned} \tau &= |\mathbf{p} \times \mathbf{E}| = pE \sin \theta \\ &= (0,02)(1,60 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-9} \text{ m})(3 \times 10^5 \text{ N/C})(\sin 20^\circ) \\ &= 3,28 \times 10^{-27} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

(b) La energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned} U &= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta \\ &= -(0,02)(1,60 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-9} \text{ m})(3 \times 10^5 \text{ N/C})(\cos 20^\circ) \\ &= -9,02 \times 10^{-27} \text{ J} \end{aligned}$$

Cuestión

5. Se cuelga de un hilo una bola pequeña, de poco peso y no conductora, sin ninguna carga eléctrica neta. Cuando se acerca a dicha bola una carga positiva, la bola se ve atraída hacia la carga. ¿Cómo se explica esto? ¿Sería distinto el caso si la carga que se acerca a la bola fuese negativa en lugar de positiva?



Figura 18-24 Un dipolo en un campo eléctrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar tiende a alinearse con el campo eléctrico.

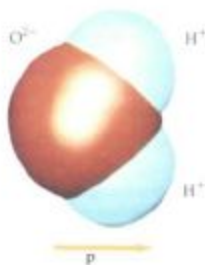


Figura 18-25 Modelo tridimensional generado por ordenador de una molécula de agua, formada por un ion oxígeno de carga $-2e$ y dos iones de hidrógeno de carga $+e$ cada uno. Esta molécula tiene un momento dipolar eléctrico permanente en la dirección indicada.

Resumen

- Existen dos clases de carga eléctrica, llamadas positiva y negativa. La carga eléctrica siempre se presenta por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga e . La carga del electrón es $-e$ y la del protón $+e$. Los objetos se cargan por transferencia mutua de cargas eléctricas, usualmente en forma de electrones. La carga se conserva, es decir, ni se crea ni se destruye en el proceso de carga; simplemente se transfiere.
- La fuerza ejercida por una carga sobre otra actúa a lo largo de la línea que une las cargas. Es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de su separación. La fuerza es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si son de signo contrario. Este resultado se conoce con el nombre de ley de Coulomb:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

donde k es la constante de Coulomb, de valor

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$

- El campo eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto, se define como la fuerza neta ejercida por aquellas cargas sobre una carga testigo positiva q_0 , dividida por q_0 :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

- El campo eléctrico en un punto P debido a una sola carga puntual q_1 en una posición \mathbf{r}_1 , es

$$\mathbf{E}_1 = \frac{kq_1}{r_{10}^2} \hat{\mathbf{r}}_{10}$$

en donde r_{10} es la distancia de la carga q_1 al punto del campo P y $\hat{\mathbf{r}}_{10}$ es el vector unitario que apunta de q_1 a P . El campo eléctrico debido a varias cargas es la suma vectorial de los campos debidos a las cargas individuales:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i0}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i0}$$

- El campo eléctrico puede representarse mediante líneas del campo eléctrico o de fuerza que se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La intensidad del campo eléctrico viene indicada por la densidad de las líneas de fuerza.
- Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales pero opuestas, separadas por una pequeña distancia. El momento dipolar \mathbf{p} es un vector de magnitud igual al producto de la carga por la separación de las cargas, y apunta en la dirección desde la carga negativa a la positiva:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$$

El campo eléctrico en un punto alejado de un dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.

- En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es cero, pero existe un momento $\boldsymbol{\tau}$ dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo. La energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico viene dada por

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

en donde la energía potencial se considera nula cuando el dipolo es perpendicular al campo eléctrico. En un campo eléctrico no uniforme, existe una fuerza neta que actúa sobre el dipolo.

8. Las moléculas polares, tales como H_2O poseen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas no coinciden los centros de la carga positiva y negativa. Se comportan como simples dipolos en un campo eléctrico. Las moléculas no polares carecen de momentos dipolares permanentes, pero adquieren momentos dipolares inducidos en presencia de un campo eléctrico.

Sugerencias bibliográficas

Bordeau, Sanford P.: *Volts to Hertz... The Rise of Electricity*, Burgess Publishing Company, Minneapolis, 1982.

Este libro presenta una historia de la ciencia eléctrica a través del análisis de los experimentos y vidas de los hombres que dieron sus nombres a las unidades físicas eléctricas y magnéticas. Está ilustrado con fotografías y grabados originales.

Cohn, Sherrye: «Painting the Fields of Faraday: Physics Inspired America's First Abstract Artist», *The Sciences*, noviembre/diciembre 1985, pág. 44.

Aquí se reproduce la pintura «La salida de la Luna llena» por Arthur Dove, 1937, y se discute con referencia al concepto de campo.

Goldhaber, Alfred Scharff y Michael Martin Nieto: «The Mass of the Photon», *Scientific American*, mayo 1976, pág. 86.

Aunque parezca extraño, las pruebas de la ley de Coulomb proporcionan un límite superior a una posible masa del fotón. Este artículo describe la historia de tales pruebas, que comenzaron cuando Coulomb inició sus investigaciones y continúan hoy.

Kevles, Daniel J.: «Robert Millikan», *Scientific American*, enero 1979, pág. 142.

Describe la vida y la obra del segundo científico americano que recibió el premio Nobel de Física, fundamentalmente por su elegante demostración de que todos los electrones transportan la misma carga y su medida de dicha carga.

Shamos, Morris H.: «The Laws of Electric and Magnetic Force — Charles Coulomb», en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt and Co., Nueva York, 1959. Reimpresa por Dover, 1987.

Descripción por el propio Coulomb de sus experimentos en traducción inglesa, con anotaciones de la editorial para mayor claridad y un resumen bibliográfico.

Walker, Jearl: «The Amateur Scientist: How to Map Electronically Charged Patches with Parsley, Sage, Rosemary and Thyme», *Scientific American*, abril 1988, pág. 92.

Experimentos a todo color con superficies cargadas.

Walker, Jearl: «The Amateur Scientist: The Secret of a Microwave Oven's Rapid Cooking Action Is Disclosed», *Scientific American*, febrero 1987, pág. 134.

Este artículo describe los diferentes mecanismos que se han sugerido para explicar por qué las microondas calientan el agua. La razón fundamental es la polaridad de la molécula de agua.

Williams, Earle R.: «The Electrification of Thunderstorms», *Scientific American*, noviembre 1988, pág. 88.

Todavía son motivo de discusión los mecanismos del rayo, uno de los más espectaculares fenómenos de naturaleza eléctrica.

Revisión

- A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseer los siguientes conocimientos:

1. Ser capaz de enunciar la ley de Coulomb y de utilizarla para calcular la fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra.
2. Conocer el valor de la constante de Coulomb en unidades del SI.
3. Conocer la magnitud de la carga eléctrica e en coulombios.
4. Ser capaz de utilizar la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales.
5. Ser capaz de dibujar las líneas de fuerza para sistemas de cargas sencillos y de obtener información respecto a la dirección e intensidad del campo eléctrico a partir del diagrama trazado.

6. Saber enunciar la diferencia entre una molécula polar y otra no polar y describir el comportamiento de cada una de estas moléculas en un campo eléctrico uniforme y en un campo eléctrico no uniforme.

7. Saber explicar por qué un peine cargado atrae trocitos de papel y por qué un globo electrostáticamente cargado se adhiere a una pared.

- B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Cuantización de la carga
 Unidad fundamental de carga
 Ley de conservación de la carga
 Culombio
 Conductores
 Aislantes
 Electroscopio
 Inducción electrostática

Carga por inducción
 Conexión a tierra
 Ley de Coulomb
 Constante de Coulomb
 Principio de la superposición de las fuerzas eléctricas
 Campo eléctrico
 Carga testigo
 Punto del campo
 Dipolo eléctrico
 Momento dipolar eléctrico
 Líneas de campo eléctrico o líneas de fuerza
 Molécula no polar
 Momento dipolar inducido
 Molécula polar

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. El campo eléctrico de una carga puntual tiene un sentido siempre de alejamiento de la carga.
2. La carga del electrón es la menor carga encontrada.
3. Las líneas eléctricas de fuerza nunca divergen desde un punto del espacio.
4. Las líneas de campo eléctrico nunca pueden cortarse en un punto del espacio.
5. Todas las moléculas poseen momentos dipolares eléctricos en presencia de un campo eléctrico externo.

Problemas

Nivel I

18-1 Carga eléctrica

1. Al frotar una barra de plástico con un paño de lana, aquella adquiere una carga de $-0,8 \mu\text{C}$. ¿Cuántos electrones se transfieren del paño de lana a la barra de plástico?

2. Una carga igual a la de un número de Avogadro ($N_A = 6,02 \times 10^{23}$) de protones se denomina un faraday. Calcular el número de coulombios que hay en un faraday.

3. ¿Cuántos coulombios de carga positiva existen en 1 kg de carbono? Doce gramos de carbono contienen el número de Avogadro de átomos y cada átomo posee seis protones y seis electrones.

18-2 Conductores y aislantes y carga por inducción

4. Explicar, mencionando cada etapa, cómo puede utilizarse una varilla aislante positivamente cargada para dar a una esfera de metal (a) una carga negativa, (b) una carga positiva. (c) ¿Puede utilizarse la misma varilla para dar a una esfera una carga positiva y a otra una carga negativa sin recargar la varilla?

5. Dos esferas conductoras sin carga con sus superficies metálicas en contacto, están apoyadas sobre una gran tabla de madera bien aislada. Una barra cargada positivamente se aproxima a una de las esferas por el lado opuesto a su punto de contacto con la otra esfera. (a) Describir las cargas inducidas sobre las dos esferas conductoras y representar las distribuciones de carga sobre ellas. (b) Las dos esferas se alejan entre sí y la barra cargada se separa. Dibujar las distribuciones de carga sobre las esferas separadas.

18-3 Ley de Coulomb

6. Una carga $q_1 = 4,0 \mu\text{C}$ está en el origen y otra carga $q_2 = 6,0 \mu\text{C}$ está en el eje x en el punto $x = 3,0 \text{ m}$. (a) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga q_2 . (b) Hallar la fuerza ejercida sobre q_1 . (c) ¿En qué diferirán estas respuestas (a) y (b), si q_2 vale $-6,0 \mu\text{C}$?

7. Tres cargas puntuales están en el eje x : $q_1 = -6,0 \mu\text{C}$ está en $x = -3,0 \text{ m}$, $q_2 = 4,0 \mu\text{C}$ está en el origen y $q_3 = -6,0 \mu\text{C}$ está en $x = 3,0 \text{ m}$. Hallar la fuerza ejercida sobre q_1 .

8. Dos cargas iguales de $3,0 \mu\text{C}$ están en el eje y , una en el origen y la otra en $y = 6 \text{ m}$. Una tercera carga $q_3 = 2 \mu\text{C}$ está en el eje x en $x = 8 \text{ m}$. Hallar la fuerza ejercida sobre q_3 .

9. Tres cargas, cada una de magnitud 3 nC están en los vértices de un cuadrado de lado 5 cm . Las dos cargas en los vértices opuestos son positivas y la otra es negativa. Determinar la fuerza ejercida por estas cargas sobre una cuarta carga $q = +3 \text{ nC}$ situada en el vértice restante.

10. Una carga de $5 \mu\text{C}$ se encuentra sobre el eje y en $y = 3 \text{ cm}$ y una segunda carga de $-5 \mu\text{C}$ está sobre el eje y en $y = -3 \text{ cm}$. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de $2 \mu\text{C}$ situada sobre el eje x en $x = 8 \text{ cm}$.

18-4 El campo eléctrico

11. Una carga de $4,0 \mu\text{C}$ está en el origen. ¿Cuál es el valor y dirección del campo eléctrico en el eje x en (a) $x = 6 \text{ m}$ y (b) $x = -10 \text{ m}$? (c) Hacer un esquema de la función E_x respecto a x tanto para valores positivos como negativos de x . (Recuérdese que E_x es negativo cuando E señala en el sentido negativo de las x).

12. Dos cargas puntuales cada una de ellas de $+4 \mu\text{C}$ están en el eje x , una en el origen y la otra en $x = 8 \text{ m}$. Hallar el campo eléctrico sobre el eje x en (a) $x = -2 \text{ m}$, (b) $x = 2 \text{ m}$, (c) $x = 6 \text{ m}$ y (d) $x = 10 \text{ m}$. (e) ¿En qué punto del eje x es cero el campo eléctrico? (f) Hacer un esquema de E_x en función de x .

13. Dos cargas iguales positivas de valor $q_1 = q_2 = 6,0 \text{ nC}$ están en el eje y en puntos $y_1 = +3 \text{ cm}$ e $y_2 = -3 \text{ cm}$. (a) ¿Cuál es el valor y dirección del campo eléctrico en el punto del eje x para el cual $x = 4 \text{ cm}$? (b) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre una carga de prueba $q_3 = 2 \text{ nC}$ situada en el punto $x = 4 \text{ cm}$?

14. Cuando se coloca una carga de prueba $q_3 = 2 \text{ nC}$ en el origen, experimenta la acción de una fuerza de $8,0 \times 10^{-4} \text{ N}$ en la dirección positiva del eje de las y . (a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen? (b) ¿Cuál sería la fuerza que se ejercería sobre una carga de -4 nC situada en el origen? (c) Si esta fuerza fuera debida a una carga situada sobre el eje y para $y = 3 \text{ cm}$, ¿cuál sería el valor de dicha carga?

15. Una gota de aceite tiene una masa de $4 \times 10^{-14} \text{ kg}$ y una carga neta de $4,8 \times 10^{-19} \text{ C}$. Una fuerza eléctrica dirigida hacia arriba equilibra justamente la fuerza dirigida hacia abajo de la gravedad, de tal modo que la gota de aceite queda en reposo. ¿Cuál es la dirección y magnitud del campo eléctrico?

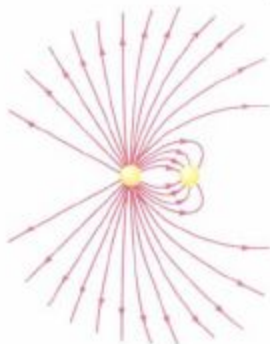
16. La Tierra tiene un campo eléctrico cerca de su superficie que es aproximadamente 150 N/C y que está dirigido hacia

abajo. (a) Comparar la fuerza eléctrica ascendente ejercida sobre un electrón con la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo. (b) ¿Qué carga debería suministrarse a una moneda de 3 g para que el campo eléctrico equilibrase su peso cerca de la superficie de la Tierra?

18-5 Líneas de campo eléctrico

17. La figura 18-26 muestra las líneas de fuerza correspondientes a un sistema de dos cargas puntuales. (a) ¿Cuáles son los valores relativos de las cargas? (b) ¿Cuáles son los signos de las cargas? (c) ¿En qué regiones del espacio es más intenso el campo eléctrico? ¿En cuáles es más débil?

Figura 18-26 Líneas de campo eléctrico (problema 17).

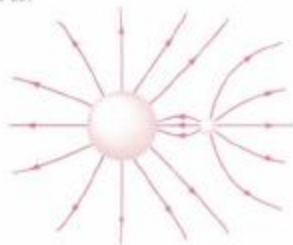


18. Dos cargas $+q$ y $-3q$ están separadas una distancia pequeña. Dibujar las líneas de fuerza para este sistema.

19. Tres cargas puntuales positivas iguales están situadas en los vértices de un triángulo equilátero. Hacer un esquema de las líneas de fuerzas en el plano del triángulo.

20. Dos esferas conductoras, cada una con una carga neta positiva se mantienen próximas de modo que las líneas de campo eléctrico son las indicadas en la figura 18-27. ¿Cuál es la carga relativa de la esfera pequeña comparada con la grande?

Figura 18-27 Problema 20.



18-6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

21. Al hallar la aceleración del electrón o de otra partícula cargada tiene una importancia especial el cociente entre la carga y la masa de la partícula. (a) Calcular e/m para un electrón. (b) ¿Cuál es el valor y dirección de la aceleración de un electrón en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C

(c) La mecánica no relativista puede utilizarse sólo si la velocidad del electrón es bastante menor que la velocidad de la luz c . Calcular el tiempo que emplea un electrón situado en reposo en el interior de un campo eléctrico de valor 100 N/C para alcanzar una velocidad de $0,01 c$. (d) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en este tiempo?

22. (a) Calcular e/m para un protón y hallar su aceleración en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C . (b) Hallar el tiempo que tarda un protón inicialmente en reposo en dicho campo en alcanzar la velocidad de $0,01 c$ (siendo c la velocidad de la luz).

23. Un electrón tiene una velocidad inicial de $2 \times 10^6 \text{ m/s}$ en la dirección y sentido del eje de las x . Entra en el interior de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (400 \text{ N/C})\mathbf{j}$ que tiene la dirección y . (a) Hallar la aceleración del electrón. (b) ¿Cuánto tiempo tardará el electrón en recorrer 10 cm en la dirección x ? (c) ¿Cuál será el valor y la dirección de la desviación del electrón después de haber recorrido 10 cm en la dirección x ?

24. Un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón estacionario. La fuerza centrípeta surge de la fuerza electrostática de atracción entre el protón y el electrón. El electrón posee una energía cinética de $2,18 \times 10^{-18} \text{ J}$. (a) ¿Cuál es la velocidad del electrón? (b) ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón?

18-7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos

25. Dos cargas puntuales $q_1 = 2,0 \text{ pC}$ y $q_2 = -2,0 \text{ pC}$ están separadas a una distancia de $4 \text{ }\mu\text{m}$. (a) ¿Cuál es el momento dipolar de este par de cargas? (b) Hacer un dibujo del par e indicar la dirección y sentido del momento dipolar.

26. Un dipolo de momento $0,5 \text{ e}\cdot\text{nm}$ se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de valor $4,0 \times 10^6 \text{ N/C}$. ¿Cuál es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando (a) el dipolo es paralelo al campo eléctrico, (b) el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, y (c) el dipolo forma un ángulo de 30° con el campo eléctrico? (d) Determinar la energía potencial del dipolo en el campo eléctrico en cada caso.

Nivel II

27. En el cobre existe aproximadamente un electrón libre por cada átomo. Una moneda de cobre posee una masa de 3 g . (a) ¿Qué porcentaje de la carga libre debería extraerse de la moneda para que ésta adquiriese una carga de $15 \text{ }\mu\text{C}$? (Véase ejemplo 18-1.) (b) ¿Cuál sería la fuerza de repulsión entre dos monedas transportando esta carga si estuvieran separadas una distancia de 25 cm ? Suponer que las monedas son cargas puntuales.

28. Una carga puntual de $-5 \text{ }\mu\text{C}$ está localizada en $x = 4 \text{ m}$, $y = -2 \text{ m}$. Una segunda carga puntual de $12 \text{ }\mu\text{C}$ está localizada en $x = 1 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$. (a) Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = -1 \text{ m}$, $y = 0$. (b) Calcular la magnitud y dirección de la fuerza sobre un electrón situado en $x = -1 \text{ m}$, $y = 0$.

29. Una carga puntual de $5 \text{ }\mu\text{C}$ está localizada en $x = 1 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$ y otra de $-4 \text{ }\mu\text{C}$ está localizada en $x = 2 \text{ m}$, $y = -2 \text{ m}$. (a) Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = -3 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$. (b) Determinar la magnitud y dirección de la fuerza sobre un protón en $x = -3 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$.

30. Una carga puntual de $-2,5 \text{ }\mu\text{C}$ está localizada en el origen. Una segunda carga puntual de $6 \text{ }\mu\text{C}$ se encuentra en $x = 1 \text{ m}$, $y = 0,5 \text{ m}$. Determinar las coordenadas x e y de la posición en la cual un electrón estaría en equilibrio.

31. Una partícula sale del origen con una velocidad de 3×10^6 m/s, formando un ángulo de 35° con el eje x . Se mueve en un campo eléctrico constante $E = E_x \mathbf{j}$. Determinar E_x para que la partícula cruce el eje x en $x = 1,5$ cm si (a) se trata de un electrón y (b) es un protón.

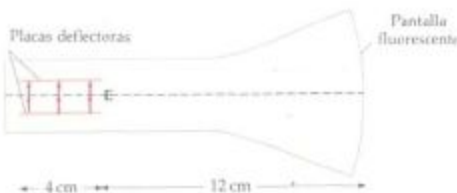
32. Un electrón parte de la posición indicada en la figura 18-28 con una velocidad inicial $v_0 = 5 \times 10^6$ m/s formando un ángulo de 45° con el eje x . El campo eléctrico tiene la dirección y positiva y su magnitud es de $3,5 \times 10^5$ N/C. ¿Sobre cuál placa y en qué lugar chocará el electrón?

Figura 18-28 Electrón moviéndose en un campo eléctrico uniforme (problema 32).



33. Un electrón cuya energía cinética es 2×10^{-16} J se mueve hacia la derecha a lo largo del eje de un tubo de rayos catódicos como se indica en la figura 18-29. En la región comprendida entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico de valor $E = (2 \times 10^4$ N/C) \mathbf{j} . En cualquier otro sitio $E = 0$. (a) ¿A qué distancia del eje del tubo se encuentra el electrón cuando alcanza el extremo de las placas? (b) ¿Bajo qué ángulo respecto al eje se mueve el electrón? (c) ¿A qué distancia del eje se encuentra el electrón cuando choca contra la pantalla fluorescente?

Figura 18-29 Electrón en un tubo de rayos catódicos (problema 33).



34. Cuatro cargas del mismo valor están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L , según se ve en la figura 18-30. (a) Hallar el valor y dirección de la fuerza ejercida sobre la carga situada en el vértice inferior izquierdo por las otras cargas. (b) Demostrar que el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto medio de uno de los lados del cuadrado está dirigido a lo largo de dicho lado hacia la carga negativa y que su valor es

$$E = k \frac{8q}{L^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25} \right)$$

35. Dos cargas q_1 y q_2 cuando se combinan dan una carga total de $6 \mu\text{C}$. Cuando están separadas 3 m la fuerza ejercida por una carga sobre la otra tiene un valor de 8 mN. Hallar q_1 y q_2 ; si (a) ambas son positivas de modo que se repelen entre sí y (b) una es positiva y la otra es negativa de modo que se atraen entre sí.

Figura 18-30 Problema 34.



36. Una carga positiva Q ha de dividirse en dos cargas positivas q_1 y q_2 . Demostrar que para una separación dada D , la fuerza ejercida por una carga sobre la otra es máxima si $q_1 = q_2 = \frac{1}{2} Q$.

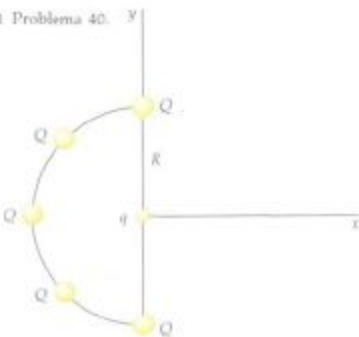
37. Dos cargas positivas iguales q están en el eje y ; una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. (a) Demostrar que el campo eléctrico en el eje x está dirigido a lo largo de dicho eje con $E_x = 2kqx(x^2 + a^2)^{-3/2}$. (b) Demostrar que cercano al origen, cuando x es mucho menor que a , E_x vale aproximadamente $2kqx/a^2$. (c) Demostrar que para x mucho mayor que a , E_x es aproximadamente $2kq/x^2$. Explicar por qué deberá esperarse este resultado incluso antes de ser calculado.

38. (a) Demostrar que el campo eléctrico para la distribución de cargas del problema 37 tiene su máximo valor en los puntos $x = a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$ calculando dE_x/dx y haciendo la derivada igual a cero. (b) Hacer un esquema de la función E_x en función de x utilizando los resultados de la parte (a) y de las partes (b) y (c) del problema 37.

39. Un dipolo eléctrico está formado por una carga positiva q sobre el eje x en $x = a$ y una carga negativa $-q$ sobre el eje x en $x = -a$. Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto y del eje y y demostrar que para $y \gg a$, el campo es aproximadamente $E = -(kp/y^3)\mathbf{i}$, en donde p es la magnitud del momento dipolar.

40. Cinco cargas iguales Q están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio R como indica la figura 18-31. Determinar la fuerza que se ejerce sobre una carga q localizada en el centro del semicírculo.

Figura 18-31 Problema 40.



41. Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud l . Cuando cada una de las esferas transporta la carga q , cada cuerda forma un ángulo θ con la vertical como indica la figura 18-32. (a) Demostrar que la carga q viene dada por

$$q = 2L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{mg \operatorname{tg} \theta}{k}}$$

en donde k es la constante de Coulomb. (b) Determinar q si $m = 10 \text{ g}$, $L = 50 \text{ cm}$ y $\theta = 10^\circ$.

Figura 18-32 Problema 41.



42. Una molécula de agua tiene su átomo de oxígeno en el origen, un núcleo de hidrógeno en $x = 0,077 \text{ nm}$, $y = 0,058 \text{ nm}$ y el otro núcleo de hidrógeno en $x = -0,077 \text{ nm}$, $y = 0,058 \text{ nm}$. Si los electrones del hidrógeno se transfieren completamente al átomo de oxígeno de modo que éste adquiere una carga de $-2e$, ¿cuál será el momento dipolar de la molécula de agua? Esta caracterización de los enlaces químicos del agua, totalmente iónicos, sobrestima el momento dipolar de una molécula de agua.

Nivel III

43. Para la distribución de cargas del problema 37 el campo eléctrico en el origen es cero. Una carga de prueba q_0 situada en el origen estará por tanto en equilibrio. (a) Estudiar la estabilidad del equilibrio para una carga de prueba positiva considerando desplazamientos pequeños del equilibrio a lo largo del eje x y desplazamientos pequeños a lo largo del eje y . (b) Repetir la parte (a) para una carga de prueba negativa. (c) Hallar el valor y signo de una carga q_0 que puede situarse en el origen de modo que la fuerza neta sobre cada una de las tres cargas sea cero. (d) Considerar qué ocurre si cualquiera de las cargas se desplaza ligeramente del equilibrio.

44. Dos cargas puntuales positivas $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$ como en el problema 37. Una cuenta de collar de masa m transportando una carga negativa $-q$ desliza a lo largo de una cuerda situada sobre el eje x . (a) Mostrar

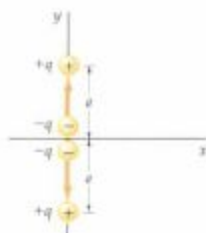
que para pequeños desplazamientos de $x \ll a$, la cuenta experimenta una fuerza de restitución proporcional a x y, por tanto, experimenta un movimiento armónico simple. (b) Determinar el período del movimiento.

45. Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas $+q$ y $-q$ separadas a una distancia muy pequeña $2a$. Su centro está en el eje x en $x = x$, y señala a lo largo del mismo hacia los valores positivos de las x . El dipolo está en el interior de un campo eléctrico no uniforme que tiene también la dirección de las x dado por $E = Cx$, siendo C una constante. (a) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga positiva y la ejercida sobre la carga negativa y demostrar que la fuerza neta sobre el dipolo es Cp . (b) Demostrar que en general, si un dipolo de momento p yace sobre el eje x en un campo eléctrico que tiene la dirección x , la fuerza neta sobre el dipolo viene dada aproximadamente por $(dE_x/dx)p$.

46. Una carga puntual positiva $+Q$ está en el origen y un dipolo de momento p está a una distancia r teniendo una dirección radial respecto al origen, según se ve en la figura 18-23. (a) Demostrar que la fuerza ejercida por el campo eléctrico de la carga puntual sobre el dipolo es atractiva con un valor aproximado de $2kQp/r^3$ (ver problema 45). (b) Considerar ahora que el dipolo está en el origen y que una carga puntual Q está a una distancia r sobre la línea del dipolo. A partir del resultado de la parte (a) y la tercera ley de Newton, demostrar que el valor del campo eléctrico del dipolo a lo largo de la línea del dipolo y a una distancia r del mismo es aproximadamente $2kp/r^3$.

47. Un cuadrupolo consta de dos dipolos próximos entre sí como indica la figura 18-33. La carga efectiva en el origen es $-2q$ y las otras cargas sobre el eje y en $y = a$ e $y = -a$ valen cada una $+q$. (a) Hallar el valor del campo eléctrico en un punto sobre el eje x a gran distancia de manera que $x \gg a$. (b) Hallar el valor del campo eléctrico en un punto sobre el eje y de la manera que $y \gg a$.

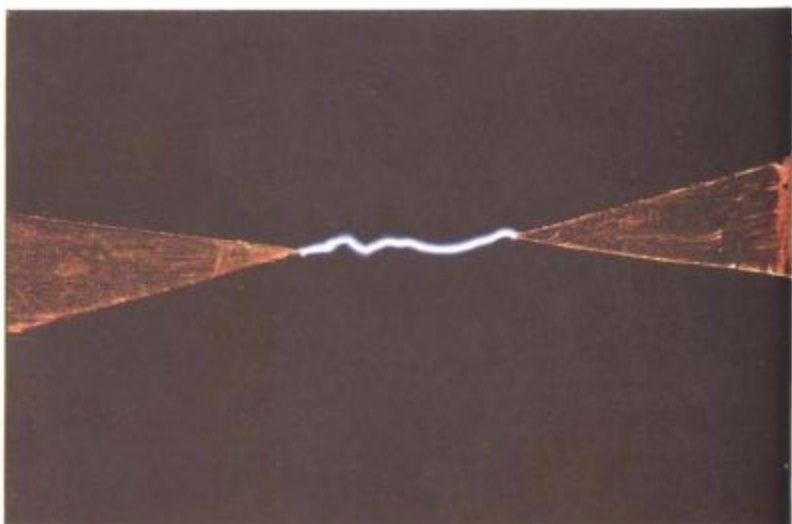
Figura 18-33 Problema 47.



Capítulo 19

Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga

Descarga eléctrica entre dos conductores cargados. El campo eléctrico próximo a las puntas conductoras es suficientemente intenso para arrancar los electrones de las moléculas próximas de aire, ionizándolas y haciendo que el gas sea conductor.



A escala microscópica, la carga eléctrica está cuantizada. Sin embargo, con frecuencia se presentan situaciones en las que un gran número de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida continuamente en el espacio. El uso de una densidad de carga continua para describir una distribución de un gran número de cargas discretas, es semejante al uso de una densidad de masa continua para describir el aire, el cual realmente consta de un gran número de moléculas discretas. En cualquier caso es normalmente fácil encontrar un elemento de volumen ΔV que sea suficientemente grande para contener muchos miles de millones de cargas o moléculas individuales y al mismo tiempo suficientemente pequeño para sustituir ΔV por la diferencia dV y utilizar el cálculo sin error despreciable. La carga existente por unidad de volumen puede describirse por la densidad de carga volúmica ρ :

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad 19-1$$

Frecuentemente la carga se distribuye en una capa delgada sobre la superficie de un cuerpo. En tales casos se define la densidad de carga superficial σ como la carga por unidad de área:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad 19-2$$

Análogamente, si la carga se encuentra distribuida a lo largo de una línea en el espacio, definimos la **densidad de carga lineal** λ como la carga por unidad de longitud:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad 19-3$$

En este capítulo veremos algunos ejemplos del uso de la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a diversos tipos de distribuciones continuas de carga. Después discutiremos la ley de Gauss que relaciona el campo eléctrico que existe sobre una superficie cerrada con la carga neta dentro de la superficie, y utilizaremos esta relación para calcular el campo eléctrico en ciertas distribuciones de carga que tienen un alto grado de simetría.

19-1 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb

El campo eléctrico producido por una determinada distribución de carga puede calcularse en una forma directa por medio de la ley de Coulomb. En la figura 19-1 hemos elegido un elemento de carga $dq = \rho dV$, suficientemente pequeño para que podamos considerarlo como una carga puntual. El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ en un punto del campo P debido a este elemento de carga viene dado por la ley de Coulomb:

$$d\mathbf{E} = \frac{k dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

en donde r es la distancia entre el elemento de carga y el punto del campo P y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta desde el elemento a dicho punto. El campo total en P se determina integrando esta expresión para la distribución de la carga completa, la cual consideramos que ocupa cierto volumen V :

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{k dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad 19-4$$

en donde $dq = \rho dV$. Si la carga está distribuida sobre una superficie, utilizaremos $dq = \sigma dA$ e integraremos para toda la superficie. Si la carga reside sobre una línea, usaremos $dq = \lambda dl$ e integraremos para toda la línea.

Campo eléctrico \mathbf{E} sobre el eje de una carga lineal finita

Una carga uniforme Q está distribuida a lo largo del eje x desde $x=0$ a $x=L$ como indica la figura 19-2. La densidad de carga lineal para esta carga es $\lambda = Q/L$. Queremos determinar el campo eléctrico producido por esta carga lineal en un punto P sobre el eje x , en $x=x_0$, siendo $x_0 > L$. En la figura, hemos elegido un pequeño elemento diferencial dx que dista x del origen. El punto del campo P se encuentra a una distancia $r = x_0 - x$ de este elemento de carga. El campo eléctrico debido a este elemento de carga está dirigido a lo largo del eje x y su magnitud es:

$$dE_x = \frac{k dq}{(x_0 - x)^2} = \frac{k\lambda dx}{(x_0 - x)^2}$$

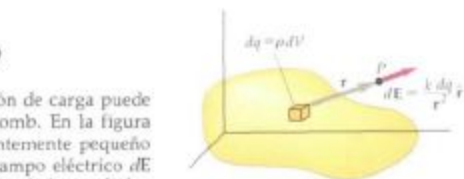


Figura 19-1 Un elemento de carga dq produce un campo $d\mathbf{E} = (k dq/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ en el punto P . El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

Campo eléctrico debido a distribuciones continuas de cargas

Figura 19-2 Geometría para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal uniforme, de valor total Q , longitud L y densidad lineal $\lambda = Q/L$. Un elemento $dq = \lambda dx$ de la carga lineal puede considerarse como una carga puntual. El campo debido a este elemento se deduce mediante la ley de Coulomb y el campo total se obtiene integrando desde $x = 0$ a $x = L$.

Para determinar el campo total integraremos para toda la carga lineal completa desde $x=0$ a $x=L$:

$$E_x = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_0-x)^2} = k\lambda \left[\frac{1}{x_0-x} \right]_0^L \\ = k\lambda \left(\frac{1}{x_0-L} - \frac{1}{x_0} \right) = k\lambda \left(\frac{L}{x_0(x_0-L)} \right)$$

Sustituyendo $\lambda = Q/L$ resulta

$$E_x = \frac{kQ}{x_0(x_0-L)} \quad 19-5$$

Como puede verse, si L es mucho menor que x_0 , el campo eléctrico en x_0 es aproximadamente kQ/x_0^2 . Es decir, si estamos suficientemente lejos de la carga lineal, ésta se comporta como una carga puntual.

Campo eléctrico E sobre la mediatriz de una carga lineal finita

Determinaremos a continuación el campo eléctrico debido a una carga lineal uniforme de longitud L y carga total Q en un punto P sobre la mediatriz (perpendicular en su punto medio) de la línea, como indica la figura 19-3. Hemos escogido un sistema de coordenadas tal que el origen se encuentra en el centro de la carga lineal, la carga está distribuida sobre el eje x y el punto del campo P está sobre el eje y . El elemento de carga $dq = \lambda dx$ y el campo dE que produce se muestran en la figura. El campo tiene un componente paralelo a la carga lineal y otro perpendicular a ésta. Sin embargo, dada la simetría de la distribución por cada carga elemental a la derecha del origen (como la indicada en la figura), existe otro a la izquierda que produce un componente paralelo de dE , igual y opuesto al indicado. Por tanto, cuando sumemos todos los elementos de carga de la línea, los componentes paralelos se anularán y sólo necesitamos calcular el componente de E perpendicular a la carga lineal.

La magnitud del campo producido por un elemento de carga $dq = \lambda dx$ es

$$|dE| = \frac{k dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

El componente perpendicular (en este caso, el componente y) es

$$dE_y = \frac{k\lambda dx}{r^2} \cos \theta \quad 19-6$$

El campo total E_y se calcula, integrando desde $x = -\frac{1}{2}L$ a $x = +\frac{1}{2}L$. Dada la simetría de la distribución de carga, la contribución de cada mitad de la carga lineal del campo total es idéntica, de modo que puede obtenerse el mismo resultado integrando de $x=0$ a $x=\frac{1}{2}L$ y multiplicando por 2. Es decir,

$$E_y = 2 \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L} dE_y = 2 \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L} \frac{k\lambda dx}{r^2} \cos \theta \quad 19-7$$

Esta integración puede simplificarse sustituyendo la variable x por la θ . En la figura 19-3 puede verse que x y θ están relacionadas por la expresión

$$x = y \operatorname{tg} \theta \quad 19-8$$

en donde y es la distancia perpendicular desde la carga lineal al punto del campo, la cual no varía en la integración. Por tanto,

$$\frac{dx}{d\theta} = y \sec^2 \theta = y \left(\frac{r}{y} \right)^2$$

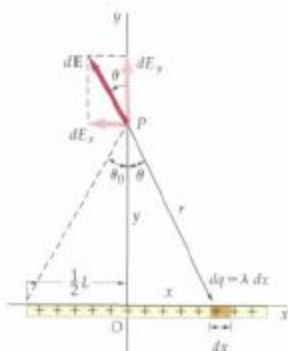


Figura 19-3 Geometría para el cálculo del campo eléctrico en un punto de la mediatriz de una carga lineal finita uniforme. Por simetría, el campo eléctrico neto es perpendicular a la carga lineal. El campo neto se obtiene integrando la expresión correspondiente al componente perpendicular desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$ y multiplicando el resultado por 2.

Por tanto, el incremento dx viene relacionado con el incremento $d\theta$ por

$$dx = \frac{r^2}{y} d\theta$$

Haciendo esta sustitución en la ecuación 19-6, se obtiene

$$dE_y = \frac{k\lambda}{y} \cos \theta d\theta \quad 19-9$$

Según la ecuación 19-8, $\theta = 0$ cuando $x = 0$, y $\theta = \theta_0$ cuando $x = \frac{1}{2}L$, es decir

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\frac{1}{2}L}{y}$$

El componente total y del campo se obtiene integrando la ecuación 19-9 desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$ y multiplicando por 2:

$$E_y = 2 \int_{\theta=0}^{\theta_0} dE_y = \frac{2k\lambda}{y} \int_0^{\theta_0} \cos \theta d\theta$$

o sea,

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}} \quad 19-10$$

Campo E en la mediatriz de la carga lineal finita

en donde (véase figura 19-3) el $\operatorname{sen} \theta_0$ está relacionado con L e y por la expresión

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}}$$

Cuando y es mucho mayor que L , $\operatorname{sen} \theta_0$ viene dado aproximadamente por

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \frac{\frac{1}{2}L}{y} \quad y \gg L$$

y E_y vale también aproximadamente

$$E_y = \frac{k\lambda L}{y^2} = \frac{kQ}{y^2}$$

en donde $Q = \lambda L$ es la carga total. Como era de esperar, en un punto muy alejado de la mediatriz la carga lineal finita se comporta como una carga puntual.

Campo eléctrico E próximo a una carga lineal infinita

Si el punto del campo está muy próximo a una carga lineal, o alternativamente, la carga lineal es de gran longitud, de modo que $y \ll L$, el ángulo θ_0 (véase figura 19-3) es aproximadamente 90° . Sustituyendo $\theta_0 = 90^\circ$ en la ecuación 19-10 resulta

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \quad 19-11$$

Campo eléctrico E a una distancia y de una carga lineal infinita

Así pues, cuando la distancia y desde la carga lineal infinita a un punto del campo crece, el campo eléctrico disminuye según $1/y$.

Ejercicio

Comprobar que la ecuación 19-11 tiene las unidades correctas del campo eléctrico.

Ejemplo 19-1

Una carga lineal infinita de densidad lineal $\lambda = 0,6 \mu\text{C}/\text{m}$ está distribuida a lo largo del eje z , y una carga puntual $q = 8 \mu\text{C}$ se encuentra sobre el eje y en $y = 3 \text{ m}$, como se indica en la figura 19-4. Determinar el campo eléctrico en el punto P del eje x , en $x = 4 \text{ m}$.

El campo eléctrico en cualquier punto del espacio se determina a partir de la superposición del campo producido por la carga lineal y el campo debido a la carga puntual. En el punto del campo P sobre el eje x en $x = 4 \text{ m}$, el campo eléctrico debido a la carga lineal tiene la dirección del eje x y viene dado por

$$E_L = \frac{2 k \lambda}{x} \hat{i} = \frac{2(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(0,6 \times 10^{-6} \text{ C}/\text{m})}{4 \text{ m}} \hat{i} \\ = (2,70 \text{ kN}/\text{C})\hat{i}$$

El campo eléctrico producido por la carga puntual situada a la distancia $\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$, es

$$E_P = \frac{kq}{r^2} \hat{r} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-6} \text{ C})}{(5 \text{ m})^2} = (2,88 \text{ kN}/\text{C})\hat{r}$$

en donde \hat{r} es un vector unitario que apunta desde q al punto del campo P . El campo E_P forma un ángulo θ con el eje de las x como indica la figura. Los componentes x e y de E_P son

$$E_{Px} = E_P \cos \theta = (2,88 \text{ kN}/\text{C}) \left(\frac{4}{5}\right) = 2,30 \text{ kN}/\text{C}$$

y

$$E_{Py} = -E_P \sin \theta = -(2,88 \text{ kN}/\text{C}) \left(\frac{3}{5}\right) = -1,73 \text{ kN}/\text{C}$$

El campo eléctrico resultante en P tiene los componentes x e y dados por

$$E_x = E_{Lx} + E_{Px} = 2,70 \text{ kN}/\text{C} + 2,30 \text{ kN}/\text{C} = 5,00 \text{ kN}/\text{C}$$

y

$$E_y = E_{Ly} + E_{Py} = 0 + (-1,73 \text{ kN}/\text{C}) = -1,73 \text{ kN}/\text{C}$$

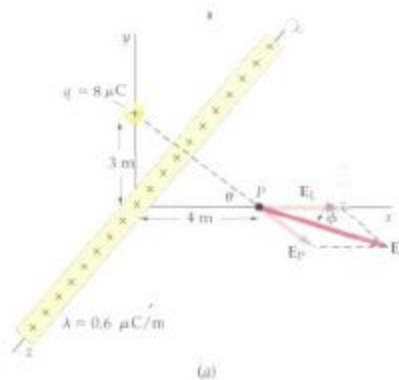
La magnitud de este campo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(5,00)^2 + (-1,73)^2} \text{ kN}/\text{C} = 5,29 \text{ kN}/\text{C}$$

Su dirección forma un ángulo ϕ por debajo del eje x dado por

$$\phi = \arctg \left(-\frac{1,73}{5,00} \right) = -19,1^\circ$$

Figura 19-4 (a) Una carga lineal infinita a lo largo del eje z y una carga puntual q sobre el eje y correspondiente al ejemplo 19-1. El campo eléctrico E en un punto P sobre el eje x se determina mediante la superposición de los campos debidos a la carga lineal y a la carga puntual. El campo debido a la carga puntual está dirigido a lo largo de la línea trazada desde la carga puntual al punto del campo. (b) Líneas del campo eléctrico próximas a un largo cable. El campo eléctrico próximo a una línea de alta tensión puede ser suficiente para arrancar los electrones de las moléculas de aire, ionizándolas y haciendo conductor al aire. El resplandor resultante de la recombinación de los electrones libres con los iones se denomina descarga en corona.



Campo eléctrico E sobre el eje de una carga anular

La figura 19-5 muestra un anillo de radio a cargado uniformemente con la carga total Q . Deseamos determinar el campo eléctrico en un punto P del eje del anillo a una distancia x del centro del mismo. El campo dE debido a la carga elemental dq viene indicado en la figura. Este campo tiene un componente dE_x dirigido a lo largo del eje del anillo y un componente dE_\perp perpendicular al eje. A partir de la simetría de la figura vemos que el campo resultante debido al anillo entero debe estar dirigido a lo largo del eje del anillo; es decir, se anulará la suma de los componentes perpendiculares. En particular, el componente perpendicular indicado será contrarrestado por el debido a otra porción de la carga directamente opuesta a la indicada en la figura. El componente axial debido a la parte de carga indicada es

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k dq}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{k dq x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

en donde

$$r^2 = x^2 + a^2$$

y

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

El campo debido al anillo completo cargado es

$$E_x = \int \frac{kx dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Como x no varía al integrar para los elementos de carga, podemos sacarle fuera de la integral. Por tanto,

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq$$

es decir,

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad 19-12$$

Podemos comprobar este resultado analizando los valores extremos de x . Para $x=0$, resulta $E_x=0$, resultado lógico, ya que para cada elemento del anillo el campo en el centro se cancela por el producido por el elemento directamente opuesto en el otro lado del anillo. Cuando x es mucho mayor que a , puede desprejiciarse a^2 frente a x^2 en el denominador de la ecuación 19-2. Así se obtiene $E_x = kQ/x^2$. Es decir, lejos del anillo, éste se comporta como una carga puntual, lo cual era de esperar.

Campo eléctrico E en el eje de un disco uniformemente cargado

La figura 19-6 muestra un disco uniformemente cargado de radio R y carga total Q . Queremos determinar el campo eléctrico sobre el eje del disco. Como el área del disco es πR^2 , la carga por unidad de área es $\sigma = Q/\pi R^2$. El campo eléctrico sobre el eje del disco será paralelo al eje. Podemos calcular este campo considerando el disco con una serie de cargas en forma de anillos concéntricos. Consideremos un anillo de radio a y anchura da como indica la figura. El área de este anillo es $dA = 2\pi a da$, y su carga es $dq = \sigma dA = 2\pi\sigma a da$. El campo producido por este anillo viene dado por la ecuación 19-12 reemplazando Q por $dq = 2\pi\sigma a da$. Así resulta

$$dE_x = \frac{kx 2\pi\sigma a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

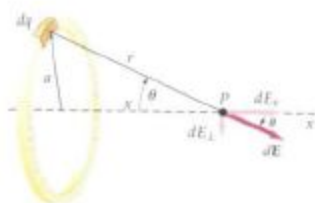


Figura 19-5 Anillo cargado de radio a . El campo eléctrico en el punto P sobre el eje x debido al elemento de carga dq posee un componente a lo largo del eje x y uno perpendicular a este mismo eje. Cuando los componentes perpendiculares correspondientes a todos los elementos del anillo se suman, se cancelan entre sí, de tal modo que el campo neto está dirigido a lo largo del eje x .

Campo eléctrico E sobre el eje de una carga anular

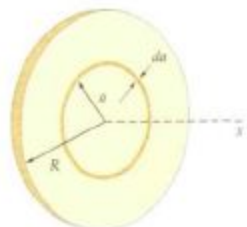


Figura 19-6 Un disco que posee una densidad de carga superficial uniforme puede considerarse como una serie de cargas anulares cada una de ellas de radio a y espesor da transportando una carga $dq = \sigma dA = (Q/\pi R^2) 2\pi a da$.

El campo total producido por el disco se determina integrando esta expresión desde $a=0$ hasta $a=R$:

$$E_x = \int_0^R \frac{kx2\pi\sigma a \, da}{(x^2+a^2)^{3/2}} = kx\pi\sigma \int_0^R (x^2+a^2)^{-3/2} 2a \, da$$

Esta integral es de la forma $\int u^n \, du$, con $u=x^2+a^2$ y $n=-\frac{3}{2}$. La integración nos da

$$\begin{aligned} E_x &= kx\pi\sigma \left[\frac{(x^2+a^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R \\ &= -2kx\pi\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

es decir

$$E_x = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \quad 19-13$$

Campo eléctrico E sobre el eje de un disco cargado

Es de esperar que lejos del disco, éste se comporte como una carga puntual. En efecto, si $x \gg R$, el segundo término de la ecuación 19-13, teniendo en cuenta el desarrollo del binomio, $(1+\epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon$, para $\epsilon \ll 1$, puede sustituirse por la siguiente aproximación:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{x}{x(1+R^2/x^2)^{1/2}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2} = 1 - \frac{R^2}{2x^2} + \dots$$

Así pues, la ecuación 19-13 se convierte en

$$E_x = 2\pi k\sigma \left(1 - 1 + \frac{R^2}{2x^2} + \dots \right) = \frac{k\pi R^2\sigma}{x^2} = \frac{kQ}{x^2}$$

en donde $Q = \sigma\pi R^2$ es la carga total sobre el disco.

Campo eléctrico E en las proximidades de un plano infinito de carga

El resultado importante del campo próximo a un plano infinito de carga puede obtenerse a partir de la ecuación 19-13 haciendo que R tienda a infinito o que x tienda a cero. Entonces

Campo eléctrico E próximo a un plano infinito de carga

$$E_x = 2\pi k\sigma \quad x > 0 \quad 19-14a$$

Por tanto, el campo debido a una distancia de carga en un plano infinito es uniforme; es decir, el campo no depende de x . Al otro lado del plano infinito, para valores negativos de x , el campo apunta en la dirección x negativa, de modo que

$$E_x = -2\pi k\sigma \quad x < 0 \quad 19-14b$$

Si nos desplazamos a lo largo del eje x , el campo eléctrico salta de $-2\pi k\sigma$ a $+2\pi k\sigma$ al atravesar el plano infinito de carga.

Ejemplo 19-2

Un disco de radio 5 cm, es portador de una densidad de carga superficial uniforme de valor $4 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Utilizando aproximaciones razonables, determinar el campo eléctrico sobre el eje del disco a distancias de (a) 0,01 cm, (b) 0,03 cm, (c) 6 m y (d) 6 cm.

(a) Como la distancia 0,01 cm es mucho menor que el radio del disco, podemos aproximar éste a un plano infinito de carga y utilizar la ecuación 19-14a. El campo eléctrico es, por tanto,

$$\begin{aligned} E_z &= 2\pi k\sigma \\ &= 2\pi (8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-9} \text{ C}/\text{m}^2) \\ &= 226 \text{ kN/C} \end{aligned}$$

(b) También 0,03 cm es mucho menor que el radio del disco, de modo que éste se comporta como un plano infinito y el campo eléctrico es $2\pi k\sigma = 226 \text{ kN/C}$.

(c) Como 6 m es una distancia mucho mayor que el radio del disco podemos considerar éste como una carga puntual $Q = \sigma\pi r^2 = (4 \mu\text{C}/\text{m}^2)\pi (0,05 \text{ m})^2 = 31,4 \text{ nC}$. El campo eléctrico a una distancia de 6 m de tal carga puntual es

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{kQ}{x^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(31,4 \times 10^{-9} \text{ C})}{(6 \text{ m})^2} \\ &= 7,84 \text{ N/C} \end{aligned}$$

(d) Como 6 cm es una distancia del mismo orden de magnitud que el radio (5 cm), utilizaremos la expresión exacta por la ecuación 19-13:

$$\begin{aligned} E_z &= 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \\ &= (226 \text{ kN/C}) \left(1 - \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2}} \right) \\ &= (226 \text{ kN/C})(1 - 0,768) = 52,4 \text{ kN/C} \end{aligned}$$

Obsérvese que no hemos tenido necesidad de convertir centímetros en metros en la expresión $x/\sqrt{x^2 + R^2}$, ya que las unidades se cancelan en este cociente.

Ejercicio

Calcular el campo eléctrico con cuatro cifras significativas correspondiente a las partes (a) y (b) del ejemplo 19-2, y comparar los resultados con los valores aproximados deducidos en este ejemplo. [Respuestas: (b) $E_z = 225,9 \text{ kN/C}$, el cual difiere del valor 226 kN/C aproximadamente en un 0,04 por ciento.]

Cuestión

1. Si la carga eléctrica está cuantizada, ¿cómo es posible hablar de distribuciones continuas de carga?

19-2 Ley de Gauss

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante las líneas de fuerza discutidas en el capítulo 18, está relacionada con una ecuación matemática llamada ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie. Esta ley permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita. En esta sección daremos un argumento plausible de la ley de Gauss basado en las propiedades de las líneas de campo eléctrico. En la sección 19-5 se ofrece una deducción rigurosa de la ley de Gauss.

La figura 19-7 muestra una superficie de forma arbitraria que incluye un dipolo. El número de líneas que salen de la carga positiva y cruzan la superficie, saliendo del recinto limitado por ésta, depende de dónde se dibuje la superficie, pero el número es exactamente igual al número de líneas que entran en el mismo recinto y terminan en la carga negativa. Si contamos el número que sale como positivo y el número que entra como negativo, el número neto que sale o entra es cero. En las figuras en las que se muestran las líneas de fuerza para otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura 19-8, el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es un enunciado cualitativo de la ley de Gauss.

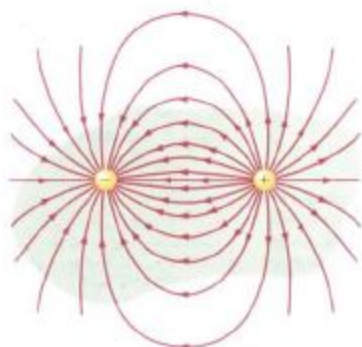


Figura 19-7 Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe dónde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas.

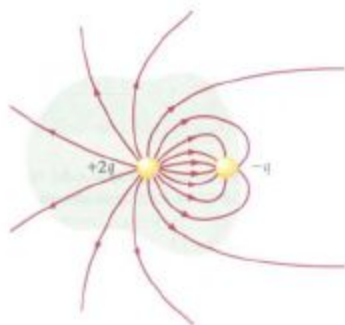


Figura 19-8 Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas $+2q$ y $-q$. Las líneas de campo que terminan en $-q$ o no pasan a través de la superficie o salen y vuelven a entrar. El número neto de las líneas que salen es el mismo que correspondería a una sola carga de valor igual a la carga neta dentro de la superficie.

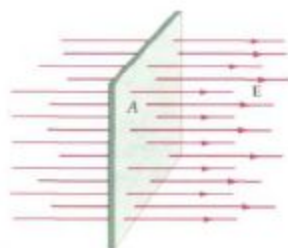


Figura 19-9 Líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme E que atraviesa un área A perpendicular al campo. El producto EA es el flujo ϕ a través del área.

La magnitud matemática relacionada con el número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie recibe el nombre de flujo eléctrico. En la figura 19-9 se muestra un área A perpendicular a un campo eléctrico uniforme. El **flujo eléctrico** ϕ que atraviesa una superficie de área A que es perpendicular al campo se define como el producto del campo E por el área A :

$$\phi = EA$$

Las unidades de flujo son el newton-metros cuadrados por culombio ($\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$). Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas por unidad de área, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de fuerza que atraviesan el área.

En la figura 19-10 la superficie de área A_2 no es perpendicular al campo eléctrico E . El número de líneas que atraviesan el área A_2 es el mismo que atraviesa el área A_1 . Las áreas están relacionadas por

$$A_2 \cos \theta = A_1 \quad 19-15$$

en donde θ es el ángulo existente entre E y el vector unidad \hat{n} perpendicular a la superficie A_2 , según está indicado. El flujo a través de una superficie no perpendicular a E viene definido por

$$\phi = E \cdot \hat{n} A = EA \cos \theta = E_n A$$

en donde $E_n = E \cdot \hat{n}$ es el componente del vector del campo eléctrico perpendicular, o normal, a la superficie.

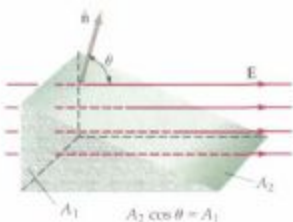


Figura 19-10 Líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme perpendicular al área A_1 , pero que forma un ángulo θ con el vector de unidad \hat{n} normal al área A_1 . Cuando E no es perpendicular al área, el flujo a través del área es $E \cdot A$, siendo $E_{\perp} = E \cos \theta$ el componente de E perpendicular al área. El flujo que atraviesa A_2 es el mismo que pasa por A_1 .

Podemos generalizar nuestra definición de flujo eléctrico a superficies curvadas en las cuales el campo eléctrico puede variar tanto de módulo como de dirección, o ambos a la vez, dividiendo la superficie en un gran número de elementos muy pequeños. Si cada elemento es suficientemente pequeño, puede considerarse como un plano y puede despreciarse la variación del campo eléctrico en todo el elemento. Sea \hat{n} el vector unidad perpendicular a dicho elemento y ΔA , su área (figura 19-11). (Si la superficie es curvada, los vectores unidad \hat{n} , tendrán direcciones diferentes en el caso de elementos distintos.) El flujo del campo eléctrico a través de este elemento es

$$\Delta \phi = E \cdot \hat{n} \Delta A$$

El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta \phi$, extendida a todos los elementos. En el límite en que el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma resulta ser una integral. La definición general del flujo eléctrico es entonces

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i E \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int E \cdot \hat{n} dA \quad 19-16$$

Frecuentemente estamos interesados en conocer el flujo del campo eléctrico a través de una superficie. En una superficie cerrada, el vector normal unidad \hat{n} se define de modo que está dirigido hacia fuera en cada punto. En un punto donde una línea de fuerza sale de la superficie, E está dirigido hacia fuera y ϕ es positivo, pero en un punto en donde una línea de fuerza entra en la superficie, E está dirigido hacia dentro y ϕ es negativo. El flujo total o neto ϕ_{neto} a través de la superficie cerrada es positivo o negativo dependiendo de que E sea predominantemente hacia fuera o hacia dentro de la superficie. Puesto que el flujo a través de cualquier parte de la superficie es proporcional al número de líneas que atraviesan la misma, el flujo neto es proporcional al número neto de líneas de fuerza que salen de la superficie, es decir, al número de líneas que salen de la superficie menos el número de las que entran. La integral extendida a una superficie cerrada se indica por el símbolo \oint . El flujo neto a través de una superficie cerrada viene dado, por tanto, por

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA \quad 19-17$$

La figura 19-12 muestra una superficie esférica de radio R con su centro en la carga puntual Q . El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene la magnitud

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

El flujo neto a través de esta superficie esférica es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA$$

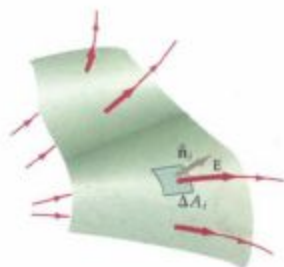


Figura 19-11 Cuando E varía en un módulo o dirección, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i . El flujo a través del área se calcula sumando $E \cdot \hat{n} \Delta A_i$ para todos los elementos.

Definición de flujo eléctrico

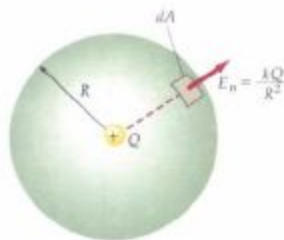


Figura 19-12 Una superficie esférica que incluye la carga puntual Q . El mismo número de líneas de campo eléctrico que pasa a través de esta superficie, atraviesa cualquier superficie que incluya Q . El flujo se calcula fácilmente para una superficie esférica. Es igual al producto de E_n por el área superficial $4\pi R^2$.

en donde E_n ha salido de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de dA extendida a toda la superficie es precisamente el área total, igual a $4\pi R^2$. Con este valor y sustituyendo kQ/R^2 por E_n , se obtiene

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ \quad 19-18$$

Así pues, el flujo neto a través de una superficie esférica con una carga puntual en el centro es independiente del radio de la esfera y es igual a $4\pi k$ veces la magnitud de dicha carga. Esto está de acuerdo con nuestras observaciones anteriores, de que el número neto de líneas que atraviesan una superficie es proporcional a la carga neta interior a la superficie. Este número de líneas es el mismo para cualquier superficie que encierre a la carga, cualquiera que sea su forma. Puesto que el número de líneas y el flujo son proporcionales entre sí, se deduce que la ecuación 19-18 es válida para el flujo que atraviesa cualquier superficie que encierre la carga puntual Q . El flujo neto a través de una superficie cualquiera que rodee una carga puntual Q es igual a $4\pi kQ$.

Podemos ampliar este resultado a sistemas de más de una carga puntual. En la figura 19-13, la superficie encierra dos cargas puntuales q_1 y q_2 y existe una tercera carga puntual q_3 fuera de la superficie. Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto $\phi_{\text{neto}} = \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ a través de la superficie es precisamente la suma de los flujos debidos a las cargas individuales. El flujo originado por la carga q_3 , que está fuera de la superficie, es cero debido a que cada línea de fuerza procedente de q_3 que entra en la superficie en un punto abandona la misma en algún otro punto. El número neto de líneas a través de la superficie procedentes de una carga exterior a la superficie, es cero. El flujo a través de la superficie debido a la carga q_1 es $4\pi kq_1$ y el debido a la carga q_2 es $4\pi kq_2$. El flujo neto a través de la superficie es igual a $4\pi k(q_1 + q_2)$ que puede ser positivo, negativo o cero dependiendo de los signos y valores de las dos cargas.



Figura 19-13 Superficie que incluye las cargas puntuales q_1 y q_2 , pero no q_3 . El flujo neto a través de esta superficie es $4\pi k(q_1 + q_2)$.

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie:

Ley de Gauss

$$\phi_{\text{neto}} = \oint SE_n dA = 4\pi kQ_{\text{dentro}} \quad 19-19$$

Este importante resultado es la **ley de Gauss**. Su validez depende del hecho de que el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga. Esta propiedad del campo eléctrico es la que ha hecho posible dibujar un número fijo de líneas de fuerza desde una carga y conseguir que la densidad de líneas sea proporcional a la intensidad del campo.

Es costumbre escribir la constante de Coulomb k en función de otra constante ϵ_0 , denominada **permitividad del espacio libre**:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad 19-20$$

Con esta notación, la ley de Coulomb se escribe

Ley de Coulomb en función de ϵ_0

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad 19-21$$

y la ley de Gauss se escribe

$$\phi_{\text{neto}} = \oint SE_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro}}$$

19-22 Ley de Gauss en función de ϵ_0

El valor de ϵ_0 en unidades SI es

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

La ley de Gauss es válida para todas las superficies y distribuciones de carga. Como veremos en la sección siguiente, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones especiales de carga con altos grados de simetría. La potencia real de la ley de Gauss es teórica. En los campos eléctricos que resultan de cargas estáticas o que se mueven lentamente, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Sin embargo, la ley de Gauss es más general, pues también puede aplicarse en campos eléctricos generados por cargas que se mueven rápidamente y cargas aceleradas.

Cuestiones

- Si el campo eléctrico E es cero en cualquier punto de una superficie cerrada, ¿es cero necesariamente el flujo neto a través de dicha superficie? ¿Cuál es entonces la carga neta dentro de la superficie?
- Si el flujo neto a través de una superficie cerrada es cero, ¿se deduce entonces que el campo eléctrico E es cero en todos los puntos de la superficie? ¿Se deduce que la carga neta dentro de la superficie es cero?
- ¿El campo eléctrico E de la ley de Gauss es la parte de campo eléctrico debido a la carga interior a la superficie o es el campo eléctrico neto debido a todas las cargas estén en el interior o en el exterior de la superficie?

19-3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

En algunas distribuciones de carga altamente simétricas, tales como una esfera uniformemente cargada o una línea infinita de carga, es posible determinar una superficie matemática que por simetría posee un campo eléctrico constante perpendicular a la superficie. A continuación puede evaluarse fácilmente el flujo eléctrico a través de esta superficie y utilizar la ley de Gauss para relacionar el campo eléctrico con la carga interior a la superficie. Una superficie utilizada para calcular el campo eléctrico mediante la ley de Gauss se denomina **superficie gaussiana**. En esta sección utilizaremos dicho método para calcular el campo eléctrico producido por diferentes distribuciones simétricas de carga.

Campo eléctrico E próximo a una carga puntual

En primer lugar utilizaremos la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q . Supongamos que la carga puntual está en el origen. Por simetría E será radial y su magnitud depende sólo de la distancia a la carga. Como superficie gaussiana, elegiremos una superficie esférica de radio r centrada en la carga. El componente normal de E , $E_n = E \cdot \hat{n} = E$, tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica. El flujo neto a través de esta superficie es, pues,

$$\phi_{\text{neto}} = \oint E \cdot \hat{n} \, dA = \oint E_n \, dA = E \oint dA$$

Pero $\int dA$ es el área total de la superficie esférica, $4\pi r^2$. Puesto que la carga total en el interior de la superficie es precisamente la carga puntual q , la ley de Gauss nos da

$$EA\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

y

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Así pues hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. Como inicialmente dedujimos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, hemos visto que ambas leyes son equivalentes para cargas estáticas.

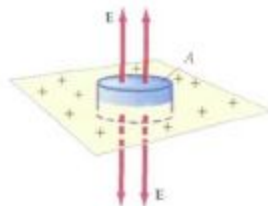


Figura 19-14 Superficie gaussiana para el cálculo del campo eléctrico debido a un plano infinito de cargas. En las caras superior e inferior de esta caja cilíndrica, E es perpendicular a la superficie y de valor constante. El flujo a través de dicha superficie es $2E_r A$, siendo A el área de cada cara.

Campo eléctrico E próximo a un plano infinito de carga

Deseamos determinar el campo eléctrico próximo a un plano infinito de carga, de densidad de carga uniforme σ . Supongamos que el plano de carga se encuentra en el plano xy . Por simetría sabemos que el campo eléctrico debe ser perpendicular al plano, dependiendo sólo de la distancia z del plano al punto del campo y que ha de tener el mismo valor pero sentido opuesto en los puntos situados a la misma distancia por arriba y por debajo del plano. Escogeremos como superficie gaussiana un cilindro en forma de caja con su eje perpendicular al plano y con su centro en el plano (figura 19-14). Suponemos que cada base del cilindro es paralela al plano y tiene un área A . En este caso, E es paralelo a la superficie cilíndrica y no existe ningún flujo que atraviese esta superficie curva. Puesto que el flujo que sale por cada cara superior o inferior es $E_r A$, el flujo total es $2E_r A$. La carga neta en el interior de la superficie es σA . A partir de la ley de Gauss se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_{\text{neto}} &= \oint E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{encerrada}} \\ 2E_r A &= \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A\end{aligned}$$

o sea,

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma \quad 19-23$$

Campo eléctrico E próximo a un plano infinito de carga

Este resultado concuerda con el obtenido por integración directa para el campo eléctrico E próximo a un disco de carga en el límite del radio infinito (ecuación 19-14a).

Ejemplo 19-3

Un plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = +4\text{ nC/m}^2$ coincide con el plano yz en el origen, y un segundo plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = -4\text{ nC/m}^2$ se localiza en un plano paralelo al plano yz en $x = 2\text{ m}$. Determinar el campo eléctrico en (a) $x = 1,8\text{ m}$ y (b) $x = 5\text{ m}$.

(a) La magnitud del campo eléctrico producido por cualquier distribución de carga es constante e igual a

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-6}\text{ C/m}^2}{2(8,85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 226\text{ N/C}$$

El campo eléctrico debido a la carga positiva sobre el plano yz apunta alejándose de este plano. De igual modo, el campo eléctrico debido a la carga nega-

tiva sobre el plano en $x=2$ m apunta hacia este plano. Por tanto, en el espacio comprendido entre ambos planos, las magnitudes de los campos se suman, mientras que a la derecha o a la izquierda de ambos planos las magnitudes se restan. El campo eléctrico en $x=1,8$ m, situado entre los planos, es por tanto,

$$E_x = E_1 + E_2 = 226 \text{ N/C} + 226 \text{ N/C} = 452 \text{ N/C}$$

(b) Como el punto $x=5$ m se encuentra a la derecha de ambos planos, las magnitudes de los campos se restan, de modo que el campo eléctrico neto es 0. En la figura 19-15 se muestran las líneas de campo eléctrico para esta distribución de carga.

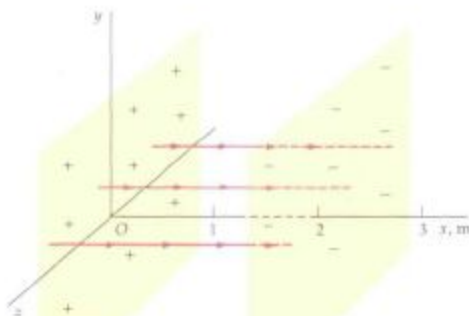


Figura 19-15 Un plano infinito de carga con una densidad de carga superficial positiva en el plano yz en el origen y un plano infinito de carga con una densidad de carga superficial negativa de igual magnitud en $x=2$ m. El campo eléctrico es cero excepto en la región comprendida entre los planos. Las líneas de campo eléctrico comienzan en el plano cargado positivamente y terminan en el plano cargado negativamente.

Campo eléctrico E próximo a una carga lineal infinita

Consideremos ahora el campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal muy larga de densidad de carga lineal uniforme λ . La figura 19-16 muestra una superficie cilíndrica de longitud L y radio r coaxial con la línea de carga. Por simetría, en aquellos puntos alejados de los extremos de la línea, las líneas del campo eléctrico irradian hacia fuera uniformemente desde la línea de carga (si ésta es positiva). El campo eléctrico es, por tanto, perpendicular a la superficie cilíndrica y posee el mismo valor E , en cualquier punto de la superficie. El flujo eléctrico es, por tanto, igual al producto del campo eléctrico por el área de la superficie cilíndrica. No hay flujo a través de las superficies planas de los extremos del cilindro, ya que en estas superficies $E \cdot \hat{n} = 0$. La carga neta dentro de esta superficie es el producto de la carga por unidad de longitud λ multiplicada por la longitud L . Según la ley de Gauss

$$\begin{aligned} \phi_{\text{neto}} &= \oint E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{encerrado}} \\ \oint E_n \, dA &= E \oint dA = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

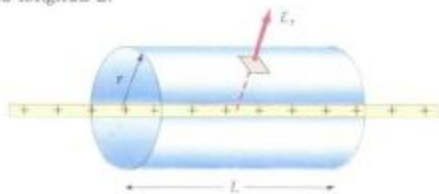
Como el área de la superficie cilíndrica es $2\pi rL$, tenemos

$$E, 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

o sea

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r}$$

Figura 19-16 Una carga lineal uniforme muy larga con una superficie cilíndrica que incluye parte de la carga. El flujo a través de la superficie viene dado por el producto de E , por el área de la superficie $2\pi rL$.



Campo eléctrico E a una distancia r de una carga lineal infinita

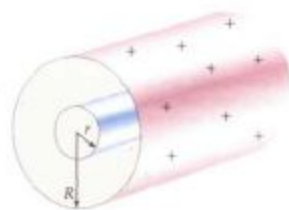


Figura 19-17 Una corteza cilíndrica de radio R , portadora de una densidad de carga superficial uniforme σ . Para determinar el campo eléctrico dentro de la corteza, se construye una superficie gaussiana cilíndrica concéntrica con la corteza de radio $r < R$ como se indica. Como no hay carga dentro de la superficie gaussiana, el flujo neto a través de esta superficie es nulo.

Campo eléctrico E dentro de una corteza cilíndrica de carga

Este resultado es el mismo que el de la ecuación 19-11 que fue obtenido por integración directa sobre la carga lineal.

Es importante destacar que para usar la ley de Gauss es necesaria la existencia de un alto grado de simetría. En el cálculo anterior fue necesario suponer que el punto del campo estaba muy alejado de los extremos de la carga lineal de tal modo que E_x sería constante en todos los puntos de la superficie gaussiana cilíndrica. Esto equivale a suponer que a la distancia r de la línea de carga, ésta parece ser infinitamente larga. Si la carga lineal es de longitud finita, no podemos suponer que E_x es constante en todos los puntos de la superficie cilíndrica y por tanto, no puede utilizarse la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una corteza cilíndrica de carga

Calculemos ahora el campo eléctrico dentro y fuera de una corteza cilíndrica de radio R que posee una densidad de carga superficial uniforme, σ . Para calcular el campo dentro de la corteza consideremos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio $r < R$ concéntrica con la corteza, como indica la figura 19-17. Por simetría, el campo eléctrico es perpendicular a esta superficie gaussiana y su magnitud E , es constante en todos los puntos de la superficie. El flujo de E a través de la superficie es, por tanto,

$$\phi_{\text{neto}} = \oint E_n dA = E \oint dA = E, 2\pi rL$$

en donde $2\pi rL$ es el área de la superficie gaussiana. Como la carga total dentro de esta superficie es cero, la ley de Gauss nos da

$$\phi_{\text{neto}} = E, 2\pi rL = 0$$

Por tanto,

$$E_r = 0 \quad r < R \quad 19-25a$$

Es decir, el campo eléctrico es nulo en todos los puntos dentro de una corteza cilíndrica.

Para determinar el campo eléctrico fuera de la corteza, consideremos una superficie gaussiana cilíndrica de radio $r > R$. De nuevo, por simetría, el campo eléctrico es perpendicular a esta superficie gaussiana y su magnitud E , es constante en todos los puntos de la superficie. El flujo vuelve a ser $E, 2\pi rL$, pero ahora la carga total dentro de la superficie es $\sigma 2\pi RL$. Según la ley de Gauss

$$\phi_{\text{neto}} = E, 2\pi rL = \frac{\sigma 2\pi RL}{\epsilon_0}$$

Por tanto,

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

Como la longitud L de la corteza cilíndrica transporta la carga $\sigma 2\pi RL$, la carga por unidad de longitud de la corteza es $\lambda = \sigma 2\pi R$. Sustituyendo $\lambda/2\pi R$ por σ en la ecuación anterior, se obtiene

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r > R \quad 19-25b$$

Campo eléctrico E exterior a una corteza cilíndrica de carga

expresión que coincide con la ecuación 19-24 correspondiente a un campo E a una distancia r de una carga lineal infinita. Así pues, el campo exterior a una

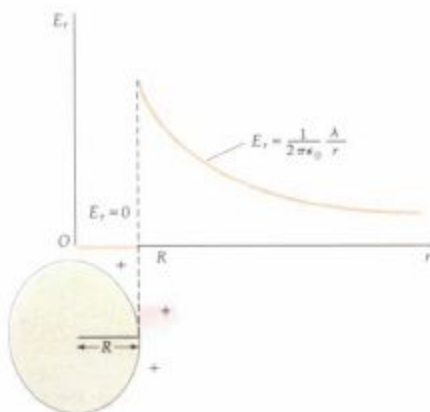


Figura 19-18 Gráfica de E_r en función de r para una corteza cilíndrica que posee una carga distribuida uniformemente en su superficie. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, en donde hay una carga superficial de densidad σ . Justo dentro de la corteza, el campo es nulo, mientras que justo fuera de la corteza, su magnitud es σ/ϵ_0 .

corteza cilíndrica de carga es el mismo que si toda la carga estuviera distribuida sobre el eje del cilindro. La figura 19-18 muestra el valor E_r en función de r para esta distribución de carga. Justamente fuera de la corteza en $r = R$, el campo eléctrico es $E_r = \sigma/\epsilon_0$. Como el campo justamente dentro de la corteza es cero, resulta un salto discontinuo del campo eléctrico de valor σ/ϵ_0 al atravesar la corteza. Este resultado coincide con el que encontramos para un plano infinito de carga, en donde el campo eléctrico es $-\sigma/2\epsilon_0$ a un lado del plano y $+\sigma/2\epsilon_0$ al otro lado. Es un resultado general que deduciremos al final de esta sección.

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de un cilindro sólido de carga infinitamente largo

La figura 19-19 muestra un cilindro sólido de radio R portador de una carga que está distribuida uniformemente por todo el volumen del cilindro con densidad de carga ρ . Lo mismo que en el caso de la corteza cilíndrica de carga, el flujo a través de una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L es

$$\phi_{\text{neto}} = E_r 2\pi r L$$

Si la superficie gaussiana es exterior al cilindro, es decir, si $r > R$, la carga total dentro de esta superficie es ρ veces el volumen del cilindro sólido, el cual vale $\pi R^2 L$. Según la ley de Gauss

$$E_r 2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

De nuevo, podemos escribir esta expresión en función de la carga por unidad de longitud a lo largo del cilindro, es decir, $\lambda = (\rho \pi R^2 L)/L = \rho \pi R^2$. Sustituyendo $\lambda/\pi R^2$ por ρ en la ecuación anterior, se obtiene

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r \geq R \quad 19-26a$$

que coincide con las ecuaciones 19-24 y 19-25b. Así pues, el campo eléctrico exterior a un cilindro sólido de carga es el mismo que si toda la carga estuviera distribuida en el eje del cilindro.

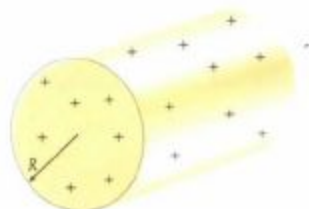


Figura 19-19 Cilindro sólido portador de una densidad de carga volumétrica uniforme ρ .

Campo eléctrico E exterior a un cilindro sólido de carga

Si se elige la superficie gaussiana en el interior del cilindro, de modo que $r < R$, la carga total interior a la superficie es ρV , en donde $V = \pi r^2 L$ es el volumen del cilindro interior a la superficie gaussiana. Por tanto, la ley de Gauss nos da para el campo eléctrico interior al cilindro sólido de carga

$$\phi_{\text{exto}} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interno}}$$

$$E_r 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \rho V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 L$$

o sea

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \quad r \leq R \quad 19.26b$$

Campo eléctrico E dentro de un cilindro sólido de carga

Es decir, el campo eléctrico dentro de un cilindro sólido de carga crece con el valor de r . La figura 19-20 muestra un gráfico de E_r en función de r para esta distribución de carga. Obsérvese que E_r es continuo en $r = R$.

Figura 19-20 Gráfica del campo eléctrico E_r producido por un cilindro sólido cargado, de radio R en función de la distancia r medida desde el eje del cilindro. El campo E_r es proporcional a r para $0 < r < R$ y disminuye según $1/r$ para $r > R$. El campo es continuo en $r = R$.

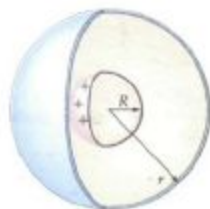
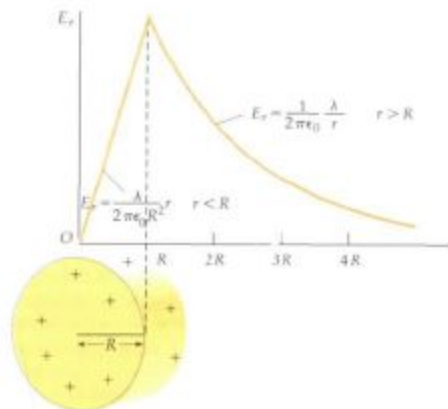


Figura 19-21 Superficie gaussiana esférica de radio $r > R$ para el cálculo del campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R . El flujo total a través de esta superficie es $E_r 4\pi r^2$, y la carga total dentro de la superficie es la carga total de la corteza Q . El campo es el mismo que resultaría si toda la carga estuviera en el centro de la corteza.

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga

Determinemos ahora el campo eléctrico interior y exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R y carga total Q . Por simetría, E debe ser radial y su magnitud dependerá sólo de la distancia r contada desde el centro de la esfera. En la figura 19-21 hemos escogido una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$. Como E es perpendicular a esta superficie y constante en magnitud en todos los puntos de la misma, el flujo que atraviesa la superficie es

$$\phi_{\text{exto}} = \oint E_r dA = E_r 4\pi r^2$$

Como la carga total dentro de la superficie gaussiana es la carga total sobre la corteza, Q resulta por la ley de Gauss

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

es decir,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R$$

19-27a

Campo eléctrico E exterior a una corteza esférica de carga

Así pues, el campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada es el mismo que si toda la carga estuviera en el centro de la corteza.

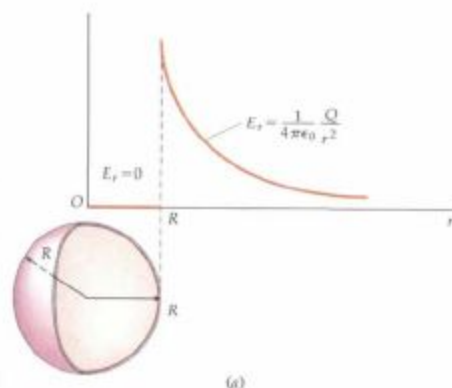
Si escogemos una superficie gaussiana esférica en el interior de la corteza, de modo que $r < R$, el flujo neto es de nuevo $E_4\pi r^2$, pero la carga total dentro de la esfera es cero. Por tanto, para $r < R$, la ley de Gauss nos da

$$\phi_{\text{neto}} = E_4\pi r^2 = 0$$

$$E_r = 0 \quad r < R$$

19-27b

Campo eléctrico E dentro de una corteza esférica de carga



(b)

Figura 19-22 (a) Gráfica de E_r en función de r para una distribución de carga de una corteza esférica. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, en donde existe una carga superficial de densidad σ . Justo dentro de la corteza el campo es nulo, mientras que justo fuera de la corteza tiene la magnitud σ/ϵ_0 . (b) La disminución con la distancia del campo E_r creado por una corteza esférica cargada, es evidente por el efecto del campo sobre las llamas de estas dos bujías. La corteza esférica del generador van de Graaff a la izquierda posee una gran carga negativa que atrae los iones positivos de la llama de la bujía más próxima. La llama de la derecha, más alejada, no se afecta por la presencia del campo.

Obsérvese la semejanza de estos resultados con los obtenidos cuando calculamos el campo gravitatorio debido a una corteza esférica de masa en la sección 10-7. Podríamos obtener también estos resultados por integración directa de la ley de Coulomb, pero el cálculo es mucho más difícil. La figura 19-22 muestra la variación de E_r en función de r para esta distribución de carga. Obsérvese también que el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde la densidad de carga superficial es σ . Justamente dentro de la corteza $E_r = 0$, mientras que justamente fuera, $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$, ya que $\sigma = Q/4\pi R^2$.

Ejemplo 19-4

Una corteza esférica de radio $R = 3$ m tiene su centro en el origen y es portadora de una densidad de carga superficial $\sigma = 3$ nC/m². Una carga puntual $q = 250$ nC se encuentra sobre el eje y en $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en (a) $x = 2$ m y (b) $x = 4$ m.

(a) El punto sobre el eje x en $x=2$ m se encuentra dentro de la corteza esférica, de modo que el campo debido a la corteza es cero. El campo eléctrico en este punto se debe sólo a la carga puntual que se encuentra a una distancia $r_1 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = \sqrt{8} \text{ m}$. El campo forma un ángulo de -45° con el eje x y su magnitud es

$$E = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{(\sqrt{8} \text{ m})^2} = 281 \text{ N/C}$$

(b) En el punto $x=4$ m, fuera de la corteza esférica, ésta puede considerarse como una carga puntual en el origen de magnitud $Q = \sigma 4\pi R^2 = (3 \text{ nC/m}^2) 4\pi(3 \text{ m})^2 = 339 \text{ nC}$. El campo eléctrico debido a la corteza en $x=4$ m posee la dirección del eje x y su magnitud es

$$E_1 = E_{1x} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9} \text{ C})}{(4 \text{ m})^2} = 190 \text{ N/C}$$

La distancia desde la carga puntual q sobre el eje y hasta el punto del campo en $x=4$ m es $r_2 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = \sqrt{20} \text{ m}$. La magnitud del campo eléctrico en $x=4$ m debido a q es

$$E_2 = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{(\sqrt{20} \text{ m})^2} = 112 \text{ N/C}$$

Este campo forma un ángulo θ con el eje x , en donde $\cos \theta = 4/\sqrt{20}$ y $\sin \theta = -2/\sqrt{20}$. Los componentes x e y de este campo son, por tanto,

$$E_{2x} = E_2 \cos \theta = (112 \text{ N/C}) \left(\frac{4}{\sqrt{20}} \right) = 100 \text{ N/C}$$

y

$$E_{2y} = E_2 \sin \theta = (112 \text{ N/C}) \left(-\frac{2}{\sqrt{20}} \right) = -50 \text{ N/C}$$

Los componentes x e y del campo eléctrico resultante son

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 190 \text{ N/C} + 100 \text{ N/C} = 290 \text{ N/C}$$

y

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 0 - 50 \text{ N/C} = -50 \text{ N/C}$$

La magnitud y dirección del campo resultante pueden determinarse a partir de $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ y $\tan \theta' = E_y/E_x$.

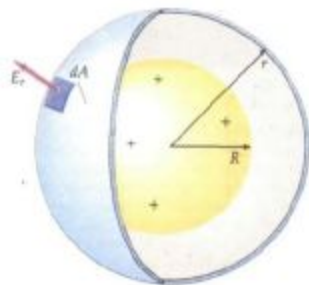


Figura 19-23 Superficie esférica gaussiana para el cálculo del campo eléctrico fuera de una esfera sólida cargada uniformemente. El flujo total a través de esta superficie es $E_r 4\pi r^2$ y la carga total interior a la superficie es la carga total de la esfera Q . El campo es el mismo que resultaría si toda la carga estuviera en el centro de la esfera.

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una esfera sólida uniformemente cargada

Calcularemos aquí el campo eléctrico dentro y fuera de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R portadora de una carga Q distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho = Q/V$ siendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera. Como en el caso de la corteza esférica de carga, el flujo a través de una superficie gaussiana de radio r es

$$\phi_{\text{neto}} = E_r 4\pi r^2$$

Si la superficie gaussiana es exterior a la esfera, como indica la figura 19-23, la carga total dentro de la superficie es Q y la ley de Gauss nos da

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r \geq R$$

19-28a

Campo eléctrico E en el exterior de una esfera sólida de carga

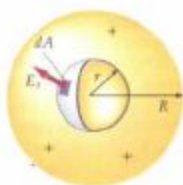


Figura 19-24 Superficie gaussiana esférica para el cálculo del campo eléctrico en el interior de una esfera sólida uniformemente cargada. El flujo a través de la superficie es nuevamente $E_r 4\pi r^2$. La carga total dentro de la superficie gaussiana es $Q(r^3/R^3)$.

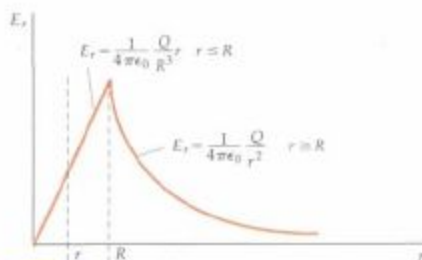


Figura 19-25 Gráfica de E_r en función de r para una esfera sólida cargada, de radio R . Para $r < R$, el campo crece linealmente con r . Fuera de la esfera, el campo eléctrico es el mismo que el debido a una carga puntual. El campo es continuo en $r = R$.

Si la superficie gaussiana se elige en el interior de la esfera, lo cual significa que $r < R$ (figura 19-24), la carga total dentro de la superficie es ρV , en donde $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ es el volumen interior a la superficie gaussiana:

$$Q_{\text{encerrada}} = \rho V = \frac{Q}{V} V = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Según la ley de Gauss el campo eléctrico interior a la esfera se deduce de la expresión

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3}$$

es decir

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \quad r \leq R \quad 19-28b$$

Así vemos, que el campo eléctrico dentro de una esfera sólida de carga aumenta con r . La figura 19-25 muestra una gráfica de E_r en función de r para esta distribución de carga. Obsérvese que E_r es continuo para $r = R$. Esta función, a veces, se puede utilizar para describir el campo eléctrico de un núcleo atómico, el cual puede considerarse que es, aproximadamente, una esfera sólida uniforme de carga.

Discontinuidad de E_n

Ya hemos visto que el campo eléctrico correspondiente a un plano infinito, una corteza cilíndrica y una corteza esférica de carga, es discontinuo en la cantidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ . Como veremos, este es un resultado general para el componente del campo eléctrico perpendicular a una superficie portadora de una densidad de carga σ . La figura 19-26 muestra una superficie gaussiana cuya forma es la de una pequeña caja de píldoras («pastillero») con caras de área A a cada lado de una superficie arbitraria portadora de una densidad de carga superficial σ . Sea E_{n2} el componente normal del campo eléctrico a un lado de la superficie y E_{n1} al otro lado, como indica la figura. Si el espesor de la caja es muy pequeño comparado con el radio de las caras, podemos despreciar el flujo a través del área cilíndrica $2\pi RL$ respecto

Campo eléctrico E dentro de una esfera sólida de carga.

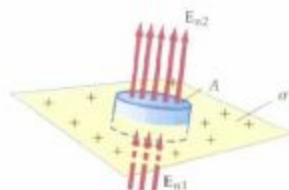


Figura 19-26 Una superficie gaussiana en forma de caja cilíndrica, con caras de área A en sus bases, posee una densidad de carga σ . El flujo neto a través de la caja es $(E_{n2} - E_{n1})A$. El campo eléctrico E_{n2} a un lado es mayor que el campo eléctrico E_{n1} en el otro en la cantidad σ/ϵ_0 .

al flujo a través de las caras de área πR^2 . El flujo neto a través de la superficie gaussiana es por tanto, $E_{2z}A - E_{1z}A$ y la carga dentro de la superficie es σA . Según la ley de Gauss se obtiene

$$E_{2z}A - E_{1z}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

es decir

$$E_{2z} - E_{1z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

19-29

Discontinuidad de E_z

que es el resultado que queremos probar. Obsérvese que el campo eléctrico *no* es discontinuo en los puntos de discontinuidad de una densidad volumétrica de carga. El campo eléctrico en un punto justamente en el interior de un cilindro sólido de carga o de una esfera sólida de carga, es el mismo que en un punto justamente en el exterior de dicha distribución de carga, como puede verse en las figuras 19-20 y 19-25.

Cuestiones

- ¿Qué información se necesita además de la carga total en el interior de una superficie para utilizar la ley de Gauss con objeto de hallar el campo eléctrico?
- Explicar por qué el campo eléctrico crece con r en lugar de disminuir según $1/r^2$ cuando nos desplazamos desde el centro en el interior de una distribución de carga esférica de densidad volumétrica de carga constante.
- La ecuación 19-10 correspondiente al campo eléctrico sobre la mediatriz de carga lineal finita es distinta de las ecuaciones 19-11 o 19-24 que corresponden al campo eléctrico próximo a una carga lineal infinita; sin embargo, la ley de Gauss aparentemente ofrece el mismo resultado en estos dos casos. Explicar.

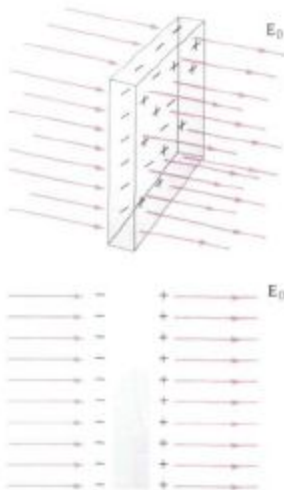


Figura 19-27 Dos vistas de una lámina conductora en un campo eléctrico externo E_0 . Una carga positiva se induce en la cara derecha y una carga negativa en la cara izquierda, de tal modo que el campo eléctrico neto dentro del conductor es cero. Las líneas de campo eléctrico, por tanto, terminan en la cara izquierda y comienzan de nuevo en la cara derecha.

19-4 Carga y campo en la superficie de los conductores

Al estudiar los campos electrostáticos la propiedad más importante de un conductor es la disponibilidad de carga con libertad de movimiento en su seno. En presencia de un campo eléctrico externo, la carga libre de un conductor se mueve alrededor de éste, distribuyéndose de tal modo que crea un campo eléctrico que anula el campo externo dentro del conductor*. Se dice entonces que el conductor se encuentra en **equilibrio electrostático**. Consideremos una carga q dentro de un conductor. Si existe un campo E dentro del conductor, sobre esta carga se ejercerá una fuerza qE . Por tanto, si la carga tiene libertad de movimiento, es decir, si no está ligada a un átomo o molécula por una fuerza más intensa, lógicamente será acelerada. Así el equilibrio electrostático es imposible en un conductor, a menos que el campo eléctrico sea cero en todos los puntos interiores del mismo. En la superficie de un conductor en equilibrio, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Si existiera un componente tangencial de E , la carga libre del conductor se desplazaría hasta que se anulara dicho componente.

La figura 19-27 muestra una lámina rectangular dentro de un campo eléctrico externo E_0 . Los electrones libres están distribuidos originalmente de un modo uniforme en toda la lámina. Como la lámina está formada por átomos neutros, es eléctricamente neutra (siempre que sobre ella no se haya depositado una carga

* Cuando hablamos de campos eléctricos de un conductor, nos referimos a los campos macroscópicos producidos por fuentes externas o por la carga libre del conductor. A nivel atómico existen campos eléctricos microscópicos que mantienen los electrones ligados a la red iónica. Estos campos microscópicos fluctúan ampliamente con el tiempo y sobre pequeñas distancias dentro del átomo, pero su valor medio es cero, si promediamos a una distancia grande comparada con el diámetro del átomo.

extra). Si el campo eléctrico externo está dirigido hacia la derecha, existirá una fuerza sobre cada electrón $F = -eE_0$ hacia la izquierda, ya que los electrones libres poseen una carga negativa, y por consiguiente estos electrones libres acelerarán hacia la izquierda. En la superficie del conductor, éste ejerce fuerzas sobre estos electrones que les mantienen ligados al conductor. (Si el campo externo es muy intenso, los electrones pueden ser arrancados de la superficie del conductor. En electrónica este fenómeno se denomina **emisión de campo**. Aquí supondremos que el campo externo no es suficientemente intenso para vencer las fuerzas que enlazan los electrones con la superficie.) El resultado es una densidad de carga superficial negativa inducida sobre el lado izquierdo de la lámina y otra positiva en el lado derecho de igual magnitud, debido al movimiento de electrones libres desde el lado derecho al izquierdo de la lámina. En conjunto, estas densidades de carga inducidas producen un campo eléctrico dentro de la lámina que se opone al campo externo. Cuando los campos inducido y externo se cancelan, se establece el equilibrio electrostático en todos los puntos dentro del conductor, de tal modo que no existe una fuerza aplicada neta sobre los electrones libres.

El comportamiento de la carga libre en un conductor situado en un campo eléctrico externo es el mismo cualquiera que sea la forma del conductor. Al aplicar un campo externo, la carga libre se mueve rápidamente hasta que se alcanza una distribución de equilibrio tal que el campo eléctrico neto es cero en todos los puntos dentro del conductor. El tiempo que tarda en alcanzar el equilibrio depende del conductor. En el cobre y en otros buenos conductores, este tiempo es tan pequeño que, a todos los efectos, el equilibrio electrostático se alcanza instantáneamente.

En esta sección utilizaremos la ley de Gauss para demostrar los siguientes resultados para los conductores en equilibrio electrostático:

1. Toda carga eléctrica en un conductor reside en su superficie.
2. El campo eléctrico justamente fuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y su magnitud es σ/ϵ_0 en donde σ es la densidad de carga superficial en el punto considerado del conductor.

Para obtener el primer resultado, consideremos una superficie gaussiana justamente en el interior de la superficie real de un conductor en equilibrio electrostático, como indica la figura 19-28. Como el campo eléctrico es cero en todos los puntos dentro del conductor, será también cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, ya que toda ella está completamente dentro del conductor. Como $E_n = 0$ en todos los puntos situados sobre la superficie gaussiana, el flujo neto a través de la superficie debe ser cero. Según la ley de Gauss, el flujo es igual al producto de $1/\epsilon_0$ por la carga neta dentro de la superficie. Como el flujo neto es cero, esto significa que no existe carga neta en el interior de toda superficie situada completamente dentro del conductor. Si existe alguna carga neta sobre el conductor, ésta debe residir sobre la superficie del propio conductor.

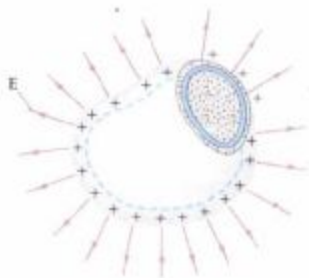


Figura 19-28 Una superficie gaussiana (línea de trazos) justo en el interior de la superficie de un conductor. Como el campo eléctrico es cero dentro del conductor en equilibrio electrostático, el flujo neto a través de esta superficie debe ser también cero. Por tanto, la carga neta interior a la superficie es nula. Si existe alguna carga en el conductor, ésta debe residir en su superficie. En este ejemplo el conductor es portador de una carga neta positiva.



Líneas de fuerza en el caso de un cilindro y una placa con cargas opuestas. Las líneas están indicadas por trocitos de hilo fino suspendidos en aceite. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares a los conductores y que no hay ninguna línea en el interior del cilindro.

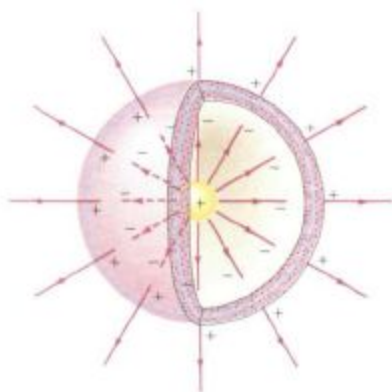


Figura 19-29 Una corteza conductora esférica de paredes gruesas con una carga puntual q en el centro de la cavidad. Como $E = 0$ dentro del conductor, no existe flujo neto a través de cualquier superficie interna, tal como la superficie gaussiana dibujada en azul. En la superficie interna de la corteza se induce una carga superficial $-q$ y las líneas de campo eléctrico que comienzan en la carga puntual, terminan en dicha superficie. Como el conductor es neutro, una carga igual, pero de signo opuesto, $+q$ se induce en la superficie exterior de la corteza. Las líneas del campo eléctrico comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.

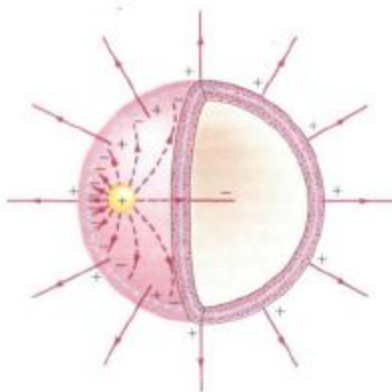


Figura 19-30 Es el mismo conductor de la figura 19-29, pero ahora la carga puntual no se encuentra en el centro de la esfera. La carga sobre la superficie exterior y las líneas del campo eléctrico fuera de la esfera no vienen afectadas por el cambio de posición de la carga puntual.

La figura 19-29 muestra un conductor esférico con una cavidad esférica en su interior. En el centro de la cavidad existe una carga puntual positiva q . Si dibujamos una superficie gaussiana dentro del conductor, E es cero en todos los puntos sobre la superficie, de modo que la ley de Gauss nos dice que no existe carga neta dentro de la superficie. Por tanto, debe haberse inducido una carga negativa $-q$ sobre la superficie interior del conductor. Todas las líneas de campo eléctrico procedentes de la carga puntual deben terminar en la carga negativa inducida sobre la superficie interior. Si el conductor no posee carga neta, existirá una carga igual inducida $+q$ sobre la superficie externa del conductor. En la figura 19-30 la carga puntual se ha desplazado de modo que ya no se encuentra en el centro de la cavidad. Las líneas de campo de la cavidad se han alterado y la densidad de carga superficial de la carga negativa inducida de la superficie interna deja de ser uniforme. Sin embargo, todas las líneas de campo siguen terminando en la carga negativa inducida. La densidad de carga superficial positiva sobre la superficie exterior no se perturba, ya que se encuentra protegida de la cavidad por el conductor.

Para hallar el campo eléctrico justo en la parte exterior de la superficie de un conductor, consideraremos una porción de la superficie del mismo, suficientemente pequeña como para considerarse plana, con una densidad de carga σ , que tenga una variación despreciable en toda la parte escogida. Construiremos una superficie gaussiana en forma de caja cilíndrica (figura 19-31) con una cara situada justo en el exterior del conductor y paralela a su superficie y la otra justo en el interior del conductor. En la superficie del conductor en equilibrio, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Así, tomamos E de manera que sea perpendicular a la cara de la caja. La otra cara de la caja está en el interior del conductor en donde E es cero. No existe ningún flujo a través de la superficie cilíndrica de la caja debido a que E es tangente a esta superficie. El flujo que sale de la caja es pues $E_n A$, siendo E_n el campo justo en el exterior del conductor y A el área de la cara de la caja. La carga neta en el interior de la superficie gaussiana es σA . La ley de Gauss nos da

$$\phi_{\text{ext}} = \oint E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$$

$$\oint E_n dA = E_n \oint dA = E_n A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

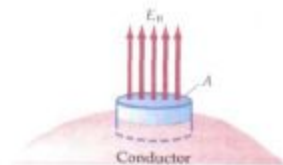


Figura 19-31 Superficie gaussiana en forma de caja cilíndrica para el cálculo del campo eléctrico en la superficie de un conductor. No hay flujo a través de la cara interna de la caja cilíndrica, ya que el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo. El flujo a través de la cara exterior de la caja cilíndrica es $E_n A$.

es decir,

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

19-30

Campo eléctrico E_n justo en el exterior del conductor

Este resultado es exactamente el doble del campo producido por un plano infinito de carga. Podemos comprender este resultado mediante la figura 19-32 que muestra una lámina conductora cargada, portadora de una densidad de carga superficial σ en cada cara. En las proximidades de la lámina conductora, cada una de sus caras puede considerarse como un plano infinito de carga. Sea E_1 el campo eléctrico debido a la cara izquierda y E_2 el debido a la cara derecha. Cada uno de estos campos posee la magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. Dentro del conductor, estos campos poseen dirección opuesta y por tanto, se cancelan. Fuera del conductor, los campos se suman dando un campo eléctrico total de magnitud $E = E_1 + E_2 = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$. Un razonamiento semejante, aunque ligeramente más complicado, puede aplicarse a un conductor de forma arbitraria como indica la figura 19-33. Podemos considerar la carga situada en la superficie de un conductor como compuesta por dos partes, (1) la carga en la vecindad inmediata del punto P y (2) el resto de la carga, al que llamaremos la carga distante. Como el punto P se encuentra justo fuera de la superficie, la carga en su vecindad inmediata se asemeja a un plano infinito de carga. Produce un campo de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$ en P y un campo de igual magnitud justo en el interior de la superficie conductora, señalando en el sentido que se aleja de la superficie. El resto de la carga sobre el conductor (o en los puntos en que esté la carga) debe producir un campo $\sigma/2\epsilon_0$ dentro del conductor señalando hacia la superficie de modo que el campo neto en el interior del conductor sea cero. El campo debido a la carga distante tiene la misma magnitud y dirección en los puntos justo dentro y fuera de la superficie. Así, en el punto justo dentro de la superficie del conductor, el campo debido a la carga distante se equilibra con el campo de las cargas vecinas; sin embargo en los puntos fuera de la superficie, los campos actúan en la misma dirección y se suman, dando un campo neto $\sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$.

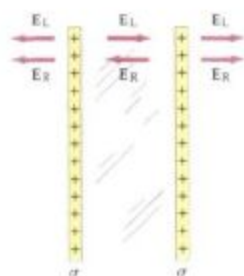


Figura 19-32 Un bloque conductor, portador de una densidad de carga superficial uniforme σ . El campo eléctrico debido a la densidad de carga superficial en la cara izquierda es E_1 y el debido a la carga en la cara derecha es E_2 . Cada uno de estos campos tiene la magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. Dentro del conductor, estos campos tienen direcciones opuestas y se anulan entre sí. Fuera del conductor se suman y engendran un campo de magnitud σ/ϵ_0 .

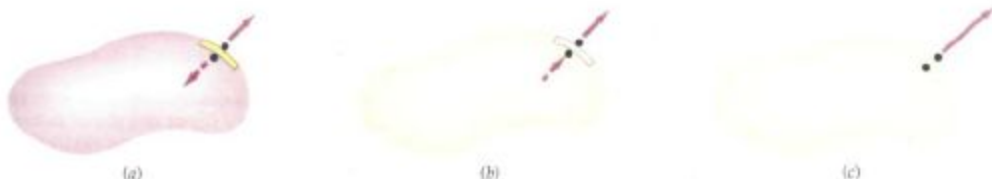


Figura 19-33 Conductor de forma arbitraria que posee una carga en superficie. (a) Si el punto P está muy próximo al conductor, la carga en la vecindad de este punto se asemeja a la de una lámina plana infinita de carga. Esta carga produce un campo eléctrico de valor $\sigma/2\epsilon_0$ tanto en el interior como en el exterior del conductor, según está indicado. (b) Puesto que el campo resultante en el interior del conductor debe ser cero, el resto de la carga debe producir un campo de igual magnitud. (c) Dentro del conductor estos campos se anulan pero fuera en el punto P se suman resultando $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

Ejemplo 19-5

Una lámina conductora cuadrada de espesor despreciable y de lado 4 m se sitúa en un campo externo uniforme $E = (450 \text{ kN/C})\hat{i}$, perpendicular a las caras de la lámina. (a) Determinar la densidad de carga en cada cara de la lámina. (b) Sobre la lámina se sitúa una carga neta de $96 \mu\text{C}$. Determinar la nueva densidad de carga sobre cada cara y el campo eléctrico próximo a cada cara, pero lejos de los bordes de la lámina.

(a) Justo en el exterior de la cara derecha de la lámina, el campo eléctrico es $E_n = 450 \text{ kN/C}$, de modo que la densidad de carga en esta cara es

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \epsilon_0 E_n = (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(450 \text{ kN/C}) \\ &= 3,98 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \\ &= 3,98 \mu\text{C/m}^2\end{aligned}$$

En la cara izquierda, el campo eléctrico apunta hacia la lámina, de modo que $E_x = -450 \text{ kN/C}$. La densidad de carga en esta cara es

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \epsilon_0 E_x \\ &= (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(-450 \text{ kN/C}) \\ &= -3,98 \mu\text{C}/\text{m}^2\end{aligned}$$

(b) La carga total de $96 \mu\text{C}$ debe distribuirse por igual en cada cara de la lámina, de modo que el campo eléctrico en el interior de ésta permanece nulo. Como cada cara tiene un área de 16 m^2 y transporta una carga neta de $(96 \mu\text{C})/2 = 48 \mu\text{C}$, la densidad de carga adicional en cada cara es $\sigma_2 = 48 \mu\text{C}/16 \text{ m}^2 = 3,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Por tanto, la densidad de carga neta en cada cara será

$$\sigma_D = 3,98 \mu\text{C}/\text{m}^2 + 3,0 \mu\text{C}/\text{m}^2 = 6,98 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

y

$$\sigma_1 = -3,98 \mu\text{C}/\text{m}^2 + 3,0 \mu\text{C}/\text{m}^2 = -0,98 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

El campo eléctrico neto justo a la derecha de la lámina es

$$\begin{aligned}E_{\text{neto}} &= \sigma_D / \epsilon_0 \\ &= (6,98 \mu\text{C}/\text{m}^2) / (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) \\ &= 789 \text{ kN/C}\end{aligned}$$

Como la normal a la lámina tiene la dirección x positiva en la cara de la derecha, el campo eléctrico justo a la derecha de la lámina es

$$E_D = (789 \text{ kN/C})\hat{i}$$

Justo a la izquierda de la lámina el campo eléctrico es

$$\begin{aligned}E_{\text{neto}} &= \sigma_1 / \epsilon_0 \\ &= (-0,98 \mu\text{C}/\text{m}^2) / (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) \\ &= -111 \text{ kN/C}\end{aligned}$$

Como la normal a la lámina apunta en la dirección x negativa sobre la cara izquierda, el campo eléctrico en esta cara apunta hacia la derecha:

$$E_I = (111 \text{ kN/C})\hat{i}$$

La parte (b) puede considerarse de otro modo. La densidad de carga positiva de $3,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$ sumada a cada cara es equivalente a sumar dos planos de carga positiva. Fuera de la lámina, estos planos producen un campo eléctrico de magnitud

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \sigma / \epsilon_0 + \frac{1}{2} \sigma / \epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0 \\ &= (3,0 \mu\text{C}/\text{m}^2) / (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) \\ &= 339 \text{ kN/C}\end{aligned}$$

A la derecha de la lámina, este campo se suma al campo original:

$$E_D = 450 \text{ kN/C} + 339 \text{ kN/C} = 789 \text{ kN/C}$$

A la izquierda de la lámina, este campo se resta del campo original:

$$E_I = 450 \text{ kN/C} - 339 \text{ kN/C} = 111 \text{ kN/C}$$

Ejercicio

El campo eléctrico justo en el exterior de la superficie de un conductor apunta alejándose del conductor, siendo su magnitud de 2000 N/C . ¿Cuál es la densidad de carga superficial sobre la superficie del conductor? (Respuesta: $2,27 \text{ nC}/\text{m}^2$)

19-5 Deducción matemática de la ley de Gauss (Opcional)

La ley de Gauss puede deducirse matemáticamente utilizando el concepto de **ángulo sólido**. Consideremos un elemento de área ΔA sobre una superficie esférica. El ángulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido por ΔA en el centro de la esfera se define como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

siendo r el radio de la esfera. Puesto que tanto ΔA como r^2 tienen dimensiones de longitud al cuadrado, el ángulo sólido es adimensional. La unidad de ángulo sólido es el **estereorradián** (sr). Puesto que el área total de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido por una esfera es

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr}$$

Existe una estrecha analogía entre el ángulo sólido y el ángulo plano ordinario, que se define como el cociente de un elemento de longitud de arco de circunferencia Δs dividido por el radio de la misma:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ radianes}$$

El ángulo plano total subtendido por un círculo es 2π radianes.

En la figura 19-34 el elemento de área ΔA no es perpendicular a las líneas radiales que salen de O . El vector unidad \hat{n} normal al elemento de área forma un ángulo θ con el vector radial unidad \hat{r} . En este caso, el ángulo sólido subtendido por ΔA en el punto O está definido por

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2} \quad 19-31$$

La figura 19-35 muestra una carga puntual q rodeada de una superficie de forma arbitraria. Para calcular el flujo que atraviesa esta superficie, debemos hallar $\mathbf{E} \cdot \hat{n} \Delta A$ para cada elemento de área de la superficie y sumar respecto a la superficie completa. El flujo a través del elemento de área indicada es

$$\Delta\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} \Delta A = kq \Delta\Omega$$

El ángulo sólido $\Delta\Omega$ es el mismo que el subtendido por el elemento de área correspondiente de una superficie esférica de cualquier radio. La suma del flujo que atraviesa la superficie entera es kq veces el ángulo sólido total subtendido por la superficie cerrada, que es 4π estereorradianes:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dA = kq \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

que es la ley de Gauss.

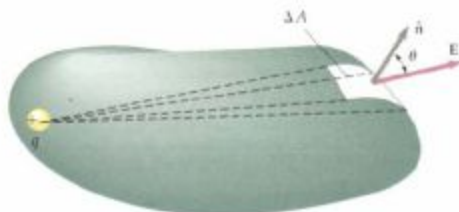


Figura 19-34 Elemento de área ΔA cuya normal no es paralela a la línea radial que va desde O hasta el centro del elemento. El ángulo sólido subtendido por este elemento en O es $(\Delta A \cos \theta)/r^2$.

Figura 19-35 Carga puntual q encerrada por la superficie S . El flujo que atraviesa el elemento de área ΔA es proporcional al ángulo sólido subtendido por el elemento de área en la carga. El flujo neto que atraviesa la superficie, que se halla sumando todos los elementos de área, es proporcional al ángulo sólido total 4π en la carga, que es independiente de la forma de la superficie.

Resumen

1. El campo eléctrico correspondiente a las distribuciones continuas de carga puede calcularse directamente mediante la ley de Coulomb en la forma

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{k \, dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

en donde $dq = \rho \, dV$ para una carga distribuida en un determinado volumen, $dq = \sigma \, dA$ para una carga distribuida en una superficie, y $dq = \lambda \, dL$ para una carga distribuida a lo largo de una línea.

2. El flujo eléctrico ϕ de un campo eléctrico constante a través de un área A es el producto del componente del campo eléctrico perpendicular al área, multiplicado por el área:

$$\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} A = EA \cos \theta = E_n A$$

En general para un campo eléctrico que puede variar en el espacio, el flujo a través de un elemento de área dA es

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = E \cos \theta \, dA = E_n \, dA$$

3. El flujo neto a través de una superficie cerrada es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie, resultado conocido como ley de Gauss:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \mathbf{E}_n \, dA = 4\pi k Q_{\text{interna}}$$

La ley de Gauss puede utilizarse para determinar el campo eléctrico en distribuciones de carga de gran simetría.

4. La constante de Coulomb k se escribe frecuentemente en función de la permitividad del espacio libre ϵ_0 :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

En función de esta constante, la ley de Coulomb puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

y la ley de Gauss:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \mathbf{E}_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interna}}$$

5. El campo eléctrico en distintas distribuciones de carga tiene los siguientes valores

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r} \sin \theta_0 \quad \text{en la mediatriz de una carga lineal finita}$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r} \quad \text{cerca de una carga lineal finita}$$

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{en el eje de una carga anular}$$

$$E_x = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \quad \text{en el eje de un disco de carga}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma \quad \text{cerca de un plano infinito de carga}$$

$$E_r = 0 \quad r < R \quad \text{en el interior de una corteza cilíndrica de carga}$$

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r > R \quad \text{en el exterior de una corteza cilíndrica de carga}$$

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r \geq R \quad \text{en el exterior de un cilindro sólido de carga}$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \quad r \leq R \quad \text{en el interior de un cilindro sólido de carga}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R \quad \text{en el exterior de una corteza esférica de carga}$$

$$E_r = 0 \quad r < R \quad \text{en el interior de una corteza esférica de carga}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r \geq R \quad \text{en el exterior de una esfera sólida de carga}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} r \quad r \leq R \quad \text{en el interior de una esfera sólida de carga}$$

6. En una superficie portadora de una densidad de carga superficial σ , el componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie es discontinuo en el valor σ/ϵ_0 :

$$E_{r2} - E_{r1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

7. En equilibrio electrostático, la carga eléctrica neta sobre un conductor reside en su superficie. El campo eléctrico justo fuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y vale σ/ϵ_0 , en donde σ es la densidad de carga superficial en el punto considerado del conductor.

Sugerencias bibliográficas

Reichardt, Hans: «Gauss», *The New Encyclopaedia Britannica*, 1968, vol. 10, pág. 698.

Una bibliografía en dos páginas del matemático alemán, uno de los más grandes de todos los tiempos, quien resolvió con maestría problemas de astronomía y geodesia — así como de electromagnetismo.

Revisión

- A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer los siguientes conocimientos:

1. Ser capaz de enunciar la ley de Coulomb y de utilizarla para calcular el campo eléctrico producido por una carga lineal, una carga anular y un disco de carga.
2. Ser capaz de establecer la ley de Gauss y de utilizarla para determinar el campo eléctrico debido a un plano infinito de carga, una distribución de carga esféricamente simétrica y una distribución de carga cilíndricamente simétrica.
3. Saber demostrar que el campo eléctrico en la superficie exterior de una superficie conductora es σ/ϵ_0 .

- B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Densidad de carga volúmica
 Densidad de carga superficial
 Densidad de carga lineal
 Flujo eléctrico
 Ley de Gauss
 Permittividad del espacio libre
 Superficie gaussiana
 Equilibrio electrostático
 Emisión de campo
 Ángulo sólido
 Estereorradián

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. Si no existe ninguna carga en una región del espacio, el campo eléctrico debe ser cero en todos los puntos de una superficie que rodea la región citada.
2. La ley de Gauss es válida sólo en el caso de distribuciones de carga simétricas.
3. El campo eléctrico en el interior de una corteza esférica uniformemente cargada es cero.
4. El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es siempre cero.

5. El resultado $E=0$ en el interior de un conductor en equilibrio puede deducirse a partir de la ley de Gauss.

6. Si la carga neta sobre un conductor es cero, la densidad de carga debe ser cero en todos los puntos de la superficie.

7. El campo eléctrico es discontinuo en todos los puntos donde la densidad de carga es discontinua.

8. La mitad del campo eléctrico en un punto justo en el exterior de la superficie de un conductor se debe a la carga situada en la superficie y en la vecindad próxima de dicho punto.

Problemas

Nivel I

19-1 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb

1. Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 3,5 \text{ nC/m}$ se distribuye desde $x=0$ a $x=5 \text{ m}$. (a) ¿Cuál es la carga total? Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en (b) $x=6 \text{ m}$, (c) $x=9 \text{ m}$, y (d) $x=250 \text{ m}$. (e) Determinar el campo en $x=250 \text{ m}$ usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido exactamente en (d).

2. Dos planos de carga verticales e infinitos son paralelos y están separados entre sí por una distancia $d=4 \text{ m}$. Determinar el campo eléctrico a la izquierda de los planos, a su derecha y entre ambos cuando (a) cada plano posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = +3\mu\text{C/m}^2$ y (b) el plano izquierdo tiene una densidad de carga $\sigma = +3\mu\text{C/m}^2$ y el derecho $\sigma = -3\mu\text{C/m}^2$. Dibujar las líneas de campo eléctrico en cada caso.

3. Una carga de $2,75 \mu\text{C}$ está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio $8,5 \text{ cm}$. Determinar el campo eléctrico sobre el eje en (a) $1,2 \text{ cm}$, (b) $3,6 \text{ cm}$ y (c) $4,0 \text{ m}$ desde el centro del anillo. (d) Determinar el campo en $4,0 \text{ m}$ con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (c).

4. Un disco de radio $2,5 \text{ cm}$ es portador de una densidad de carga superficial uniforme de $3,6 \mu\text{C/m}^2$. Utilizando aproximaciones razonables determinar el campo eléctrico sobre el eje a distancia de (a) $0,01 \text{ cm}$, (b) $0,04 \text{ cm}$, (c) 5 m y (d) 5 cm .

5. Con el disco de carga del problema 4, calcular exactamente el campo eléctrico sobre el eje a distancia de (a) $0,04 \text{ cm}$ y (b) 5 m y comparar los resultados con los correspondientes a las partes (b) y (c) del problema 4.

6. Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2,5 \text{ cm}$ a $x = +2,5 \text{ cm}$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = 4,5 \text{ nC/m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico sobre el eje y en (b) $y = 4 \text{ cm}$, (c) $y = 12 \text{ cm}$, y (d) $y = 4,5 \text{ m}$. (e) Determinar el campo en $y = 4,5 \text{ m}$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido en (d).

7. Un disco de radio a se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x y es portador de una densidad de carga superficial uniforme σ . Determinar el valor de x para el cual $E_x = \frac{1}{2}\sigma/2\epsilon_0$.

8. Un anillo de radio a con un centro en el origen y su eje a lo largo del eje x posee una carga total Q . Determinar E_x en (a) $x = 0,2a$, (b) $x = 0,5a$, (c) $x = 0,7a$, (d) $x = a$ y (e) $x = 2a$. (f) Utilizar los resultados obtenidos para representar E_x en función de x para ambos valores positivo y negativo de x .

9. Repetir el problema 8 para un disco de densidad de carga superficial uniforme σ .

19-2 Ley de Gauss

10. Consideremos un campo eléctrico uniforme $E = (2 \text{ kN/C})\hat{i}$. (a) ¿Cuál es el flujo de este campo a través de un cuadrado de 10 cm de lado cuyo plano es paralelo al plano yz ? (b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa el mismo cuadrado si la normal a su plano forma un ángulo de 30° con el eje x ?

11. Una sola carga puntual $q = +2 \mu\text{C}$ está en el origen. Una superficie esférica de $3,0 \text{ m}$ de radio tiene su centro en el eje x en el punto $x = 5 \text{ m}$. (a) Dibujar las líneas de fuerza correspondientes a la carga puntual. ¿Hay líneas que entran en la superficie esférica? (b) ¿Cuál es el número neto de líneas que salen de la superficie esférica contando los que entran como negativos? (c) ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

12. Un campo eléctrico vale $E = (200 \text{ N/C})\hat{i}$ para $x > 0$ y $E = (-200 \text{ N/C})\hat{i}$ para $x < 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 5 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las caras está en $x = +10 \text{ cm}$ y la otra en $x = -10 \text{ cm}$. (a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada cara? (b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la parte lateral del cilindro? (c) ¿Cuál es el flujo neto saliente que atraviesa toda la superficie cilíndrica? (d) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro?

13. Una carga puntual positiva q está en el centro de un cubo de arista L . Se dibujan saliendo de la carga puntual un gran número N de líneas de fuerza. (a) ¿Cuántas de estas líneas pasan a través de la superficie del cubo? (b) ¿Cuántas líneas pasan a través de cada cara (admitiéndose que ninguna de ellas corta las aristas o vértices)? (c) ¿Cuál es el flujo neto hacia fuera del campo eléctrico a través de la superficie cúbica? (d) Utilizar el razonamiento de simetría para hallar el flujo del campo eléctrico que atraviesa una cara del cubo. (e) ¿Alguna de estas respuestas variaría si la carga estuviera en el interior del cubo pero no en su centro?

14. Medidas cuidadosas del campo eléctrico en la superficie de una caja negra indican que el flujo saliente neto a través de la superficie de la caja es $0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. (a) ¿Cuál es la

carga neta en el interior de la caja? (b) Si el flujo saliente neto a través de la superficie de la caja fuese cero, ¿podría obtenerse la conclusión de que no hay ninguna carga en el interior de la caja? ¿Por qué o por qué no?

15. Una carga puntual $q = +2 \mu\text{C}$ está en el centro de una esfera de 0,5 m de radio. (a) Hallar el área superficial de la esfera. (b) Hallar el valor del campo eléctrico en los puntos situados en la superficie de la esfera. (c) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de la esfera? (d) ¿Variaría la respuesta dada a la parte (c) si se moviese la carga puntual de modo que estuviese dentro de la esfera pero no en el centro? (e) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa un cubo de 1 m de arista que circunscribe la esfera?

16. Dado que la ley de Newton de la gravedad y la ley de Coulomb poseen la misma dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia, es posible determinar una expresión análoga a la ley de Gauss para los campos gravitatorios. El campo gravitatorio g es la fuerza por unidad de masa para una masa testigo m_t . Por tanto, para una masa m en el origen, el campo gravitatorio g en una posición r es

$$g = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r}$$

Calcular el flujo del campo gravitatorio a través de una superficie esférica de radio r centrada en el origen y demostrar que la ecuación análoga gravitatoria de la ley de Gauss es $\oint_{\text{enc}} g \cdot d\mathbf{A} = -4\pi Gm_{\text{enc}}$.

19-3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

17. Una corteza esférica de radio 6 cm posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9 \text{ nC/m}^2$. (a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2 \text{ cm}$, (c) $r = 5,9 \text{ cm}$, (d) $r = 6,1 \text{ cm}$ y (e) $r = 10 \text{ cm}$.

18. Una esfera de radio 6 cm posee una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho = 450 \text{ nC/m}^3$. (a) ¿Cuál es la carga total de la esfera? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2 \text{ cm}$, (c) $r = 5,9 \text{ cm}$, (d) $r = 6,1 \text{ cm}$ y (e) $r = 10 \text{ cm}$.

19. Una capa cilíndrica de 12 m de longitud y 6 cm de radio posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9 \text{ nC/m}^2$. (a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2 \text{ cm}$, (c) $r = 5,9 \text{ cm}$, (d) $r = 6,1 \text{ cm}$ y (e) $r = 10 \text{ cm}$.

20. Un cilindro de longitud 12 m y radio 6 cm posee una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho = 300 \text{ nC/m}^3$. (a) ¿Cuál es la carga total del cilindro? Determinar el campo eléctrico en (b) $r = 2 \text{ cm}$, (c) $r = 5,9 \text{ cm}$, (d) $r = 6,1 \text{ cm}$ y (e) $r = 10 \text{ cm}$.

21. Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie. (a) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (b) ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1/q_2 y su signo relativo para que el campo eléctrico sea cero para $r > R_2$? (c) Hacer un esquema de las líneas de fuerza para el caso indicado en la parte (b).

22. Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1 , mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2 . (a) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (b) ¿Cuál deberá ser el cociente σ_2/σ_1 y el signo relativo

de ambas para que el campo eléctrico sea cero cuando $r > R_2$? ¿Cuál es entonces el campo eléctrico entre las cortezas? (c) Hacer un esquema de las líneas de fuerza en el caso indicado en la parte (b).

23. Sobre el plano yz tenemos una carga superficial no uniforme. En el origen, la densidad de carga superficial es $\sigma = 3,10 \mu\text{C/m}^2$. En el espacio existen otras distribuciones de carga. Justo a la derecha del origen, el componente x del campo eléctrico es $E_x = 4,65 \times 10^5 \text{ N/C}$. ¿Cuál es el valor de E_x justo a la izquierda del origen?

19-4 Carga y campo en la superficie de los conductores

24. Una moneda está en el interior de un campo eléctrico externo de valor $1,6 \text{ kN/C}$ cuya dirección es perpendicular a sus caras. (a) Hallar las densidades de carga en cada cara de la moneda suponiendo que son planas. (b) Si el radio de la moneda es 1 cm, ¿cuál es la carga total en una cara?

25. Un bloque metálico sin carga tiene caras cuadradas de 12 cm de lado. Se coloca dentro de un campo eléctrico externo que es perpendicular a sus caras. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico, si la carga total inducida sobre una de las caras del bloque es $1,2 \text{ nC}$?

26. Una carga de 6 nC se coloca uniformemente sobre una hoja cuadrada de material no conductor de 20 cm de lado situado en el plano yz . (a) ¿Cuál es la densidad de carga σ ? (b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico a la derecha y a la izquierda de la hoja? (c) Se coloca la misma carga sobre un bloque cuadrado conductor de 20 cm de lado y 1 mm de espesor. ¿Cuál es la densidad de carga σ ? (Admitir que la carga se distribuye por sí misma de modo uniforme en las superficies del bloque cuadrado.) (d) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo a la derecha y a la izquierda de cada cara del bloque?

27. Una corteza conductora esférica con una carga neta cero tiene un radio interior a y un radio exterior b . Se coloca una carga puntual q en el centro de la cavidad. (a) Utilizar la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio para hallar el campo eléctrico en cada una de las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $b < r$. (b) Dibujar las líneas de fuerza para este caso. (c) Determinar la densidad de carga en la superficie interna ($r = a$) y en la superficie externa ($r = b$) de la corteza.

19-5 Deducción matemática de la ley de Gauss (Opcional)

No se proponen problemas para esta sección.

Nivel II

28. El campo eléctrico justo por encima de la superficie de la Tierra, medido experimentalmente es de 150 N/C , dirigido hacia abajo. ¿Qué carga total sobre la Tierra está implicada en esta medida?

29. En una región particular de la atmósfera terrestre, se ha medido el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra resultando ser de 150 N/C a una altura de 250 m y de 170 N/C a 400 m, en ambos casos dirigido hacia abajo. Calcular la densidad de carga volumétrica de la atmósfera suponiendo que es uniforme entre 250 y 400 m. (Puede despreciarse la curvatura de la Tierra. ¿Por qué?)

30. Una carga lineal infinita de densidad lineal uniforme $\lambda = -1,5 \mu\text{C/m}$ es paralela al eje y en $x = -2 \text{ m}$. Una carga puntual de $1,3 \mu\text{C}$ está localizada en $x = 1 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$. Determinar el campo eléctrico en $x = 2 \text{ m}$, $y = 1,5 \text{ m}$.

31. Una esfera sólida de 1,2 m de diámetro con su centro sobre el eje x en $x = 4 \text{ m}$, transporta una carga volumétrica unifor-

me de densidad $\rho = 5 \mu\text{C}/\text{m}^3$. Una corteza esférica concéntrica con la esfera tiene un diámetro de 2,4 m y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = -1,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en (a) $x = 4,5$ m, $y = 0$; (b) $x = 4,0$ m, $y = 1,1$ m; y (c) $x = 2,0$ m, $y = 3,0$ m.

32. Dos planos infinitos de carga son paralelos entre sí y paralelos al plano yz . Uno de ellos corresponde a $x = -2$ m y su densidad superficial de carga es $\sigma = -3,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$. El otro corresponde a $x = 2$ m y $\sigma = 6,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determinar el campo eléctrico para (a) $x < -2$ m, (b) $-2 < x < 2$ m y (c) $x > 2$ m.

33. Un modelo atómico posee una carga puntual nuclear positiva $+Ze$ incluida en una esfera electrónica rígida de radio R de carga total $-Ze$, uniformemente distribuida por toda la esfera. (a) En un campo eléctrico externo nulo, ¿dónde está la posición de equilibrio de la carga puntual nuclear? (b) Si no hay campo eléctrico externo, ¿dónde está la posición de equilibrio de la carga nuclear puntual, respecto al centro de la esfera electrónica cargada negativamente? (c) ¿Cuál es el momento dipolar eléctrico inducido por el campo E_e para este modelo atómico?

34. Demostrar que el campo E_e sobre el eje de una carga anular de radio a tiene sus valores máximo y mínimo en $x = +a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$. Representar E_e en función de x para ambos valores positivo y negativo de x .

35. Una carga puntual positiva de magnitud $2,5 \mu\text{C}$, se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica sin carga, de radio interior 60 cm y de radio exterior 90 cm. (a) Determinar las densidades de carga sobre las superficies interior y exterior de la corteza y la carga total sobre cada superficie. (b) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto. (c) Repartir (a) y (b) para el caso en que una carga neta de $-3,5 \mu\text{C}$ se sitúa sobre la corteza.

36. Una lámina conductora cuadrada con lados de 5 m es portadora de una carga neta de $80 \mu\text{C}$. (a) Determinar la densidad de carga sobre cada cara de la lámina y el campo eléctrico justo en el exterior de una cara de la lámina. (b) La lámina se sitúa a la derecha de un plano infinito no conductor, cargado con una densidad de $2,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y de modo que las caras de la lámina son paralelas al plano. Determinar el campo eléctrico sobre cada cara de la lámina lejos de los bordes y la densidad de carga sobre cada cara.

37. (a) Una carga lineal finita de densidad de carga lineal λ está situada sobre el eje x desde $x = 0$ a $x = a$. Demostrar que el componente y del campo eléctrico en un punto sobre el eje y viene dado por

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

en donde θ_1 es el ángulo subtendido por la carga lineal en el punto del campo. (b) Demostrar que si la carga lineal se extiende desde $x = -b$ a $x = a$, el componente y del campo eléctrico en un punto sobre el eje y viene dado por

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2)$$

en donde $\operatorname{sen} \theta_2 = b/\sqrt{y^2 + b^2}$.

38. Suponer que se pincha un pequeño orificio a través de la pared de una corteza esférica delgada uniformemente cargada, cuya densidad de carga superficial es σ . Determinar el campo eléctrico próximo al centro del orificio.

39. Un plano infinito de carga de densidad superficial $\sigma_1 = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ es paralelo al plano xz en $y = -0,6$ m. Un

segundo plano infinito de densidad superficial de carga $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ es paralelo al plano yz en $x = 1$ m. Una esfera de radio 1 m con su centro en el plano xy en la intersección de los planos cargados ($x = 1$ m, $y = -0,6$ m) posee una densidad de carga superficial $\sigma_3 = -3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico sobre el eje x en (a) $x = 0,4$ m y (b) $x = 2,5$ m.

40. Una corteza cilíndrica infinitamente larga, coaxial con el eje y y tiene un radio de 15 cm. Posee una densidad superficial y uniforme de carga $\sigma = 6 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Una corteza esférica de radio 25 cm está centrada sobre el eje x en $x = 50$ cm y posee una densidad superficial y uniforme de carga $\sigma = -12 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en (a) el origen; (b) $x = 20$ cm, $y = 10$ cm; y (c) $x = 50$ cm, $y = 20$ cm.

41. Una corteza esférica no conductora y maciza de radio interior a y de radio exterior b posee una densidad ρ de carga volumétrica uniforme. Calcular la carga total y el campo eléctrico en todos los puntos.

42. Un plano infinito situado en el plano de coordenadas xz posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma_1 = 65 \text{ nC}/\text{m}^2$. Un segundo plano infinito, portador de una densidad de carga uniforme $\sigma_2 = 45 \text{ nC}/\text{m}^2$ corta el plano xz en el eje z y forma un ángulo de 30° con el plano xz como indica la figura 19-36. Determinar el campo eléctrico en el plano xy en (a) $x = 6$ m, $y = 2$ m; y (b) $x = 6$ m, $y = 5$ m.

Figura 19-36 Cargas superficiales uniformes sobre el plano xz y sobre un plano que forma un ángulo de 30° con el anterior. (Problema 42).

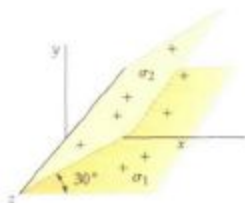


Figura 19-37 Problema 43.



43. Un anillo de radio R transporta una densidad de carga positiva uniforme λ . En la figura 19-37 se muestra un punto P que se encuentra en el plano del anillo pero que no es su centro. Considerar dos elementos del anillo, de longitudes s_1 y s_2 (indicados en la figura) y que se encuentran a las distancias r_1 y r_2 del punto P . (a) ¿Cuál es la relación entre las cargas de estos elementos? ¿Cuál de ellas genera un campo mayor en el punto P ? (b) ¿Cuál es la dirección del campo debido

a estos elementos en el punto P ? ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico total en el punto P ? (c) Suponer que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en la forma $1/r$ en lugar de $1/r^2$. ¿Cuál sería el campo eléctrico en el punto P debido a los elementos que se muestran? (d) ¿Qué diferencias existirían en las respuestas dadas si el punto P se encontrara en el interior de una corteza con una distribución de carga esférica y en la que el área de los elementos fuera s_1 y s_2 ?

44. Un disco de radio 30 cm es portador de una densidad de carga uniforme σ . (a) Comparar la aproximación $E = \sigma/2\epsilon_0$ con la expresión exacta del campo eléctrico sobre el eje del disco expresando el término despreciado como un porcentaje de $\sigma/2\epsilon_0$ para las distancias $x=0,1$, $x=0,2$ y $x=3$ cm. (b) ¿A qué distancia el término despreciado es el 1 por ciento de $\sigma/2\epsilon_0$?

45. Una carga lineal semiinfinita de densidad uniforme λ está sobre el eje x desde $x=0$ hasta $x=\infty$. Hallar tanto E_x como E_y en un punto situado sobre el eje y .

46. Un plano infinito paralelo al plano de coordenadas yz en $x=2$ m transporta una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 2 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Una carga lineal infinita de densidad uniforme $\lambda = 4 \mu\text{C}/\text{m}$ pasa por el origen formando un ángulo de 45° con el eje x en el plano xy . Una esfera de densidad de carga volumétrica $\rho = -6 \mu\text{C}/\text{m}^3$ y radio 0,8 m está centrado sobre el eje x en $x=1$ m. Calcular la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el plano xy en $x=1,5$ m, $y=0,5$ m.

Nivel III

47. Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior a y radio exterior b , posee una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Determinar el campo eléctrico en todos sus puntos.

48. Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga volumétrica proporcional a la distancia desde el centro: $\rho = Ar$ para $r \leq R$, $\rho = 0$ para $r > R$, siendo A una constante. (a) Hallar la carga total sumando las cargas en cortezas de espesor dr y volumen $4\pi r^2 dr$. (b) Hallar el campo eléctrico E_x tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga y representar E_x en función de r .

49. Repetir el problema 48 para una esfera sólida cuya densidad de carga volumétrica sea igual a $\rho = B/r$ para $r > R$ y $\rho = 0$ para $r < R$.

50. Repetir el problema 48 para el caso de una esfera sólida de densidad de carga volumétrica $\rho = C/r^2$ para $r < R$ y $\rho = 0$ para $r > R$.

51. Una esfera uniformemente cargada de radio R está centrada en el origen con una carga Q . Determinar la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total q con sus extremos en $r=R$ y $r=R+d$.

52. Dos cargas lineales uniformes e iguales de longitud L están situadas sobre el eje x separadas una distancia d como in-

dica la figura 19-38. (a) ¿Cuál es la fuerza que una carga lineal ejerce sobre la otra? (b) Demostrar que cuando $d \gg L$, la fuerza tiende al resultado esperado $k(\lambda L)^2/d^2$.

Figura 19-38 Problema 52.

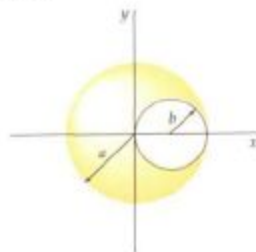


53. Una carga lineal de densidad λ con la forma de un cuadrado de lado L se encuentra en el plano yz con su centro en el origen. Determinar el campo eléctrico sobre el eje x a una distancia arbitraria x y comparar el resultado con el del campo que existe en el eje de un anillo cargado de radio $r = \frac{1}{2}L$ con un centro en el origen y transportando la misma carga total. *Indicación:* Utilizar la ecuación 19-10 para conocer el campo debido a cada segmento del cuadrado.

54. Una esfera sólida no conductora de radio a con su centro en el origen tiene una cavidad esférica de radio b con su centro en el punto $x=b$, $y=0$, $z=0$ como se muestra en la figura 19-39. La esfera contiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Demostrar que el campo eléctrico en la cavidad es uniforme y viene dado por $E_x = \rho b/3\epsilon_0$, $E_y = 0$. *Indicación:* Sustituir la cavidad por esferas de igual densidad de carga positiva y negativa.

55. La fuerza electrostática que actúa sobre una carga en un punto cualquiera es el producto de la carga por el campo eléctrico debido a todas las demás cargas. Consideremos una carga pequeña en la superficie de un conductor $\Delta q = \sigma \Delta A$. (a) Demostrar que la fuerza electrostática sobre la carga es $\sigma \Delta A/2\epsilon_0$. (b) Explicar la razón de que este valor sea la mitad exactamente de $\Delta q E$, siendo $E = \sigma/\epsilon_0$ el campo eléctrico en el exterior del conductor en dicho punto. (c) La fuerza por unidad de área se denomina tensión electrostática. Hallar la tensión electrostática cuando se coloca una carga de $2 \mu\text{C}$ en una esfera conductora de radio 10 cm.

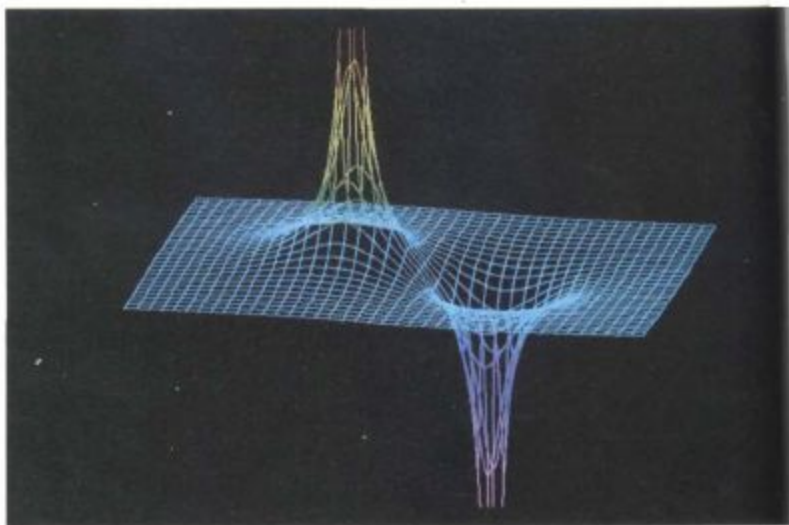
Figura 19-39 Problema 54.



Capítulo 20

Potencial eléctrico

Imagen obtenida por ordenador del potencial electrostático en el plano de un dipolo eléctrico. El potencial debido a cada carga es proporcional a la carga e inversamente proporcional a la distancia.



Al estudiar la mecánica destacábamos la gran utilidad del concepto de energía potencial. Si levantamos un objeto de masa m a una distancia vertical h cerca de la superficie terrestre, el trabajo realizado se convierte en energía potencial mgh del sistema Tierra-masa. Si dejamos caer el objeto, la energía potencial se convierte en energía cinética. La fuerza eléctrica entre dos cargas está dirigida a lo largo de la línea que une las dos cargas y depende de la inversa del cuadrado de su separación, lo mismo que la fuerza gravitatoria entre dos masas. Como la fuerza gravitatoria, la fuerza eléctrica es conservativa. Existe una función energía potencial asociada con la fuerza eléctrica. Como veremos, la energía potencial asociada a una partícula en un campo eléctrico es proporcional a la carga. La energía potencial por unidad de carga se denomina potencial eléctrico. El potencial eléctrico se mide en voltios y frecuentemente se le llama voltaje. En este capítulo definiremos la función potencial eléctrico V y calcularemos el potencial de una distribución específica de carga o de un campo eléctrico determinado. Posteriormente veremos la relación que existe entre el potencial, el campo eléctrico E y la energía potencial electrostática. Finalmente comprobaremos que el potencial eléctrico es constante en todos los puntos interiores de un conductor en un campo electrostático.

20-1 Potencial eléctrico y diferencia de potencial

En general, cuando una fuerza conservativa F actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\ell$ la variación de la función energía potencial dU viene definida por (ecuación 6-17)

$$dU = -F \cdot d\ell$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial (figura 20-1). La fuerza ejercida por un campo eléctrico E sobre una carga puntual q_0 es

$$F = q_0 E$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\ell$ en un campo eléctrico E la variación de energía potencial electrostática es

$$dU = -q_0 E \cdot d\ell \quad 20-1$$

Si la carga se desplaza desde una posición inicial a hasta otra final b , la variación de energía potencial electrostática es

$$\Delta U = U_b - U_a = \int_a^b dU = -\int_a^b q_0 E \cdot d\ell \quad 20-2$$

La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_0 . La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina **diferencia de potencial** dV :

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -E \cdot d\ell \quad 20-3a$$

Definición de diferencia de potencial

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b , el cambio de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b E \cdot d\ell \quad 20-3b$$

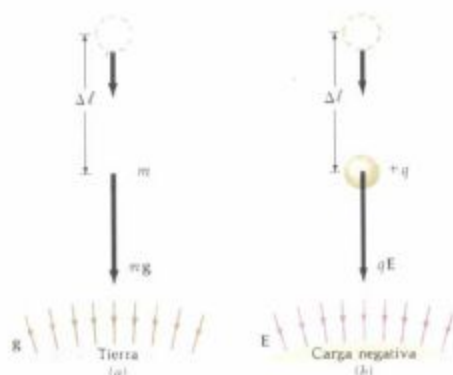


Figura 20-1 (a) El trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre una masa disminuye la energía potencial gravitatoria. (b) El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga positiva $+q$ disminuye la energía potencial electrostática.

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando ésta se desplaza del punto a al punto b .

La ecuación 20-3 define la variación de la función V denominada **potencial eléctrico** (o simplemente **potencial**). Del mismo modo que en el caso de la energía potencial U , sólo tiene importancia la *variación* de la función potencial eléctrico V . El valor de la función potencial eléctrico en cualquier punto queda normalmente determinado escogiendo arbitrariamente V de modo que sea cero en un punto adecuado. (Por ejemplo, en la expresión de la energía potencial gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra, mgh , podemos elegir h igual a cero en cualquier punto conveniente, tal como el suelo o la parte superior de una mesa. Si se trata de dos masas puntuales resulta en general más conveniente tomar como cero la energía potencial correspondiente a una separación infinita.)

Como el potencial eléctrico es la energía potencial electrostática por unidad de carga, la unidad SI para el potencial y diferencia de potencial es el julio por coulombio, llamada **voltio** (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} \quad 20-4$$

Como la diferencia de potencial se mide en voltios, a veces se le llama **voltaje**. En una batería de automóvil de 12 voltios, el terminal positivo tiene un potencial que es 12 V superior que el del terminal negativo. Si a esta batería se conecta un circuito externo y por él circula una carga de un coulombio desde el terminal positivo al negativo, la energía potencial de la carga disminuye en $\Delta V = (1 \text{ C})(12 \text{ V}) = 12 \text{ J}$. Esta energía aparece en forma de energía térmica en el circuito.

En la ecuación 20-3 se observa que las dimensiones de potencial son también las mismas que las del campo eléctrico multiplicado por la distancia. Así pues, la unidad de campo eléctrico E , el newton por coulombio, es también igual al voltio por metro:

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m} \quad 20-5$$



Figura 20-2 Líneas del campo eléctrico apuntando en la dirección del potencial decreciente. Cuando una carga de prueba positiva q_0 se coloca en un campo eléctrico, se acelera en la dirección del campo. Su energía cinética aumenta, y su energía potencial disminuye.

Si situamos una carga de prueba positiva q_0 en un campo eléctrico E y la dejamos en libertad, se acelerará en la dirección de E a lo largo de la línea del campo. La energía cinética de la carga se incrementará, y su energía potencial disminuirá. Así, la carga se mueve hacia una región de menor energía potencial del mismo modo que un cuerpo masivo cae hacia una región de menor energía potencial gravitatoria. Para una carga testigo puntual, una región de menor energía potencial es una región de menor potencial. Así, como se indica en la figura 20-2,

Las líneas del campo eléctrico señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.

Ejemplo 20-1

Un campo eléctrico apunta en la dirección x positiva siendo su magnitud constante de $10 \text{ N/C} = 10 \text{ V/m}$. Determinar el potencial en función de x , suponiendo que $V = 0$ para $x = 0$.

El vector campo eléctrico viene dado por $E = (10 \text{ N/C})\mathbf{i} = (10 \text{ V/m})\mathbf{i}$. Para un desplazamiento general $d\ell$, la variación de potencial viene dada por la ecuación 20-3a:

$$\begin{aligned} dV &= -E \cdot d\ell = -(10 \text{ V/m})\mathbf{i} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= -(10 \text{ V/m}) dx \end{aligned}$$

Integrando desde el punto x_1 al x_2 , se obtiene la diferencia de potencial $V(x_2) - V(x_1)$:

$$\begin{aligned} V(x_2) - V(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} -(10 \text{ V/m}) dx \\ &= -(10 \text{ V/m})(x_2 - x_1) = (10 \text{ V/m})(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Como el potencial es cero para $x=0$, será $V(x_1)=0$ en $x_1=0$. Por tanto el potencial en x_2 relativo a $V=0$ en $x=0$, viene dado por

$$V(x_2) - 0 = (10 \text{ V/m})(0 - x_2)$$

o sea,

$$V(x_2) = -(10 \text{ V/m})x_2$$

En un punto general x , el potencial es

$$V(x) = -(10 \text{ V/m})x$$

El potencial es cero para $x=0$ y disminuye en 10 V/m en la dirección x .

Ejemplo 20-2

Un protón de masa $1,67 \times 10^{-27}$ kg y carga $1,6 \times 10^{-19}$ C se sitúa en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (5,0 \text{ N/C})\mathbf{i} = (5,0 \text{ V/m})\mathbf{i}$ y desde el reposo se deja en libertad. ¿Qué velocidad posee después de recorrer 4 cm?

Cuando el protón se mueve siguiendo la línea del campo eléctrico, su energía potencial disminuye y su energía cinética se incrementa en igual cantidad. Según la ecuación 20-3, la variación del potencial eléctrico para $\Delta x = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$ es

$$\begin{aligned} dV &= -E \cdot d\ell = -(5,0 \text{ V/m } \mathbf{i}) \cdot (dx \mathbf{i}) = -(5,0 \text{ V/m}) dx \\ \Delta V &= -(5,0 \text{ V/m})(0,04 \text{ m}) = -0,20 \text{ V} \end{aligned}$$

La variación de energía potencial del protón viene dada por el producto de su carga por el incremento de potencial (ecuación 20-3):

$$\Delta U = q \Delta V = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(-0,20 \text{ V}) = -3,2 \times 10^{-20} \text{ J}$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la pérdida de energía potencial es igual a la ganancia de energía cinética. Como el protón parte del reposo, su ganancia en energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2$, siendo v la velocidad que posee después de recorrer los 4 cm. Tenemos, por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta E_c + \Delta U &= 0 \\ \Delta E_c &= -\Delta U = -(-3,2 \times 10^{-20} \text{ J}) \\ \frac{1}{2}mv^2 &= 3,2 \times 10^{-20} \text{ J} \\ v^2 &= \frac{(2)(3,2 \times 10^{-20} \text{ J})}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3,83 \times 10^7 \text{ J/kg} \\ v &= \sqrt{3,83 \times 10^7 \text{ J/kg}} = 6,19 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

En la física atómica y nuclear, encontramos frecuentemente partículas elementales, tales como electrones y protones, con cargas de magnitud e que se mueven a través de diferencias de potencial de varios miles o millones de voltios. Como la energía tiene dimensiones de carga eléctrica multiplicada por potencial eléctrico, una unidad conveniente de energía es el producto de la carga electrónica e por el voltio. Esta unidad se denomina electrón-voltio (eV). La conversión de



Enchufe ordinario de pared. La compañía eléctrica mantiene una diferencia de potencial de 120 V (o 220 V) entre las tomas de corriente. Cuando un calentador u otro dispositivo se conecta al enchufe, cada coulombio que pasa por el calentador disipa 120 J (o 220 J) de energía en el mismo (y los cables de conexión). El orificio redondo está conectado a tierra.

unidades entre electrón-voltios y julios se obtiene expresando la carga electrónica en culombios:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad 20-6$$

En el ejemplo 20-2 la variación de energía potencial del protón después de recorrer 4 cm es

$$\Delta U = q \Delta V = e (-0,20 \text{ V}) = -0,20 \text{ eV}$$

Cuestiones

1. Explique el lector con sus propias palabras la diferencia entre potencial eléctrico y energía potencial electrostática.
2. Si una carga testigo se traslada una pequeña distancia en la dirección de un campo eléctrico, ¿aumenta o disminuye su energía potencial electrostática? ¿Depende la respuesta del signo de la carga? ¿Depende la variación de potencial del signo de la carga testigo?
3. ¿En qué dirección podremos movernos respecto a un campo eléctrico de modo que el potencial eléctrico no varíe?
4. Se deja en libertad desde el reposo una carga positiva en el interior de un campo eléctrico. ¿Se moverá hacia una región de mayor o menor potencial eléctrico?

20-2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

El potencial eléctrico debido a una carga puntual q en el origen puede calcularse a partir del campo eléctrico, el cual viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Si una carga testigo q_0 a la distancia r experimenta un desplazamiento $d\boldsymbol{\ell} = dr \hat{\mathbf{r}}$, la variación de su energía potencial es $dU = -q_0 E d\boldsymbol{\ell}$ y el cambio de potencial eléctrico es

$$dV = -E \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{kq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr \hat{\mathbf{r}} = -\frac{kq}{r^2} dr \quad 20-7$$

Integrando se obtiene

Potencial debido a una carga puntual

$$V = +\frac{kq}{r} + V_0 \quad 20-8$$

en donde V_0 es una constante de integración.

Es costumbre definir el potencial cero a una distancia infinita de la carga puntual (es decir, para $r = \infty$). Por tanto, la constante V_0 es cero y el potencial a una distancia r de la carga puntual es

Potencial debido a una carga puntual con $V=0$ para $r = \infty$

$$V = \frac{kq}{r} \quad V=0 \text{ para } r = \infty \quad 20-9$$

- El potencial es positivo o negativo según el signo de la carga q .

Si una carga testigo q_0 se deja en libertad en un punto situado a una distancia r de una carga puntual q que se mantiene fija en el origen, la carga testigo es acelerada en la dirección del campo eléctrico. El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga testigo se mueve de r a ∞ es

$$W = \int_r^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q_0 \int_r^\infty E \, dr = q_0 \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq q_0}{r}$$

Este trabajo es la energía potencial electrostática del sistema formado por las dos cargas:

$$U = \frac{kq q_0}{r} = q_0 V$$

La energía potencial es, por tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga testigo se desplaza de r a ∞ . Alternativamente, la energía potencial puede definirse como el trabajo que debe realizar una fuerza aplicada $\mathbf{F}_{ap} = -q_0 \mathbf{E}$ para trasladar una carga positiva q_0 desde el infinito hasta una distancia r medida desde una carga puntual q (figura 20-3).

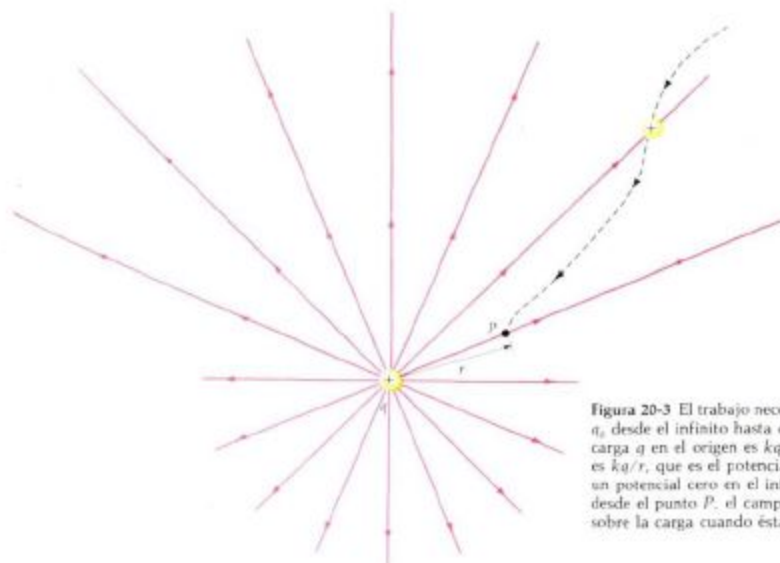


Figura 20-3 El trabajo necesario para llevar una carga de prueba q_0 desde el infinito hasta el punto P a una distancia r de una carga q en el origen es $kq q_0 / r$. El trabajo por unidad de carga es kq / r , que es el potencial eléctrico en el punto P respecto a un potencial cero en el infinito. Si la carga testigo se libera desde el punto P , el campo eléctrico realiza el trabajo $kq q_0 / r$ sobre la carga cuando ésta se mueve hasta el infinito.

La elección del potencial eléctrico igual a cero a una distancia infinita desde una carga puntual es simplemente una elección por conveniencia. La energía potencial de dos cargas es, por tanto, cero cuando están infinitamente separadas. Esta elección es semejante a la que hicimos en nuestro estudio de la gravedad en el capítulo 10, según la cual la energía potencial de dos masas puntuales era cero cuando las masas estaban muy separadas. También es posible establecer el mismo convenio del potencial cero para un sistema de cargas siempre que el sistema sea finito, es decir, siempre que no existan cargas a una distancia infinita de las otras cargas del sistema. A distancias suficientemente grandes de cualquier distribución de carga, ésta se comporta como una carga puntual y la función potencial V se aproxima a la ecuación 20-9, en donde q es la carga neta de la distribución.

Ejemplo 20-3

(a) ¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia $r = 0,529 \times 10^{-10}$ m de un protón? (Esta es la distancia media entre el protón y el electrón en el átomo de hidrógeno.) (b) ¿Cuál es la energía potencial del electrón y el protón a esta separación?

(a) La carga del protón es $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Según la ecuación 20-9:

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{0,529 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ = 27,2 \text{ J/C} = 27,2 \text{ V}$$

(b) La carga del electrón es $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C. En electrón-voltios, la energía potencial del electrón y el protón separados una distancia de $0,529 \times 10^{-10}$ m es

$$U = qV = -e(27,2 \text{ V}) = -27,2 \text{ eV}$$

En unidades SI, la energía potencial es

$$U = qV = (-1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(27,2 \text{ V}) = -4,35 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Para determinar el potencial en un punto causado por varias cargas puntuales, hay que calcular el potencial en dicho punto debido a cada una de las cargas por separado y sumar todos ellos. Esta es una consecuencia del principio de superposición del campo eléctrico. Si E_i es el campo eléctrico en un punto debido a la carga q_i , el campo neto en dicho punto producido por todas las cargas es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{E}_i$$

Por tanto, según la definición de diferencia de potencial (ecuación 20-3) resulta para un desplazamiento $d\ell$

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\ell = -E_1 \cdot d\ell - E_2 \cdot d\ell - \dots = dV_1 + dV_2 + \dots$$

Si la distribución de carga es finita, es decir, si no hay cargas en el infinito, podemos considerar que es cero el potencial en el infinito y usar la ecuación 20-9 para el potencial correspondiente a cada carga puntual. El potencial debido a un sistema de cargas puntuales q_i será por tanto

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i0}} \quad 20-10$$

en donde la suma debe extenderse a todas las cargas y r_{i0} es la distancia desde la carga i al punto P donde deseamos calcular el potencial.

Ejemplo 20-4

Dos cargas puntuales positivas e iguales de magnitud $+5$ nC se encuentran sobre el eje x . Una está en el origen y la otra en $x = 8$ cm, como indica la figura 20-4. Determinar el potencial (a) en el punto P_1 sobre el eje x en $x = 4$ cm y (b) en el punto P_2 sobre el eje y en $y = 6$ cm.

(a) El punto P_1 dista 4 cm de cada una de las cargas. Sustituyendo en la ecuación 20-10 los valores $q_1 = q_2 = 5$ nC y $r_{10} = r_{20} = 0,04$ m, resulta para el potencial en dicho punto

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i0}} = \frac{kq_1}{r_{10}} + \frac{kq_2}{r_{20}} \\ = 2 \times \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,04 \text{ m}} = 2250 \text{ V}$$

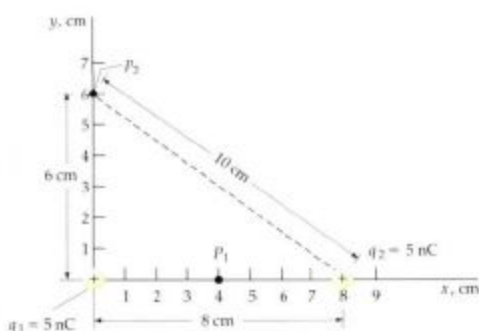


Figura 20-4 Sobre el eje x hay dos cargas puntuales positivas (ejemplo 20-4). Se trata de determinar el potencial en los puntos P_1 y P_2 .

Obsérvese que el campo eléctrico es cero en este punto a mitad de camino entre las cargas, pero el potencial no lo es. Para transportar una carga testigo desde una larga distancia hasta este punto se requiere trabajo, pues el campo eléctrico sólo es cero en la posición final.

(b) El punto P_2 dista 6 cm de una de las cargas y 10 cm de la otra. El potencial en este punto es, por tanto,

$$V = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,06 \text{ m}} + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{0,10 \text{ m}}$$

$$= 749 \text{ V} + 450 \text{ V} = 1200 \text{ V}$$

Ejemplo 20-5

Una carga puntual q_1 está en el origen y una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x = a$, como indica la figura 20-5. Determinar el potencial en cualquier punto del eje x .

Dividiremos el eje x en tres regiones: a la derecha de ambas cargas, es decir, $x > a$, entre las dos cargas $0 < x < a$ y a la izquierda de ambas, $x < 0$. En un punto P_1 a la derecha de las dos cargas, la distancia a q_1 es x y la distancia a q_2 es $x - a$. El potencial en esta región es, por tanto,

$$V = \frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{x-a} \quad x > a$$

En un punto P_2 entre las dos cargas, la distancia a q_1 es de nuevo x , pero la distancia a q_2 es $a - x$. El potencial sobre el eje entre las dos cargas es

$$V = \frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{a-x} \quad 0 < x < a$$

En un punto P_3 a la izquierda de ambas cargas, la distancia a q_1 es $-x$ (pues x es negativo) y la distancia a q_2 es $a - x$. El potencial sobre el eje a la izquierda de las cargas es, por tanto,

$$V = \frac{kq_1}{-x} + \frac{kq_2}{a-x} \quad x < 0$$

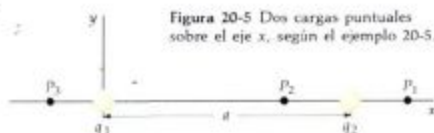


Figura 20-5 Dos cargas puntuales sobre el eje x , según el ejemplo 20-5.

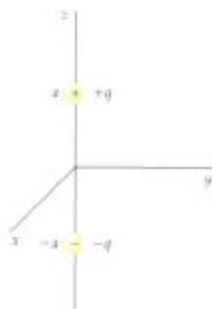


Figura 20-6 Dipolo eléctrico sobre el eje z para el ejemplo 20-6.

Ejemplo 20-6

Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva $+q$ sobre el eje z en $z = +a$ y una carga negativa $-q$ sobre el eje z en $z = -a$ (figura 20-6). Determinar el potencial sobre el eje z a una gran distancia del dipolo.

Según la ecuación 20-10, tenemos

$$V = \frac{kq}{z-a} + \frac{k(-q)}{z+a} = \frac{2kqa}{z^2 - a^2}$$

Para $z \gg a$, podemos despreciar a^2 frente a z^2 en el denominador. Por tanto

$$V \approx \frac{2kqa}{z^2} = \frac{kp}{z^2} \quad z \gg a \quad 20-11$$

en donde $p = 2qa$ es la magnitud del momento dipolar.

20-3 Energía potencial electrostática

Si tenemos una carga puntual q_1 , el potencial a una distancia r_{12} de la misma, viene dado por

$$V = \frac{kq_1}{r_{12}}$$

El trabajo necesario para trasladar una segunda carga puntual q_2 desde el infinito hasta una distancia r_{12} es $W_1 = q_2 V = kq_1q_2/r_{12}$. Para transportar una tercera carga, debe realizarse trabajo contra el campo eléctrico producido por ambas q_1 y q_2 . El trabajo necesario para transportar una tercera carga q_3 que dista r_{13} de q_1 y r_{23} de q_2 es $W_2 = kq_1q_3/r_{13} + kq_2q_3/r_{23}$. El trabajo total para reunir las tres cargas es, por tanto,

$$W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

Este trabajo es la **energía potencial electrostática** del sistema formado por las tres cargas puntuales. Es independiente del orden en que las cargas son transportadas a sus posiciones finales. En general,

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es igual al trabajo necesario para transportar las cargas desde una separación infinita a sus posiciones finales.

Ejemplo 20-7

Los puntos A , B , C , y D corresponden a los vértices de un cuadrado de lado a como indica la figura 20-7. ¿Qué trabajo es necesario para situar una carga positiva q en cada vértice del cuadrado?

Para situar la primera carga en el punto A no hace falta ningún trabajo, pues el potencial es cero cuando las otras tres cargas se encuentran a distancia infinita. Para transportar una segunda carga al punto B que dista a de la primera, hace falta el trabajo

$$W_1 = \frac{kqq}{a}$$

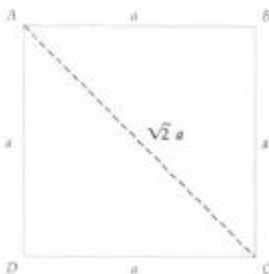


Figura 20-7 Cuadrado de lado a para el ejemplo 20-7.

El punto C dista a del punto B y $\sqrt{2}a$ del punto A . El potencial en C debido a las cargas en A y B es

$$V_C = \frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a}$$

Por tanto, el trabajo necesario para transportar una tercera carga q al punto C es

$$W_3 = qV_C = \frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a}$$

Finalmente el trabajo necesario para llevar la cuarta carga a D cuando las otras tres cargas están ya en su sitio es

$$W_4 = \frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a}$$

El trabajo total requerido para reunir las cuatro cargas en la disposición indicada es

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{4kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{\sqrt{2}a} = \frac{(8 + 2\sqrt{2})kq^2}{2a}$$

Este trabajo es la energía electrostática de la distribución de carga.

20-4 Cálculo del potencial eléctrico en distribuciones continuas de carga

En esta sección calcularemos V para algunas distribuciones importantes de carga continua. El potencial debido a una distribución continua de carga puede calcularse mediante la ecuación 20-3, si se conoce el campo eléctrico, o mediante la ecuación 20-10 eligiendo un elemento de carga dq que puede considerarse como una carga puntual y transformando la suma en una integral:

$$V = \int \frac{k dq}{r} \quad 20-12$$

Potencial debido a una distribución continua de carga

Ilustraremos la aplicación de la ecuación 20-12 mediante el cálculo del potencial eléctrico sobre el eje de un anillo y sobre el eje de un disco uniformemente cargados.

Potencial sobre el eje de un anillo cargado

Consideremos un anillo uniformemente cargado de radio a y carga Q , como indica la figura 20-8. Sea dq un elemento de carga del anillo. La distancia desde este elemento de carga al punto del campo P sobre el eje del anillo es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Como esta distancia es la misma para todos los elementos de carga sobre el anillo, puede sacarse fuera de la integral en la ecuación 20-12. El potencial en el punto P debido al anillo es pues

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{k dq}{r} = \int \frac{k dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \quad 20-13$$

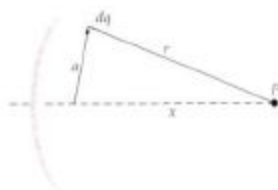


Figura 20-8 Geometría para el cálculo del potencial eléctrico en un punto situado en el eje de un anillo de radio a uniformemente cargado.

Ejemplo 20-8

Un anillo de radio 4 cm posee una carga uniforme de 8 nC. Una pequeña partícula de masa $m = 6 \text{ mg} = 6 \times 10^{-6} \text{ kg}$ y carga $q_0 = 5 \text{ nC}$ se sitúa en $x = 3 \text{ cm}$ y se deja en libertad. Determinar la velocidad de la carga cuando se encuentra a gran distancia del anillo.

La energía potencial de la carga q_0 en $x = 3 \text{ cm}$ es

$$\begin{aligned} U &= q_0 V = \frac{kQq_0}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})(5 \times 10^{-9} \text{ C})}{\sqrt{(0,03 \text{ m})^2 + (0,04 \text{ m})^2}} \\ &= 7,19 \times 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

A medida que la partícula se mueve alejándose del anillo y siguiendo el eje x , su energía potencial disminuye y su energía cinética crece. Cuando la partícula está muy lejos del anillo, su energía potencial es cero y su energía cinética es $7,19 \times 10^{-6} \text{ J}$. Su velocidad viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= 7,19 \times 10^{-6} \text{ J} \\ v &= \sqrt{\frac{2(7,19 \times 10^{-6} \text{ J})}{6 \times 10^{-6} \text{ kg}}} = 1,55 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ejercicio

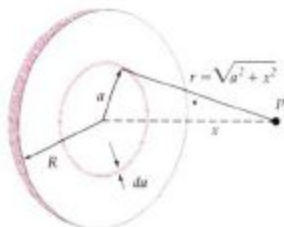
¿Cuál es la energía potencial de la partícula en el ejemplo 20-8 cuando se encuentra a la distancia de $x = 9 \text{ cm}$? (Respuesta: $3,65 \times 10^{-6} \text{ J}$)

Potencial sobre el eje de un disco uniformemente cargado

Utilizaremos ahora la ecuación 20-13 para calcular el potencial sobre el eje de un disco uniformemente cargado. El disco tiene un radio R y es portador de una carga total Q . La densidad de carga superficial sobre el disco es, por tanto, $\sigma = Q/\pi R^2$. Tomaremos como eje x el eje del disco y consideraremos el disco como una serie concéntrica de cargas anulares. La figura 20-9 muestra uno de estos anillos de radio a y anchura da . El área de este anillo es $2\pi a da$ y su carga es $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi a da$. El potencial en un punto P sobre el eje x debido a este elemento anular de carga viene dado por la ecuación 20-13:

$$dV = \frac{k dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{k 2\pi \sigma a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Figura 20-9 Geometría para el cálculo de potencial eléctrico en un punto situado sobre el eje x de un disco de radio R uniformemente cargado. El disco se divide en anillos concéntricos de radio a y espesor da , transportando cada uno la carga $dq = \sigma dA = (Q/\pi R^2) 2\pi a da$.



El potencial sobre el eje del disco se calcula integrando desde $a = 0$ hasta $a = R$:

$$V = \int_0^R \frac{k 2\pi \sigma a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = k \sigma \pi \int_0^R (x^2 + a^2)^{-3/2} 2a da$$

Esta integral es de la forma $\int u^n du$ con $u = x^2 + a^2$ y $n = -\frac{1}{2}$. La integración nos da

$$V = k\sigma\pi \frac{(x^2 + a^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_{a-R}^{a+R} = 2\pi k\sigma [(x^2 + R^2)^{1/2} - x] \quad 20-14$$

Potencial en las proximidades de un plano infinito de carga: Continuidad de V

Si R se hace muy grande, nuestro disco se aproxima a un plano infinito. Cuando R se hace infinito, la función potencial (ecuación 20-14) se hace infinita. La ecuación 20-12 no puede aplicarse a las distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, como son las líneas o los planos de carga infinitos, ya que el potencial no puede elegirse igual a cero en el infinito. Para estos casos, determinamos en primer lugar el campo eléctrico E (por integración directa o mediante la ley de Gauss) y luego calculamos el potencial a partir de su definición, según la ecuación 20-3. Si se trata de un plano infinito de carga de densidad σ situado en el plano yz , el campo eléctrico para valores positivos de x viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

El potencial se calcula a partir de su definición (ecuación 20-3). Si el potencial en el plano yz donde $x=0$ es V_0 , el potencial en cualquier valor arbitrario positivo de x es

$$V(x) - V_0 = -\int_0^x \mathbf{E} \cdot d\ell = -\int_0^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

o sea,

$$V(x) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad x > 0 \quad 20-15a$$

Para valores positivos de x , el potencial tiene su valor máximo V_0 en $x=0$ y disminuye linealmente con la distancia desde el plano. Como el potencial no tiende a un valor límite cuando x tiende a infinito, no podemos elegir el potencial cero para $x = \infty$. Sin embargo, sí podemos escoger V de modo que sea cero en $x=0$ o en cualquier otro punto. Para $x < 0$, el campo eléctrico está en la dirección x negativa y viene dado por

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

Repetiendo el cálculo para el potencial, usando esta ecuación para el campo eléctrico, resulta

$$V(x) = V_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad x < 0 \quad 20-15b$$

Como x es negativo en esta ecuación, el potencial tiene su valor máximo V_0 en $x=0$, y de nuevo decrece linealmente con la distancia desde el plano. La figura 20-10 muestra un gráfico de V en función de x . Obsérvese que esta función es continua en $x=0$, incluso aunque el campo eléctrico E , sea allí discontinuo. En el capítulo 19, vimos que el campo eléctrico es discontinuo en el valor σ/ϵ_0 en un punto donde exista una densidad superficial de carga σ . La función potencial, por otra parte, es continua en todos los puntos del espacio. En efecto, consideremos dos puntos próximos x_1 y x_2 . Si V_1 es el potencial en x_1 y V_2 el potencial en x_2 , la diferencia de potencial puede escribirse en la forma

$$\Delta V = (E_x) \Delta x = (E_x)(x_2 - x_1)$$

en donde E_x es el valor medio del campo eléctrico entre los puntos considerados. Cuando x_2 se aproxima a x_1 , la diferencia de potencial ΔV tiende a cero, siempre que E_x no sea infinito. Físicamente, si una carga puntual se desplaza una distancia Δx , el trabajo realizado por el campo tiende a cero cuando Δx se aproxima a cero, siempre que el campo no sea infinito.

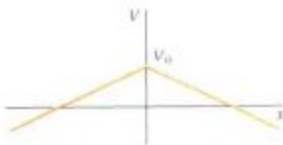
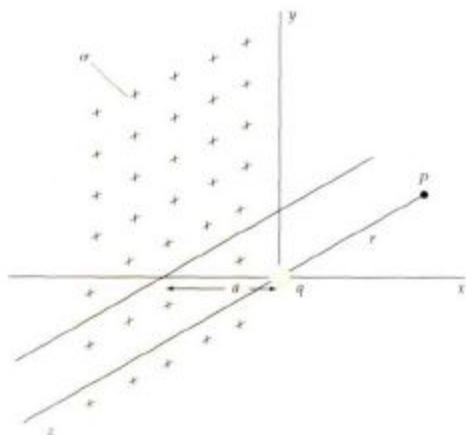


Figura 20-10 Representación gráfica de V en función de x para un plano infinito de carga en el plano yz . El potencial es continuo $x=0$, aunque el campo eléctrico no lo sea.

Figura 20-11 Una carga puntual en el origen y un plano infinito de carga en $x = -a$, correspondiente al ejemplo 20-9.



Ejemplo 20-9

Un plano infinito de densidad de carga σ es paralelo al plano yz en $x = -a$ y una carga puntual q está en el origen, como indica la figura 20-11. Determinar el potencial en un punto P situado a la distancia r de la carga puntual, para $x > -a$ (es decir, a la derecha del plano de carga).

El potencial V_{plano} a una distancia x' del plano infinito, debido a la carga sobre el plano, viene dado por la ecuación 20-15a, en donde x se reemplaza por x' :

$$V_{\text{plano}} = A - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x'$$

siendo $x' = x + a$ y A una constante que depende de la elección del potencial cero. Como no podemos elegir el potencial cero a $r = \infty$, utilizaremos la ecuación 20-8 para expresar el potencial debido a la carga puntual en el origen:

$$V_q = \frac{kq}{r} + B$$

en donde B es una constante que depende de la elección del potencial cero. El potencial debido a ambos, el plano infinito de carga y la carga puntual, es

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{plano}} + V_q \\ &= A - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x' + \frac{kq}{r} + B \\ &= \frac{kq}{r} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x' + C \end{aligned} \quad 20-16$$

en donde hemos combinado las constantes $A + B = C$. Elegimos el potencial nulo en el punto en el cual el eje x corta al plano infinito de carga. Las coordenadas de este punto son $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$. En este punto $x' = 0$ y $r = a$. La ecuación 20-16 nos da

$$V = + \frac{kq}{a} + C = 0$$

$$C = - \frac{kq}{a}$$

que determina la constante C . En cualquier punto general, el potencial viene dado por

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{a} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x' = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{a} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x+a)$$

En coordenadas rectangulares $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ y V viene dado por

$$V = \frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x+a) - \frac{kq}{a}$$

Potencial en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga

A continuación determinaremos el potencial debido a una corteza esférica de radio R y carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Estamos interesados en hallar el potencial en todos los puntos en el interior y en el exterior de la corteza. Puesto que esta distribución de carga es de extensión finita, podríamos calcular el potencial por integración directa de la ecuación 20-12, pero esta integración es compleja. Como el campo eléctrico para esta distribución de carga se obtiene fácilmente mediante la ley de Gauss, es mejor utilizar la ecuación 20-3 y obtener el potencial a partir del campo eléctrico conocido.*

Fuera de la corteza, el campo eléctrico es radial y es el mismo que si toda la carga estuviera en el origen:

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

El cambio de potencial correspondiente a un desplazamiento $d\ell = dr \hat{\mathbf{r}}$ fuera de la corteza es, por tanto,

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr \hat{\mathbf{r}} = -\frac{kQ}{r^2} dr$$

Esta es la misma ecuación 20-7 para una carga puntual en el origen. Integrando se obtiene

$$V = -\frac{kQ}{r} + V_0$$

en donde V_0 es el potencial para $r = \infty$. Eligiendo el potencial nulo para $r = \infty$ resulta

$$V = \frac{kQ}{r} \quad r > R$$

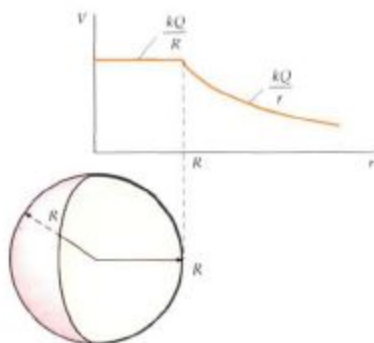
Dentro de la corteza esférica, el campo eléctrico es cero. La variación de potencial en cualquier desplazamiento dentro de la corteza es, por tanto, cero. Así pues, el potencial será constante en todos los puntos dentro de la corteza. Cuando r se aproxima a R desde el exterior de la corteza, el potencial se aproxima a kQ/R . Por tanto, el valor constante de V en el interior debe ser kQ/R para que V varíe de modo continuo. Así,

$$V = \begin{cases} \frac{kQ}{R} & r \leq R \\ \frac{kQ}{r} & r \geq R \end{cases}$$

20-17 Potencial debido a una corteza esférica

* El cálculo del campo eléctrico \mathbf{E} para una corteza esférica uniformemente cargada por integración directa de la ley de Coulomb es todavía más difícil que la integración para determinar V , pues V es un escalar, mientras que \mathbf{E} es un vector. El cálculo directo de \mathbf{E} es semejante al cálculo del campo gravitatorio debido a una corteza esférica (sección 10-7).

Figura 20-12 Potencial eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada de radio R en función de la distancia r al centro de la corteza. Dentro de ella el potencial tiene valor constante kQ/R . Fuera de la corteza el potencial es el mismo que el originado por una carga puntual en el centro de la esfera.



Esta función potencial viene representada en la figura 20-12.

Un error frecuente es pensar que el potencial debe ser cero en el interior de una corteza esférica porque el campo eléctrico es cero. Realmente, el campo eléctrico nulo implica simplemente que el potencial no varía. Consideremos una corteza esférica con un pequeño orificio, de modo que podemos mover una carga testigo dentro y fuera de la corteza. Si desplazamos la carga testigo desde una distancia infinita hasta la corteza, el trabajo por unidad de carga que debemos realizar es kQ/R . Dentro de la corteza no hay campo eléctrico y por lo tanto no es necesario realizar ningún trabajo para mover la carga de prueba en el interior de la corteza. La cantidad total de trabajo por carga que se necesita para llevar la carga de prueba desde el infinito hasta cualquier punto en el interior de la corteza coincide con el trabajo necesario para llevarla hasta la corteza de radio R , que es kQ/R . Por consiguiente, el potencial es kQ/R en todos los puntos del interior de la corteza.

Ejercicio

¿Cuál es el potencial de una corteza esférica de radio 10 cm que posee una carga de $6 \mu\text{C}$? (Respuesta: $5.39 \times 10^5 \text{ V} = 539 \text{ kV}$)

Potencial próximo a una carga lineal infinita

Calcularemos ahora el potencial debido a una carga lineal uniforme infinita. Supongamos que la carga por unidad de longitud sea λ . Puesto que esta distribución de carga se extiende hasta el infinito no podemos utilizar la ecuación 20-12 para hallar el potencial. En el capítulo 19, vimos que el campo eléctrico producido por una carga lineal infinita apunta en dirección que le aleja de la línea (si λ es positivo) y viene expresado por $E_r = 2k\lambda/r$. La ecuación 20-3 nos da para la variación del potencial

$$dV = -E \cdot d\ell = -E_r dr = -\frac{2k\lambda}{r} dr$$

Integrando resulta

$$V = V_0 - 2k\lambda \ln r \quad 20-18$$

Para una carga lineal positiva las líneas del campo eléctrico se alejan de la línea y el potencial disminuye al aumentar la distancia a la línea de carga. Para valores grandes de r el potencial disminuye sin límite. Por tanto no puede tomarse el potencial como cero para $r = \infty$. (No puede escogerse el valor cero para $r = 0$, pues cuando r se aproxima a cero, $\ln r$ tiende a $-\infty$). En su lugar, se elige como potencial cero el correspondiente a cierta distancia $r = a$. Sustituyendo $r = a$ en la ecuación 20-18 y haciendo $V = 0$ se obtiene

$$V = 0 = V_0 - 2k\lambda \ln a$$

o sea,

$$V_0 = 2k\lambda \ln a$$

Por tanto, la ecuación 20-18 se convierte en

$$V = 2k\lambda \ln a - 2k\lambda \ln r$$

es decir,

$$V = -2k\lambda \ln \frac{r}{a} \quad 20-19$$

Potencial debido a una carga lineal con $V=0$ para $r=a$

Cuestiones

- En el cálculo de V para un anillo de carga ¿tiene importancia el que la carga Q esté distribuida uniformemente a lo largo del anillo? ¿Serían diferentes V o E , si no fuese así?
- Si el potencial eléctrico es constante a través de una determinada región del espacio, ¿qué puede decirse acerca del campo eléctrico en la misma?

20-5 Campo eléctrico y potencial

Las líneas del campo eléctrico señalan en la dirección del potencial decreciente. Si el potencial es conocido, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico. Consideremos un pequeño desplazamiento $d\ell$ en un campo eléctrico arbitrario E . La variación de potencial es

$$dV = -E \cdot d\ell = -E_{\parallel} d\ell \quad 20-20$$

en donde E_{\parallel} es el componente de E paralelo al desplazamiento. Dividiendo por $d\ell$, resulta

$$E_{\parallel} = -\frac{dV}{d\ell} \quad 20-21$$

Si el desplazamiento $d\ell$ es perpendicular al campo eléctrico, el potencial no varía. La variación más grande de V se produce cuando el desplazamiento $d\ell$ es paralelo o antiparalelo a E . Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de la función con respecto a la distancia en dicha dirección, se denomina **gradiente** de la función. El campo eléctrico E es opuesto al gradiente del potencial V . Las líneas de campo señalan en la dirección de máxima disminución de la función potencial. En notación vectorial, el gradiente de V se escribe ∇V . Así,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad 20-22$$

La figura 20-13 muestra las líneas del campo eléctrico debidas a una carga puntual q situada en el origen. Si desplazamos una carga de prueba perpendicularmente a estas líneas, no se realiza trabajo y el potencial no varía. Una superficie sobre la cual el potencial eléctrico es constante se denomina **superficie equipotencial**. Para el potencial $V = kq/r$ producido por una carga puntual en el origen, las superficies equipotenciales son superficies esféricas definidas por $r = \text{constante}$. Más adelante en este capítulo veremos que la superficie de cualquier conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial. Las líneas del campo eléctrico son siempre perpendiculares a una superficie equipotencial. Las líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual en el origen son líneas radiales y las superficies equipotenciales son esferas. Un desplazamiento paralelo a un campo eléctrico radial se escribe en la forma $d\ell = dr \hat{i}$ y la ecuación 20-20 se convierte en

$$dV = -E \cdot d\ell = -E \cdot dr \hat{i} = -E_r dr$$

y

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad 20-23$$

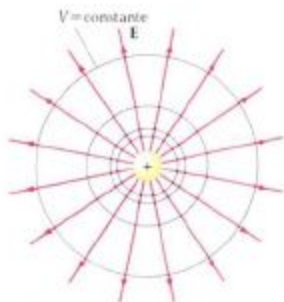


Figura 20-13 Líneas de fuerza y superficies equipotenciales de una carga puntual q . Las líneas de fuerza son radiales y las superficies equipotenciales son esféricas. Las líneas de fuerza son en todos los puntos perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Para cualquier distribución de carga esféricamente simétrica, el potencial varía sólo con r , y el campo eléctrico está relacionado con el potencial por la expresión

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \hat{\mathbf{r}} \quad 20-24$$

Para un campo eléctrico uniforme en la dirección x , por ejemplo, como el producido por una carga plana infinita en el plano yz , las líneas del campo eléctrico son paralelas a la dirección x y las superficies equipotenciales son planos paralelos al plano yz . Entonces, la función potencial V puede depender sólo de x . El vector desplazamiento que es paralelo a este campo viene dado por

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} \quad 20-25$$

En este caso, la ecuación 20-21 es

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

y el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} \quad 20-26$$

En general, la función potencial puede depender de x , y , z . Los componentes rectangulares del campo eléctrico están relacionados con las derivadas parciales del potencial respecto a x , y o z , mientras las otras variables se mantienen constantes. Por ejemplo, el componente x del campo eléctrico viene dado por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad 20-27a$$

De igual modo, los componentes y , z del campo eléctrico están relacionados con el potencial por

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

y

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad 20-27b$$

Así, pues, la ecuación 20-22 en coordenadas rectangulares es

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}\right) \quad 20-28$$

Ejemplo 20-10

Determinar el campo eléctrico para la función potencial eléctrico $V(x)$ dada por $V(x) = 100 \text{ V} - (25 \text{ V/m})x$.

Esta función potencial depende sólo de x . El campo eléctrico resulta aplicando la ecuación 20-26:

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = +(25 \text{ V/m}) \mathbf{i}$$

Este campo eléctrico es uniforme y tiene la dirección x . Obsérvese que la constante 100 V en la expresión de $V(x)$ no tiene efecto alguno sobre el campo eléctrico. El campo eléctrico no depende de la elección del cero para la función potencial.

Ejercicio

(a) ¿En qué punto es $V=0$ en el ejemplo 20-10? (b) Escribir la función potencial correspondiente al mismo campo eléctrico con $V=0$ en $x=0$. [Respuestas: (a) $x=4$ m, (b) $V=-(25 \text{ V/m})x$]

Ejemplo 20-11

Determinar el campo eléctrico correspondiente a la distribución de carga del dipolo del ejemplo 20-6.

En este ejemplo vimos que el potencial sobre el eje z a una gran distancia del dipolo era

$$V = \frac{kp}{z^2}$$

en donde $p=2qa$ es la magnitud del momento dipolar. El campo eléctrico en un punto del eje z viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{dV}{dz} \mathbf{k} \\ &= -(-2) \frac{kp}{z^3} \mathbf{k} = \frac{2kp}{z^3} \mathbf{k} \end{aligned}$$

que coincide con el obtenido directamente a partir de la ley de Coulomb (ecuación 18-10).

Ejemplo 20-12

Utilizar las funciones potenciales obtenidas en la sección anterior para el potencial sobre el eje de un anillo y un disco uniformemente cargados, a fin de determinar el campo eléctrico sobre el eje de estas distribuciones de carga.

El potencial sobre el eje de un anillo uniformemente cargado, de carga total Q , viene medido por la ecuación 20-13:

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} = kQ(x^2 + a^2)^{-1/2}$$

El campo eléctrico es, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = -\left(-\frac{1}{2}\right) kQ(x^2 + a^2)^{-3/2} (2x) \mathbf{i} \\ &= \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{i} \end{aligned}$$

Este valor es el mismo que el de la ecuación 19-12 que encontramos directamente de la ley de Coulomb.

El potencial sobre el eje de un disco uniformemente cargado viene dado por la ecuación 20-14:

$$V = 2\pi k\sigma[(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$

De nuevo el campo eléctrico se determina a partir del gradiente de esta expresión:

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \mathbf{i}$$

Este resultado coincide con la ecuación 19-13 que obtuvimos por cálculo directo de la ley de Coulomb.

20-6 Superficies equipotenciales, distribución de carga y ruptura dieléctrica

Ya vimos que no existe campo eléctrico dentro de un conductor en equilibrio estático. Por tanto, no se aplica fuerza alguna sobre una carga testigo ni se verifica ningún trabajo cuando esta carga se mueve en el interior de un conductor. El potencial eléctrico es el mismo en todo el conductor, es decir, el volumen ocupado por el conductor es un volumen equipotencial. Una superficie sobre la cual el potencial es constante, constituye una superficie equipotencial. La superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Si una carga testigo experimenta un desplazamiento $d\ell$ paralelo a una superficie equipotencial, $dV = -E \cdot d\ell = 0$, de modo que las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a la superficie equipotencial. Las figuras 20-14 y 20-15 muestran superficies equipotenciales próximas a un conductor esférico y a un conductor no esférico. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares en todos los puntos a estas superficies. Si nos desplazamos una corta distancia $d\ell$ a lo largo de la línea del campo, desde una superficie equipotencial a otra, el potencial se modifica en $dV = E \cdot d\ell = -E d\ell$. Si E es grande, las superficies equipotenciales con una diferencia de potencial fija entre ellas, están más apretadas que cuando E es pequeño.

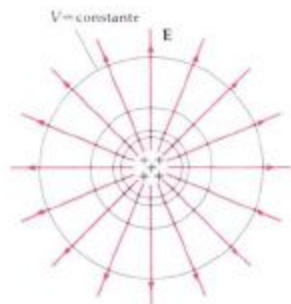


Figura 20-14 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor esférico uniformemente cargado. Las superficies equipotenciales son esféricas. Las líneas de fuerza son radiales y perpendiculares a las superficies equipotenciales.

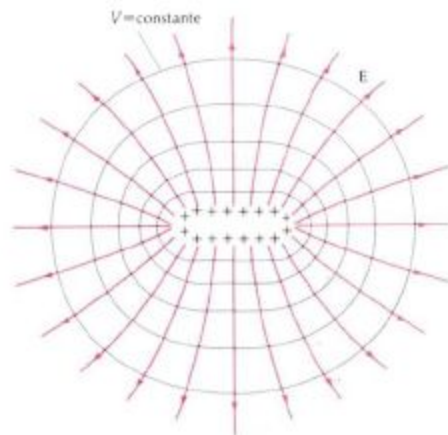


Figura 20-15 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor no esférico. Las líneas del campo eléctrico son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Ejemplo 20-13

Un conductor esférico hueco descargado posee un radio interno a y un radio externo b . En el centro de la cavidad esférica existe una carga puntual $+q$. Determinar el potencial $V(r)$ en cualquier punto, suponiendo que $V=0$ para $r=\infty$.

Como se discutió en el capítulo 19, las líneas del campo eléctrico procedentes de la carga puntual, terminan sobre la superficie interna de la corteza en $r=a$, en donde existe una carga inducida $-q$, uniformemente distribuida sobre la superficie interna. Como la corteza conductora está descargada, existirá una carga positiva $+q$ distribuida uniformemente sobre la superficie exterior en $r=b$. Tenemos, por tanto, tres cargas, una carga puntual q en el origen, una capa esférica de carga total $-q$ y radio a , y una segunda capa esférica de carga total $+q$ y radio b . Exteriormente a la esfera, el campo eléc-

trico es el mismo que si la corteza no estuviera y viene dado por $E_r = kq/r^2$. El potencial eléctrico fuera de la corteza es

$$V = \frac{kq}{r} \quad r > b$$

Como el potencial eléctrico debe ser continuo en todas partes, el potencial en $r=b$ es $V=kq/b$. Este es el valor del potencial en todos los puntos interiores al material conductor, ya que éste tiene un volumen equipotencial. Por tanto,

$$V = \frac{kq}{b} \quad a \leq r \leq b$$

Dentro de la cavidad, el campo eléctrico es de nuevo $E_r = kq/r^2$. Por consiguiente, el potencial para $r < a$ es

$$V = \frac{kq}{r} + V_0$$

en donde V_0 es una constante. Esta constante no está determinada por la condición $V=0$ para $r=\infty$, ya que r no puede ser infinito dentro de la cavidad. En su lugar, determinaremos la constante V_0 sabiendo que V debe ser continuo en $r=a$. Como $V=kq/b$ en todos los puntos interiores al conductor, tendrá este mismo valor para $r=a$. Así, en $r=a$ tenemos

$$V = \frac{kq}{a} + V_0 = \frac{kq}{b}$$

lo cual significa que

$$V_0 = \frac{kq}{b} - \frac{kq}{a}$$

Dentro de la cavidad, el potencial viene dado por

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} - \frac{kq}{a} \quad r < a$$

La figura 20-16 muestra un gráfico de V en función de r .

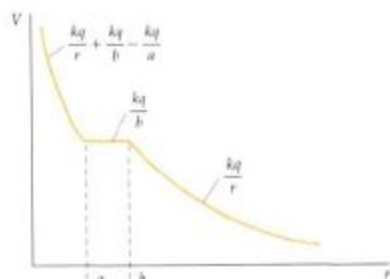


Figura 20-16 Representación gráfica del potencial eléctrico V para una carga puntual en el centro de un conductor esférico y hueco, sin carga (ejemplo 20-13), en función de la distancia r desde el centro de la cavidad. Dentro del material conductor, donde $a \leq r \leq b$, el potencial tiene el valor constante kq/b . Fuera de la corteza, el potencial es el mismo que correspondería a una carga puntual.

En general, dos conductores que están separados en el espacio no estarán al mismo potencial. La diferencia de potencial entre los conductores depende de sus formas geométricas, de su separación y de la carga neta situada sobre cada conductor. Cuando se ponen en contacto dos conductores, la carga situada en ellos se distribuye por sí misma, de modo que en equilibrio electrostático el campo eléctrico es cero en el interior de ambos conductores. En este caso los dos conductores en contacto pueden considerarse como un solo conductor. En el equilibrio ambos conductores tienen el mismo potencial. La transferencia de carga desde un conductor a otro se denomina **distribución o reparto de carga**.

Consideremos un conductor esférico de radio R que posee una carga $+Q$. Las líneas de fuerza en el exterior del conductor señalan radialmente hacia fuera y el potencial del conductor respecto al infinito es kQ/R . Si le acercamos un segundo conductor idéntico pero no cargado, el potencial y las líneas de campo variarán. Los electrones negativos situados sobre el conductor no cargado serán atraídos por la carga positiva Q , dejando que la parte más próxima del conductor no cargado tenga una carga negativa y la más alejada una carga positiva (figura 20-17). Esta separación de cargas en el conductor neutro influirá en la distribución de carga uniforme original que existía en el conductor cargado. Aunque el cálculo detallado de la distribución de cargas y de potenciales es muy complicado, en este caso podemos ver que parte de las líneas de campo que salen del conductor positivo terminarán en la carga negativa situada en la parte más próxima del conductor neutro y que un número igual de líneas saldrán por la parte más alejada de dicho conductor. Como el potencial disminuye cuando nos movemos a lo largo de una línea de campo, el conductor cargado positivamente tiene un potencial más alto que el conductor neutro.

Figura 20-17 Líneas de campo eléctrico correspondientes a un conductor esférico cargado cerca de un conductor esférico sin carga. Algunas de las líneas de fuerza que salen del conductor cargado terminan sobre la carga negativa inducida en el conductor neutro. Como estas líneas están dirigidas desde las regiones de mayor a menor potencial, el conductor neutro debe poseer un potencial inferior que el conductor cargado.

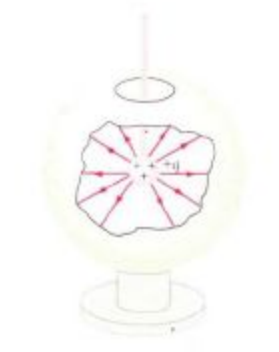
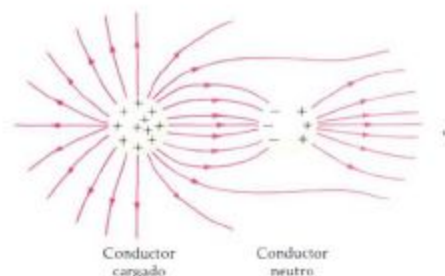


Figura 20-18 Conductor pequeño que posee una carga positiva en el interior de un conductor más grande.

Si ponemos en contacto los dos conductores, la carga positiva fluirá hacia el conductor neutro hasta que ambos conductores estén al mismo potencial. (Realmente, los electrones negativos fluyen desde el conductor neutro hacia el conductor positivo. Es algo más conveniente pensar que esto es un flujo de carga positiva en sentido contrario.) Por simetría, puesto que los conductores son idénticos, se repartirán en partes iguales la carga original. Si los conductores se separan a continuación, cada uno de ellos se llevará una carga $\frac{1}{2}Q$ y ambos estarán al mismo potencial. Coulomb utilizó este método de distribución de la carga para obtener diversas cargas que tuvieran relaciones conocidas con una carga original, en su experimento para la determinación de la ley sobre la fuerza ejercida por dos pequeñas cargas (puntuales).

En la figura 20-18 tenemos un pequeño conductor que posee una carga positiva q situado en el interior de una cavidad de otro segundo conductor más grande. En el equilibrio, el campo eléctrico es cero en el interior del material conductor de ambos conductores. Las líneas de fuerza que salen de la carga positiva q deben terminar en la superficie interna del conductor grande. Esto deberá ocurrir sin que importe qué carga está situada en la superficie exterior de dicho conduc-

tor. Independientemente de la carga situada en el conductor mayor, el conductor pequeño en la cavidad está a un potencial más alto debido a que las líneas de fuerza van desde este conductor hasta el conductor mayor. Si a continuación se conectan los conductores, por ejemplo con un alambre conductor fino, *toda* la carga situada originalmente en el conductor más pequeño fluirá hacia el otro mayor. Cuando se rompa la conexión, no habrá ninguna carga en el conductor pequeño situado en el interior de la cavidad y tampoco existirán líneas de campo en ningún punto dentro de la superficie exterior del conductor grande. La carga positiva transferida desde el conductor menor al mayor reside completamente en la superficie exterior de éste. Si ponemos más carga positiva sobre el conductor menor en la cavidad y de nuevo conectamos los conductores con un alambre fino, transferiremos de nuevo toda la carga al conductor exterior. Este procedimiento puede repetirse indefinidamente. Se utiliza este método para producir grandes potenciales en el generador de Van de Graaff, en el cual se lleva carga hacia la superficie interior de un conductor esférico muy grande mediante una cinta transportadora continua (figura 20-19). Para llevar la carga a la esfera exterior debe realizarse trabajo mediante un motor que transporta la cinta. Cuanto mayor sea la carga neta situada en el conductor exterior mayor será su potencial.

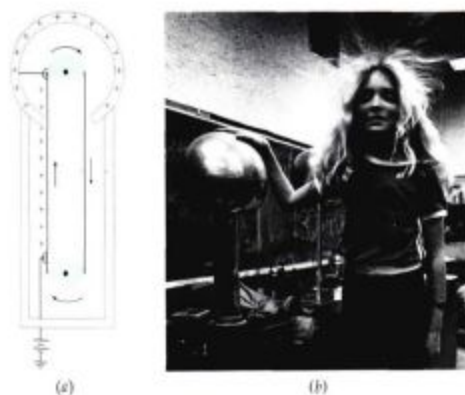
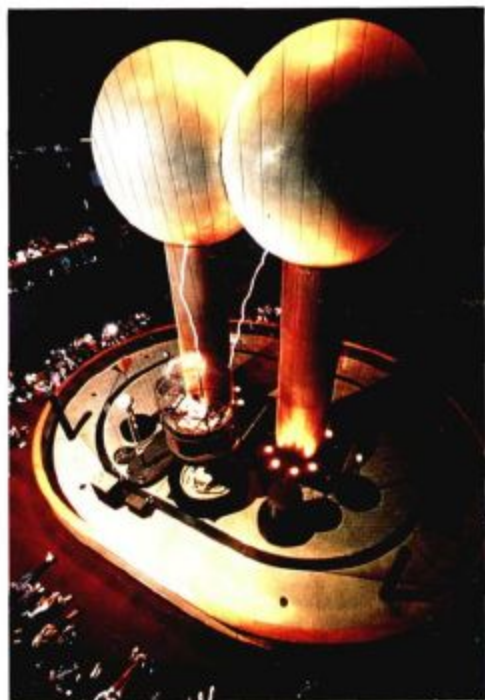


Figura 20-19 (a) Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff. La carga escapa por las puntas de un conductor afilado cerca del fondo del aparato y es captada por la cinta. En la parte superior la carga abandona la cinta y pasa a otro peine metálico conectado a un gran conductor esférico. (b) La muchacha ha sido cargada a un potencial muy elevado por contacto con un generador de demostración Van de Graaff, mientras está de pie sobre un bloque aislante. Su cabello adquiere la carga suficiente para que se repela electrostáticamente. Debe tenerse cuidado para acumular la carga gradualmente y evitar una descarga rápida, que sería dolorosa. (c) Estos grandes generadores de Van de Graaff en el museo de ciencias de Boston producen descargas espectaculares sobre la jaula de alambre conectada a tierra donde se encuentra el operador.



El máximo potencial obtenible mediante este procedimiento está limitado sólo por el hecho de que las moléculas de aire se ionizan en el interior de campos eléctricos muy altos y entonces el aire se hace conductor. Este fenómeno, conocido como **ruptura del dieléctrico**, se produce en el aire cuando la intensidad del campo eléctrico es del orden de $E_{\text{máx}} = 3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MV/m}$. La intensidad del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura del dieléctrico en un material se denomina **resistencia dieléctrica** de dicho material. Para el aire vale aproximadamente 3 MV/m . La descarga a través del aire resultante de la ruptura dieléctrica se denomina **descarga en arco**. Las descargas eléctricas que se experimentan



(a)

(a) Árbol eléctrico producido por una descarga en arco en una pieza de plástico. El plástico se carga mediante un haz de electrones que penetra unos 0,5 cm. Al desconectar el haz, se da un pequeño golpe con un punzón de metal. Los electrones salen proyectados súbitamente y ofrecen un diagrama como éste en el plástico. (b) Un árbol semejante producido por un relámpago en el aire.



(b)

al tocar el pomo metálico de una puerta después de andar sobre una alfombra en tiempo seco es un ejemplo familiar de descarga en arco. (Esto ocurre preferentemente en tiempo seco, porque el aire húmedo conduce parte de la carga adquirida al andar sobre la alfombra y no se acumula carga suficiente para alcanzar un potencial elevado.) El rayo es otro ejemplo de descarga en arco.

Ejemplo 20-14

Un conductor esférico tiene un radio de 2 m. (a) ¿Cuál es la carga máxima que puede situarse sobre la esfera sin que se produzca la ruptura dieléctrica? (b) ¿Cuál es el potencial máximo de la esfera?

(a) El campo eléctrico justo fuera del conductor que posee una carga superficial σ es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Igualando esta expresión con el campo eléctrico máximo en el aire, se obtiene para $\sigma_{\text{máx}}$

$$E_{\text{máx}} = 3 \times 10^6 \text{ N/C} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\epsilon_0}$$

La carga máxima sobre la esfera es, por tanto,

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi R^2 \sigma_{\text{máx}} \\ &= 4\pi R^2 (\epsilon_0 E_{\text{máx}}) = 4\pi (2 \text{ m})^2 (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) (3 \times 10^6 \text{ N/C}) \\ &= 1,33 \times 10^{-5} \text{ C} \end{aligned}$$

(b) El potencial máximo de la esfera portadora de esta carga es

$$\begin{aligned} V_{\text{máx}} &= \frac{kQ}{R} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1,33 \times 10^{-5} \text{ C})}{2 \text{ m}} \\ &= 5,98 \times 10^5 \text{ V} \end{aligned}$$

Cuando se coloca una carga sobre un conductor de forma no esférica, como la indicada en la figura 20-20b, el conductor será una superficie equipotencial pero la densidad de carga y el campo eléctrico justo en el exterior del conductor, variará de un punto a otro. Cerca de un punto en donde el radio de curvatura sea pequeño (A en la figura) la densidad de carga y el campo eléctrico serán grandes, mientras que próximo a un punto en donde el radio de curvatura sea grande (B en la figura) la densidad de carga y el campo eléctrico serán pequeños. Cualitativamente puede comprenderse considerando que los extremos del conductor son esferas de radios diferentes. Si llamamos σ a la densidad de carga superficial, el potencial de una esfera de radio r es

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad 20-29$$

Como el área de una esfera es $4\pi r^2$, la carga sobre la misma estará relacionada con la densidad de carga por

$$q = 4\pi r^2 \sigma$$

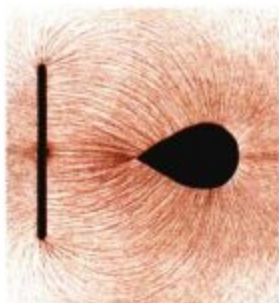
Sustituyendo esta expresión de q en la ecuación 20-29, tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2 \sigma}{r} = \frac{r\sigma}{\epsilon_0}$$

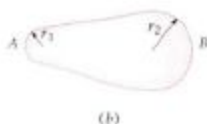
y, por tanto,

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{r} \quad 20-30$$

Como ambas «esferas» se encuentran al mismo potencial, aquella de menor radio tendrá una mayor densidad de carga superficial. Y como el campo eléctrico en la superficie de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial σ , el campo será máximo en los puntos donde el radio de curvatura del conductor es mínimo.



(a)



(b)

Figura 20-20 (a) Líneas de campo eléctrico cerca de un conductor no esférico y una lámina cuyas cargas son iguales y opuestas. Las líneas se indican mediante trocitos de hilo suspendidos en aceite. El campo eléctrico es más intenso cerca de los puntos de menor radio de curvatura como los extremos de la lámina y la parte izquierda puntiaguda del conductor. (b) Conductor no esférico. Una carga situada sobre este conductor producirá un campo eléctrico más intenso cerca del punto A, donde el radio de curvatura es pequeño, que cerca del punto B, de mayor radio de curvatura.

En el caso de un conductor de forma arbitraria, el potencial para el cual se produce la ruptura del dieléctrico depende del radio más pequeño de curvatura de una parte cualquiera del conductor. Si el conductor tiene puntas de radio de curvatura muy pequeño, la ruptura del dieléctrico se producirá con potenciales relativamente bajos. En el generador de Van de Graaff, la carga se transfiere a la cinta de transporte por conductores de bordes afilados próximos al fondo de la cinta y se extrae mediante conductores de iguales características situados en la parte alta de la misma (figura 20-19). Los pararrayos situados en lo alto de un gran edificio extraen la carga de una nube próxima antes de que el potencial de la nube alcance un valor muy grande.

Cuestión

7. Cuando una persona, después de andar sobre una alfombra un día seco, da la mano a otra persona, puede saltar una chispa de unos 2 mm. Estimar la diferencia de potencial que existe entre las dos personas antes de saltar la chispa.

Resumen

1. La diferencia de potencial $V_b - V_a$ se define como el trabajo por unidad de carga, cambiando de signo, que realiza el campo eléctrico cuando una carga testigo se desplaza del punto a al punto b :

$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

En un desplazamiento infinitesimal, esta expresión toma la forma

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Como sólo importan las diferencias de potencial eléctrico, puede elegirse el potencial nulo en cualquier punto conveniente. El potencial en un punto es la energía potencial de una carga dividida por dicha carga:

$$V = \frac{U}{q_0}$$

La unidad SI del potencial y de la diferencia de potencial es el voltio (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

En función de esta unidad, la unidad del campo eléctrico es también:

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

2. Una unidad conveniente de energía en física atómica y nuclear es el electrón voltio (eV) o energía potencial de una partícula de carga e en un punto donde el potencial es 1 voltio. El electrón voltio está relacionado con el julio por

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

3. El potencial eléctrico a una distancia r de una carga puntual q en el origen viene dado por

$$V = \frac{kq}{r} + V_0$$

en donde V_0 es el potencial a una distancia infinita de la carga. Si se elige el potencial igual a cero en el infinito, el potencial debido a la carga puntual es

$$V = \frac{kq}{r}$$

En un sistema de cargas puntuales, el potencial viene dado por

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i0}}$$

en donde el sumatorio se extiende a todas las cargas y r_{i0} es la distancia de la carga i al punto P , donde se desea calcular el potencial.

- La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una posición finita a sus posiciones finales.
- El potencial correspondiente a una distribución continua de carga se obtiene extendiendo la integral a toda la distribución:

$$V = \int \frac{k dq}{r}$$

Esta expresión puede utilizarse sólo si la distribución de carga está contenida en un volumen finito, de modo que el potencial puede considerarse nulo en el infinito.

- El campo eléctrico señala en la dirección de la máxima disminución del potencial. El componente de E en la dirección de un desplazamiento $d\ell$ está relacionado con el potencial por

$$E_r = - \frac{dV}{dr}$$

Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuya magnitud es igual a la derivada de dicha función respecto a la distancia en la dirección indicada se llama gradiente de la función. El campo eléctrico E es el gradiente negativo del potencial V . Con notación vectorial, el gradiente de V se escribe ∇V . Así

$$\mathbf{E} = - \nabla V$$

En toda distribución de carga esféricamente simétrica, el potencial sólo varía con r y el campo eléctrico está relacionado con el potencial por

$$\mathbf{E} = - \nabla V = - \frac{dV}{dr} \hat{r}$$

En coordenadas rectangulares, el campo eléctrico está relacionado con el potencial por

$$\mathbf{E} = - \nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

- En un conductor de forma arbitraria, la densidad de carga superficial σ es máxima en los puntos donde el radio de curvatura es mínimo.
- La cantidad de carga que puede depositarse sobre un conductor viene limitada por el hecho de que las moléculas de aire se ionizan en campos eléctricos muy intensos y el aire se hace conductor—fenómeno llamado ruptura dieléctrica, que tiene lugar en el aire para intensidades del campo eléctrico de $E_{\text{max}} \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MV/m}$. La intensidad del campo eléctrico para la cual tiene lugar la ruptura dieléctrica en un material, se denomina resistencia dieléctrica de este material. La descarga resultante a través del aire conductor se llama descarga en arco.

Electrostática y xerografía

Richard Zallen
Virginia Polytechnic Institute and State University

Existen muchas aplicaciones importantes y tecnológicamente provechosas que pueden incluirse en un estudio acerca del empleo de los fenómenos electrostáticos. Por ejemplo, un sistema para eliminar la contaminación del aire, de gran interés, es el precipitador electrostático, que desde años atrás hace habitables los terrenos próximos a las fábricas de cemento y a las industrias donde se procesan minerales; este dispositivo parece ser capaz de extraer más del 99 por ciento de cenizas y polvos de los gases procedentes de las salidas de las chimeneas de las centrales térmicas en las que se quema carbón. La idea básica de esta técnica antipolución de gran eficacia se indica en la figura 1. La pared exterior de un tubo metálico vertical está conectada a tierra, mientras que un conductor en forma de alambre situado en el centro del tubo se mantiene a una tensión negativa muy grande. Con esta geometría concéntrica se establece un campo eléctrico no uniforme, cuyas líneas de fuerza están dirigidas radialmente hacia el interior, es decir, hacia el

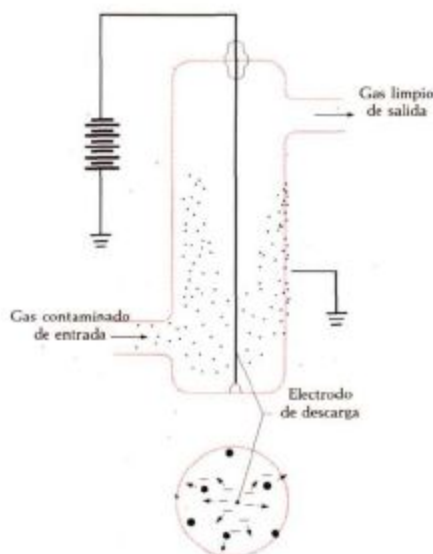


Figura 1 Diagrama esquemático del empleo de una descarga en corona en un precipitador electrostático.



Richard Zallen realizó sus estudios en Madison H.S., en Brooklyn, Rensselaer (B.S.) y en Harvard (Ph.D.). Es miembro de la American Physical Society desde 1976. Antes de asociarse al Virginia Tech en 1983 trabajó durante 17 años

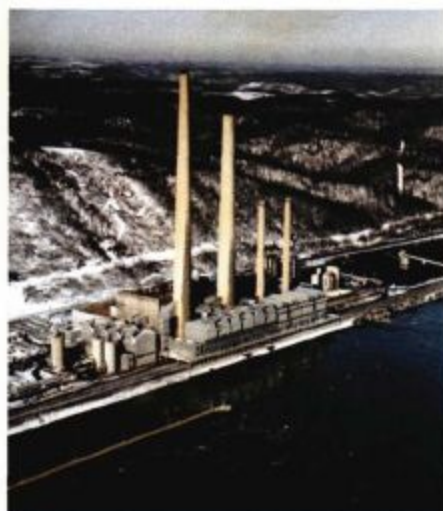
en los laboratorios de investigación Xerox en Rochester, Nueva York, donde lógicamente se especializó en «Electrostática y Xerografía». Está casado y tiene dos hijos.

Durante su profesión como físico, el Profesor Zallen ha realizado estudios experimentales sobre interacción de la luz con sólidos, tales como semiconductores, cristales moleculares y sólidos amorfos. Más recientemente ha trabajado en sistemas sol-gel y semiconductores bombardeados con iones.

El profesor Zallen es probablemente más conocido por su libro *The Physics of Amorphous Solids*, Wiley, New York, 1983.

electrodo de alambre negativo. Cerca del alambre del campo, adquiere unos valores enormes, suficientemente grandes para producir una ruptura eléctrica del aire y la mezcla suave normal de moléculas gaseosas neutras es sustituida por un torbellino de electrones libres e iones positivos. Los electrones procedentes de esta descarga en corona son expulsados hacia fuera por el campo eléctrico. La mayoría de ellos se unen rápidamente a las moléculas de oxígeno produciendo iones O_2^- negativos que también se ven acelerados hacia fuera. Cuando esta corriente de iones pasa cerca del gas de salida caliente procedente de la chimenea que sube por el conducto, las pequeñas partículas que transporta dicho gas resultan cargadas al capturar los iones y se ven empujadas por el campo hacia la pared exterior. Si las partículas nocivas son sólidas, se provoca periódicamente una vibración del conducto para que caigan en una tolva; pero si son líquidas, el residuo simplemente desciende por la pared y se recoge en la parte inferior.

Además de la precipitación electrostática, existen otros ejemplos técnicos de utilización de las propiedades electrostáticas entre los que se pueden incluir el recubrimiento electrostático con pinturas de «spray» y la separación electrostática de mezclas granulares utilizada para la separación de partículas minerales, de los



En las estructuras grises semejantes a cajas, al pie de las chimeneas, se alojan precipitadores electrostáticos.

granos de trigo de otros productos que lo acompañan e incluso los excrementos de roedores del arroz. Sin embargo, la aplicación que constituye el objetivo principal de este ensayo es la xerografía, que es el sistema más ampliamente utilizado de reproducción electrostática o electrofotografía. Este empleo de la electrostática es muy conocido debido al gran número de personas que tienen ocasión de utilizar máquinas de reproducir documentos en oficinas, bibliotecas y colegios y también proporciona un empleo claro de un dispositivo que utiliza una secuencia de distintos fenómenos electrostáticos.

El proceso xerográfico fue inventado en 1937 por Chester Carlson. El término xerografía, literalmente «escritura en seco», fue realmente adoptado un poco después para resaltar la diferencia respecto a los procesos químicos húmedos. El concepto innovador de Carlson no encontró una aceptación inicial y sólo se obtuvo una realización práctica de su idea después de que una pequeña compañía arriesgase su futuro en sus intensos esfuerzos para desarrollar el proceso.

En la figura 2 se ilustran cuatro de las etapas principales que intervienen en la xerografía. Con objeto de dar una mayor claridad al proceso, se ha simplificado habiéndose suprimido diversos detalles. El proceso de

obtención de imágenes electrostáticas tiene lugar sobre una lámina delgada de un material fotoconductor que está apoyado sobre un soporte metálico conectado a tierra. Un fotoconductor es un sólido que es buen aislante en la oscuridad pero que resulta capaz de conducir la corriente eléctrica cuando se expone a la luz. En la oscuridad, se deposita una carga electrostática uniforme sobre la superficie del fotoconductor. Esta etapa de carga (figura 2a) se realiza mediante una descarga positiva en corona que rodea un alambre fino mantenido a unos +5000 V aproximadamente. Esta corona (una versión en miniatura pero de signo opuesto a la corona del precipitador de gran intensidad de la figura 1) se hace pasar sobre la superficie fotoconductora, esparciendo iones positivos sobre ella y cargándola a un potencial de +1000 V. Puesto que la carga es libre para

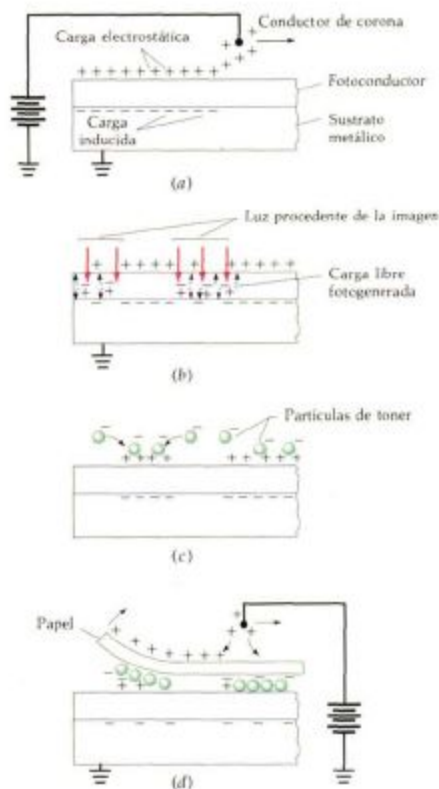


Figura 2 Etapas en el proceso xerográfico: (a) carga, (b) exposición, (c) revelado y (d) transferencia.

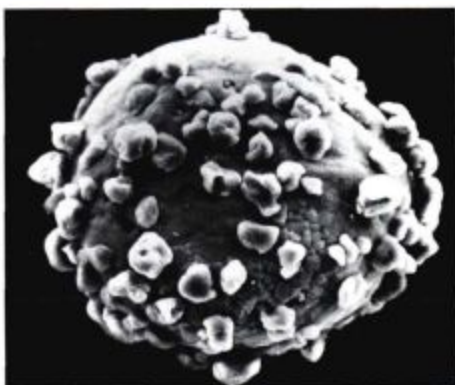
Continúa

huir dentro del soporte de metal conectado a masa, se desarrolla una carga igual y opuesta inducida en la interfase metal- fotoconductor. En la oscuridad el fotoconductor no contiene ninguna carga móvil y la gran diferencia de potencial persiste a través de esta capa de dieléctrico, que sólo tiene 0,005 cm de espesor.

A continuación la placa fotoconductor se expone a la luz en forma de una imagen reflejada en el documento que ha de copiarse. Lo que ocurre a continuación se indica en la figura 2b. Donde la luz incide sobre el fotoconductor, son absorbidos cuantos luminosos (fotones) y se crean parejas de cargas móviles. Cada pareja fotogenerada se compone de una carga negativa (un electrón) y una carga positiva (un hueco, es decir, un electrón perdido). La fotogeneración de esta carga libre depende no sólo del fotoconductor utilizado, sino de la longitud de onda e intensidad de la luz incidente y además del campo eléctrico presente. Este campo de gran valor ($1000 \text{ V}/0,005 \text{ cm} = 2 \times 10^5 \text{ V/cm} = 2 \times 10^7 \text{ V/m}$) ayuda a separar las parejas mutuamente atractivas electrón-hueco, de modo que quedan en libertad para moverse por separado. Los electrones se mueven entonces bajo la influencia del campo hacia la superficie, en donde neutralizan a las cargas positivas, mientras que los huecos se mueven hacia la interfase fotoconductor-sustrato y neutralizan allí las cargas negativas. En los puntos donde una luz intensa incide sobre el fotoconductor, la fase o etapa de carga queda totalmente eliminada; en donde incide luz débil, la carga se ve parcialmente reducida; en donde no incide ninguna luz, permanece la carga electrostática original sobre la superficie. La tarea crítica de convertir una imagen óptica en una imagen electrostática, que ahora queda registrada sobre la lámina, se ha completado. Esta imagen latente se compone de una distribución de potencial electrostático, que replica el esquema de luz y oscuridad del documento original.

Para desarrollar la imagen electrostática, se ponen en contacto con la lámina unas partículas pigmentadas finas con carga negativa. Estas *partículas de toner* son atraídas hacia las regiones superficiales con carga positiva, como se ve en la figura 2c, y entonces aparece una imagen visible. El toner se transfiere a continuación (figura 2d) a una hoja de papel que ha sido cargada positivamente con objeto de que pueda atraerlas. Un breve calentamiento del papel funde el toner y lo pega produciendo una fotocopia permanente lisa para su utilización.

Finalmente, para preparar la lámina fotoconductor en el caso de una repetición del proceso, cualquier



Partículas de toner, atraídas electrostáticamente por una partícula portadora mayor.

partícula de toner que permanece en la superficie se limpia mecánicamente y se borra la imagen electrostática residual, es decir, se descarga inundándola de luz. El fotoconductor está ahora listo para un nuevo ciclo, partiendo de la etapa de la carga. En las fotocopiadoras de alta velocidad la capa fotoconductor frecuentemente tiene la forma de un tambor o cinta de movimiento continuo alrededor de cuyo perímetro están situados ciertos dispositivos para realizar las diversas funciones de la figura 2. La velocidad de la tecnología de impresión xerográfica es, actualmente, del orden de algunas copias por segundo.*

* Para una información adicional sobre los procesos electrostáticos en xerografía, consultar a J. H. Dessauer y H. E. Clark (editores) *Xerography and Related Processes*, Focal Press, New York, 1965; R. M. Schaffert, *Electrophotography*, rev. ed. Focal Press, N.Y., 1973. También se analizan otras modernas aplicaciones de la electrostática en el artículo de A. D. Moore, *Scientific American*, marzo 1972.

Sugerencias bibliográficas

Moore, A.D.: «Electrostatics», *Scientific American*, marzo 1972, pág. 46.

Este artículo describe algunos usos modernos de la electrostática, incluyendo la precipitación de residuos industriales transportados por el aire, separación de sólidos granulares, por ejemplo minerales, pulverización eficaz de pinturas y reproducción xerográfica.

Rose, Peter H., y Andrew B. Wittkower: «Tandem Van de Graaff Accelerators», *Scientific American*, agosto 1970, pág. 24.

Estas máquinas aceleran partículas cargadas entre terminales que se mantienen a diferencias de potencial de millones de voltios.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer los siguientes conocimientos:

1. Definir el potencial eléctrico y discutir su relación con el campo eléctrico.
2. Calcular la diferencia de potencial entre dos puntos, conocido el campo eléctrico de la región.
3. Saber dibujar las superficies equipotenciales, dado un diagrama de líneas del campo eléctrico.
4. Calcular el potencial eléctrico en diversas distribuciones de carga.
5. Calcular el campo eléctrico a partir de la función potencial eléctrico.
6. Discutir los fenómenos de distribución de carga y ruptura dieléctrica.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Diferencia de potencial
Potencial eléctrico
Voltio
Voltaje
Electrón voltio
Energía potencial electrostática
Gradiente
Superficie equipotencial

Distribución de carga
Ruptura dieléctrica
Resistencia dieléctrica
Descarga en arco

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. Si el campo eléctrico es cero en alguna región del espacio, el potencial eléctrico debe ser también nulo en dicha región.
2. Si el potencial eléctrico es cero en alguna región del espacio, el campo eléctrico debe ser también cero en dicha región.
3. Si el potencial eléctrico es cero en un punto, el campo debe ser también cero en dicho punto.
4. Las líneas de campo eléctrico señalan hacia las regiones de potencial más bajo.
5. Puede escogerse el valor del potencial eléctrico de modo que sea cero en cualquier punto conveniente del espacio.
6. En electrostática, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.
7. La ruptura dieléctrica tiene lugar en el aire cuando el potencial es de 3×10^6 V.

Problemas

Nivel I

20-1 Potencial eléctrico y diferencia de potencial

1. Un campo eléctrico uniforme de valor 2 kN/C está en la dirección x . Se deja en libertad una carga puntual $Q=3 \mu\text{C}$ inicialmente en reposo en el origen. (a) ¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando esté en $x=4 \text{ m}$? (b) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde $x=0$ hasta $x=4 \text{ m}$? (c) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V(4 \text{ m}) - V(0)$? Calcular el potencial $V(x)$ si se toma $V(x)$ como (d) cero para $x=0$ (e) 4 kV para $x=0$, y (f) cero para $x=1 \text{ m}$.

2. Un plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma = +2.5 \mu\text{C/m}^2$ se encuentra en el plano yz . (a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico expresada en newtons por coulombio? ¿En voltios por metro? ¿Cuál es la dirección de \mathbf{E} para valores positivos de x ? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_a - V_b$ cuando el punto b se encuentra en $x=20 \text{ cm}$ y el punto a está en $x=50 \text{ cm}$? (c) ¿Cuánto trabajo se necesita

para que un agente externo desplace una carga testigo $q_e = +1.5 \text{ nC}$ del punto a al b ?

3. Un campo eléctrico uniforme tiene el sentido de las x negativas. Los puntos a y b están en el eje x , a en $x=2 \text{ m}$ y b en $x=6 \text{ m}$. (a) ¿Es positiva o negativa la diferencia de potencial $V_a - V_b$? (b) Si el valor de $V_a - V_b$ es 10^3 V , ¿cuál es el valor del campo eléctrico E ?

4. Dos placas conductoras paralelas poseen densidades de carga iguales y opuestas de modo que el campo eléctrico entre ellas es aproximadamente uniforme. La diferencia de potencial entre las placas es 500 V y están separadas 10 cm . Se deja en libertad un electrón desde el reposo en la placa negativa. (a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico entre las placas? ¿Cuál placa está a potencial más elevado, la positiva o la negativa? (b) Hallar el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando el electrón se mueve desde la placa negativa a la positiva. Expresar la respuesta en electrón voltios y en julios. (c) ¿Cuál es la variación de energía potencial del electrón cuando

se mueve desde la placa negativa hasta la positiva? ¿Cuál es su energía cinética cuando llega a la placa positiva?

5. Un campo eléctrico viene dado por $E = ax \hat{i}$, expresándose E en newtons por coulombio, x en metros y siendo a una constante positiva. (a) ¿Cuáles son las unidades SI de a ? (b) ¿Cuánto trabajo se realiza por este campo sobre una carga puntual positiva q_0 cuando se mueve la carga desde el origen hasta un punto cualquiera x ? (c) Hallar la función potencial $V(x)$, tal que $V=0$ en $x=0$.

20-2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

6. Cuatro cargas puntuales de $2 \mu\text{C}$ se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 4 m de lado. Calcular el potencial en el centro del cuadrado (tomando como potencial cero el correspondiente al infinito) si (a) todas las cargas son positivas, (b) tres de las cargas son positivas y la otra negativa, (c) dos son positivas y las otras dos negativas.

7. Tres cargas puntuales están en el eje x , q_1 en el origen, q_2 en $x=3 \text{ m}$ y q_3 en $x=6 \text{ m}$. Calcular el potencial en el punto $x=0$, $y=3 \text{ m}$ si (a) $q_1=q_2=q_3=2 \mu\text{C}$, (b) $q_1=q_2=2 \mu\text{C}$ y $q_3=-2 \mu\text{C}$, (c) $q_1=q_2=2 \mu\text{C}$ y $q_3=-2 \mu\text{C}$.

8. Los puntos A , B y C están en los vértices de un triángulo equilátero de 3 m de lado. Cargas iguales positivas de $2 \mu\text{C}$ están en A y B . (a) ¿Cuál es el potencial del punto C ? (b) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de $5 \mu\text{C}$ desde el infinito hasta el punto C si se mantienen fijas las otras cargas. (c) Responder a las partes (a) y (b) si la carga situada en B se sustituye por una carga de $-2 \mu\text{C}$.

9. Una esfera de radio 60 cm tiene su centro en el origen. A lo largo del ecuador de esta esfera se sitúan cargas iguales de $3 \mu\text{C}$ a intervalos de 60° . (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen? (b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en su polo norte?

20-3 Energía potencial electrostática

10. Una carga positiva de valor $2 \mu\text{C}$ está en el origen. (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4 m del origen respecto al valor $V=0$ en el infinito. (b) ¿Cuánto trabajo debe ser realizado por un agente exterior para llevar la carga de $3 \mu\text{C}$ desde el infinito hasta $r=4 \text{ m}$ admitiendo que se mantiene fija en el origen la carga de $2 \mu\text{C}$? (c) ¿Cuánto trabajo deberá ser realizado por un agente exterior para llevar la carga de $2 \mu\text{C}$ desde el infinito hasta el origen si la carga de $3 \mu\text{C}$ se coloca primeramente en $r=4 \text{ m}$ y luego se mantiene fija?

11. Determinar la energía potencial electrostática para la distribución de carga descrita en (a) problema 6a, (b) problema 6b, (c) problema 6c con cargas iguales en los vértices opuestos y (d) problema 6c con cargas distintas en vértices opuestos.

12. Calcular la energía potencial electrostática para cada una de las distribuciones de carga del problema 7.

13. Tres cargas puntuales, q_1 , q_2 y q_3 , están en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2.5 m . Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si (a) $q_1=q_2=q_3=4.2 \mu\text{C}$, (b) $q_1=q_2=4.2 \mu\text{C}$ y $q_3=-4.2 \mu\text{C}$, (c) $q_1=q_2=-4.2 \mu\text{C}$ y $q_3=0+4.2 \mu\text{C}$.

20-4 Cálculo del potencial eléctrico en distribuciones continuas de carga

14. (a) Dibujar $V(x)$ en función de x para el anillo uniformemente cargado en el plano yz dado en la ecuación 20-13. (b) ¿En qué punto es máximo $V(x)$? (c) ¿Cuánto vale E_x en este punto?

15. Una carga de $q=+10^{-8} \text{ C}$ está distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de 12 cm de radio. (a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo en el exterior de la corteza y justo en el interior de la misma? (b) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico justo en el exterior y justo en el interior de la corteza? (c) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el parte de la corteza? (d) ¿Cuál es el campo eléctrico en dicho punto?

16. Un disco de radio $6,25 \text{ cm}$ posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma=7,5 \text{ nC/m}^2$. Determinar el potencial sobre el eje del disco a una distancia (a) $0,5 \text{ cm}$, (b) $3,0 \text{ cm}$ y (c) $6,25 \text{ cm}$ del disco.

17. Una carga lineal infinita de densidad lineal $\lambda=1,5 \mu\text{C/m}$ se encuentra sobre el eje x . Determinar el potencial a distancias de (a) $2,0 \text{ m}$, (b) $4,0 \text{ m}$ y (c) 12 m de la línea, suponiendo que $V=0$ a $2,5 \text{ m}$.

20-5 Campo eléctrico y potencial

18. Dos cargas positivas $+q$ están en el eje y en $y=+a$ y $y=-a$. (a) Hallar el potencial V para todos los puntos situados en el eje x . (b) Utilizar el resultado de la parte (a) para determinar el campo eléctrico en cualquier punto del eje x .

19. Una carga puntual $q=3,00 \mu\text{C}$ se encuentra en el origen. (a) Determinar el potencial V sobre el eje x en $x=3,00 \text{ m}$ y en $x=3,01 \text{ m}$. (b) ¿Crece o decrece el potencial cuando x crece? Calcular $-\Delta V/\Delta x$, siendo ΔV la variación de potencial desde $x=3,00 \text{ m}$ a $x=3,01 \text{ m}$ y $\Delta x=0,01 \text{ m}$. (c) Determinar el campo eléctrico en $x=3,00 \text{ m}$ y comparar su valor con el de $-\Delta V/\Delta x$ hallado en la parte (b). (d) Determinar el potencial (con tres cifras significativas) en el punto $x=3,00 \text{ m}$, $y=0,01 \text{ m}$ y comparar el resultado con el potencial sobre el eje x en $x=3,00 \text{ m}$. Discutir el significado de este resultado.

20. Una carga de $+3,00 \mu\text{C}$ está en el origen y otra de $-3,00 \mu\text{C}$ está en el eje x en $x=6,00 \text{ m}$. (a) Hallar el potencial en el eje x en el punto $x=3,00 \text{ m}$. (b) Hallar el campo eléctrico en el eje x en $x=3,00 \text{ m}$. (c) Hallar el potencial en el eje x en $x=3,01 \text{ m}$ y calcular $-\Delta V/\Delta x$, siendo ΔV la variación de potencial desde $x=3,00 \text{ m}$ hasta $x=3,01 \text{ m}$ y $\Delta x=0,01 \text{ m}$. Comparar el resultado con la respuesta de la parte (b).

21. En la expresión siguiente, V está en voltios y x en metros. Hallar E_x cuando (a) $V(x)=2000+3000x$; (b) $V(x)=4000+3000x$; (c) $V(x)=2000-3000x$; y (d) $V(x)=-2000$, independiente de x .

22. El potencial eléctrico en una cierta región del espacio viene dado por $V(x)=C_1+C_2x^2$, estando V en voltios, x en metros y siendo C_1 y C_2 constantes positivas. Hallar el campo eléctrico E en esta región. ¿En qué dirección está E ?

23. Una hoja infinita de carga tiene una densidad superficial de $3,5 \mu\text{C/m}^2$ de carga. ¿A qué distancia están entre sí los planos equipotenciales cuya diferencia de potencial es 100 V ?

24. Una carga puntual $q=-\frac{1}{3} \times 10^{-8} \text{ C}$ está en el origen. Considerando que el potencial es cero para $r=\infty$, situar las superficies equipotenciales a intervalos de 20 V desde 20 hasta 100 V y hacer un esquema a escala. ¿Están igualmente separadas estas superficies?

20-6 Superficies equipotenciales, distribución de carga y ruptura dieléctrica

25. (a) Determinar la carga neta máxima que puede situarse sobre un conductor esférico de radio 16 cm antes de que se produzca la ruptura dieléctrica en el aire. (b) ¿Cuál es el potencial de la esfera cuando posee esta carga máxima?

26. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales en puntos próximos y alejados del conductor indicado en la figura 20-20b suponiendo que el conductor transporte cierta carga Q .

27. Determinar la densidad de carga superficial máxima $\sigma_{\text{máx}}$ que puede existir sobre un conductor antes de que ocurra la ruptura dieléctrica del aire.

28. Si una esfera conductora ha de cargarse hasta un potencial de 10 000 V, ¿cuál es el radio más pequeño posible de la esfera, tal que el campo eléctrico no exceda la resistencia dieléctrica del aire?

Nivel II

29. Suponer que un generador de Van de Graaff tiene una diferencia de potencial de 1,25 MV entre la cinta y la esfera exterior y que la carga se suministra a una velocidad de 200 $\mu\text{C/s}$. ¿Qué potencia mínima se necesita para accionar la cinta móvil?

30. Una esfera uniformemente cargada tiene un potencial de 450 V en su superficie. A una distancia radial de 20 cm de esta superficie, el potencial es 150 V. ¿Cuál es el radio de la esfera y cuál es la carga de esta?

31. Se disponen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado centrado en el origen como se indica a continuación: q en $(-a, a)$; $2q$ en (a, a) ; $-3q$ en $(a, -a)$; y $6q$ en $(-a, -a)$. Calcular (a) el campo eléctrico en el origen y (b) el potencial en el origen. (c) Se sitúa una quinta carga $+q$ en el origen y se libera desde el reposo. Calcular su velocidad cuando se encuentre a una gran distancia del origen.

32. Dos cargas positivas $+q$ están sobre el eje x en $x = +a$ y $x = -a$. (a) Determinar el potencial $V(x)$ en función de x para los puntos del eje x . (b) Dibujar $V(x)$ en función de x . (c) ¿Cuál es el significado del mínimo que aparece en dicha curva?

33. Un campo eléctrico viene dado por $E_x = 2,0 x^2$ kN/C. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos del eje x en $x = 1$ m y $x = 2$ m.

34. Consideremos dos láminas paralelas infinitas de carga, una en el plano yz y la otra a una distancia $x = a$. (a) Hallar el potencial en todos los puntos del espacio, con $V = 0$ en $x = 0$ si las láminas llevan una densidad de carga positiva igual $+\sigma$. (b) Hacer lo mismo si las densidades de carga son iguales y opuestas, siendo la lámina del plano yz la que tiene la densidad positiva.

35. En un acelerador de Van de Graaff, se liberan los protones desde el reposo a un potencial de 5 MV y se desplazan a través de una región sometida al vacío con potencial cero. (a) Calcular la velocidad de los protones de 5 MeV. (b) Si la variación de potencial transcurre a lo largo de una distancia de 2,0 m, calcular el campo eléctrico acelerador.

36. Dos cargas positivas iguales están separadas por una pequeña distancia. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales de este sistema.

37. Cuando el uranio ^{235}U captura un neutrón, se descompone en dos núcleos (y emite varios neutrones que pueden producir la división de otros núcleos de uranio). Admitir que los productos de fisión son núcleos con cargas igual a $+46e$ y que estos núcleos están en reposo justo después de la fisión y están separados en el doble de su radio $2R = 1,3 \times 10^{-14}$ m. (a) Utilizando $U = kq_1q_2/2R$, calcular la energía potencial

electrostática de los fragmentos de fisión. Este valor es aproximadamente el de la energía liberada por fisión. (b) ¿Cuántas fisiones por segundo se necesitan para producir 1 MW de potencia en un reactor?

38. El ^{210}Po radiactivo emite partículas alfa de carga $+2e$ y energía 5,30 MeV. Admitir que en el instante después de que se forma la partícula alfa y escapa del núcleo, está a una distancia R del centro del núcleo hijo ^{206}Pb cuya carga es $+82e$. Calcular R haciendo la energía potencial electrostática de las dos partículas a esta separación igual a 5,30 MeV.

39. Un cañón de electrones dispara estas partículas contra la pantalla de un tubo de televisión. Los electrones parten del reposo y se aceleran dentro de una diferencia de potencial de 30 000 V. ¿Cuál es la energía de los electrones al chocar contra la pantalla, expresada (a) en electrón voltios y (b) en julios. (c) ¿Cuál es la velocidad de los electrones al chocar con la pantalla del tubo de televisión?

40. Dos grandes planos no conductores paralelos poseen unas densidades de carga iguales y opuestas de valor σ . Tienen un área A y están separados por una distancia d . (a) Calcular la diferencia de potencial entre los planos. (b) Entre los dos planos se inserta un tercer plano de la misma área y espesor a que no posee una carga neta. Calcular la diferencia de potencial entre los dos planos originales y dibujar las líneas de E en la región comprendida entre ambos.

41. Dos conductores en forma de corteza esférica concéntrica poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la corteza exterior tiene un radio b y carga $-q$. Hallar la diferencia de potencial entre las cortezas, $V_a - V_b$.

42. Una corteza conductora esférica de radio interior b y radio exterior c rodea concéntricamente una pequeña esfera metálica de radio $a < b$. La esfera metálica tiene una carga positiva Q . La carga total sobre la corteza esférica conductora es $-Q$. (a) ¿Cuál es el potencial de la corteza esférica? (b) ¿Cuál es el potencial de la esfera metálica?

43. Dos conductores muy largos formando una corteza cilíndrica coaxial poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la exterior tiene un radio b y carga $-q$. La longitud de cada corteza cilíndrica es L . Hallar la diferencia de potencial entre las dos capas de la corteza.

44. Los centros de dos esferas metálicas de radio 10 cm están separados 50 cm sobre el eje x . Las esferas son inicialmente neutras, pero una carga Q se transfiere de una esfera a la otra, creando una diferencia de potencial entre las esferas de 100 V. Un protón se libera desde el reposo en la superficie de la esfera positivamente cargada y se mueve hacia la esfera cargada negativamente. ¿A qué velocidad choca contra la esfera negativa?

45. Se sitúa una carga puntual de $+3e$ en el origen y una segunda carga de $-2e$ en el eje x a la distancia $x = a$. (a) Dibujar la función potencial $V(x)$ en función de x para todo valor de x . (b) ¿Para qué punto o puntos es $V(x)$ igual a cero? (c) ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para llevar una tercera carga $+e$ al punto $x = \frac{1}{2}a$ sobre el eje x ?

46. Tres cargas iguales se encuentran sobre el plano xy . Dos de ellas están sobre el eje y en $y = -a$ e $y = +a$, y la tercera está sobre el eje x en $x = a$. (a) ¿Cuál es el potencial $V(x)$ debido a estas cargas en un punto sobre el eje x ? (b) Determinar E_x a lo largo del eje x a partir de la función potencial $V(x)$.

Comprobar las respuestas de (a) y (b) en el origen y en $x = \infty$ para ver si se obtienen los resultados esperados.

47. Una carga q está en $x=0$ y otra carga $-3q$ está en $x=1$ m. (a) Determinar $V(x)$ para un punto cualquiera del eje x . (b) Determinar los puntos sobre el eje x en los cuales el potencial es nulo. (c) ¿Cuál es el campo eléctrico en estos puntos? (d) Dibujar $V(x)$ en función de x .

48. Una barra de longitud L posee una carga Q distribuida uniformemente a lo largo de su longitud. La barra yace a lo largo del eje x con su centro en el origen. (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en función de la posición x a lo largo del eje x para $x > L/2$? (b) Demostrar que para $x \gg L/2$ el resultado se reduce al debido a una carga puntual Q .

49. Una carga de 2 nC está uniformemente distribuida alrededor de un anillo de radio 10 cm que tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x . Una carga puntual de 1 nC está localizada en $x=50$ cm. Determinar el trabajo necesario para desplazar la carga puntual al origen en julios y en electron voltios.

50. Un anillo cargado uniformemente con una carga total de 100 μ C y un radio de $0,1$ m yace en el plano yz con su centro en el origen. Una regla de metro tiene una carga puntual de 10 μ C en el extremo marcado con el 0 y una carga puntual de 20 μ C en el extremo marcado con 100 cm. ¿Qué trabajo hay que realizar para transportar la regla de metro desde una distancia muy grande hasta una posición x a lo largo del eje x con el extremo marcado con 0 en $x=0,2$ m y el otro extremo en $x=1,2$ m?

51. Cuatro cargas iguales Q se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado L . Las cargas se dejan en libertad de una en una siguiendo el sentido de las agujas del reloj alrededor del cuadrado. Se deja que cada carga alcance su velocidad final a una gran distancia del cuadrado antes de liberar la siguiente carga. ¿Cuál es la energía cinética final de (a) la primera carga liberada, (b) la segunda, (c) la tercera y (d) la cuarta?

52. Dos esferas metálicas idénticas sin carga se conectan mediante un alambre, como indica la figura 20-21a. Dos esferas semejantes con cargas iguales, pero opuestas, se sitúan en las posiciones indicadas en la figura 20-21b. (a) Dibujar las líneas de campo eléctrico entre las esferas 1 y 3 y entre las esferas 2 y 4. (b) ¿Qué podemos decir de los potenciales V_1 , V_2 , V_3 y V_4 de las esferas? (c) Si las esferas 3 y 4 están conectadas por un alambre, demostrar que la carga final sobre cada una de ellas sería cero.

Figura 20-21
Problema 52.



53. Tres grandes placas conductoras paralelas entre sí tienen conectadas la cara exterior por medio de un alambre. La placa del medio está aislada y posee una densidad de carga σ_1 sobre la superficie superior y σ_2 sobre la superficie inferior,

siendo $\sigma_1 + \sigma_2 = 12$ μ C/m². Esta placa dista 1 mm de la placa superior y 3 mm de la placa del fondo. Determinar σ_1 y σ_2 .

54. Demostrar que cuando R es mucho menor que x , el potencial sobre el eje de un disco de carga se aproxima a kQ/x , en donde $Q = \sigma\pi R^2$ es la carga total sobre el disco. *Indicación:* Escribir $(x^2 + R^2)^{-1/2} = x^{-1}(1 + R^2/x^2)^{-1/2}$ y utilizar la expresión del binomio.

55. Un anillo cargado uniformemente, de radio a y carga Q , se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x . Una carga puntual Q se sitúa sobre el eje x en $x=2a$. (a) Determinar el potencial en cualquier punto del eje x debido a la carga total $Q+Q$. (b) Determinar el campo eléctrico para cualquier punto sobre el eje x .

Nivel III

56. Un potencial viene dado por

$$V(x, y, z) = \frac{kQ}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$$

(a) Determinar los componentes E_x , E_y , E_z del campo eléctrico por derivación de esta función potencial. (b) ¿Qué simple distribución de carga puede ser responsable de este potencial?

57. El potencial eléctrico en una región del espacio viene dado por

$$V = (2 \text{ V/m}^2)x^2 + (1 \text{ V/m}^3)yz$$

Determinar el campo eléctrico en el punto $x=2$ m, $y=1$ m, $z=2$ m.

58. Una carga puntual q_1 está en el origen y una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x=a$, como en el ejemplo 20-5. (a) Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje x a partir de la función potencial dada en dicho ejemplo. (b) Determinar el potencial en un punto cualquiera del eje y . (c) Utilizar el resultado de (b) para calcular el componente y del campo eléctrico sobre el eje y . Comparar el resultado así obtenido con el que resulta directamente de la ley de Coulomb.

59. Consideremos una bola de densidad volumétrica de carga uniforme de radio R y carga total Q . (Este es un modelo de un protón.) El centro de la bola está en el origen. Utilizar el componente radial del campo eléctrico E_r deducido mediante la ley de Gauss para calcular el potencial $V(r)$ suponiendo que $V=0$ para $r=\infty$ en (a) cualquier punto exterior a la carga, $r \geq R$, y en (b) cualquier punto interior a la carga, $r \leq R$. (Recuérdese que V debe ser una función continua en $r=R$.) (c) ¿Cuál es el potencial en el origen? (d) Dibujar V en función de r .

60. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno el electrón se mueve en una órbita circular de radio r alrededor del protón. (a) Hallar una expresión de la energía cinética del electrón en función de r haciendo que la fuerza que actúa sobre el electrón (dada por la ley de Coulomb) sea igual a ma , siendo a la aceleración centrípeta. Demostrar que a una distancia cualquiera r la energía cinética es la mitad del valor de la energía potencial. (b) Calcular $\frac{1}{2}mv^2$, U , y la energía total $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ en electron voltios para $r = 0,529 \times 10^{-10}$ m, radio de la órbita del electrón en el hidrógeno. La energía $|E|$ que debe suministrarse al átomo de hidrógeno para extraer el electrón se llama energía de ionización.

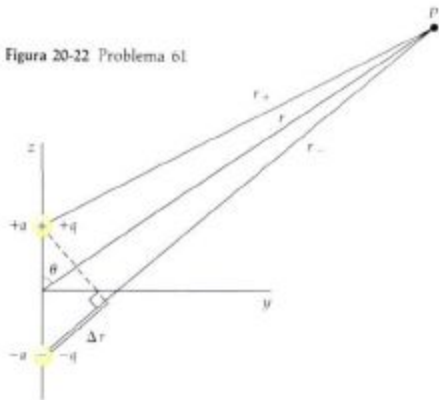
61. (a) En el caso del dipolo del ejemplo 20-6 demostrar que el potencial en un punto fuera del eje a una distancia grande

r desde el origen (figura 20-22) viene dado aproximadamente por

$$V = \frac{2kqa \cos \theta}{r^2} = \frac{kp \cos \theta}{r^2} = \frac{kpz}{r^3}$$

Indicación: Demostrar que $r_+^{-1} - r_-^{-1} \approx \Delta r / r^2$, en donde $\Delta r = r_+ - r_- = 2a \cos \theta$. (b) Determinar los componentes x , y , z del campo eléctrico en un punto fuera del eje.

Figura 20-22 Problema 61.



62. Consideremos dos cortezas metálicas esféricas y concéntricas de radios a y b siendo $b > a$. La corteza exterior posee

una carga Q , pero la corteza interior está conectada a tierra. Esto significa que la corteza interior posee un potencial cero y que las líneas de campo eléctrico abandonan la corteza exterior y se dirigen al infinito, pero otras se dirigen desde la corteza externa a la interna. Determinar la carga en la corteza interna.

63. Tres cortezas conductoras esféricas y concéntricas poseen radios a , b y c , siendo $a < b < c$. Inicialmente, la corteza interna está descargada, la del medio posee una carga positiva Q y la exterior una carga negativa $-Q$. (a) Determinar el potencial eléctrico de las tres cortezas. (b) Si las cortezas interna y externa se conectan mediante un alambre que está aislado al pasar a través de la corteza media, ¿cuál es el potencial eléctrico de cada una de las tres cortezas y cuál es la carga final de cada corteza?

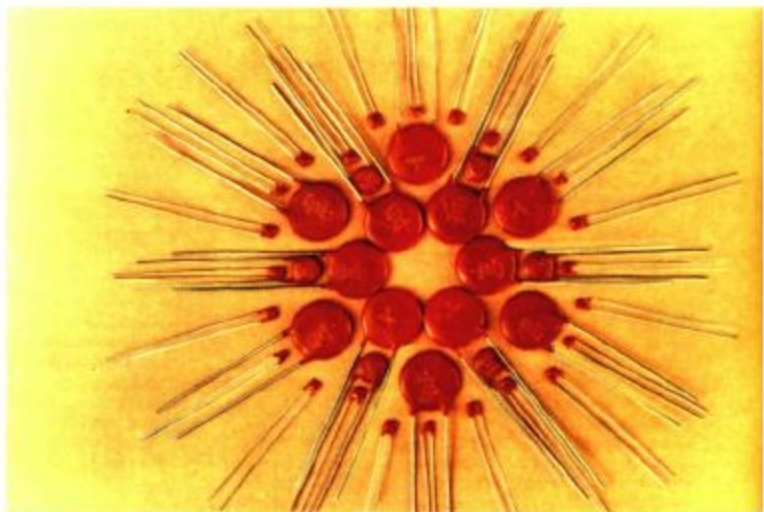
64. Una esfera no conductora de radio R posee una densidad de carga $\rho = \rho_0 r / R$, en donde ρ_0 es una constante. (a) Demostrar que la carga total es igual a $Q = \pi R^3 \rho_0$. (b) Demostrar que la carga total en el interior de una esfera de radio $r < R$ es igual a $q = Qr^3 / R^3$. (c) Utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico E_r para cualquier punto. (d) Utilizar $dV = -E_r dr$ para calcular el potencial V en cualquier punto, suponiendo que $V = 0$ para $r = \infty$. (Recordar que V es una función continua en $r = R$.)

65. Una partícula de masa m y carga Q está localizada sobre el eje x en $x = +a$, mientras que una segunda partícula de igual masa y carga $-Q$ está localizada sobre el eje x en $x = -a$. Ambas se dejan en libertad en el tiempo $t = 0$. (a) Determinar la velocidad de la partícula cargada positivamente en función de su posición x . (b) Integrar la ecuación de la velocidad para determinar el instante en que chocan las dos cargas.

Capítulo 21

Capacidad, dieléctricos y energía electrostática

Condensadores cerámicos de placa y disco utilizados en circuitos electrónicos.



Un **condensador** es un dispositivo que sirve para almacenar carga y energía. Está constituido por dos conductores aislados uno de otro, que poseen cargas iguales y opuestas. Los condensadores tienen múltiples aplicaciones. El mecanismo de iluminación («flash») de las cámaras fotográficas posee un condensador que almacena la energía necesaria para proporcionar un destello súbito de luz. Los condensadores también se utilizan para suavizar las pequeñas ondas que surgen cuando la corriente alterna (el tipo de corriente que suministra un enchufe doméstico) se convierte en continua en una fuente de potencia, tal como la utilizada para cargar la calculadora o la radio cuando las pilas están bajas de tensión.

El primer condensador utilizado para almacenar grandes cargas eléctricas fue una botella con una lámina de oro en sus caras interior y exterior que se llamó botella de Leyden. Fue inventada en el siglo XVIII en Leyden (Holanda) cuando estudiando los efectos de las cargas eléctricas sobre las personas y los animales, uno de aquellos experimentadores tuvo la idea de almacenar una gran cantidad de carga en una botella de agua. Para ello sostenía la botella en una mano mientras la carga procedente de un generador electrostático era conducida hasta el agua por medio de una cadena. Cuando trató de sacar la cadena del agua con la otra mano sufrió una sacudida eléctrica que le dejó inconsciente. Después de muchos experimentos se descubrió que la mano que sostenía la botella podía reemplazarse por hojas metálicas que recubrían las superficies interior y exterior de la botella. Benjamin Franklin comprobó que el dispositivo para almacenar cargas no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que se llamaron vidrios de Franklin. Con varios de estos vidrios conectados en paralelo, Franklin almacenó

una gran carga y con ello trató de matar un pavo. En su lugar, sufrió él mismo una fuerte descarga. Más tarde, Franklin escribió: «Trataba de matar un pavo y por poco no maté un ganso».

21-1 Condensador de placas paralelas

Un condensador corriente es el **condensador de placas paralelas**, formado por dos grandes placas conductoras paralelas. En la práctica las placas pueden ser láminas metálicas muy finas, separadas y aisladas una de otra por una hoja de papel. Este «papel sandwich» se enrolla para ahorrar espacio. Cuando las placas se conectan a un dispositivo de carga, por ejemplo, una batería* (figura 21-1) se produce una transferencia de carga desde un conductor al otro hasta que la diferencia de potencial entre los conductores debido a sus cargas iguales y opuestas se hace igual a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería. La cantidad de carga sobre las placas depende de la diferencia de potencial y de la geometría del condensador; por ejemplo, del área y separación de las placas en un condensador de placas paralelas. Sea Q la magnitud de la carga sobre cada placa y V la diferencia de potencial entre las placas**. (Cuando hablamos de la carga de un condensador nos referimos a la magnitud de la carga sobre cada placa). La relación Q/V se denomina **capacidad** C :

$$C = \frac{Q}{V}$$

21-1 Definición de capacidad

Esta magnitud expresa la «capacidad» de almacenar carga que posee el condensador bajo una determinada diferencia de potencial. La unidad SI de capacidad es el culombio por voltio y se denomina **faradio** (F) en honor al gran físico experimental inglés, Michael Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} \quad 21-2$$

Como el faradio es una unidad relativamente grande, se utilizan frecuentemente los submúltiplos como el microfaradio ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) o el picofaradio ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).



Figura 21-1 Condensador constituido por dos placas conductoras separadas por una pequeña distancia. Cuando los conductores están conectados a los terminales de una batería, ésta transfiere carga desde una de las placas a la otra hasta que la diferencia de potencial entre ambas se hace igual a la diferencia de potencial entre los extremos de la batería. La cantidad de carga transferida es proporcional a la diferencia de potencial.

Para calcular la capacidad de un condensador se dispone cierta carga $+Q$ sobre un conductor y una carga igual y opuesta $-Q$ en el otro y se determina el campo eléctrico establecido entre ambos. Integrando el campo desde un conductor al otro se determina entonces la diferencia de potencial V entre ambos. Como la diferencia de potencial es proporcional a la carga, la capacidad $C = Q/V$ no depende de Q ni de V .

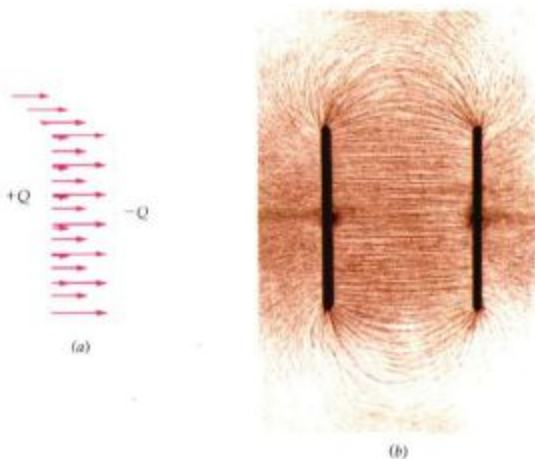
* Las baterías se discutirán ampliamente en el capítulo 22. Aquí, todo lo que necesitamos saber es que una batería es un dispositivo que almacena y suministra energía eléctrica y mantiene una diferencia de potencial constante V entre sus terminales.

** El uso de V en lugar de ΔV para la diferencia de potencial entre las placas es corriente y simplifica muchas de las ecuaciones.

Consideremos un condensador de placas paralelas, formado por dos placas de la misma superficie A separadas por una distancia s , pequeña comparada con la longitud y anchura de las placas. Se dispone una carga $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra. Como las placas están muy próximas, el campo en cualquier punto entre las placas (excluyendo los puntos próximos a los bordes) es aproximadamente igual al campo debido a dos planos de carga infinitos, iguales y opuestos. Cada placa contribuye con un campo uniforme de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$ (ecuación 19-23), resultando así un campo total $E = \sigma/\epsilon_0$, siendo $\sigma = Q/A$ la carga por unidad de área en cada una de las placas. Como el campo que existe entre las placas de este condensador es uniforme (figura 21-2), la diferencia de potencial entre las placas es igual al campo multiplicado por la separación de las placas, s :

$$V = Es = \frac{\sigma}{\epsilon_0} s = \frac{Qs}{\epsilon_0 A} \quad 21-3$$

Figura 21-2 (a) Las líneas del campo eléctrico entre las placas de un condensador plano están igualmente espaciadas, lo que indica que el campo es uniforme en dicha zona. (b) Las líneas de campo eléctrico entre las placas de un condensador plano pueden visualizarse mediante pequeñas porciones de hilo suspendidas en aceite.



La capacidad del condensador de placas paralelas es, por tanto,

Capacidad de un condensador de placas paralelas

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{s} \quad 21-4$$

Obsérvese que como V es proporcional a Q , la capacidad no depende de la carga ni del voltaje del condensador, sino sólo de factores geométricos. En un condensador de placas paralelas, la capacidad es proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la distancia de separación. En general la capacidad depende del tamaño, forma y geometría de los conductores. Como la capacidad se expresa en faradios y A/s en metros, resulta de la ecuación 21-4 que la unidad SI de la permitividad del espacio libre ϵ_0 puede expresarse en faradios por metro:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m} \quad 21-5$$

Un cálculo numérico nos permitirá apreciar lo grande que es el faradio como unidad de capacidad.

Ejemplo 21-1

Un condensador de placas paralelas está formado por dos conductores cuadrados de lado 10 cm separados por 1 mm de distancia. (a) Calcular su capacidad. (b) Si este condensador está cargado con 12 V, ¿cuánta carga se transfiere de una placa a la otra?

(a) Mediante la ecuación 21-4, se obtiene para la capacidad

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{s} = \frac{(8,85 \text{ pF/m})(0,1 \text{ m})^2}{0,001 \text{ m}} = 8,85 \times 10^{-11} \text{ F} \\ = 88,5 \text{ pF}$$

(b) Según la definición de capacidad (ecuación 21-1), la carga transferida es

$$Q = CV = (88,5 \times 10^{-12} \text{ F})(12 \text{ V}) = 1,06 \times 10^{-9} \text{ C} = 1,06 \text{ nC}$$

Esta es la unidad de la carga en cada una de las placas.

21-2 Condensador cilíndrico

Un condensador cilíndrico consta de un pequeño cilindro o alambre conductor de radio a y una corteza cilíndrica mayor de radio b concéntrica con la anterior. Un cable coaxial, como el utilizado en la televisión por cable puede considerarse como un condensador cilíndrico. La capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial es importante en la determinación de las características de transmisión del cable. Supongamos que la longitud del condensador es L y que posee una carga $+Q$ en el conductor interior y una carga $-Q$ en el exterior. En el capítulo 19 vimos que el campo eléctrico exterior a un alambre o cilindro alargado de carga Q (ecuación 19-24 o 19-26a) es

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \quad 21-6$$

en donde $\lambda = Q/L$ es la densidad de carga lineal. El campo debido a la carga $-Q$ sobre la corteza cilíndrica externa es cero dentro de la corteza como se demostró usando la ley de Gauss en el capítulo 19 (ecuación 19-25a).

La diferencia de potencial V entre los conductores puede determinarse mediante la ecuación 20-3b. Sea V_a el potencial del conductor interno y V_b el del conductor externo. Por consiguiente,

$$V_a - V_b = - \int_a^b E_r dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \quad 21-7$$

Naturalmente, el potencial es mayor en el conductor interno, el cual transporta la carga positiva, pues las líneas del campo eléctrico están dirigidas desde este conductor hacia el exterior. La magnitud de esta diferencia de potencial es

$$V = V_a - V_b = \frac{Q \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 L}$$

y la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad 21-8$$

Así pues, la capacidad es proporcional a la longitud de los conductores. Cuanto mayor sea la longitud, mayor es la cantidad de carga que puede almacenarse en los conductores para una determinada diferencia de potencial, pues el campo eléctrico, y por tanto, la diferencia de potencial, depende sólo de la carga por unidad de longitud.



Un cable coaxial es un condensador largo cilíndrico que posee un alambre sólido como conductor interno y un blindaje de alambre trenzado como conductor externo. En este caso se ha desprendido la cubierta exterior de caucho para que puedan verse los conductores y el aislante de plástico blanco que los separa.

Ejemplo 21-2

Un cable coaxial consta de un alambre de radio 0,5 mm y de una corteza conductora externa de radio 1,5 mm. Determinar su capacidad por unidad de longitud.

De la ecuación 21-8 resulta

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi(8,85 \text{ pF/m})}{\ln(1,5 \text{ mm}/0,5 \text{ mm})} = 50,6 \text{ pF/m}$$

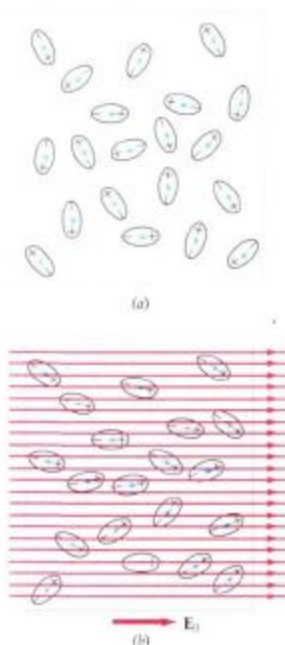


Figura 21-3 (a) Dipolos eléctricos orientados al azar en ausencia de un campo eléctrico externo. (b) En presencia de un campo externo los dipolos se alinean paralelamente al campo de modo parcial.

21-3 Dieléctricos

Un material no conductor como por ejemplo el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieléctrico**. Faraday descubrió que cuando el espacio entre los dos conductores de un condensador se ve ocupado por un dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor κ que es característico del dieléctrico y que se denomina **constante dieléctrica**. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se debilita por causa del dieléctrico. Así, para una carga determinada sobre las placas, la diferencia de potencial se reduce y la relación Q/V se incrementa.

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas de un condensador pues, en presencia de un campo eléctrico externo, las moléculas del dieléctrico producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto al del campo externo. Si las moléculas del dieléctrico son moléculas polares, es decir, poseen momentos dipolares permanentes, estos momentos están originalmente orientados al azar (figura 21-3a). En presencia del campo existente entre las placas del condensador, estos momentos dipolares experimentan la acción de un par o momento que tiende a alinearlos en la dirección del campo (figura 21-3b). La magnitud de alineación depende de la fuerza del campo y de la temperatura. A temperaturas elevadas, el movimiento térmico aleatorio de las moléculas tiende a contrarrestar la alineación. En el caso en que las moléculas del dieléctrico no sean polares poseerán momentos dipolares inducidos en presencia del campo eléctrico existente entre las placas. Los momentos dipolares inducidos tienen la dirección del campo original. Un dieléctrico que tiene momentos dipolares eléctricos predominantemente en la dirección del campo externo, se dice que está polarizado por el campo, bien sea porque la polarización se deba a la alineación de los momentos dipolares permanentes de las moléculas polares o bien a la creación de momentos dipolares inducidos en el caso de moléculas no polares. En cualquier caso, la alineación de los dipolos moleculares produce un campo eléctrico adicional debido a los dipolos cuyo sentido es opuesto al del campo original. El campo original se ve así debilitado.

El efecto neto de la polarización de un dieléctrico homogéneo es la creación de una carga superficial sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas, como se indica en la figura 21-4. Es esta carga superficial, ligada al dieléctrico, la que produce un campo eléctrico opuesto a la dirección del engendrado por la

Figura 21-4 Cuando se sitúa un dieléctrico sobre las placas de un condensador, el campo eléctrico polariza sus moléculas. El resultado es una carga ligada a la superficie del dieléctrico que produce su propio campo, el cual se opone al campo externo. El campo eléctrico entre las placas es así debilitado por el dieléctrico.



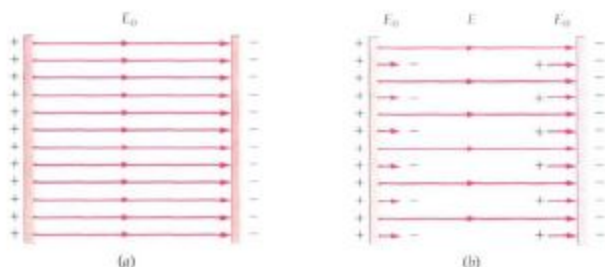


Figura 21-5 Campo eléctrico entre las placas de un condensador (a) sin dieléctrico y (b) con un dieléctrico. La carga eléctrica sobre el dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas.

carga libre de los conductores. Así, el campo eléctrico entre las placas se debilita como indica la figura 21-5.

Si el campo eléctrico original entre las placas de un condensador sin dieléctrico es E_0 , el campo en el dieléctrico es

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad 21-9$$

donde κ es la constante dieléctrica. En un condensador de placas paralelas de separación s , la diferencia de potencial entre las placas es

$$V = Es = \frac{E_0 s}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa}$$

siendo V la diferencia de potencial con dieléctrico y $V_0 = E_0 s$ la diferencia de potencial original sin dieléctrico. La nueva capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q}{V_0}$$

es decir,

$$C = \kappa C_0 \quad 21-10$$

en donde $C_0 = Q/V_0$ es la capacidad original. La capacidad de un condensador de placas paralelas lleno de un dieléctrico de constante κ es, por tanto,

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{s} = \frac{\epsilon A}{s} \quad 21-11$$

en donde

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 \quad 21-12$$

es la **permitividad** del dieléctrico.

Las densidades de carga en las caras del dieléctrico son debidas a los desplazamientos de las cargas moleculares positivas o negativas próximas a las superficies exteriores o caras. Este desplazamiento se debe al campo eléctrico externo del condensador. La carga en el dieléctrico, llamada **carga ligada**, no está libre para moverse de un modo semejante a como lo están las cargas ordinarias en las placas de un condensador que son conductoras. Aunque desaparecen al extinguirse el campo eléctrico exterior, producen un campo eléctrico semejante al producido por cualquier otra carga.

Relacionaremos la densidad de carga ligada σ_b a la constante dieléctrica κ y a la densidad de carga superficial σ , situada sobre las placas del condensador, a la que llamaremos densidad de carga libre, ya que es libre de moverse en el conductor. Consideremos un bloque dieléctrico entre las placas de un condensador de placas paralelas como indica la figura 21-6. Si las placas del condensador es-

Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico



El teclado de algunos ordenadores utiliza interruptores de capacidad. Una placa metálica, montada sobre un émbolo asociado a la tecla, actúa como la placa superior de un condensador. Cuando se oprime la tecla, la separación entre las dos placas varía de unos 5 mm a unos 0,3 mm y la capacidad crece. El cambio de capacidad dispara el circuito electrónico para introducir la información al ordenador.

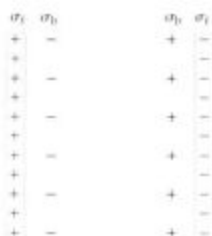


Figura 21-6 Condensador de placas paralelas con un bloque dieléctrico entre las placas. Si éstas se encuentran próximas, cada una de las cargas superficiales puede considerarse como un plano infinito de carga. El campo eléctrico debido a la carga libre sobre las placas está dirigido hacia la derecha y su magnitud es $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$. El campo debido a la carga ligada está dirigido hacia la izquierda y su magnitud es $E_b = \sigma_b / \epsilon_0$.

tán muy próximas, de modo que el bloque es muy delgado, el campo eléctrico interior al dieléctrico debido a las densidades de cargas ligadas $+\sigma_b$ a la derecha y $-\sigma_b$ a la izquierda es igual al campo debido a dos densidades de cargas planas infinitas. El campo E_b tiene así el valor

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \quad 21-13$$

Este campo está dirigido hacia la izquierda y se resta del campo eléctrico E_0 debido a la densidad de carga libre situada en las placas del condensador. El campo original E_0 tiene el valor

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad 21-14$$

El valor del campo resultante E es así la diferencia de estos valores. Es también igual a E_p / κ :

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\kappa}$$

o sea,

$$E_b = E_0 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0$$

Escribiendo σ_b / ϵ_0 en lugar de E_b y σ_0 / ϵ_0 en lugar de E_0 , tenemos

$$\sigma_b = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 \quad 21-15$$

La densidad de carga ligada σ_b es así siempre menor que la densidad de carga libre σ_0 situada en las láminas del condensador y es cero si $\kappa = 1$, que es el caso de carencia de dieléctrico.

En la discusión anterior, hemos supuesto que la carga depositada en las placas del condensador no cambiaba al insertar el dieléctrico. Esto sería cierto si el condensador se carga y se separa de la fuente de carga antes de introducir el dieléctrico. Si éste se inserta mientras la batería está todavía conectada, la fuente seguirá suministrando más carga para mantener la diferencia de potencial original. La carga total sobre las placas es, por tanto, $Q = \kappa Q_0$. Sin embargo, en cualquier caso la capacidad quedará aumentada en el factor κ .

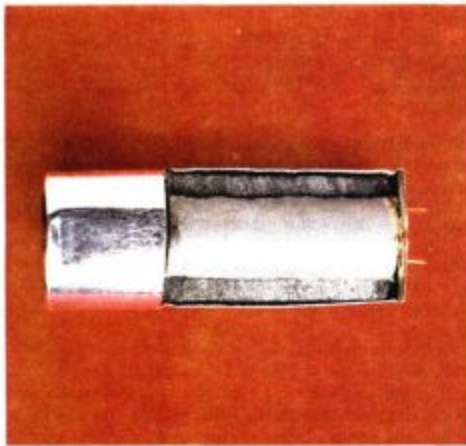
Ejercicio

El condensador del ejemplo 21-1 se llena con un dieléctrico de constante $\kappa = 2$. (a) Determinar la nueva capacidad. (b) Determinar la carga sobre el condensador con el dieléctrico, si aquél se conecta a una batería de 12 V. [Respuestas: (a) 177 pF, (b) 2.12 nC]

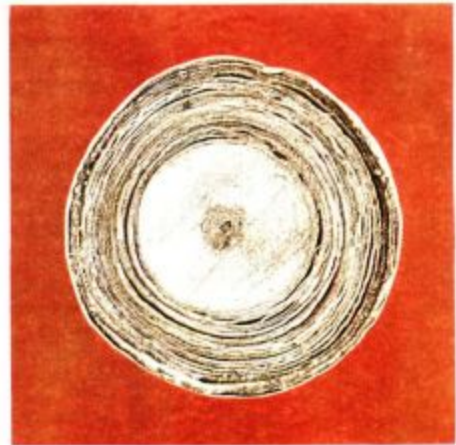
Ejercicio

El condensador del ejercicio anterior se carga a 12 V sin el dieléctrico y a continuación se desconecta de la batería. Entonces se inserta el dieléctrico de constante $\kappa = 2$. Determinar los nuevos valores de (a) la carga Q , (b) del voltaje V y (c) la capacidad C . [Respuestas: (a) $Q = 1,06$ nC, que es invariable; (b) $V = 6$ V; (c) $C = 177$ pF]

Además de aumentar la capacidad, un dieléctrico realiza otras dos funciones en un condensador. Primero, proporciona un medio mecánico para separar los dos conductores, que deben estar muy próximos con objeto de obtener una capacidad grande puesto que la capacidad varía inversamente con la separación. Segundo, la resistencia a la ruptura del condensador aumenta debido a que la resistencia a la ruptura de un dieléctrico es generalmente mayor que la del aire.



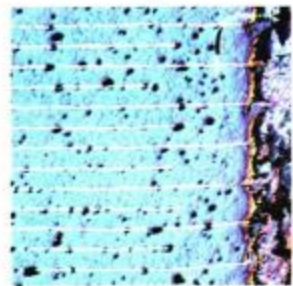
(a)



(b)

Ya hemos mencionado, en el capítulo 20, que la resistencia a la ruptura del aire es $3 \text{ MV/m} = 3 \text{ kV/mm}$. Los campos superiores a este valor no pueden mantenerse en el aire debido a la ruptura del dieléctrico; es decir, el aire empieza a resultar ionizado y conduce la electricidad. Muchos materiales tienen una resistencia a la ruptura dieléctrica mayor que la del aire, permitiendo una diferencia de potencial mayor entre los conductores que forman las placas de un condensador.

Un ejemplo de estas tres funciones de los dieléctricos es un condensador de láminas plano-paralelas formado por dos hojas de metal de área grande (para aumentar la capacidad) separadas por una hoja de papel. El papel aumenta la capacidad debido a su polarización; es decir, κ es mayor que 1. También proporciona una separación mecánica de modo que las hojas metálicas pueden estar muy cercanas sin llegar a ponerse en contacto eléctrico. Finalmente la resistencia del papel a la ruptura es mayor que la del aire, de modo que pueden obtenerse mayores diferencias de potencial. La tabla 21-1 relaciona la constante dieléctrica y la resistencia a la ruptura del dieléctrico de algunas sustancias aislantes. Obsérvese que para el aire, $\kappa = 1$, de modo que para la mayor parte de los casos no necesitamos distinguir entre el aire y el vacío.



(c)

(a) Condensador de $200 \mu\text{F}$ utilizado en una lámpara de descarga electrónica.

(b) Sección transversal de un condensador de lámina arrollado.

(c) Sección de un condensador cerámico de capas múltiples. Las líneas brillantes son los bordes de la placa conductora.

Tabla 21-1 Constante dieléctrica y resistencia a la ruptura de diversos materiales

Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia del dieléctrico, kV/mm
Aceite de transformador	2.24	12
Agua (20°C)	80	
Aire	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Mica	5,4	10-100
Neopreno	6,9	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1-2,5	10
Plexiglás	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Vidrio (Pyrex)	5,6	14

Ejemplo 21-3

Un condensador plano tiene unas placas cuadradas de lado 10 cm y una separación de 4 mm. Un bloque dieléctrico de constante $\kappa = 2$ tiene la misma área que las placas, pero un espesor de 3 mm. ¿Cuál es la capacidad (a) sin dieléctrico y (b) con dieléctrico?

(a) Este condensador es el mismo que el del ejemplo 21-1 excepto que el espaciado entre las placas es de 4 mm, en lugar de 1 mm. Como la capacidad varía en razón inversa a la separación de las placas, su valor sin dieléctrico será la cuarta parte del valor deducido en el ejemplo 21-1, es decir $C_0 = \frac{1}{4}(88,5 \text{ pF}) = 22,1 \text{ pF}$.

(b) Para determinar el valor de la capacidad con el dieléctrico incluido, situamos las cargas $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra y calculamos el campo eléctrico entre ambas placas. A continuación se determina la diferencia de potencial.

En el espacio comprendido entre las placas sin dieléctrico, el campo eléctrico es $E_0 = Q/\epsilon_0 A$, ya que el campo debido a las cargas ligadas es cero. Dentro del dieléctrico, el campo es $E = E_0/\kappa$. La diferencia de potencial entre las placas es la integral del campo extendida a la distancia de una placa a la otra. Si s es la separación total de las placas, el espesor del dieléctrico es $\frac{3}{4}s$ y el del espacio libre $\frac{1}{4}s$. La diferencia de potencial entre las placas es, por tanto,

$$V = E_0 \left(\frac{1}{4} s \right) + \frac{E_0}{\kappa} \left(\frac{3}{4} s \right) = E_0 s \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\kappa} \right) = V_0 \left(\frac{\kappa + 3}{4\kappa} \right)$$

en donde hemos utilizado la expresión $E_0 s = V_0$, diferencia de potencial original sin dieléctrico. Teniendo en cuenta que $\kappa = 2$, resulta para la diferencia de potencial con el dieléctrico:

$$V = \frac{5}{8} V_0$$

La nueva capacidad, es por tanto:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{5}{8} V_0} = \frac{8}{5} \frac{Q}{V_0} = \frac{8}{5} C_0 \\ &= \frac{8}{5} (22,1 \text{ pF}) = 35,4 \text{ pF} \end{aligned}$$

21-4 El almacenamiento de la energía eléctrica

Durante la carga de un condensador, se transfiere una carga positiva del conductor cargado negativamente al conductor cargado positivamente. Como el conductor positivo está a mayor potencial que el negativo, la energía potencial de la carga transferida crece. Por ejemplo, si se transfiere una pequeña cantidad de carga q a través de la diferencia de potencial V la energía potencial de la carga se incrementa en qV . (Recuérdese que, por definición, la diferencia de potencial es la diferencia de energía potencial por unidad de carga.) Por tanto, debe realizarse un trabajo para cargar un condensador. Parte de este trabajo queda almacenado en forma de energía potencial electrostática. Al comienzo del proceso de carga, los conductores no están cargados. No hay campo eléctrico y ambos conductores están al mismo potencial. Después del proceso de carga, se transfiere de un conductor al otro la carga Q y la diferencia de potencial es $V = Q/C$, en donde C es la capacidad,

Sea q la carga transferida al cabo de cierto tiempo durante el proceso. La diferencia de potencial es entonces $V = q/C$. Si se transfiere ahora una pequeña cantidad adicional de carga dq desde el conductor negativo a potencial cero hasta el conductor positivo a un potencial V (figura 21-7), la energía potencial de la carga se incrementa en

$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

El incremento total de energía potencial U es la suma o integral de estas cargas dU cuando q crece desde cero a su valor final Q (figura 21-8):

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

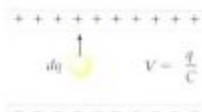


Figura 21-7 Cuando una pequeña cantidad de carga dq se mueve desde el conductor negativo hacia el conductor positivo su energía potencial se incrementa en $dU = V dq$, donde V es la diferencia de potencial entre los conductores.

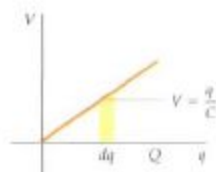


Figura 21-8 El trabajo necesario para cargar un condensador resulta ser la integral de $V dq$ desde la carga original $q=0$ hasta la carga final $q=Q$. Este trabajo es igual al área $\frac{1}{2} Q(Q/C)$ encerrada debajo de la curva.

La energía potencial es la energía almacenada en el condensador. Utilizando $C = Q/V$ podemos expresar esta energía de varios modos:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad 21-16$$

Energía almacenada en un condensador

La ecuación 21-16 es una expresión general de la energía almacenada en un condensador cargado en forma de energía potencial electrostática.

Ejercicio

Un condensador de $15 \mu\text{F}$ se carga a 60 V . ¿Cuánta energía puede almacenar este condensador? (Respuesta: $0,027 \text{ J}$)

Ejemplo 21-4

Un condensador de $60 \mu\text{F}$ está cargado a 12 V . Una vez desconectado de la batería, la separación de sus placas se incrementa de $2,0 \text{ mm}$ a $3,5 \text{ mm}$. (a) ¿Cuál es la carga del condensador? (b) ¿Cuánta energía fue almacenada originalmente en el condensador? (c) ¿En cuánto se incrementó la energía al modificar la separación de las placas?

(a) Según la definición de capacidad (ecuación 21-1), la carga sobre el condensador es

$$Q = CV = (60 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 720 \mu\text{C}$$

(b) La energía almacenada originalmente es

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} (720 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 4320 \mu\text{J}$$

El mismo resultado puede obtenerse sin determinar previamente la carga, mediante la ecuación

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (60 \mu\text{F})(12 \text{ V})^2 = 4320 \mu\text{J}$$

(c) Una vez desconectado el condensador de la batería, la carga depositada sobre las placas permanecerá constante. Al incrementar la separación de las placas, el voltaje entre éstas crece y la capacidad disminuye. El incremento de energía almacenada puede determinarse a partir del incremento del voltaje y utilizando la ecuación $W = \frac{1}{2} QV$, o bien calculando la disminución de capacidad y usando la expresión $W = \frac{1}{2} Q^2/C$. La diferencia de potencial entre las placas está relacionada con la separación de éstas y el campo eléctrico E por

$$V = Es$$

El campo no se modifica porque la carga permanece la misma. Como la diferencia de potencial es de 12 V cuando la separación de las placas es de 2,0 mm, al aumentar la separación a 3,5 mm, será:

$$V = (12 \text{ V}) \frac{3,5 \text{ mm}}{2,0 \text{ mm}} = 21 \text{ V}$$

Con esta nueva separación, la energía almacenada es

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} (720 \mu\text{C})(21 \text{ V}) = 7560 \mu\text{J}$$

El incremento de energía potencial es, por tanto, $7560 \mu\text{J} - 4320 \mu\text{J} = 3240 \mu\text{J}$.

Es interesante resolver la parte (b) por un camino distinto. Como las placas de un condensador poseen cargas opuestas, se ejercen entre sí fuerzas atractivas. Para aumentar la separación de las placas tendrá que realizarse un trabajo en contra de estas fuerzas. Supongamos que se fija la placa inferior y desplazamos la superior. La fuerza que actúa sobre esta placa superior es igual al producto de la carga sobre la placa multiplicada por el campo eléctrico *debido a la placa inferior*. Este campo es igual a la mitad del campo total existente entre las placas, ya que la carga sobre la placa superior también contribuye igualmente al campo. Cuando la diferencia de potencial es de 12 V y la separación es de 2 mm, el campo total entre las placas es

$$E = \frac{V}{s} = \frac{12 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 6 \text{ V/mm} = 6 \text{ kV/m}$$

El campo eléctrico debido únicamente a la carga de la placa inferior será

$$E = \frac{1}{2} E = 3 \text{ kV/m}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior es, por tanto,

$$F = QE = (720 \mu\text{C})(3 \text{ kV/m}) = 2,16 \text{ N}$$

El trabajo que debe realizarse para desplazar la placa superior una distancia de $\Delta s = 15 \text{ mm}$ será

$$W = F \Delta s = (2,16 \text{ N})(15 \text{ mm}) = 3,24 \times 10^{-3} \text{ J} = 3240 \mu\text{J}$$

Este trabajo es igual al incremento de energía almacenada.



Banco de condensadores para almacenar energía en el láser de impulsos Nova utilizado en los Lawrence Livermore Laboratories para el estudio de la fusión. Cada condensador posee una capacidad de unos 20 μF .

En el proceso de carga de un condensador se crea un campo eléctrico entre las placas. El trabajo necesario para cargar el condensador puede considerarse como el requerido para crear el campo eléctrico. Es decir, la energía almacenada en el condensador reside en el campo eléctrico y por ello se llama **energía del campo electrostático**. Vemos el caso de un condensador de placas paralelas, entre las cuales existe un dieléctrico de constante κ . Sea $+Q$ la carga de una de las placas del condensador. La diferencia de potencial entre las placas es $V=Es$, en donde s es su separación y E es el campo eléctrico entre las mismas, que está relacionado con la carga por la ecuación:

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon A}$$

Sustituyendo $Q=\epsilon AE$ y $V=Es$ en la ecuación 21-16 se obtiene la energía potencial U asociada al campo eléctrico:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(\epsilon AE)(Es) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon E^2(As) \end{aligned}$$

El producto As es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador que contiene el campo eléctrico. La energía por unidad de volumen es la **densidad energética** η , cuyo valor en un campo eléctrico E es

$$\eta = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

21-17

Densidad de energía de un campo electrostático

Así, la energía por unidad de volumen del campo electrostático es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Aunque la ecuación 21-17 se ha obtenido considerando el campo eléctrico comprendido entre las placas de un condensador de placas paralelas, el resultado es válido para cualquier campo eléctrico. Siempre que exista un campo eléctrico en el espacio, la energía electrostática por unidad de volumen viene dada por la ecuación 21-17.

Para comprobar el carácter general de la ecuación 21-17 calcularemos la energía del campo electrostático para un caso en el que no interviene un condensador y el campo eléctrico es variable. Consideraremos la energía potencial electrostática de un conductor esférico de radio R que transporta una carga Q . Calculemos el trabajo necesario para conducir una carga desde una gran distancia hasta el conductor, del mismo modo que hacemos para determinar el trabajo de transporte de una carga desde una placa de un condensador a la otra. Si la esfera posee una carga q , su potencial relativo a $V=0$ en el infinito es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

El trabajo necesario para transportar una carga adicional dq desde el infinito al conductor es $V dq$, que es igual al incremento de energía potencial del conductor:

$$dU = V dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} q dq$$

El incremento total de energía potencial U es la integral de dU cuando q crece desde cero a su valor final Q . Integrando desde $q=0$ a $q=Q$ se obtiene:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2}QV \quad 21-18$$

Esta es la energía potencial electrostática del conductor esférico.

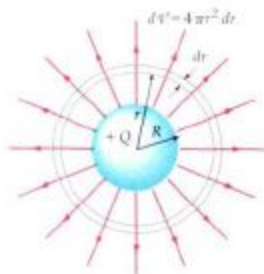


Figura 21-9 Geometría para el cálculo de la energía electrostática de un conductor esférico con carga Q . El volumen del espacio comprendido entre r y $r+dr$ es igual a $dV=4\pi r^2 dr$. La energía del campo electrostático en este elemento de volumen es ηdV , en donde $\eta=\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ es la densidad de energía.

Es posible obtener este mismo resultado considerando la densidad energética de un campo eléctrico, dada por la ecuación 21-17 con $\epsilon=\epsilon_0$, permitividad del espacio libre. Cuando el conductor es portador de una carga Q , el campo eléctrico es radial y viene dado por

$$E_r=0 \quad r < R \text{ (dentro del conductor)}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R \text{ (fuera del conductor)}$$

Como el campo eléctrico es simétricamente esférico, elegimos una corteza esférica como volumen elemental. Si el radio de la corteza es r y su espesor dr , el volumen es $dV=4\pi r^2 dr$ (figura 21-9). La energía dU de este elemento de volumen es

$$\begin{aligned} dU &= \eta dV = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2)4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

Como el campo eléctrico es cero para $r < R$, la energía total del campo eléctrico puede obtenerse integrando desde $r=R$ a $r=\infty$:

$$U = \int_R^\infty \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} QV \quad 21-19$$

que coincide con la ecuación 21-18.

Cuestiones

1. Se duplica la diferencia de potencial de un condensador. ¿En qué factor varía la energía eléctrica almacenada?
2. Se elimina la mitad de la carga que posee un conductor. ¿Qué fracción de su energía almacenada se ha eliminado junto con la carga?

21-5 Combinaciones de condensadores

Frecuentemente se utilizan dos o más condensadores en combinación. (En los circuitos eléctricos se indica un condensador mediante el símbolo $\text{---} \text{---}$.) La figura 21-10 muestra dos **condensadores en paralelo**. Las láminas superiores de los dos condensadores se conectan entre sí mediante un conductor y por lo tanto están al mismo potencial V_a . Las láminas inferiores están también unidas y están a un potencial común V_b . Los puntos a y b están conectados a una batería o a cualquier otro dispositivo que mantenga una diferencia de potencial $V=V_a-V_b$, que es la que se establece entre las placas de cada condensador. El efecto de añadir un segundo condensador conectado de esta forma supone un incremento de la capacidad. Esencialmente crece la superficie, permitiendo que se almacene más carga con la misma diferencia de potencial. Si las capacidades son C_1 y C_2 , las cargas Q_1 y Q_2 almacenadas sobre las placas vienen dadas por

$$Q_1 = C_1 V$$

y

$$Q_2 = C_2 V$$

La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

La **capacidad equivalente** es la de un solo condensador capaz de reemplazar una combinación de condensadores en un circuito y almacenar la misma carga para

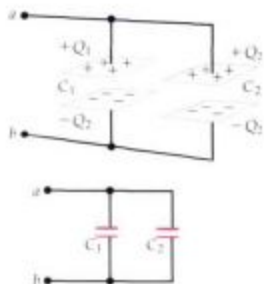
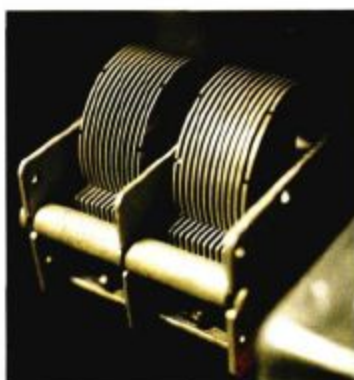


Figura 21-10 Dos condensadores en paralelo. La diferencia de potencial aplicada a los condensadores es la misma.



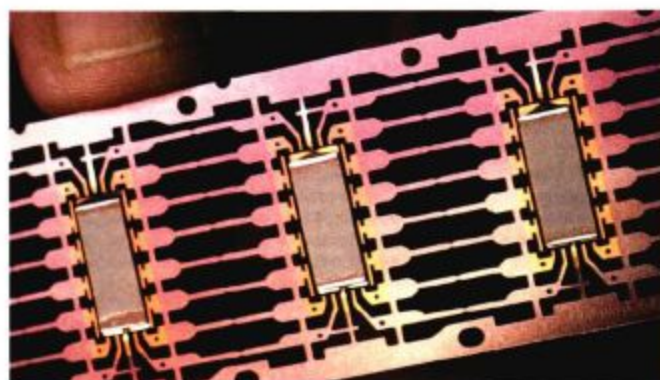
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) Condensador botella de Leyden. (b) Condensador variable con espaciado de aire, muy utilizado en los circuitos de sintonía de los viejos aparatos de radio. (c) Cableado de condensadores en un panel de circuitos. (d) Condensadores en un circuito impreso.

una determinada diferencia de potencial. La capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es el cociente de la carga total almacenada y la diferencia de potencial

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \quad 21-20$$

Así pues, la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales. El mismo razonamiento puede extenderse a tres o más condensadores conectados en paralelo, como indica la figura 21-11:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad 21-21$$

Capacidad equivalente de condensadores en paralelo

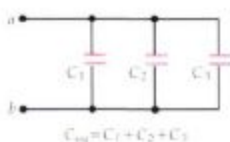
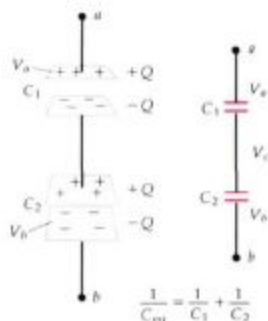


Figura 21-11 Tres condensadores en paralelo. El efecto de sumar un condensador en paralelo a un circuito, consiste en aumentar la capacidad efectiva.

La figura 21-12 muestra dos condensadores en serie. Cuando los puntos a y b se conectan a los terminales de una batería, se establece una diferencia de potencial $V = V_a - V_b$ entre los dos condensadores, pero la diferencia de potencial a través de uno de ellos no es necesariamente la misma que a través del otro. Si una carga $+Q$ se deposita sobre la carga superior, del primer condensador, el campo eléctrico producido por dicha carga inducirá una carga negativa igual

Figura 21-12 Dos condensadores en serie. La carga sobre cada condensador es la misma. La diferencia de potencial a través de los condensadores en serie, es la suma de las diferencias de potencial aplicadas a los condensadores individuales.



$-Q$ sobre su placa inferior. Esta carga procede de los electrones extraídos de la placa superior del segundo condensador. Por tanto, existirá una carga igual $+Q$ en la placa superior del segundo condensador y una carga correspondiente $-Q$ en su placa inferior. La diferencia de potencial a través del primer condensador es

$$V_1 = V_a - V_c = \frac{Q}{C_1}$$

De igual modo, la diferencia de potencial a través del segundo condensador es

$$V_2 = V_c - V_b = \frac{Q}{C_2}$$

La diferencia de potencial entre los dos condensadores en serie es la suma de estas diferencias de potencial:

$$\begin{aligned} V = V_a - V_b &= (V_a - V_c) + (V_c - V_b) \\ &= V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ &= Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \end{aligned} \quad 21-22$$

La capacidad equivalente de dos condensadores en serie es la de un solo condensador que reemplazando a los dos condensadores, presenta la diferencia de potencial V para la misma carga Q . Así pues,

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q}{V} \quad 21-23$$

Comparando las ecuaciones 21-22 y 21-23, resulta

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad 21-24$$

Esta ecuación puede generalizarse para tres o más condensadores conectados en serie

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad 21-25$$

Capacidad equivalente de condensadores en serie

La diferencia de potencial a través de una serie de condensadores conectados en serie es igual a la suma de las diferencias de potencial existentes en los condensadores individuales. Obsérvese que la adición de un condensador en serie incrementa $1/C_{\text{eq}}$, lo cual significa que la capacidad equivalente C_{eq} disminuye.

Ejercicio

Dos condensadores tienen capacidades de $20 \mu\text{F}$ y $30 \mu\text{F}$. Determinar la capacidad equivalente de estos condensadores cuando están conectados (a) en paralelo, (b) en serie. [Respuestas: (a) $50 \mu\text{F}$, (b) $12 \mu\text{F}$]

Obsérvese que en el ejercicio anterior la capacidad equivalente de los dos condensadores en serie es menor que la capacidad de cada uno de ellos.

Todo condensador puede soportar un voltaje máximo antes de que tenga lugar la ruptura o descarga entre las placas. Supongamos una fuente de potencia de 100 V y dos condensadores idénticos cada uno de los cuales experimenta la descarga si el potencial aplicado excede los 60 V . Por tanto, cada uno de ellos no puede soportar la conexión a la fuente considerada. Igualmente la ruptura se produce si los dos condensadores se conectan en paralelo, pues el potencial a su través sigue siendo de 100 V . Sin embargo, si conectamos los dos condensadores en serie, el potencial a través de cada uno de los condensadores será sólo de 50 V y la ruptura no se producirá.

Ejemplo 21-5

Determinar la capacidad equivalente de la red formada por los tres condensadores mostrados en la figura 21-13.

En este circuito, los condensadores de $2 \mu\text{F}$ y $3 \mu\text{F}$ están conectados en paralelo y ambos a su vez conectados en serie con el condensador de $4 \mu\text{F}$. La capacidad equivalente de los dos condensadores en paralelo es

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F} = 5 \mu\text{F}$$

Si reemplazamos los dos condensadores en paralelo por un condensador sólo de $5 \mu\text{F}$ y éste lo conectamos en serie con otro de $4 \mu\text{F}$, la capacidad equivalente de la nueva combinación se deduce de la expresión

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{5 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}} = \frac{9}{20 \mu\text{F}}$$

La capacidad equivalente de la red de los tres condensadores es, por tanto

$$C_{\text{eq}} = \frac{20 \mu\text{F}}{9} = 2,22 \mu\text{F}$$

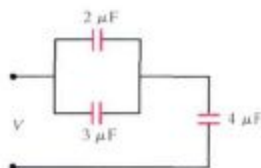


Figura 21-13 Red de condensadores correspondiente al ejemplo 21-5.

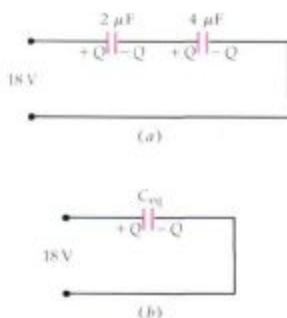


Figura 21-14 (a) Dos condensadores conectados en serie a través de una batería de 18 V (ejemplo 21-6). (b) Los dos condensadores de (a) pueden reemplazarse por un condensador equivalente.

Ejemplo 21-6

Un condensador de $2 \mu\text{F}$ y otro de $4 \mu\text{F}$ se conectan en serie con una batería de 18 V como indica la figura 21-14a. Determinar la carga depositada sobre los condensadores y la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos.

En la figura 21-14b los dos condensadores han sido reemplazados por un condensador cuya capacidad equivalente C_{eq} resulta de la expresión

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}} = \frac{3}{4 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{4}{3} \mu\text{F}$$

La carga existente sobre cada una de las placas del condensador equivalente (figura 21-4b) es

$$Q = C_{\text{eq}}V = \left(\frac{4}{3} \mu\text{F}\right)(18 \text{ V}) = 24 \mu\text{C}$$

Esta es la magnitud de la carga sobre cada placa de los condensadores originales. La diferencia de potencial a través del condensador de $2 \mu\text{F}$ es por tanto,

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{24 \mu\text{C}}{2 \mu\text{F}} = 12 \text{ V}$$

y a través del condensador de $4 \mu\text{F}$ es

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{24 \mu\text{C}}{4 \mu\text{F}} = 6 \text{ V}$$

Obsérvese que la suma de estas diferencias de potencial es lógicamente 18 V.

Ejemplo 21-7

Los dos condensadores del ejemplo 21-6 se separan de la batería y se desconectan cuidadosamente uno de otro, de modo que la carga sobre las placas no se altere, como indica la figura 21-15a. Se conecta de nuevo, pero ahora uniéndolo entre sí las placas positivas por un lado y las negativas por otro, como muestra la figura 21-15b. Determinar la diferencia de potencial entre los condensadores y la carga sobre cada uno de ellos.

Una vez reconectados los condensadores, las dos placas positivas forman un solo conductor y lo mismo ocurre con las negativas. La carga total sobre las placas positivas es $+48 \mu\text{C}$, y la correspondiente a las placas negativas es $-48 \mu\text{C}$. Además, la diferencia de potencial a través de ambos condensadores es ahora la misma. Los condensadores se conectan, por tanto, en paralelo, de tal modo que la capacidad equivalente es

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 2 \mu\text{F} + 4 \mu\text{F} = 6 \mu\text{F}$$

Como la carga total es $48 \mu\text{C}$, la diferencia de potencial a través de la combinación en paralelo es

$$V = \frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{48 \mu\text{C}}{6 \mu\text{F}} = 8 \text{ V}$$

La carga sobre cada condensador es

$$Q_1 = C_1V = (2 \mu\text{F})(8 \text{ V}) = 16 \mu\text{C}$$

y

$$Q_2 = C_2V = (4 \mu\text{F})(8 \text{ V}) = 32 \mu\text{C}$$

La carga total suma $48 \mu\text{C}$, como es lógico.

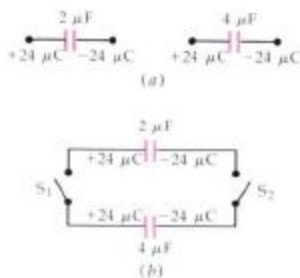


Figura 21-15 (a) Los dos condensadores de la figura 21-14a inmediatamente después de ser desconectados de la batería. (b) Al cerrar los interruptores S_1 y S_2 , se conectan de nuevo los dos condensadores, uniéndose entre sí las placas positivas e igualmente las placas negativas.

Ejemplo 21-8

Dos condensadores de placas paralelas, cada uno con una capacidad de $2 \mu\text{F}$, están conectados en paralelo a través de una batería de 12 V . Determinar (a) la carga sobre cada condensador y (b) la energía total almacenada en los condensadores. A continuación, los condensadores se desconectan de la batería y entre las placas de uno de ellos se inserta un dieléctrico de constante $\kappa = 3$. En estas condiciones (c) determinar la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador, (d) la carga depositada sobre cada uno de ellos y (e) la energía total almacenada por ambos.

(a) La carga original sobre cada condensador es

$$Q = CV = (2 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 24 \mu\text{C}$$

(b) La energía almacenada en cada condensador es

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(24 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 144 \mu\text{J}$$

de modo que la energía total almacenada es $2 \times 144 \mu\text{J} = 288 \mu\text{J}$.

(c) La capacidad del condensador con el dieléctrico es ahora

$$C = \kappa C = 3(2 \mu\text{F}) = 6 \mu\text{F}$$

Como los condensadores están en paralelo, la capacidad equivalente es

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 6 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F} = 8 \mu\text{F}$$

La carga total, que es $48 \mu\text{C}$ permanece invariable al desconectar la batería. La diferencia de potencial a través de la combinación en paralelo, que es la misma que existe entre las placas de cada condensador, es

$$V = \frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{48 \mu\text{C}}{8 \mu\text{F}} = 6 \text{ V}$$

(d) Cuando el dieléctrico se inserta en uno de los condensadores, el campo se debilita y la diferencia de potencial decrece. Como los dos condensadores están conectados en paralelo, la carga fluye desde el otro condensador (sin dieléctrico) para igualar la diferencia de potencial a través de ambos. Sea Q_1 la carga del condensador con dieléctrico y Q_2 la del condensador sin dieléctrico. Es decir,

$$Q_1 = C_1 V = (6 \mu\text{F})(6 \text{ V}) = 36 \mu\text{C}$$

y

$$Q_2 = C_2 V = (2 \mu\text{F})(6 \text{ V}) = 12 \mu\text{C}$$

La carga total es $48 \mu\text{C}$, como anteriormente.

(e) La energía del condensador con dieléctrico es

$$U_1 = \frac{1}{2}Q_1 V = \frac{1}{2}(36 \mu\text{C})(6 \text{ V}) = 108 \mu\text{J}$$

y la del condensador sin dieléctrico es

$$U_2 = \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}(12 \mu\text{C})(6 \text{ V}) = 36 \mu\text{J}$$

La energía total es $U_1 + U_2 + 144 \mu\text{J}$. Este valor es la mitad de la energía original ($288 \mu\text{J}$). Extraer el dieléctrico del condensador requiere $144 \mu\text{J}$ de trabajo que se almacena en forma de energía potencial electrostática.



Brazo mecánico utilizado en Lockheed para instalar condensadores en un circuito.

Ejemplo 21-9

Resolver los apartados (c), (d) y (e) del ejemplo 21-8 para el caso en que el dieléctrico se inserta en uno de los condensadores cuando la batería está todavía conectada.

(c) Como la batería está conectada a los condensadores, la diferencia de potencial a través de ellos sigue siendo 12 V.

(d) Al insertar el dieléctrico en uno de los condensadores, la batería suministra una carga adicional a fin de mantener la diferencia de potencial de 12 V. Como la nueva capacidad del condensador con dieléctrico es $6 \mu\text{F}$, la carga sobre este condensador es

$$Q_1 = C_1 V = (6 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 72 \mu\text{C}$$

y la carga sobre el otro permanece siendo la misma que tenía antes.

(e) La energía del condensador con dieléctrico es

$$U_1 = \frac{1}{2} Q_1 V = \frac{1}{2} (72 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 432 \mu\text{J}$$

El condensador sin dieléctrico tiene la misma carga y diferencia de potencial. Por tanto, tendrá la misma energía:

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} (24 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 144 \mu\text{J}$$

En consecuencia, la energía total es $432 \mu\text{J} + 144 \mu\text{J} = 576 \mu\text{J}$. En este caso, la energía total se incrementa porque la batería suministra más carga.

Resumen

1. Un condensador es un dispositivo que almacena carga y energía. Consta de dos conductores próximos y aislados entre sí que transportan cargas iguales y opuestas. La capacidad es el cociente entre la magnitud de la carga depositada sobre cada conductor Q y la diferencia de potencial entre ambos, V :

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacidad depende sólo de la distribución geométrica de los conductores y no de la carga o diferencia de potencial.

2. La capacidad de un condensador de placas paralelas es proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la distancia de separación:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

La capacidad de un condensador cilíndrico viene dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

en donde L es la longitud del condensador y a y b son respectivamente los radios de los conductores interior y exterior.

3. Un dieléctrico es un material no conductor. Cuando un dieléctrico se inserta entre las placas de un condensador, las moléculas del dieléctrico se polarizan y el campo eléctrico dentro del mismo se debilita. Si el campo es E_0 sin dieléctrico, con el dieléctrico es

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

en donde κ es la constante dieléctrica. Esta disminución del campo eléctrico da lugar a un incremento de la capacidad según el factor κ :

$$C = \kappa C_0$$

en donde C_0 es la capacidad sin dieléctrico. La permitividad de un dieléctrico ϵ viene definida por la expresión

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0$$

El dieléctrico también proporciona un medio físico de separar las placas de un condensador y aumentar así el voltaje que puede aplicarse a un condensador antes de que tenga lugar la ruptura dieléctrica.

4. La energía electrostática almacenada en un condensador de carga Q , diferencia de potencial V y capacidad C es

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

Esta energía puede considerarse almacenada en el campo eléctrico entre las placas. La energía por unidad de volumen en un campo eléctrico E viene dada por

$$u = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

5. Cuando dos o más condensadores se conectan en paralelo, la capacidad equivalente de la combinación es la suma de las capacidades individuales:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad \text{condensadores en paralelo}$$

Cuando dos o más condensadores se conectan en serie, la inversa de la capacidad equivalente es igual a la suma de las inversas de las capacidades individuales:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \text{condensadores en serie}$$

Sugerencias bibliográficas

Trotter, Donald M., Jr.: «Capacitors», *Scientific American*, julio 1988, pág. 86.

En los últimos treinta años se han conseguido avances maravillosos en la miniaturización de condensadores; sin este logro, las ventajas de los microcircuitos integrados para radios, ordenadores y otros equipos electrónicos no se habrían realizado.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer-se los siguientes conocimientos:

1. Definir la capacidad y saber calcularla para los casos de un condensador de placas paralelas y un condensador cilíndrico.
2. Saber discutir los efectos de un dieléctrico sobre la capacidad, carga, diferencia de potencial y campo eléctrico de un condensador de placas paralelas.
3. Saber lo que significa la carga ligada a un dieléctrico y saber discutir cómo surge esta carga ligada y cuál es su efecto.
4. Deducir la expresión $U = \frac{1}{2}QV$ correspondiente a la energía almacenada en un condensador cargado.
5. Saber discutir los conceptos de energía del campo electrostático.
6. Saber calcular la capacidad equivalente de combinaciones de condensadores en paralelo y en serie.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Condensador
Capacidad
Faradio
Dieléctrico
Constante dieléctrica
Permitividad de un dieléctrico

Carga ligada
Energía del campo electrostático
Densidad de energía
Condensadores en paralelo
Capacidad equivalente
Condensadores en serie

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

cantidad total de carga que puede almacenar.

1. La capacidad de un condensador de placas paralelas depende de la diferencia de tensión existente entre las placas.
2. La capacidad de un condensador de placas paralelas es proporcional a la carga situada en las placas.
3. La capacidad efectiva de dos condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales.
4. La capacidad efectiva de dos condensadores en serie es menor que la de cualquiera de ellos.
5. Un dieléctrico insertado en un condensador incrementa su capacidad.
6. La energía electrostática por unidad de volumen en un punto determinado es proporcional al cuadrado del campo eléctrico de dicho punto.

Problemas

Nivel I

21-1 Condensador de placas paralelas

1. (a) Si un condensador de placas paralelas tiene una separación de 0,15 mm, ¿cuál deberá ser su área para que tenga una capacidad de 1 F? (b) Si las placas son cuadradas, ¿cuál es la longitud de su lado?
2. Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad de 2,0 μF y la separación entre las placas es de 1,6 mm. (a) ¿Qué diferencia de potencial puede establecerse entre las placas del condensador antes de que se produzca la ruptura dieléctrica del aire? ($E_{\text{máx}} = 3 \text{ MV/m}$) (b) ¿Cuál es el valor de la carga máxima que puede almacenar el condensador antes de que se produzca esta ruptura?
3. Un condensador de placas paralelas tiene una carga de 40 μC . La diferencia de potencial entre las placas es 500 V. ¿Cuál es su capacidad?
4. Entre las placas de un condensador de placas paralelas circulares existe un campo eléctrico de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$, siendo de 2 mm la separación de las placas. (a) ¿Cuál es el voltaje a través del condensador? (b) ¿Qué radio deben tener las placas para que la carga almacenada sea de 10 μC ?

21-2 Condensador cilíndrico

5. Un cable coaxial entre dos ciudades tiene un radio interior de 0,8 mm y un radio exterior de 6 mm. Su longitud es de $8 \times 10^3 \text{ m}$. Considerar este cable como un condensador cilíndrico y calcular su capacidad.

6. Un tubo Geiger se compone de un alambre de 0,2 mm de radio y una longitud de 12 cm con un conductor cilíndrico coaxial de la misma longitud y 1,5 cm de radio. (a) Hallar su capacidad admitiendo que el gas en el interior del tubo tiene una constante dieléctrica de 1. (b) Hallar la carga por unidad de longitud sobre el alambre en el caso de que el condensador se cargue a 1,2 kV.

21-3 Dieléctricos

7. Se construye un condensador de placas paralelas colocando polietileno ($\kappa = 2,3$) entre dos hojas de aluminio. El área de cada hoja es de 400 cm^2 y la separación de 0,3 mm. Hallar la capacidad.
8. ¿Cuál es la constante dieléctrica de un aislante en el cual la densidad de carga inducida es (a) el 80 por ciento de la densidad de carga libre sobre las placas de un condensador en el que se ha insertado dicho aislante, (b) el 20 por ciento de la densidad de carga libre y (c) el 98 por ciento de la densidad de carga libre?
9. Dos placas paralelas poseen cargas Q y $-Q$. Si el espacio entre las placas está desprovisto de materia, el campo eléctrico es $2,5 \times 10^6 \text{ V/m}$. Cuando el espacio se llena con un determinado dieléctrico, el campo se reduce a $1,2 \times 10^6 \text{ V/m}$. (a) ¿Cuál es la constante dieléctrica del dieléctrico? (b) Si $Q = 10 \text{ nC}$, ¿cuál es el área de las placas? (c) ¿Cuál es la carga total inducida en cada una de las caras del dieléctrico?

21-4 El almacenamiento de la energía eléctrica

10. (a) Un condensador de $3 \mu\text{F}$ se carga a 100 V . ¿Cuánta energía se almacena en el condensador? (b) ¿Cuánta energía adicional se necesita para cargar el condensador desde 100 a 200 V ?
11. ¿Cuál es la cantidad de energía almacenada en un conductor esférico aislado de 10 cm de radio y cargado a 2 kV ?
12. Se carga un condensador de $10 \mu\text{F}$ hasta $Q=4 \mu\text{C}$. (a) ¿Cuánta energía almacena? (b) Si se elimina la mitad de la carga, ¿cuánta energía resta?
13. (a) Hallar la energía almacenada en un condensador de 20 pF cuando se carga hasta $5 \mu\text{C}$. (b) ¿Cuánta energía adicional se requiere para aumentar la carga desde 5 hasta $10 \mu\text{C}$?
14. Determinar la energía por unidad de volumen que existe en un campo eléctrico igual a la resistencia dieléctrica del aire (3 MV/m).
15. Un condensador de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1.0 mm . Se carga hasta 100 V . (a) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas? (b) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas? (c) Hallar la energía total multiplicando la respuesta dada a la parte (b) por el volumen entre las placas. (d) Hallar la capacidad C . (e) Calcular la energía total a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$ comparando el resultado con el de la parte (c).

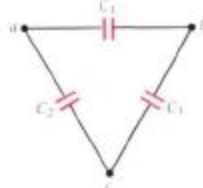
21-5 Combinaciones de condensadores

16. Se conecta un condensador de $10.0 \mu\text{F}$ en serie con otro de $20.0 \mu\text{F}$ y se aplica al conjunto una batería de 6.0 V . (a) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación? (b) Hallar la carga de cada condensador. (c) Hallar la diferencia de potencial en cada condensador.
17. Se conectan en paralelo y se aplican a una batería de 6.0 V un condensador de $10.0 \mu\text{F}$ y otro de $20.0 \mu\text{F}$. (a) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada a cada condensador? (c) Hallar la carga que tiene cada condensador.
18. Tres condensadores tienen capacidades de 2.0 ; 4.0 y $8.0 \mu\text{F}$. Hallar la capacidad equivalente (a) si los condensadores están en paralelo y (b) si están en serie.
19. Un condensador de $2.0 \mu\text{F}$ se carga a una diferencia de potencial de 12.0 V y a continuación se desconecta de la batería. (a) ¿Cuánta carga tienen sus placas? (b) Cuando se conecta un segundo condensador (inicialmente sin cargar) en paralelo a este condensador, la diferencia de potencial disminuye hasta 4.0 V . ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador?
20. (a) ¿Cuántos condensadores de $1.0 \mu\text{F}$ habrá que conectar en paralelo para almacenar 1 mC de carga con una diferencia de potencial de 10 V aplicada a cada uno de ellos? (b) ¿Cuál será la diferencia de potencial existente entre los bornes de esta combinación? (c) Si estos condensadores se conectan en serie y la diferencia de potencial en cada uno de ellos es 10 V , hallar la carga sobre ellos y la diferencia de potencial existente en los extremos de la combinación.
21. Un condensador de $1.0 \mu\text{F}$ se conecta en paralelo con un condensador de $2.0 \mu\text{F}$ y la combinación se conecta a su vez en serie con otro condensador de $6.0 \mu\text{F}$. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?
22. Un condensador de $3.0 \mu\text{F}$ y otro de $6.0 \mu\text{F}$ se conectan en serie y la combinación se conecta en paralelo con un con-

densador de $8.0 \mu\text{F}$. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

23. Tres condensadores se conectan en forma de una red triangular como indica en la figura 21-26. Determinar la capacidad equivalente entre los terminales a y c .

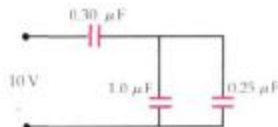
Figura 21-26 Problema 23.



Nivel II

24. Un condensador de placas paralelas tiene unas placas de 600 cm^2 de área y una separación de 4 mm . Se carga hasta 100 V y luego se desconecta de la batería. (a) Hallar el campo eléctrico E , la densidad de carga σ y la energía potencial electrostática U . Se inserta en su interior un dieléctrico constante $\kappa=4$ que rellena por completo el espacio situado entre las placas. (b) Hallar el nuevo campo eléctrico E y (c) la diferencia de potencial V . (d) Hallar la densidad de carga ligada.
25. Cierta dieléctrico de constante $\kappa=24$ puede resistir un campo eléctrico de $4 \times 10^7 \text{ V/m}$. Con este dieléctrico se quiere construir un condensador de $0.1 \mu\text{F}$ que pueda resistir una diferencia de potencial de 2000 V . (a) ¿Cuál es la separación mínima entre las placas? (b) ¿Cuál debe ser el área de las placas?
26. Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se desconecta de la fuente de carga. Las placas se separan entonces hasta que su distancia final es $2d$. En función de A , d y V hallar expresiones que den (a) la nueva capacidad, (b) la nueva diferencia de potencial y (c) la nueva energía almacenada. (d) ¿Cuánto trabajo se necesitó para variar la separación de las placas desde d hasta $2d$?
27. Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de $0.14 \mu\text{F}$. Las placas están separadas entre sí 0.5 mm . (a) ¿Cuál es el área de cada placa? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial si sobre una de las placas existe una carga de $3.2 \mu\text{C}$ y sobre la otra una carga de $-3.2 \mu\text{C}$? (c) ¿Cuánta energía hay almacenada? (d) ¿Qué cantidad de carga puede transportar el condensador antes de que tenga lugar la ruptura dieléctrica del aire entre las placas?
28. Calcular para el dispositivo que se muestra en la figura 21-17, (a) la capacidad total efectiva entre los terminales, (b) la carga almacenada en cada uno de los condensadores, y (c) la energía total almacenada.

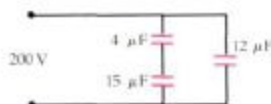
Figura 21-17 Problema 28.



29. Calcular para el dispositivo de la figura 21-18, (a) la capacidad total efectiva entre los terminales, (b) la carga alma-

cenada en cada uno de los condensadores, y (c) la energía total almacenada.

Figura 21-18 Problema 29.



30. (a) Demostrar que la capacidad equivalente de los dos condensadores en serie puede escribirse en la forma

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(b) Utilizar esta expresión para demostrar que $C_{\text{eq}} < C_1$ y $C_{\text{eq}} < C_2$. (c) Demostrar que la capacidad equivalente de tres condensadores en serie es

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}$$

31. Un condensador de 20 pF se carga hasta 3,0 kV y luego se conecta en paralelo con un condensador descargado de 50 pF. (a) ¿Qué carga adquiere cada uno de los condensadores? (b) Calcular la energía inicial almacenada en el condensador de 20 pF y la energía final almacenada en los dos condensadores. ¿Se pierde o se gana energía al conectar los dos condensadores?

32. Hallar todas las capacidades efectivas posibles que pueden obtenerse utilizando tres condensadores de 1,0; 2,0 y 4,0 μF en cualquier combinación que incluya a los tres o dos cualesquiera de los condensadores.

33. Se conectan tres condensadores idénticos de modo que su capacidad máxima equivalente es 15 μF. (a) Describir esta combinación. (b) Hallar las otras tres combinaciones posibles utilizando siempre los tres condensadores y sus capacidades equivalentes.

34. Dos condensadores de capacidad $C_1 = 4 \mu\text{F}$ y $C_2 = 12 \mu\text{F}$ se encuentran conectados en serie y alimentados por una batería a 12 V. Se desconectan cuidadosamente sin que se descarguen y se conectan en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos. (a) Calcular la diferencia de potencial a través de cada uno de los condensadores después de ser conectados. (b) Hallar la energía inicial y final almacenada en los condensadores.

35. Repetir el problema 34 para los dos condensadores conectados en paralelo a través de la batería de 12 V y luego conectados de modo que la superficie positiva de uno de los condensadores esté conectada a la superficie negativa del otro.

36. La carga de dos condensadores uno de 100 pF y otro de 400 pF es de 2,0 kV. Están desconectados de la fuente de voltaje y conectados entre sí en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos. (a) Calcular la diferencia de potencial resultante a través de cada uno de los condensadores. (b) Calcular la energía perdida al realizar las conexiones.

37. Resolver el problema 36 para el caso en que los condensadores estén conectados de modo que el lado negativo de uno de ellos esté conectado al positivo del otro y hayan sido cargados hasta 2,0 kV.

38. Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad C_0 y una separación entre las placas d . Se insertan entre las placas, como se indica en la figura 21-19, dos láminas dieléctricas de constantes κ_1 y κ_2 , cada una de ellas de espesor $\frac{1}{2}d$ y de la misma área que las placas. Cuando la carga libre sobre las placas es Q , hallar (a) el campo eléctrico en cada dieléctrico y (b) la diferencia de potencial entre las placas. (c) Demostrar que la nueva capacidad viene dada por

$$C = \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_0$$

(d) Demostrar que este sistema puede considerarse como formado por dos condensadores de espesor $\frac{1}{2}d$ conectados en serie.

Figura 21-19 Problema 38.

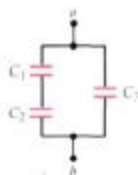


39. La membrana del axón de una célula nerviosa es una delgada capa cilíndrica de radio $r = 10^{-5}$ m, longitud $L = 0,1$ m y espesor $d = 10^{-8}$ m. La membrana tiene una carga positiva sobre uno de sus lados y una carga negativa sobre el otro y actúa como un condensador de placas paralelas de área $A = 2\pi rL$ y separación d . Su constante dieléctrica es aproximadamente $\kappa = 3$. (a) Determinar la capacidad de la membrana. Si la diferencia de potencial a través de la membrana es 70 mV, determinar (b) la carga sobre cada lado de la membrana y (c) el campo eléctrico a través de la membrana.

40. Un condensador de placas paralelas tiene las placas con área A y separación entre ellas d . Se inserta entre las placas una lámina metálica de espesor t y área A . (a) Demostrar que la capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A / (d-t)$, independientemente del sitio en donde se coloque la lámina de metal. (b) Demostrar que este dispositivo puede considerarse como un condensador de separación a en serie con otro de separación b , siendo $a + b + t = d$.

41. En la figura 21-20 $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$ y $C_3 = 3,5 \mu\text{F}$. (a) Hallar la capacidad equivalente de esta combinación. (b) Si las tensiones de ruptura de cada uno de los condensadores son $V_1 = 100$ V, $V_2 = 50$ V y $V_3 = 400$ V, ¿qué tensión máxima puede aplicarse entre los puntos a y b ?

Figura 21-20 Problema 41.



42. Se rellena un condensador de placas paralelas con dos dieléctricos de igual tamaño, como puede verse en la figura 21-21. Demostrar (a) que este sistema puede considerarse

como dos condensadores de área $\frac{1}{2}A$ conectados en paralelo y (b) que la capacidad se ve aumentada en el factor $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

Figura 21-21 Problema 42.



43. Los condensadores antiguos, denominados botellas de Leyden, eran realmente botellas de vidrio recubiertas interior y exteriormente con láminas metálicas. Supóngase que la botella es un cilindro de 40 cm de alto con unas paredes de 2,0 mm de espesor y cuyo diámetro interior es de 8 cm. Desprecie los efectos de los bordes. (a) Hallar la capacidad de esta botella si la constante dieléctrica del vidrio es 5,0. (b) ¿Qué carga máxima puede adquirir sin romperse si la resistencia dieléctrica del vidrio es 15 MV/m.

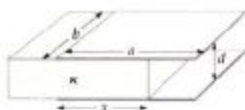
44. A un condensador de placas paralelas de área de las placas A y separación x se le suministra una carga Q y luego se separa de la fuente de carga. (a) Hallar la energía electrostática almacenada en función de x . (b) Hallar el aumento de energía dU debido al aumento de la separación de las placas dx a partir de $dU = (dU/dx)dx$. (c) Si F es la fuerza ejercida por una placa sobre la otra, el trabajo realizado para mover una placa la distancia dx es $F dx = dU$. Demostrar que $F = Q^2/2\epsilon_0 A$. (d) Demostrar que la fuerza hallada en la parte (c) es igual a $\frac{1}{2}EQ$, siendo Q la carga en cada placa y E el campo eléctrico existente entre ellas. Estudiar la razón que justifique la presencia del factor $\frac{1}{2}$ en este resultado.

45. Diseñar un circuito de condensadores que tenga una capacidad de $2 \mu\text{F}$ y una tensión de ruptura de 400 V utilizando todos los condensadores de $2 \mu\text{F}$ que se necesiten, sabiendo que todos ellos poseen una tensión de ruptura de 100 V.

46. Un condensador de $1,2 \mu\text{F}$ se carga a 30 V. Después de la carga, se desconecta de la fuente de voltaje y se conecta a otro condensador cargado. El voltaje final es de 10 V. (a) ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador? (b) ¿Cuánta energía se perdió al realizar la conexión?

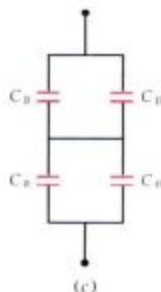
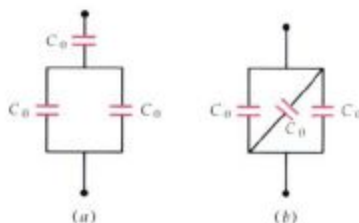
47. Un condensador de placas paralelas rectangulares de longitud a y anchura b posee un dieléctrico de igual anchura insertado parcialmente una distancia x entre las placas como se indica en la figura 21-22. (a) Determinar la capacidad en función de x . Despreciar los efectos de los bordes. (b) Comprobar que la respuesta ofrece los resultados esperados para $x = 0$ y $x = a$.

Figura 21-22 Problema 47.



48. Determinar la capacidad de cada una de las redes de condensadores indicadas en la figura 21-23.

Figura 21-23 Problema 48.



49. Cinco condensadores idénticos de capacidad C_0 están conectados en un circuito de puente como indica la figura 21-24. (a) ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos a y b . (b) Determinar la capacidad equivalente si la capacidad entre a y b cambia a $10 C_0$.

Figura 21-24 Problema 49.



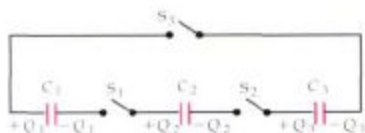
50. Un condensador de placas paralelas con placas de área 500 cm^2 se carga con una diferencia de potencial V y después se desconecta de la fuente de voltaje. Cuando las placas se separan 0,4 cm, el voltaje entre ellas se incrementa en 100 V. (a) ¿Cuánto vale la carga Q depositada sobre la placa positiva del condensador? (b) ¿En cuánto ha crecido la energía almacenada en el condensador por causa del movimiento de las placas?

51. Diseñar un condensador de placas paralelas con aire entre las placas que pueda cargarse hasta una diferencia de potencial máxima de 1000 V. (a) ¿Cuál es la mínima separación posible entre las placas? (b) ¿Qué área mínima deben tener las placas del condensador?

52. Tres condensadores, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$ y $C_3 = 6 \mu\text{F}$, conectados en paralelo se cargan con una fuente de 200 V. A continuación se desconectan de la fuente y se conectan de nuevo las placas positivas con las negativas como indica la fi-

gura 21-25. (a) ¿Cuál es el voltaje a través de cada uno de los condensadores con los interruptores S_1 y S_2 cerrados, pero con el S_3 abierto? (b) Después de cerrar S_3 , ¿cuál es la carga final de cada condensador? (c) Determinar el voltaje a través de cada condensador después de cerrar S_3 .

Figura 21-25 Problema 52.



53. Un condensador de placas paralelas se construye introduciendo una capa de dióxido de silicio de espesor 5×10^{-4} m entre dos películas conductoras. La constante dieléctrica del dióxido de silicio es 3,8 y su resistencia dieléctrica 8×10^7 V/m. (a) ¿Qué voltaje puede aplicarse a través de este condensador sin que se produzca la ruptura dieléctrica? (b) ¿Cuál debe ser el área superficial de la capa de dióxido de silicio para que la capacidad del condensador sea de 100 pF? (c) Estimar el número de estos condensadores que pueden incluirse en un cuadrado de 1 cm por 1 cm.

54. Estimar la energía eléctrica almacenada en la atmósfera si el campo eléctrico terrestre se extiende hacia arriba hasta 1000 m con una magnitud media de 200 V/m. *Indicación:* Considerar la atmósfera como una capa rectangular de área igual a la superficie terrestre. ¿Por qué?

55. Queremos construir un condensador de placas paralelas separadas por aire capaz de almacenar 100 kJ de energía. (a) ¿Qué volumen mínimo debe existir entre las placas del condensador? (b) Si disponemos de un dieléctrico que pueda resistir 3×10^6 V/m y su constante dieléctrica es 5, ¿qué volumen de este dieléctrico situado entre las placas del condensador se necesitará para almacenar 100 kJ de energía?

56. Dos condensadores idénticos, de placas paralelas y capacidad 4 μ F cada uno, se conectan en serie a través de una batería de 24 V. (a) ¿Cuál es la carga de cada condensador? (b) ¿Cuál es la energía total almacenada de los condensadores? Un dieléctrico de constante 4,2 se inserta entre las placas de uno de los condensadores mientras la batería está todavía conectada. Una vez insertado el dieléctrico, (c) ¿cuál es la carga sobre cada condensador? (d) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada condensador? (e) ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores?

57. Dos condensadores de placas paralelas C_1 y C_2 se conectan en paralelo. Los condensadores son idénticos excepto que C_2 tiene un dieléctrico entre sus placas. El sistema se carga mediante una fuente con una diferencia de potencial V y luego se desconecta. (a) ¿Cuál es la carga de cada condensador? (b) ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores? (c) El dieléctrico se extrae de C_2 . ¿Cuál es la energía total almacenada de los condensadores? (d) ¿Cuál es el voltaje final a través de los dos condensadores?

58. Determinar la capacidad del condensador de placas paralelas indicado en la figura 21-26.

Figura 21-26 Problema 58.



Nivel III

59. Dos condensadores de placas paralelas tienen la misma separación e igual área superficial. La capacidad de cada uno de ellos es inicialmente 10 μ F. Insertando un dieléctrico en el espacio completo de uno de los condensadores, éste incrementa su capacidad a 35 μ F. Los condensadores de 35 μ F y 10 μ F se conectan en paralelo y se cargan con una diferencia de potencial de 100 V. La fuente de voltaje se desconecta a continuación. (a) ¿Cuál es la energía almacenada de este sistema? (b) ¿Cuáles son las cargas de los dos condensadores? (c) Se extrae el dieléctrico del condensador. ¿Cuáles son las nuevas cargas sobre las placas de los condensadores? (d) ¿Cuál es la energía final almacenada por el sistema?

60. Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se separa de la fuente de carga. Se inserta entonces como se indica en la figura 21-27 una lámina dieléctrica de constante $\kappa = 2$, espesor d y área $\frac{1}{2}A$. Supongamos que es σ_1 la densidad de carga libre en la superficie conductor-dieléctrico y σ_2 la densidad de carga en la superficie conductor-aire. (a) ¿Por qué debe tener el campo eléctrico el mismo valor en el interior del dieléctrico que en el espacio libre entre las placas? (b) Demostrar que $\sigma_1 = 2\sigma_2$. (c) Demostrar que la nueva capacidad es $3\epsilon_0 A/2d$ y que la nueva diferencia de potencial es $\frac{1}{3}V$.

Figura 21-27 Problema 60.



61. Dos condensadores idénticos de placas paralelas de 10 μ F reciben cargas iguales de 100 μ C cada uno y luego se separan de la fuente de carga. Mediante un cable se conectan sus placas positivas y mediante otro sus placas negativas. (a) ¿Cuál es la energía almacenada por el sistema? Un dieléctrico de constante 3,2 se inserta entre las placas de uno de los condensadores de tal modo que llena por completo la región entre las placas. (b) ¿Cuál es la carga final sobre cada condensador? (c) ¿Cuál es la energía final almacenada del sistema?

62. Un condensador esférico está formado por dos cortezas esféricas concéntricas y delgadas, de radios R_1 y R_2 . (a) Demostrar que la capacidad viene dada por

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$$

(b) Demostrar que cuando los radios de las cortezas son casi iguales, la capacidad del sistema viene dada aproximadamente por la expresión correspondiente a un condensador de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, en donde A es el área de la estera y $d = R_2 - R_1$.

63. Un condensador de placas paralelas cuyas placas tienen un área de 1,0 m² y la separación es de 0,5 cm tiene una pla-

ca de vidrio de igual área y espesor situada entre las placas. El vidrio tiene una constante dieléctrica de 5,0. El condensador se carga hasta una diferencia de potencia 12,0 V y luego se separa de su fuente de carga. ¿Cuánto trabajo se necesita para retirar la lámina de vidrio del interior del condensador?

64. Un condensador esférico tiene una esfera interior de radio R_1 con carga $+Q$ y una corteza esférica exterior de radio R_2 con carga $-Q$. (a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio. (b) ¿Cuánta energía existe en el volumen de la corteza esférica de radio r , espesor dr , y volumen $4\pi r^2 dr$ existente entre los conductores. (c) Integrar la expresión obtenida en la parte (b) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con el obtenido a partir de $U = \frac{1}{2}QV$.

65. Un condensador cilíndrico se compone de un hilo largo de radio R_1 y longitud L con una carga $+Q$ y una corteza cilíndrica exterior de radio R_2 , longitud L y carga $-Q$. (a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio. (b) ¿Cuánta energía existe en la corteza cilíndrica de radio r espesor dr y volumen $2\pi rL dr$ existente entre los conductores? (c) Integrar la expresión obtenida en la parte (b) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con la obtenida a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$.

66. Una esfera de carga de radio R tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. (a) Hallar la densidad de energía electrostática a una distancia r del centro de la carga para $r < R$ y para $r > R$. (b) Hallar la energía de una corteza esférica de volumen $4\pi r^2 dr$ para $r < R$ y para $r > R$. (c) Calcular la energía electrostática total integrando las expresiones obtenidas en la parte (b) y demostrar que el resultado puede escribirse en la forma $U = \frac{3}{5}kQ^2/R$. Explicar por qué este resultado es mayor que el correspondiente a un conductor esférico de radio R que posea una carga total Q .

67. Un condensador está formado por dos cilindros concéntricos de radios a y b ($b > a$), siendo su longitud $L \gg b$. El cilindro interior posee una carga $+Q$ y el cilindro exterior una carga $-Q$. La región comprendida entre los dos cilindros se llena con un dieléctrico de constante κ . (a) Determinar la diferencia de potencial que existe entre los dos cilindros. Hallar la densidad de la carga σ_1 sobre (b) el cilindro interior y sobre (c) el cilindro exterior. Determinar la densidad de carga ligada σ_b sobre (d) la superficie cilíndrica interior del dieléctrico y (e) la superficie exterior del dieléctrico. (f) Calcular la

energía electrostática total almacenada. (g) Si el dieléctrico se desplaza sin fricción, ¿cuánta energía mecánica se necesitaría para extraer la capa cilíndrica dieléctrica?

68. Una esfera conductora de radio R_1 posee una carga libre Q . La esfera está rodeada por una capa dieléctrica esférica concéntrica sin carga, de radio interior R_1 , radio exterior R_2 y constante dieléctrica κ . El sistema está alejado de otros objetos. (a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio. (b) ¿Cuál es el potencial de la esfera conductora relativa a $V=0$ en el infinito? (c) Determinar la energía electrostática total del sistema.

69. Un condensador de placas paralelas posee un dieléctrico variable. Sea A el área de las placas e y_0 su separación. La constante dieléctrica viene dada en función de y por la expresión

$$\kappa = 1 + \frac{3}{y_0}y$$

La placa del fondo se encuentra en $y=0$ y la superior en $y=y_0$. (a) ¿Cuál es la capacidad? (b) Determinar la densidad de carga inducida sobre las superficies del dieléctrico. (c) Utilizar la ley de Gauss para determinar la densidad de carga volúmica inducida $\rho(y)$ dentro de este dieléctrico. (d) Integrar la expresión para la densidad de carga volúmica determinada en (c) para el dieléctrico y demostrar que la carga ligada inducida total, incluyendo la que existe sobre las superficies, es cero.

70. Un condensador posee placas rectangulares de longitud a y anchura b . La placa superior está inclinada un pequeño ángulo como indica la figura 21-28. La separación de las placas varía de $s=y_0$ a la izquierda a $s=2y_0$ a la derecha, siendo y_0 mucho menor que a o b . Calcular la capacidad utilizando bandas de anchura dx y de longitud b que actúan como condensadores diferenciales aproximados de área $b dx$ y separación $s=y_0 + (y_0/a)x$ conectados en paralelo.

Figura 21-28 Problema 70.



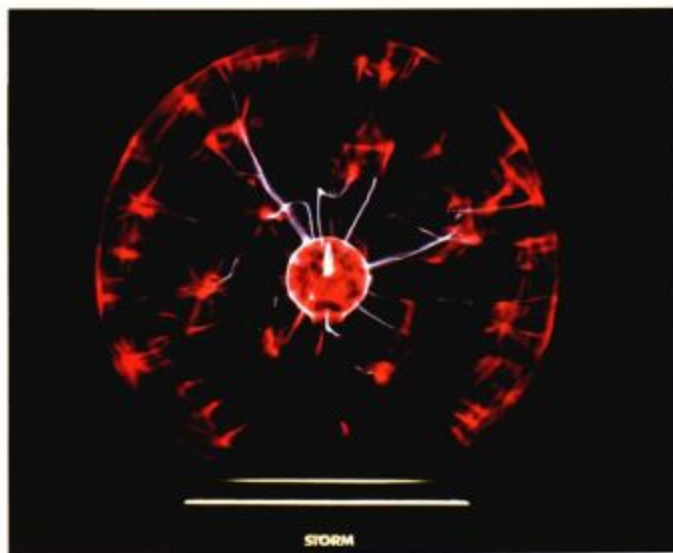
Capítulo 22

Corriente eléctrica

Globo de plasma que modeliza «el ojo de la tormenta». En los globos de plasma se aplican voltajes de 3 kV a 8 kV y frecuencias de 20 kHz a 50 kHz entre el centro del globo y la capa exterior en contacto con la tierra. La región interior está llena de una mezcla de gases inertes. El voltaje aplicado ioniza parcialmente los gases, creando filamentos de plasma que conducen la corriente. Los destellos coloreados son trayectorias a lo largo de las cuales tiene lugar la ionización.

Los gases inertes se ionizan más fácilmente que muchos gases no inertes—es más fácil conseguir rupturas dieléctricas en globos de plasma que, por ejemplo, en la atmósfera de nitrógeno-oxígeno. La facilidad de ionización con los voltajes aplicados en «el ojo de la tormenta» se visualiza en la capacidad del globo para soportar trayectorias de ionización múltiples y simultáneas. Como cada una de las trayectorias de descarga tiene la misma polaridad instantánea, las trayectorias se repelen entre sí.

Al tocar la corteza exterior, las regiones de descarga eléctrica se aproximan a la mano por ser el cuerpo humano mejor conductor que la corteza exterior de vidrio, y por tanto, se convierte en una línea de mínima resistencia hasta el suelo por lo que la carga fluye sobre la corteza. La corriente que pasa a través del cuerpo es suficientemente pequeña para pasar desapercibida.



Cuando se enciende una luz, conectamos el filamento metálico de la bombilla a través de una diferencia de potencial, lo cual hace fluir la carga eléctrica por el filamento de un modo parecido a como la diferencia de presión en una manga de riego hace fluir el agua por su interior. El flujo de cargas constituye la corriente eléctrica. Usualmente asociamos las corrientes al movimiento de cargas en cables conductores, pero la corriente eléctrica surge de cualquier flujo de carga. Un ejemplo de corriente no asociada a un cable conductor es el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos, tal como ocurre en un monitor de vídeo o un haz de iones cargados procedentes de un acelerador. Después de una discusión sobre la resistencia eléctrica y la ley de Ohm consideraremos los aspectos energéticos de las corrientes eléctricas. A continuación analizaremos las asociaciones de resistencias en paralelo y en serie, y el capítulo concluye con una breve discusión sobre el modelo microscópico clásico de la conducción eléctrica.

22-1 Corriente y movimiento de cargas

La **corriente eléctrica** se define como el flujo de cargas eléctricas que, por unidad de tiempo, atraviesan un área transversal. La figura 22-1 muestra un segmento de un alambre conductor de corriente en el cual los portadores de cargas se mue-

ven con cierta velocidad media pequeña. Si ΔQ es la carga que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt , la corriente, o intensidad de la corriente es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad 22-1$$

Corriente eléctrica

La unidad SI de intensidad es el **amperio** (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad 22-2$$

Se toma como sentido de la corriente el del flujo de cargas positivas. Esta convención fue establecida antes de que se conociera que los electrones libres, negativamente cargados, son las partículas que realmente se mueven y producen la corriente en un alambre conductor. El movimiento de los electrones cargados negativamente en una dirección es equivalente al flujo de cargas positivas en sentido opuesto. Así pues, los electrones se mueven en sentido opuesto a la corriente. Sin embargo, no todas las corrientes eléctricas se producen por electrones que fluyen en un alambre. Por ejemplo, un haz de protones procedente de un acelerador produce una corriente en el sentido del movimiento de los protones cargados positivamente. En la electrólisis, la corriente está producida por el movimiento de iones positivos en el sentido de la corriente, más el flujo de iones negativos en sentido contrario. Puesto que estas partículas se mueven en sentidos opuestos, ambas producen corriente en el mismo sentido. En casi todas las aplicaciones, el movimiento de cargas negativas hacia la izquierda es indistinguible del movimiento de cargas positivas hacia la derecha. Podemos pensar siempre que la corriente es el movimiento de cargas positivas en el sentido de la corriente y recordar (si es necesario) que en los conductores, por ejemplo, los electrones se mueven en sentido opuesto al de la corriente.

El movimiento real de los electrones libres en un alambre conductor es muy complicado. Si en el alambre no existe campo eléctrico, estos electrones se mueven con direcciones aleatorias y velocidades relativamente grandes debido a su energía térmica. Como los vectores velocidad de los electrones están orientados al azar, la velocidad media debida a esta energía térmica es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, por ejemplo, conectado el cable a una batería que origina una diferencia de potencial a lo largo del alambre, los electrones libres experimentan una aceleración instantánea debida a la fuerza $-eE$. Los electrones adquieren una pequeña velocidad en dirección opuesta al campo, pero la energía cinética que adquieren es disipada rápidamente por choques con los iones fijos del alambre. Los electrones son de nuevo acelerados por el campo. El resultado neto de esta aceleración y disipación de energía repetidas es que los electrones poseen una pequeña **velocidad de desplazamiento** opuesta al campo eléctrico que se superpone a su velocidad grande, pero aleatoria, y de origen térmico. El comportamiento de los electrones en un metal es semejante al de las moléculas de un gas, tal como el aire. En el aire en calma, las moléculas de gas se mueven con velocidades instantáneas grandes entre cada choque, pero la velocidad vectorial media es cero. Cuando existe una brisa, las moléculas de aire tienen una pequeña velocidad de desplazamiento en la dirección de la brisa superpuesta a las velocidades instantáneas que son mucho mayores. De igual modo, cuando no hay corriente en un conductor, los electrones se mueven en direcciones aleatorias con velocidades muy grandes a causa de la energía térmica. Cuando hay corriente, los electrones poseen una pequeña velocidad de desplazamiento superpuesta a las velocidades térmicas, mucho mayores, pero aleatorias.

Consideremos una corriente en un alambre conductor de sección transversal A . Sea n el número de partículas libres portadoras de carga por unidad de volumen. Suponemos que cada partícula transporta una carga q y se mueve con una velocidad de desplazamiento v_d . En el tiempo Δt , todas las partículas

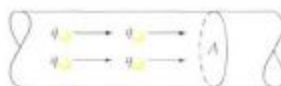


Figura 22-1 Segmento de un alambre portador de corriente. Si ΔQ es la cantidad de carga que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt , la corriente posee la intensidad $I = \Delta Q/\Delta t$.

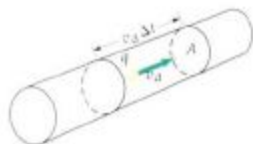


Figura 22-2 En el tiempo Δt , todas las cargas contenidas en el volumen sombreado pasan a través de A . Si existen n portadores de carga por volumen unidad, cada una de carga q , la carga total de este volumen es $\Delta Q = nqv_d A \Delta t$, en donde v_d es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga. La corriente total es, por tanto, $I = \Delta Q / \Delta t = nqv_d A$.

contenidas en el volumen $A v_d \Delta t$, sombreado en la figura 22-2, pasan a través del área A . El número de partículas en este volumen es $n A v_d \Delta t$ y la carga total es

$$\Delta Q = q n A v_d \Delta t$$

La intensidad de la corriente es, por tanto

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q A v_d \quad 22-3$$

La ecuación 22-3 puede utilizarse para calcular la corriente debida al flujo de cualquier partícula cargada, simplemente sustituyendo la velocidad de desplazamiento v_d por la velocidad de la partícula.

Podemos darnos una idea del orden de magnitud de la velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre conductor sustituyendo las magnitudes típicas en la ecuación 22-3.

Ejemplo 22-1

¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre de cobre típico de radio 0,815 mm que transporta una corriente de 1 A?

Si admitimos que existe un electrón libre por átomo de cobre, la densidad de los electrones libres es la misma que la densidad atómica n_a , relacionada con la densidad ordinaria ρ , el número de Avogadro N_A y la masa molecular M por la expresión

$$n_a = \frac{\rho N_A}{M}$$

Para el cobre, $\rho = 8,93 \text{ g/cm}^3$ y $M = 63,5 \text{ g/mol}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{(8,93 \text{ g/cm}^3) (6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})}{63,5 \text{ g/mol}} \\ &= 8,47 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 \end{aligned}$$

La densidad electrónica es, por tanto,

$$n = 8,47 \times 10^{22} \text{ electrones/cm}^3 = 8,47 \times 10^{26} \text{ electrones/m}^3$$

La velocidad de desplazamiento será:

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{I}{A n e} = \frac{1 \text{ C/s}}{\pi (0,000815 \text{ m})^2 (8,47 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}) (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})} \\ &\approx 3,54 \times 10^{-5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Vemos que las velocidades de desplazamiento típicas son del orden de 0,01 mm/s, es decir, muy pequeñas.

Ejercicio

¿Cuánto tiempo tardará un electrón en desplazarse una distancia de 1 m, si su velocidad de desplazamiento es $3,54 \times 10^{-5} \text{ m/s}$? (Respuesta: 7,85 h)

A primera vista parece sorprendente que la luz eléctrica surja instantáneamente al cerrar el interruptor, ya que los electrones se desplazan por el alambre a velocidades tan pequeñas que tardarían horas en llegar desde el interruptor a la lámpara. Una analogía con el agua de una manguera puede ser útil. Al dar paso al agua por una manga de riego, larga e inicialmente vacía, hay que esperar varios segundos para que el agua se desplace desde la llave hasta el extremo opuesto de la manga. Sin embargo, si la manguera está ya llena de agua, ésta

emerge casi instantáneamente. Debido a la presión del agua en el grifo, la porción de líquido más próxima es impulsada por aquella y ésta impulsa a la porción vecina y así sucesivamente hasta que el agua se derrama por la boquilla de la manguera. Esta onda de presión se desplaza por la manguera con la velocidad del sonido en el agua (si la manguera es rígida), y el agua alcanza rápidamente un flujo estacionario. La densidad del agua durante el flujo estacionario permanece constante en el tiempo. El agua que escapa por una porción de la manguera es sustituida por un cantidad igual de agua que penetra en esa porción por el otro extremo. El comportamiento de los cables llenos de electrones libres es semejante. Al cerrar el interruptor de la luz, se propaga a lo largo del cable un campo eléctrico con la velocidad de la luz y los electrones libres en todo el cable adquieren casi inmediatamente su velocidad de desplazamiento. La densidad de carga dentro del alambre portador de la corriente permanece constante en el tiempo. La carga que sale de una porción de alambre viene reemplazada por una carga igual que entra en la misma porción por el otro extremo. Por ello, la carga inicia el movimiento a través del filamento de la lámpara casi inmediatamente después de que el interruptor se ha pulsado. El transporte de una cantidad significativa de carga en un alambre se verifica, no por causa de unas pocas cargas que se mueven rápidamente por el alambre, sino por un gran número de cargas que se desplazan por el conductor lentamente.

Ejemplo 22-2

En un acelerador de partículas, un haz de protones de 5 MeV y radio 1,5 mm transporta una corriente de intensidad 0,5 mA. (a) Determinar el número de protones por unidad de volumen en el haz. (b) Al incidir el haz contra un blanco, ¿cuántos protones chocan contra el blanco en un segundo?

(a) Según la ecuación 22-3, tenemos

$$n = \frac{I}{qAv}$$

en donde q es la carga sobre cada protón, v la velocidad de los protones y A el área transversal del haz. La energía cinética de cada protón es 5 MeV:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = 5 \text{ MeV} = 5 \times 10^6 \text{ eV} \times \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 8 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Como la masa de un protón es $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, resulta para la velocidad el valor:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(8 \times 10^{-13} \text{ J})}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 3,10 \times 10^7 \text{ m/s}$$

El número de protones por unidad de volumen del haz es, por tanto,

$$\begin{aligned} n &= \frac{I}{qAv} \\ &= \frac{0,5 \times 10^{-3} \text{ A}}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C/protón}) \pi (1,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 (3,10 \times 10^7 \text{ m/s})} \\ &= 1,43 \times 10^{13} \text{ protones/m}^3 \end{aligned}$$

(b) El número de protones que choca contra el blanco en el tiempo Δt es el número contenido en el volumen $A v \Delta t$, o sea, $n A v \Delta t$. Para $\Delta t = 1 \text{ s}$, este número es

$$\begin{aligned} N &= n A v \Delta t \\ &= (1,43 \times 10^{13} \text{ protones/m}^3) \pi (1,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 (3,10 \times 10^7 \text{ m/s}) (1 \text{ s}) \\ &= 3,13 \times 10^{13} \text{ protones} \end{aligned}$$



Un haz de 1000 A de electrones de 3 MeV, choca contra una placa de lucita. La placa adquiere una carga y se descarga produciendo el espectacular diagrama que muestra la fotografía. El haz de electrones que dura aproximadamente 1 μs , ioniza las moléculas de aire, las cuales producen un resplandor azulado al recombinarse.

Podemos comprobar este resultado teniendo en cuenta que, según la ecuación 22-3,

$$nAv \Delta t = \frac{I \Delta t}{q} = \frac{Q}{q}$$

en donde $Q = I \Delta t$ es la carga total que choca contra el blanco. Como la intensidad es 0,5 mA, la carga total que choca en 1 s es 0,5 mC. El número de protones es, por tanto,

$$N = \frac{Q}{q} = \frac{0,5 \times 10^{-3} \text{ C}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C/protón}} = 3,13 \times 10^{15} \text{ protones}$$

22-2 Ley de Ohm y resistencia

En nuestro estudio de los conductores en la electrostática razonábamos que el campo eléctrico del interior de un conductor debe ser cero en el equilibrio electrostático. Si esto no fuese así, las cargas libres en el interior de un conductor se moverían. Ahora vamos a considerar situaciones de equilibrio no electrostático, en las cuales la carga libre se mueve en un conductor. Cuando un conductor transporta una corriente, existe un campo eléctrico en su interior que ejerce una fuerza sobre las cargas libres. Como el campo E tiene la dirección de la fuerza que actúa sobre una carga positiva, y la dirección de la corriente es la de un flujo de cargas positivas, la dirección de la corriente coincide con la del campo eléctrico. En la figura 22-3 se muestra un segmento de alambre de longitud ΔL y área de sección transversal A por el cual circula una corriente I . Como el campo eléctrico está siempre dirigido de las regiones de mayor potencial hacia las regiones de menor potencial, el potencial en el punto a es mayor que en el punto b . Si el segmento es lo suficientemente corto para despreciar cualquier variación del campo eléctrico E a lo largo de la distancia ΔL la diferencia de potencial V entre los puntos a y b es*

$$V = V_a - V_b = E \Delta L \quad 22-4$$

Para la mayor parte de los materiales,

La intensidad de corriente en una porción de alambre es proporcional a la diferencia de potencial que existe entre los extremos de esa porción.

Este resultado experimental se conoce con el nombre de **ley de Ohm**. La constante de proporcionalidad se escribe en la forma $1/R$, siendo R la **resistencia**:

$$I = \left(\frac{1}{R} \right) V$$

o sea,

$$R = \frac{V}{I} \quad 22-5$$

Definición de resistencia

La ecuación 22-5 es una definición general de la resistencia entre dos puntos en función de la caída de potencial V entre los mismos. La unidad SI de resistencia, el voltio por amperio, se denomina ohmio (Ω):

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A} \quad 22-6$$

La resistencia de un material depende de su longitud, del área de su sección transversal, del tipo de material, y de la temperatura, pero para los materiales que

* De nuevo usamos V en vez de ΔV para la diferencia de potencial (que en este caso es una disminución de potencial) para simplificar la notación.

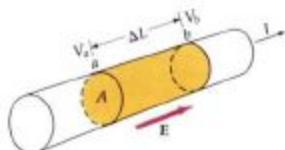


Figura 22-3 Segmento de alambre portador de una corriente de intensidad I . La diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico por la expresión $V_a - V_b = E \Delta L$.

obedecen la ley de Ohm, no depende de la intensidad de corriente I ; es decir, la relación V/I es independiente de I . Estos materiales, en los que se incluyen la mayor parte de los metales, se denominan **materiales óhmicos**. En los materiales óhmicos, la caída de potencial a través de una porción de conductor es proporcional a la corriente:

$$V = IR \quad R \text{ constante}$$

22-7

Ley de Ohm

La ecuación 22-7 con la condición de R constante constituye el enunciado matemático de la ley de Ohm.

En los **materiales no óhmicos**, la relación V/I depende de la corriente I , de modo que ésta no es proporcional a la diferencia de potencial. La resistencia R , definida por la ecuación 22-5, depende de la intensidad de la corriente I . La figura 22-4 muestra la diferencia de potencial V en función de la intensidad de la corriente I para materiales óhmicos y no óhmicos. En los óhmicos (curva inferior) la relación es lineal, de modo que $R = V/I$ no depende de I ; pero en los materiales no óhmicos (curva superior), la relación no es lineal y $R = V/I$ depende de I . La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza como las leyes de Newton o los principios termodinámicos, sino más bien una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales.

Ejercicio

Un alambre de resistencia 3Ω transporta una corriente de $1,5 \text{ A}$. ¿Cuál es la caída de potencial a través del alambre? (Respuesta: $4,5 \text{ V}$)

La resistencia de un alambre conductor es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área transversal:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

22-8

siendo ρ una constante de proporcionalidad llamada **resistividad** del material conductor. La unidad de resistividad es el ohmio-metro ($\Omega \cdot \text{m}$).

Ejemplo 22-3

Un alambre de nicrom (resistividad $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$) tiene un radio de $0,65 \text{ mm}$. ¿Qué longitud de alambre se necesita para obtener una resistencia de $2,0 \Omega$?

El área transversal de este alambre es

$$A = \pi r^2 = (3,14) (6,5 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 1,33 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Según la ecuación 22-8 tenemos

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{(2 \Omega)(1,33 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{10^{-6} \Omega \cdot \text{m}} = 2,66 \text{ m}$$

A veces nos referimos a un alambre como un conductor y otras veces como una resistencia, según la propiedad que deseamos destacar. El recíproco de la resistividad se denomina **conductividad**, σ :

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

22-9

* Los símbolos ρ y σ , utilizados en este capítulo para la resistividad y la conductividad, fueron utilizados en capítulos anteriores para representar la densidad de carga volumétrica y la densidad de carga superficial. Por ello, debe tenerse cuidado al usar estos símbolos para no caer en confusión. Usualmente, el contexto aclara cuál es su significado.

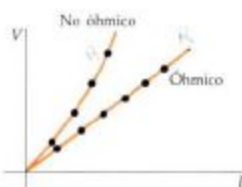


Figura 22-4 Gráficos de V en función de I para materiales óhmicos y no óhmicos. La resistencia $R = V/I$ es independiente de I para materiales óhmicos, como indica la pendiente constante de la línea.

La ecuación 22-8 puede escribirse en función de la conductividad, en lugar de la resistividad:

$$R = \frac{L}{\sigma A} \quad 22-10$$

Obsérvese que las ecuaciones 22-7 y 22-10 correspondientes a la conducción eléctrica y a la resistencia eléctrica son de la misma forma que las ecuaciones 16-13 ($\Delta T = IR$) y 16-14 ($R = \Delta x/kA$) correspondientes a la conducción térmica y a la resistencia térmica. En las ecuaciones eléctricas la diferencia de potencial V reemplaza a la diferencia de temperatura ΔT y la conductividad eléctrica σ reemplaza a la conductividad térmica k . Realmente Ohm obtuvo esta ley a partir de la semejanza entre la conducción de la electricidad y la conducción del calor.

La resistividad (y, por tanto, la conductividad) de cualquier metal depende de la temperatura. La figura 22-5 muestra la dependencia con la temperatura de la resistividad del cobre. Este gráfico es casi una línea recta, lo cual significa que la resistividad varía casi linealmente con la temperatura. (A muy bajas temperaturas esta linealidad no se cumple, lo cual no se muestra en la gráfica.) Suele darse la resistividad en tablas en función de su valor ρ_{20} a 20°C y a su vez el coeficiente de temperatura de la resistividad α que es la pendiente de la curva ρ en función de T . La resistividad a otra temperatura Celsius t_C viene dada entonces por

$$\rho = \rho_{20}[1 + \alpha(t_C - 20^\circ\text{C})] \quad 22-11$$

(Puesto que las temperaturas absolutas y Celsius difieren sólo en la selección del cero, la resistividad tiene la misma pendiente cuando se representa en función de t_C o de T .) La resistividad a 20°C y el coeficiente de temperatura α están relacionados en la tabla 22-1 para varios materiales. Esta tabla demuestra que existe un amplio margen de valores para la resistividad y que hay una diferencia enorme entre los conductores y los aislantes.

Los alambres utilizados para transportar corriente eléctrica se fabrican en tamaño estándar. El diámetro de la sección circular se indica por un número de calibre; los números más elevados corresponden a diámetros menores. La tabla 22-2 muestra los diámetros y secciones transversales de alambres para algunos calibres típicos. Los manuales dan la combinación ρ/A y R/L en ohmios por centímetro.

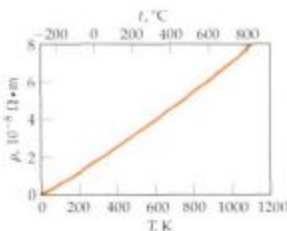


Figura 22-5 Gráfico de la resistividad ρ en función de la temperatura para el cobre.

Tabla 22-1 Resistividades y coeficientes de temperatura

Material	Resistividad ρ a 20°C, Ωm	Coficiente de temperatura α a 20°C, K^{-1}
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2,8 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5,5 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Hierro	10×10^{-8}	$5,0 \times 10^{-3}$
Plomo	22×10^{-8}	$4,3 \times 10^{-3}$
Mercurio	96×10^{-8}	$0,9 \times 10^{-3}$
Nicrom	100×10^{-8}	$0,4 \times 10^{-3}$
Carbono	3500×10^{-8}	$-0,5 \times 10^{-3}$
Germanio	0,45	$-4,8 \times 10^{-2}$
Silicio	640	$-7,5 \times 10^{-2}$
Madera	$10^9 - 10^{11}$	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Goma dura	$10^{13} - 10^{16}$	
Ámbar	5×10^{11}	
Azufre	1×10^{11}	

Tabla 22-2 Diámetros y secciones transversales de alambres típicos de cobre

Calibre	Diámetro a 20°C, mm	Área, mm^2
4	5,189	21,15
6	4,115	13,30
8	3,264	8,366
10	2,588	5,261
12	2,053	3,309
14	1,628	2,081
16	1,291	1,309
18	1,024	0,8235
20	0,8118	0,5176
22	0,6438	0,3255

Ejemplo 22-4

Calcular ρ/A en ohmios por metro en un alambre de cobre de calibre 14 que tiene un diámetro $d=1,63$ mm.

Según la tabla 22-1, la resistividad del cobre es

$$\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

El área transversal del alambre de calibre 14 es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0,00163 \text{ m})^2}{4} = 2,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Por tanto,

$$\frac{\rho}{A} = \frac{1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}}{2,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 8,1 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$$

Este ejemplo muestra que los cables de conexión de cobre utilizados en el laboratorio poseen resistencias muy pequeñas.

Las resistencias de uso normal en el laboratorio se construyen arrollando un alambre fino alrededor de un tubo aislante, con lo cual se dispone un alambre largo en un corto espacio. El carbono, que posee una resistividad alta, se utiliza normalmente en las resistencias de los equipos electrónicos. Estas resistencias se pintan a menudo con bandas de colores para indicar el uso de su resistencia.

Ejemplo 22-5

Suponiendo que el campo eléctrico sea uniforme, determinar su magnitud en un alambre de cobre de calibre 14 que transporta una corriente de 1 A.

De acuerdo con el ejemplo 22-4, la resistencia de un alambre de cobre del calibre 14 de 1 m de longitud es $8,1 \times 10^{-3} \Omega$. Según la ley de Ohm, la caída de voltaje a través de 1 m de este alambre es

$$V = IR = (1 \text{ A})(8,1 \times 10^{-3} \Omega) = 8,1 \times 10^{-3} \text{ V}$$

de modo que el campo eléctrico es

$$E = \frac{V}{\Delta L} = \frac{8,1 \times 10^{-3} \text{ V}}{1 \text{ m}} = 8,1 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

Obsérvese que el campo eléctrico en un cable conductor es muy pequeño.

Ejemplo 22-6

Determinar el porcentaje en que se incrementa la resistencia de un alambre de cobre cuando su temperatura crece de 20 a 30°C.

Según la ecuación 22-11 la variación fraccional de la resistividad es

$$\frac{\rho - \rho_{20}}{\rho_{20}} = \alpha (t_c - 20^\circ\text{C})$$

Según la tabla 22-1, para el cobre $\alpha = 3,9 \times 10^{-3}/\text{K}$ y $(t_c - 20^\circ\text{C}) = 10^\circ\text{C} = 10 \text{ K}$. Por tanto,

$$\frac{\rho - \rho_{20}}{\rho_{20}} = (3,9 \times 10^{-3}/\text{K})(10 \text{ K}) = 3,9 \times 10^{-2}$$

El incremento es, por tanto, del 3,9%.



Resistencias de carbón con el código de color sobre un panel de circuitos.

Ejercicio

¿Qué variación de temperatura producirá un incremento del 10% en la resistencia de una barra de hierro? (Respuesta: $\Delta T = 20$ K)

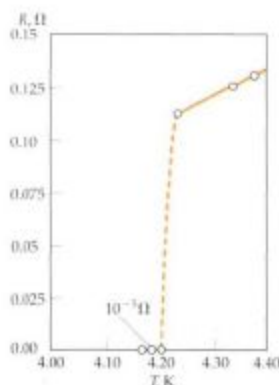


Figura 22-6 Gráfico obtenido por Kamerlingh Onnes de la resistencia del mercurio en función de la temperatura que muestra un súbito descenso de R a la temperatura crítica $T = 4.2$ K.



Un ohmímetro mide una resistencia nula a través de esta bobina superconductora formada por un compuesto de óxido de cobre-yttrio-bario a la temperatura del nitrógeno líquido.

Superconductividad

Existen muchos metales para los cuales la resistencia es cero por debajo de una determinada temperatura denominada **temperatura crítica** T_c . Este fenómeno, llamado **superconductividad**, fue descubierto en 1911 por el físico holandés H. Kamerlingh Onnes. La figura 22-6 muestra una representación hecha por él mismo de la resistencia del mercurio en función de la temperatura. La temperatura crítica correspondiente al mercurio es de 4,2 K. Las temperaturas críticas para otros superconductores están comprendidas en un margen desde 0,1 K para el hafnio y el iridio hasta 9,2 K para el niobio. Muchas aleaciones también son superconductoras. Por ejemplo, la aleación superconductora Nb_3Ge , descubierta en 1973, posee una temperatura crítica de 23,2 K, que fue la más alta conocida hasta 1986. A pesar del elevado coste del helio líquido que hierve a 4,2 K, y del inconveniente de refrigerar con él, se construyeron muchos imanes superconductores con estas sustancias, pues tales imanes no producen calor. A finales de 1986 y principios de 1987, se descubrió que ciertos óxidos cerámicos se convertían en superconductores a temperaturas mucho más altas. Por ejemplo, la temperatura crítica del óxido de cobre-bario-yttrio ($YBa_2Cu_3O_7$) es aproximadamente 92 K. Estos descubrimientos han revolucionado la ciencia de la superconductividad, pues el nitrógeno líquido, relativamente barato, que hierve a 77 K, puede utilizarse para enfriar este óxido. Sin embargo, existen múltiples problemas, tales como la fragilidad de la cerámica que hace difícil el uso de estos nuevos superconductores. La investigación continúa en búsqueda de nuevos materiales que sean superconductores a temperaturas todavía más elevadas.

La conductividad de un superconductor no puede definirse, pues su resistencia es cero. Por tanto, existe corriente en el superconductor aun cuando el campo eléctrico en el mismo sea cero. En efecto, se ha observado la persistencia durante años, de corrientes estacionarias sin pérdida aparente en anillos superconductores en los cuales no existía campo eléctrico. El fenómeno de la superconductividad no puede entenderse en función de la física clásica. En su lugar, es necesaria la mecánica cuántica, desarrollada en el siglo veinte. En los últimos capítulos de este texto discutiremos algunas ideas de la mecánica cuántica. La primera teoría fructífera de la superconductividad fue publicada por John Bardeen, Leon Cooper, y J. Robert Schrieffer en 1957 y hoy se conoce con el nombre de teoría BCS. Estos físicos fueron recompensados con el Premio Nobel de Física en 1972 por dichos trabajos. La teoría BCS describe bien los superconductores antiguos, pero aparentemente no basta para entender los nuevos superconductores de mayor temperatura. (Discutiremos la superconductividad y la teoría BCS con más detalle en el capítulo 39 de la versión más extensa de este libro.)

Cuestiones

1. El conductor a y el conductor b tienen la misma resistencia eléctrica y están hechos del mismo material. El conductor a tiene un diámetro doble que el del conductor b . ¿Cómo son entre sí las longitudes de ambos conductores?
2. En el estudio de la electrostática llegamos a la conclusión de que no existe ningún campo eléctrico dentro del material de un conductor. ¿Por qué ahora resulta posible estudiar los campos eléctricos dentro de un material conductor?

22-3 Energía en los circuitos eléctricos

Cuando existe una corriente eléctrica en un conductor, la energía eléctrica se convierte continuamente en energía térmica del mismo. El campo eléctrico en el conductor acelera los electrones libres durante un intervalo corto de tiempo, con lo que adquieren un incremento de energía cinética que rápidamente se convierte en energía térmica del conductor en los choques entre los electrones y la red de iones del conductor. Así pues, aunque los electrones continuamente adquieren energía del campo eléctrico, ésta se transfiere inmediatamente en forma de energía térmica del conductor y los electrones mantienen una velocidad de desplazamiento estacionaria en valor medio.

En general, cuando fluyen cargas positivas en el interior de un conductor, el flujo se realiza desde un potencial alto hasta otro bajo en el sentido del campo eléctrico. (Como es natural, los electrones cargados negativamente fluyen en sentido opuesto.) La carga pierde así energía potencial. Esta pérdida de energía potencial aparece en forma de energía cinética de los portadores de carga sólo momentáneamente antes de que se transfiera a los iones de la red por los choques, es decir, se invierte en un incremento de energía térmica del conductor.

Consideremos un segmento de alambre de longitud ΔL , y área transversal A , como indica la figura 22-7. En un intervalo de tiempo Δt , a través del área A_1 pasa la cantidad de carga ΔQ y entra en el segmento. Si el potencial en ese punto es V_1 , la carga posee una energía potencial igual a $\Delta Q V_1$. Durante ese intervalo de tiempo, una cantidad igual de carga abandona el segmento a través del área A_2 , en donde el potencial es V_2 . Esta carga saliente posee la energía potencial $\Delta Q V_2$ que es inferior a $\Delta Q V_1$. El efecto es el mismo que si la misma carga ΔQ entrase en el segmento al potencial alto V_1 y saliese con un potencial bajo V_2 , perdiendo por tanto energía potencial en el segmento según la expresión:

$$\Delta U = \Delta Q (V_2 - V_1) = \Delta Q (-V)$$

en donde $V = V_1 - V_2$ es la *disminución* de potencial a través del segmento. La energía perdida en este segmento del alambre es, por tanto,

$$-\Delta U = (\Delta Q) V$$

La pérdida de energía por unidad de tiempo es

$$-\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV$$

en donde $I = \Delta Q / \Delta t$ es la intensidad de la corriente. La energía perdida por unidad de tiempo es la potencia P disipada en el segmento conductor.

$$P = IV$$

22-12

Si I se expresa en amperios y V en voltios, la potencia perdida viene expresada en vatios. Esta expresión para la pérdida de potencia eléctrica puede recordarse fácilmente teniendo en cuenta las definiciones de V e I . La caída de potencial es la disminución de energía potencial por unidad de carga y la corriente es la carga que fluye por unidad de tiempo. Así, el producto de V por I es la energía perdida por unidad de tiempo o la potencia disipada en el conductor. Como hemos visto, esta potencia se transforma en calentamiento del conductor. Utilizando la definición de resistencia $R = V/I$, podemos escribir la ecuación 22-12 en otras formas útiles eliminando V o I :

$$P = (IR)I = I^2 R \quad 22-13$$

o bien,

$$P = \frac{V}{R} V = \frac{V^2}{R} \quad 22-14$$

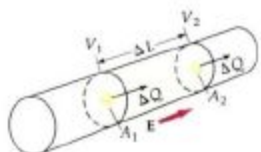
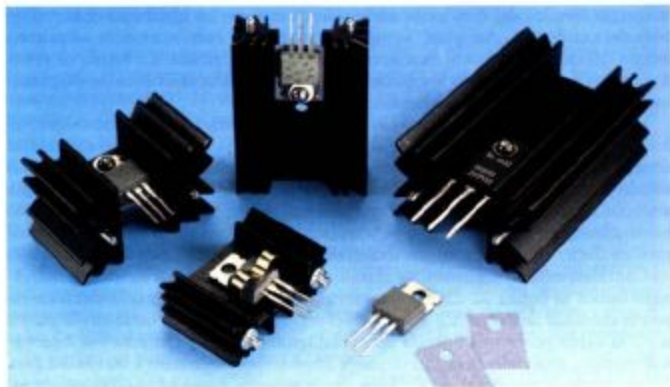


Figura 22-7 Durante un tiempo Δt pasa la cantidad de carga ΔQ a través del área A_1 , en donde el potencial es V_1 . En el mismo intervalo de tiempo, una cantidad igual de carga abandona el segmento pasando a través del área A_2 , en donde el potencial es V_2 . El efecto es el mismo que si la misma carga ΔQ penetrase en el segmento a un alto potencial V_1 y le dejase a un bajo potencial V_2 , perdiendo, por tanto, energía potencial en el segmento.

Las ecuaciones 22-12, 22-13, y 22-14 contienen todas la misma información. La elección de una u otra depende del problema particular que se plantee. La energía cedida a un conductor al paso de la corriente recibe el nombre de calor por efecto Joule, o simplemente calor de Joule.



(a)



(b)



(c)

(a) Gran parte de la energía eléctrica disipada en el filamento de esta bombilla aparece en forma de energía luminosa. (b) Estas aletas de enfriamiento bastante elaboradas se utilizan para disipar el calor de Joule desarrollado por transistores y otros dispositivos semiconductores. (c) El perfil térmico de esta resistencia de alta potencia viene indicado por el color de la capa de cristal líquido.

Ejemplo 22-7

Una resistencia de $12\ \Omega$ transporta una corriente de $3\ \text{A}$. Determinar la potencia disipada en esta resistencia.

Como en este caso conocemos la intensidad de corriente y la resistencia, pero no la caída de potencial, la ecuación 20-13 es la más conveniente. Así tenemos,

$$P = IR = (3\text{A})^2(12\ \Omega) = 108\ \text{W}$$

Alternativamente, podríamos haber determinado en primer lugar la caída de potencial en la resistencia a partir de $V = IR = (3\text{A})(12\ \Omega) = 36\ \text{V}$, y después haber usado la ecuación 22-12 para calcular la potencia disipada:

$$P = IV = (3\text{A})(36\text{V}) = 108\ \text{W}$$

Ejercicio

Un cable de resistencia $5\ \Omega$ transporta una corriente de $3\ \text{A}$ durante $6\ \text{s}$. (a) ¿Qué potencia se disipa en el cable? (b) ¿Cuánto calor se produce? [Respuestas: (a) $45\ \text{W}$, (b) $270\ \text{J}$]

Fuerza electromotriz y baterías

Con objeto de tener una corriente estacionaria en un conductor necesitamos disponer de un suministro de energía eléctrica. Un aparato o dispositivo que suministra energía eléctrica recibe el nombre de fuente de fuerza electromotriz o simplemente fuente de fem. Este dispositivo convierte la energía química o mecánica, u otras formas de energía, en energía eléctrica. Frecuentemente se trata de una batería o pila, que convierte la energía química en energía eléctrica, o un generador que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Una fuente de fem realiza trabajo sobre la carga que pasa a su través, elevando la energía potencial de la carga. Este incremento de energía potencial por unidad de carga recibe el nombre de fem, \mathcal{E} , de la fuente. Cuando la carga ΔQ fluye a través de

una fuente de fem, su energía potencial aumenta en una cantidad $\Delta Q \mathcal{E}$. La unidad de fem es el voltio, la misma que la unidad de diferencia de potencial. Una **batería ideal** es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus dos terminales, independientemente del flujo de carga que exista entre ellos. La diferencia de potencial entre los terminales de una batería ideal es igual, en magnitud, a la fem de la batería.

En la figura 22-8 se muestra un circuito sencillo compuesto por una resistencia R conectada a una batería ideal. En estos diagramas la batería se representa por el símbolo $\text{---}| \text{---}$. La línea más larga señala el terminal de mayor potencial. La resistencia se representa mediante el símbolo $\text{---} \text{---}$. Las líneas rectas del circuito indican alambres, hilos o cables de conexión de resistencia despreciable. Puesto que la selección del potencial cero es siempre arbitraria, sólo nos interesan las diferencias de potencial existentes entre diversos puntos del circuito. Por definición, una fuente de fem ideal mantiene una diferencia de potencial \mathcal{E} entre los puntos a y b , en donde el punto a corresponde al potencial mayor. No existe ninguna diferencia de potencial entre los puntos a y c , o entre los puntos d y b , ya que se admite que el alambre de conexión posee una resistencia despreciable. Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos c y d también es \mathcal{E} y la intensidad de la corriente que circula por la resistencia es $I = \mathcal{E}/R$. Como se indica en la figura, la corriente circula en el mismo sentido de las agujas del reloj. Obsérvese que *dentro* de una fuente de fem la carga fluye desde el potencial más bajo al más alto.* Cuando la carga ΔQ fluye a través de la fuente de fem \mathcal{E} , su energía potencial se ve aumentada en la cantidad $\Delta Q \mathcal{E}$. En consecuencia, la carga fluye a través del conductor donde pierde su energía potencial por transformación en energía térmica. El ritmo con el que la fuente de fem suministra la energía es:

$$P = \frac{\Delta Q \mathcal{E}}{\Delta t} = \mathcal{E} I \quad 22-15$$

En el circuito simple de la figura 22-8, la potencia suministrada por la fuente de fem es igual a la disipada en la resistencia.

Una fuente de fem puede considerarse como una especie de bomba de carga que eleva la carga eléctrica desde una región de baja energía potencial a otra región de alta energía potencial, del mismo modo que una bomba hidráulica eleva el agua desde un lugar de baja a otro lugar de alta energía potencial gravitatoria. La figura 22-9 muestra una analogía mecánica del circuito eléctrico simple discutido anteriormente; unas bolitas de masa m , ruedan descendiendo por un plano inclinado en el que existen muchos clavos. Las bolitas parten de cierta altura h sobre el fondo y se aceleran por el campo gravitatorio entre los choques sucesivos contra los clavos. Estos son análogos a los iones de la red en la resistencia. Durante las colisiones, las bolas transfieren la energía cinética obtenida entre los choques a los propios clavos durante estas colisiones. Debido a la gran cantidad de colisiones, las bolas se mueven con una velocidad de desplazamiento pequeña hacia el fondo. Cuando alcanzan la parte inferior, un muchacho las recoge y las vuelve a poner en marcha de nuevo en la parte de arriba. El muchacho es el análogo de la fem. Realiza un trabajo mgh sobre cada bolita. El trabajo por masa es gh , análogo al trabajo por carga realizado por la fem. La fuente de energía en este caso es la energía química interna del muchacho.

En una **batería real** la diferencia de potencial entre los bornes de la batería, denominada **tensión en bornes** no es simplemente igual al valor de la fem de la batería. Consideremos el simple circuito formado por una batería real y una resistencia, como muestra la figura 22-8. Si la corriente varía modificando la resistencia R y se mide la tensión en bornes, resulta que ésta decrece ligeramente a medida que crece la intensidad de la corriente, justo como si existiera una pequeña resistencia dentro de la batería. Esto puede verse gráficamente en la

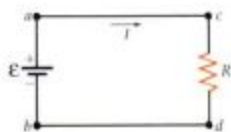


Figura 22-8 Circuito eléctrico simple formado por una batería ideal de fem \mathcal{E} , una resistencia R y cables de conexión que se supone carecen de resistencia.

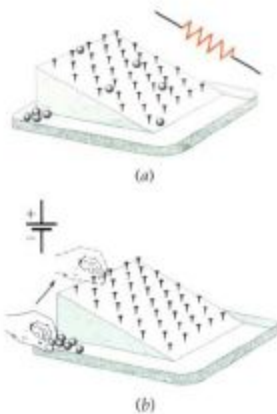


Figura 22-9 Analogía mecánica de un circuito simple formado por una resistencia y una fuente de fem. (a) Cuando las bolitas ruedan sobre el plano inclinado, su energía potencial se convierte en energía cinética que rápidamente se transforma en calor a causa de los choques con los clavos de la tabla. (b) Un muchacho vuelve a subir las bolitas desde el fondo, donde su energía es baja, hasta la parte superior, donde su energía es alta, convirtiendo su energía química interna en energía potencial de las bolitas.

* Cuando una batería se carga por medio de un generador o por otra batería, la carga fluye desde una región de alto potencial a otra de bajo potencial dentro de la batería a cargar, perdiendo así energía potencial electrostática. La energía perdida se almacena en la batería a cargar.



Figura 22-10 Tensión en los bornes V en función de I para una batería real. La línea de puntos muestra la tensión en los bornes de una batería ideal que tiene el mismo valor de \mathcal{E} .

figura 22-10. Así pues, una batería real puede considerarse como una batería ideal de fem \mathcal{E} más una pequeña resistencia r , denominada **resistencia interna** de la batería. La figura 22-11 muestra un circuito simple formado por una batería real, una resistencia y cables de conexión. Como anteriormente, podemos ignorar la resistencia de los cables de conexión. El diagrama del circuito correspondiente se muestra en la figura 22-12. Cuando la carga pasa desde el punto b al a , en primer lugar su energía potencial se incrementa mientras pasa a través de la fuente de fem y luego disminuye ligeramente mientras pasa a través de la resistencia interna de la batería. (En la batería real estos cambios de energía tienen lugar simultáneamente.) Si la corriente en el circuito es I , el potencial en el punto a se relaciona con el potencial en el punto b mediante

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - Ir$$

Por tanto, la tensión en bornes es

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir \quad 22-16$$

La tensión en bornes de la batería disminuye linealmente con la intensidad de corriente, como se indica en la figura 22-10. La caída de potencial a lo largo de la resistencia R es IR y es igual a la tensión en bornes:

$$IR = V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$$

De aquí resulta para la intensidad de la corriente

$$IR + Ir = \mathcal{E}$$

o sea,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad 22-17$$



Figura 22-11 Fotografía de un circuito simple formado por una batería real, una resistencia y cables de conexión.

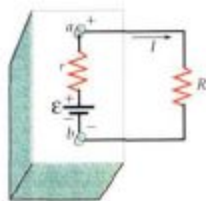


Figura 22-12 Diagrama del circuito de la figura 22-11. Una batería real puede representarse por una batería ideal de fem \mathcal{E} y una pequeña resistencia r .

La tensión en bornes dada por la ecuación 22-16 es inferior a la fem de la batería debido a la caída de potencial que tiene lugar dentro de la resistencia interna de la batería. Las baterías reales, tales como una buena batería de coche, poseen una resistencia interna del orden de unas pocas centésimas de ohmio, de tal modo que la tensión en bornes es aproximadamente igual a la fem, a menos que la intensidad de corriente sea muy grande. Un síntoma de mala batería, es poseer una resistencia interna elevada. Si sospechamos que la batería de 12 V de un automóvil es mala, y comprobamos la tensión en bornes con un voltímetro (discutido en la sección 23-3) que consume muy poca corriente, la lectura puede ser muy próxima a los 12 V, como si la batería fuera buena. Sin embargo, si comprobamos la tensión en los bornes mientras se extrae corriente, por ejemplo, con las luces encendidas o tratando de arrancar el coche, la tensión en bornes puede ser considerablemente inferior a 12 V, lo que supone una elevada resistencia interna y, por tanto, una mala batería.

Ejemplo 22-8

Una resistencia de $11\ \Omega$ se conecta a través de una batería de fem $6\ \text{V}$ y resistencia interna $1\ \Omega$. Determinar (a) la intensidad de corriente, (b) la tensión en los bornes de la batería, (c) la potencia suministrada por la fem, y (d) la potencia suministrada a la resistencia externa.

(a) Según la ecuación 22-17, la intensidad de corriente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{6\text{V}}{11\ \Omega + 1\ \Omega} = 0,5\ \text{A}$$

(b) La tensión en los bornes de la batería es

$$V_e - V_s = \mathcal{E} - Ir = 6\ \text{V} - (0,5\ \text{A})(1\ \Omega) = 5,5\ \text{V}$$

(c) La potencia suministrada por la fuente de fem es

$$P = \mathcal{E}I = (6\ \text{V})(0,5\ \text{A}) = 3\ \text{W}$$

(d) La potencia suministrada a la resistencia externa es

$$PR = (0,5\ \text{A})^2 (11\ \Omega) = 2,75\ \text{W}$$

Esta potencia se disipa en forma de calor de Joule. El otro $0,25\ \text{W}$ de potencia se disipa también como calor de Joule en la resistencia interna de la batería.

Ejemplo 22-9

Tenemos una batería de una determinada fem y una resistencia interna r . ¿Qué valor de la resistencia externa R debemos conectar entre los bornes para obtener el máximo calor de Joule en R ?

La resistencia externa R se denomina a veces resistencia de carga. La potencia suministrada a R es I^2R , en donde I viene dada por la ecuación 22-17. La potencia de entrada es pues,

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(r+R)^2} R = \mathcal{E}^2 R (r+R)^{-2}$$

La figura 22-13 muestra un gráfico de P en función de R . En el valor de R para el cual P es máximo, la pendiente de la curva es cero. Podemos obtener este valor de R haciendo que dP/dR sea igual a cero. Así resulta,

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 (r+R)^{-2} + \mathcal{E}^2 R (-2)(r+R)^{-3} = 0$$

Multiplicando cada uno de los términos por $(r+R)^3/\mathcal{E}^2$ resulta

$$r+R = 2R$$

o sea,

$$R = r$$

El valor máximo de P ocurre cuando $R=r$, es decir, cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna. Un resultado semejante tiene lugar en los circuitos de corriente alterna más complejos, lo que se conoce como igualdad de impedancias.

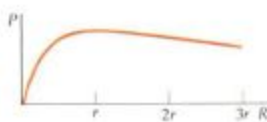


Figura 22-13 Gráfico de la potencia de la resistencia externa en función de R . La potencia pasa por un máximo cuando la resistencia R es igual a la resistencia interna de la batería.

* En este ejemplo se ha exagerado el valor de la resistencia interna para simplificar los cálculos. En otros ejemplos podemos simplemente ignorar la resistencia interna.



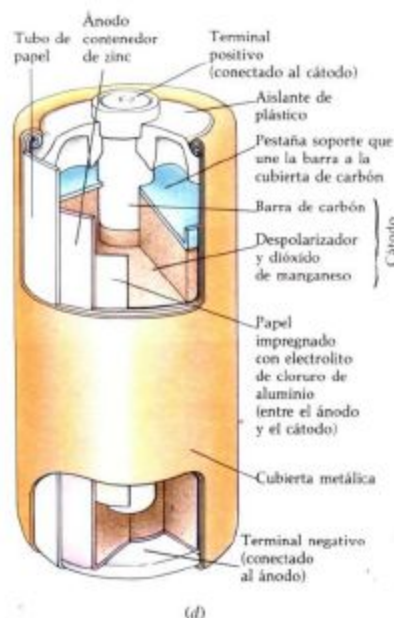
(a)



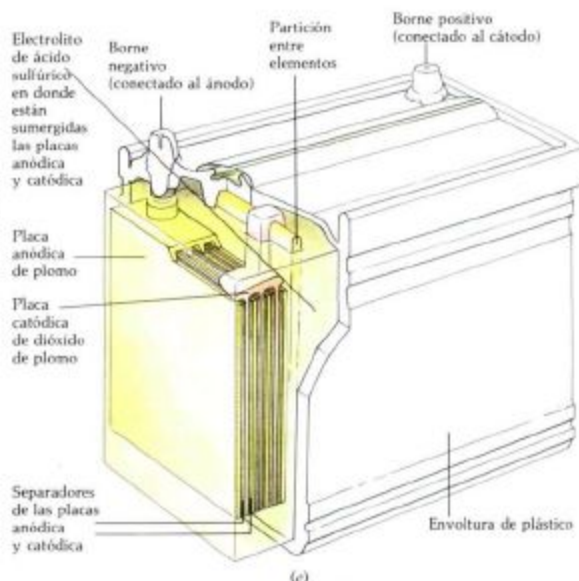
(b)



(c)

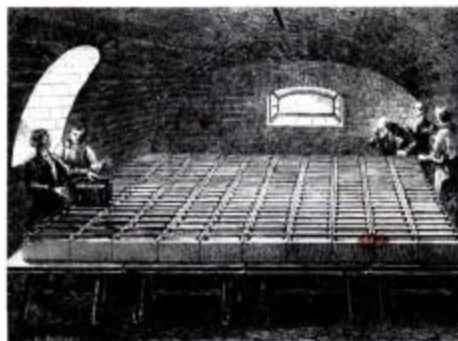


(d)



(e)

Una batería es un conjunto de células químicas, cada una de las cuales consiste en dos electrodos metálicos sumergidos en una solución conductora llamada electrolito. Debido a las reacciones químicas que tienen lugar entre los conductores y el electrolito, un electrodo, el ánodo, se carga positivamente, y el otro, el cátodo, se carga negativamente. (a) Pilas de polímero-litio de tamaño de una moneda, utilizadas en los ordenadores para evitar pérdidas de datos cuando falta la potencia. (b) Conjunto de pilas de plata-zinc utilizadas en satélites. (c) Este automóvil eléctrico utiliza ocho baterías de acumuladores para el suministro de potencia. (d) En una pila seca el electrolito está formado por una pasta de cloruro amónico y otros aditivos. Desarrolla una fem de 1.5 V. (e) Acumulador de 12 V formado por seis elementos que son recargables. Cada elemento posee un ánodo de plomo, un cátodo de dióxido de plomo y una solución acuosa de ácido sulfúrico como electrolito. (f) Esta batería gigante formada por 200 elementos fue construida en 1870 en el sótano de la Royal Institution, Londres, por Humphry Davy.



Las baterías frecuentemente se especifican por la carga total que pueden suministrar en amperios-hora (A·h). Como un amperio es un culombio por segundo y una hora tiene 3600 segundos, un amperio-hora es igual a 3600 culombios:

$$1 \text{ A} \cdot \text{h} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} (3600 \text{ s}) = 3600 \text{ C}$$

Cuestiones

- ¿Cuáles son los diversos tipos de fem más corrientes? ¿Qué clase de energía se convierte en energía eléctrica por la fem en cada caso?
- En un circuito eléctrico sencillo, como el indicado en la figura 22-12, la carga en el exterior de la fem fluye desde el punto de potencial positivo hacia el punto de potencial negativo, pero en el mismo circuito la corriente en el interior de la fem fluye desde el voltaje negativo al positivo. Explicar cómo es esto posible.
- La figura 22-9 ilustra una analogía mecánica de un circuito eléctrico sencillo. Idear otro en el que la corriente sea un flujo de agua en lugar de bolitas.
- Un esquiador es remolcado a lo alto de una colina y luego se desliza hacia abajo con una velocidad que es constante por causa de la fricción. ¿Qué analogía existe entre este proceso y un circuito eléctrico simple?

22-4 Combinaciones de resistencias

Resistencias en serie

Dos o más resistencias conectadas de modo que la misma carga fluye a través de cada una de ellas, se dice que están conectadas en serie. Las resistencias R_1 y R_2 de la figura 22-14a son ejemplos de resistencias en serie. Como la carga no se acumula en ningún punto de un alambre que transporte una corriente estacionaria, si una carga ΔQ entra en R_1 durante cierto intervalo de tiempo, una cantidad igual de carga ΔQ saldrá de R_2 en el mismo tiempo. Las dos resistencias deben transportar, por tanto, la misma intensidad de corriente I . Frecuentemente haremos el análisis de un circuito con resistencias en serie reemplazando tales resistencias por otra equivalente, R_{eq} que ofrezca la misma caída de potencial al paso de la misma corriente I (véase figura 22-14b). La caída de potencial a través de R_1 es IR_1 y a través de R_2 es IR_2 . La caída de potencial a través de las dos resistencias es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \quad 22-18$$

Igualando esta caída de potencial con IR_{eq} se obtiene

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$



Figura 22-14 (a) Dos resistencias en serie transportan la misma corriente. (b) Las resistencias de la parte (a) pueden sustituirse por una resistencia equivalente sencilla $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$, que da la misma caída de potencial total cuando circula la misma corriente que en la parte (a).

Es decir, la resistencia equivalente a varias resistencias en serie es igual a la suma de las resistencias originales. Cuando hay más de dos resistencias en serie, la resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad 22-19$$

Resistencias en serie

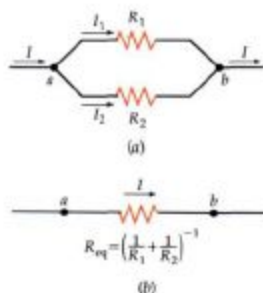


Figura 22-15 (a) Dos resistencias están combinadas en paralelo cuando se conectan juntas en ambos extremos, de modo que la caída de potencial es la misma a través de cada una de ellas. (b) Las dos resistencias de la parte (a) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente R_{eq} relacionada con R_1 y R_2 por $1/R_{\text{eq}} = 1/R_1 + 1/R_2$.

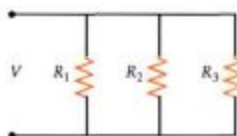


Figura 22-16 Tres resistencias en paralelo.

Resistencias en paralelo

Resistencias en paralelo

Dos resistencias conectadas como indica la figura 22-15a, de modo que entre ellas se establece la misma diferencia de potencial, se dice que están conectadas en paralelo. Obsérvese que las resistencias están conectadas en ambos extremos por alambres. Sea I la corriente que fluye del punto a al punto b . En el punto a la corriente se divide en dos partes, I_1 en la resistencia R_1 e I_2 en R_2 . La corriente total es la suma de las corrientes individuales:

$$I = I_1 + I_2 \quad 22-20$$

Sea $V = V_a - V_b$ la caída de potencial a través de cada resistencia. En función de las corrientes y resistencias,

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad 22-21$$

La resistencia equivalente de una combinación de resistencias en paralelo, se define como aquella resistencia R_{eq} para la cual la misma corriente total I produce la caída de potencial V (figura 22-15 b):

$$R_{\text{eq}} = \frac{V}{I}$$

Resolviendo esta ecuación para I y teniendo en cuenta que $I = I_1 + I_2$, tenemos:

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = I_1 + I_2 \quad 22-22$$

Teniendo en cuenta la ecuación 22-21, $I_1 = V/R_1$ y $I_2 = V/R_2$, según la ecuación 22-22 resulta

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

La resistencia equivalente de las dos resistencias en paralelo viene dada por

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Este resultado puede generalizarse para combinaciones, como las de la figura 22-16, en la cual se conectan tres o más resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad 22-23$$

Ejercicio

Una resistencia de 2Ω y otra de 4Ω se conectan (a) en serie y (b) en paralelo. Determinar las resistencias equivalentes. [Respuestas: (a) 6Ω , (b) $1,33 \Omega$]

Ejemplo 22-10

Una resistencia de 4Ω y otra de 6Ω se conectan en paralelo como indica la figura 22-17, y una diferencia de potencial se aplica a través de la combinación. Determinar (a) la resistencia equivalente, (b) la intensidad total de la corriente, (c) la corriente que circula por cada resistencia, y (d) la potencia disipada en cada resistencia.

(a) En primer lugar calculamos la resistencia equivalente según la ecuación 22-23:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{4 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega} = \frac{3}{12 \Omega} + \frac{2}{12 \Omega} = \frac{5}{12 \Omega}$$

o sea

$$R_{\text{eq}} = \frac{12 \Omega}{5} = 2,4 \Omega$$

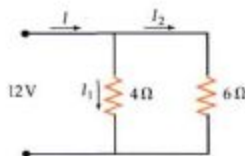


Figura 22-17 Dos resistencias en paralelo a través de una diferencia de potencial de 12 V (ejemplo 22-10).

(b) La corriente total es, por tanto,

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{12 \text{ V}}{2,4 \Omega} = 5 \text{ A}$$

(c) Para obtener la intensidad en cada resistencia, consideremos que la caída de potencial es de 12 V a través de cada resistencia (ecuación 22-21). Llamando I_1 a la intensidad de la corriente en la resistencia de 4 Ω , e I_2 en la de 6 Ω , resulta

$$V = I_1 R_1 = I_1 (4 \Omega) = 12 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega} = 3,0 \text{ A}$$

Y

$$I_2 = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2,0 \text{ A}$$

(d) La potencia disipada en la resistencia de 4 Ω es

$$P = I_1^2 R_1 = (3,0 \text{ A})^2 (4 \Omega) = 36 \text{ W}$$

La potencia disipada en la resistencia de 6 Ω

$$P = (2,0 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 24 \text{ W}$$

Esta potencia procede de la fuente de fem que mantiene la diferencia de potencial de 12 V a través de la combinación de resistencias. La potencia requerida para suministrar 5,0 A a 12 V es

$$P = IV = (5,0 \text{ A})(12 \text{ V}) = 60 \text{ W}$$

que es igual a la potencia total disipada en las dos resistencias.

Obsérvese en el ejemplo 22-10 que la resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es menor que la resistencia de cualquiera de ellas por separado. Este es un resultado general. Supongamos que tenemos una sola resistencia R_1 que transporta la corriente I_1 con la caída de potencial $V = I_1 R_1$. Disponemos ahora una segunda resistencia R_2 en paralelo. Si la caída de potencial sigue siendo la misma, la segunda resistencia debe transportar una corriente adicional $I_2 = V/R_2$ sin afectar la corriente original I_1 . La combinación en paralelo transporta en total más corriente $I = I_1 + I_2$ para la misma caída de potencial; por tanto, el cociente entre la caída de potencial y la intensidad total de la corriente es menor. Obsérvese también del ejemplo 22-10 que el cociente de las corrientes correspondientes a las dos resistencias en paralelo es igual a la relación inversa de las resistencias. Este resultado general se obtiene de la ecuación 22-21:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{resistencias en paralelo} \quad 22-24$$

Ejemplo 22-11

En el circuito mostrado en la figura 22-18, determinar (a) la resistencia equivalente de la combinación en paralelo de las resistencias, (b) la corriente total en la fuente de fem y la corriente transportada por cada resistencia.

(a) La resistencia equivalente de las resistencias de 6 Ω y 12 Ω en paralelo es

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{6 \Omega} + \frac{1}{12 \Omega} = \frac{3}{12 \Omega} = \frac{1}{4 \Omega}$$

$$R_{\text{eq}} = 4 \Omega$$

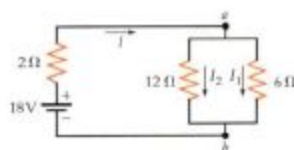


Figura 22-18 Circuito correspondiente al ejemplo 22-11. Las resistencias de 12 y 6 Ω están en paralelo y esta combinación se encuentra en serie con la resistencia de 2 Ω .

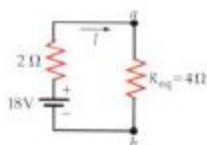


Figura 22-19 Simplificación del circuito de la figura 22-18 sustituyendo las resistencias en paralelo por una resistencia equivalente.

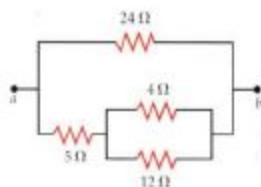


Figura 22-20 Combinación de resistencias para el ejemplo 22-12.

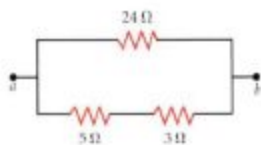


Figura 22-21 Sustitución de la combinación de resistencias en paralelo de 4 y 12 Ω de la figura 22-20 por su resistencia equivalente de 3 Ω.

Figura 22-22 Simplificación posterior de la red de resistencias de las figuras 22-20 y 22-21. Las resistencias de 5 y 3 Ω en serie en la figura 22-21 se han reemplazado por su resistencia equivalente de 8 Ω. La red se reduce a dos resistencias de 24 y 8 Ω en paralelo.

(b) La figura 22-19 muestra el circuito con R_{eq} que reemplaza la combinación en paralelo. Las resistencias $R_{\text{eq}} = 4 \Omega$ y $R = 2 \Omega$ están en serie. La resistencia equivalente de esta combinación en serie es $R'_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + R = 6 \Omega$. Por tanto, la corriente I en el circuito es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'_{\text{eq}}} = \frac{18 \text{ V}}{6 \Omega} = 3 \text{ A}$$

Esta es la corriente total en la fuente de fem. La caída de potencial de a a b a través de R'_{eq} en la figura 22-19 es $V = IR'_{\text{eq}} = (3 \text{ A})(6 \Omega) = 12 \text{ V}$. La corriente en la resistencia de 6Ω tiene la intensidad

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2 \text{ A}$$

y en la resistencia de 12Ω es

$$I_2 = \frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Obsérvese que la corriente en la resistencia de 6Ω es el doble que en la resistencia de 12Ω , como era de esperar.

Ejemplo 22-12

Determinar la resistencia equivalente entre los puntos a y b para la combinación de resistencias indicada en la figura 22-20.

Esta combinación de resistencias puede parecer complicada, pero puede analizarse paso a paso. Las resistencias de 4Ω y 12Ω están en paralelo. Para obtener su resistencia equivalente aplicaremos la ecuación 22-23:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{4 \Omega} + \frac{1}{12 \Omega} = \frac{4}{12 \Omega} = \frac{1}{3 \Omega}$$

o sea,

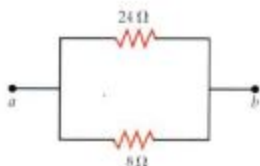
$$R_{\text{eq}} = 3 \Omega$$

En la figura 22-21, las resistencias de 4Ω y 12Ω se han reemplazado por su equivalente, una resistencia de 3Ω . Como esta resistencia de 3Ω está en serie con la resistencia de 5Ω , la resistencia equivalente de la rama inferior de esta combinación es 8Ω . Con esta sustitución queda una resistencia de 8Ω en paralelo con otra de 24Ω (figura 22-22), cuya resistencia equivalente se obtiene de nuevo con la ecuación 22-23:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{24 \Omega} + \frac{1}{8 \Omega} = \frac{4}{24 \Omega} = \frac{1}{6 \Omega}$$

$$R_{\text{eq}} = 6 \Omega$$

Por tanto, la resistencia equivalente entre los puntos a y b es 6Ω .



Cuestiones

7. ¿Qué producirá más calor, una pequeña resistencia o una gran resistencia conectada a través de una fuente de fem que permanece constante?
8. Cuando se introdujo la luz eléctrica, algunas personas guardaban las bombillas en los portalámparas a fin de que la electricidad no se escapara. ¿Por qué no es esto necesario?

22-5 Modelo microscópico de la conducción eléctrica

Un modelo microscópico de la conducción eléctrica fue propuesto por primera vez por P. Drude en 1900 y desarrollado por Hendrik A. Lorentz aproximadamente en 1909. Este modelo llamado ahora **modelo clásico de la conducción eléctrica**, predice con éxito la ley de Ohm y relaciona la conductividad y la resistividad de los conductores con el movimiento de los electrones libres en su interior. En el modelo clásico de la conducción eléctrica, un metal se describe como una disposición regular tridimensional de iones con un gran número de electrones libres para moverse por todo el interior del metal. En ausencia de un campo eléctrico, los electrones libres se mueven por todo el metal de un modo muy parecido a las moléculas de gas encerradas en un recipiente. Los electrones libres realizan choques con los iones de la red y están en equilibrio térmico con ella. La velocidad media cuadrática de los electrones puede calcularse a partir del teorema de equipartición. El resultado es el mismo que el correspondiente a una molécula de un gas ideal en el que la masa del electrón sustituye a la masa molecular en la ecuación 15-28. Por ejemplo a $T=300$ K, la velocidad media cuadrática (ligera-mente mayor que la velocidad media) es

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{3(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= 1,17 \times 10^5 \text{ m/s} \end{aligned} \quad 22-25$$

Esta velocidad es mucho mayor que la velocidad de desplazamiento calculada en el ejemplo 22-1.

De acuerdo con la ley de Ohm, la corriente en un segmento del alambre conductor es proporcional a la caída del voltaje a través del mismo:

$$I = \frac{V}{R}$$

La resistencia R es proporcional a la longitud del segmento de alambre L e inversamente proporcional al área transversal A :

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Para un campo eléctrico uniforme E , la caída de voltaje a través de un segmento de longitud L es $V=EL$. Sustituyendo $\rho L/A$ en lugar de R , y EL en lugar de V , la ley de Ohm puede escribirse en la forma:

$$I = \frac{EL}{\rho L/A} = \frac{1}{\rho} EA \quad 22-26$$

El objetivo de la teoría clásica de la conducción es determinar una expresión para ρ en función de las propiedades de los metales. La intensidad de corriente en un alambre está relacionada con el número de electrones por unidad de volumen n , la velocidad de desplazamiento v_d , la carga del electrón e , y el área transversal A por medio de la ecuación 22-3:

$$I = neAv_d$$



Esta fotografía (obtenida con un microscopio electrónico de barrido) de una lámina conductora de aluminio de $21 \mu\text{m}$ de anchura, como las utilizadas en los «chips» de los ordenadores, muestra huecos y conglomerados de átomos formados por electromigración de átomos de aluminio a causa de una corriente de $0,5$ A. La naturaleza de este efecto no está bien comprendida, pero afecta negativamente a la fiabilidad de los «chips» del ordenador, que usan láminas de un espesor de $4 \mu\text{m}$.

En presencia de un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una fuerza de magnitud eE . Si esta fuerza fuera la única que actúa sobre el electrón, éste experimentaría una aceleración eE/m_e y su velocidad se incrementaría uniformemente. Sin embargo, la ley de Ohm implica que existe una situación estacionaria en la cual la velocidad media del electrón es proporcional al campo E , pues la intensidad I es proporcional a E y también a v_d . En el modelo clásico se supone que un electrón libre es acelerado durante un corto intervalo de tiempo y luego verifica un choque contra un ion de la red. Después del choque, la velocidad del electrón no tiene ninguna relación con lo que tenía antes de la colisión. La justificación de esta hipótesis es que la velocidad de desplazamiento es muy pequeña comparada con la velocidad térmica aleatoria.

Sea τ el tiempo medio antes de que un electrón, escogido al azar, realice su siguiente colisión. Como los choques son aleatorios, este tiempo no depende del intervalo transcurrido desde la última colisión. Si consideramos un electrón inmediatamente después de realizar un choque, el tiempo medio antes del siguiente choque será τ . Este tiempo, llamado **tiempo de colisión** es el tiempo medio entre colisiones. También es el tiempo medio transcurrido desde la última colisión de un electrón escogido al azar.*

La velocidad de desplazamiento es la velocidad media de un electrón escogido al azar. Como la aceleración es eE/m_e , la velocidad de desplazamiento es

$$v_d = \frac{eE}{m_e} \tau \quad 22-27$$

Usando este resultado en la ecuación 22-3, obtenemos:

$$I = neAv_d = \frac{ne^2 \tau}{m_e} EA \quad 22-28$$

Teniendo en cuenta que $\rho = EA/I$ (ecuación 22-26) resulta para la resistividad

$$\rho = \frac{m_e}{ne^2 \tau} \quad 22-29$$

La distancia media que el electrón recorre entre choques se denomina **recorrido libre medio** λ . Es el producto de la velocidad media v_m por el tiempo medio que transcurre entre choques τ :

$$\lambda = v_m \tau \quad 22-30$$

En función del recorrido libre medio y de la velocidad media, la resistividad es

$$\rho = \frac{m_e v_m}{ne^2 \lambda} \quad 22-31$$

Podemos relacionar el recorrido libre medio con el tamaño de los iones de cobre. Consideremos un electrón moviéndose con velocidad v a través de una región de iones estacionarios (figura 22-23). Si el tamaño del electrón es despreciable, esta partícula chocará con un ion de radio r cuando se encuentre a la distancia r del centro del ion. En un tiempo t , el electrón se mueve a lo largo de una distancia vt y choca con todos los iones situados en el volumen cilíndrico $\pi r^2 vt$. El número de iones contenido en este volumen es $n\pi r^2 vt$, en donde n es el número de iones por unidad de volumen. (Después de cada colisión, la direc-

* Es tentador, pero incorrecto, pensar que si τ es el tiempo medio entre choques, el tiempo medio desde su última colisión es $\frac{1}{2}\tau$ y no τ . Ante esta confusión nos queda el consuelo de pensar que Drude utilizó el resultado incorrecto $\frac{1}{2}\tau$ en su trabajo original.

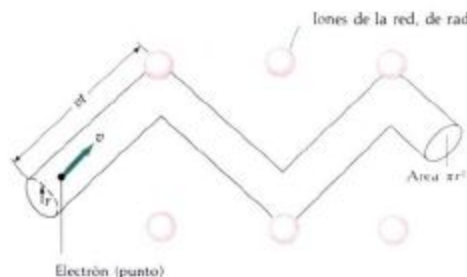


Figura 22-23 Modelo de un electrón moviéndose a través de los iones de la red cristalina del cobre. El electrón, considerado como un punto, choca con un ion de la red si está dentro de una distancia r del centro del ion, siendo r su radio. Si el electrón tiene la velocidad v , choca con todos los iones contenidos en el volumen cilíndrico $\pi r^2 vt$ en el tiempo t .

ción del electrón cambia y, por tanto, la trayectoria es realmente en zig-zag.) La longitud total de la trayectoria, dividida por el número de colisiones es el recorrido libre medio:

$$\lambda = \frac{vt}{n\pi r^2 vt} = \frac{1}{n\pi r^2} \quad 22-32$$

Ejemplo 22-13

Estimar el recorrido libre medio de los electrones en el cobre.

El número de iones de cobre por unidad de volumen fue calculado en el ejemplo 22-1, resultando ser de $8,47 \times 10^{22}$ iones/cm³. Utilizando el valor $r = 10^{-10}$ m = 10^{-8} cm para el radio de un ion de cobre se obtiene para el recorrido libre medio de los electrones en el cobre, la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{(8,47 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}) \pi (10^{-8} \text{ cm})^2} \approx 4 \times 10^{-8} \text{ cm} \\ &= 4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,4 \text{ nm} \end{aligned}$$

Para estimar el tiempo de colisión podemos utilizar el resultado del ejemplo 22-13 y la velocidad media $v_n \approx 10^5$ m/s de la ecuación 22-25

$$\tau = \frac{\lambda}{v_n} = \frac{4 \times 10^{-10} \text{ m}}{10^5 \text{ m/s}} = 4 \times 10^{-15} \text{ s}$$

Según la ley de Ohm, la resistividad es independiente del campo eléctrico E . Las magnitudes de la ecuación 22-31 que podían depender del campo eléctrico, son la velocidad media v_n y el recorrido libre medio λ . Como hemos visto, la velocidad de desplazamiento es mucho menor que la velocidad media de los electrones en equilibrio térmico con los iones de la red. Así, el campo eléctrico no influye esencialmente en la velocidad media de los electrones. El recorrido libre medio de los electrones depende del tamaño de los iones de la red y de la densidad de los iones, pero no del campo eléctrico E . Por tanto, este modelo predice la ley de Ohm, con la resistividad dada por la ecuación 22-31.

A pesar de su éxito al predecir la ley de Ohm, la teoría clásica de la conducción tiene diversos efectos. Los valores numéricos de la resistividad calculados a partir de la ecuación 22-31 utilizando los métodos clásicos para obtener el recorrido libre medio y la velocidad media, difieren de los valores medidos en un factor de seis veces el valor a $T = 300$ K y la dependencia con la temperatura no es correcta. La dependencia con la temperatura de la resistividad viene dada completamente por la velocidad media v_n en la ecuación 22-31 que es proporcional a \sqrt{T} . Así pues, este cálculo no da una dependencia lineal con la temperatura. Finalmente, el modelo clásico no nos dice nada sobre la razón por la cual algunos materiales son conductores, otros aislantes y otros semiconductores.

En la teoría mecánico-cuántica de la conducción eléctrica que se discute en la versión ampliada de este texto (capítulo 39), la resistividad viene dada por la ecuación 22-31, pero la velocidad media y el recorrido libre medio se interpretan en función de la teoría cuántica. En esta teoría, la velocidad media no es proporcional a \sqrt{T} , ya que los electrones no obedecen la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann. En su lugar, los electrones obedecen una distribución mecánico-cuántica llamada distribución de Fermi-Dirac, en la cual la velocidad media es aproximadamente independiente de la temperatura.

En el cálculo mecánico-cuántico del recorrido libre, la naturaleza ondulatoria del electrón (capítulo 35) es importante. La colisión de un electrón con un ion reticular no es semejante al choque de una pelota de béisbol con un árbol, sino que en su lugar implica la dispersión de una onda electrónica por una red regularmente espaciada. Un cálculo detallado de la dispersión de las ondas electrónicas en un cristal perfectamente ordenado ofrece el resultado de que *no hay dispersión y el recorrido libre medio es infinito*. Por tanto, el recorrido libre medio no está determinado por el tamaño de los iones de la red. A muy bajas temperaturas, los iones se comportan como puntos respecto a la dispersión de electrones. La dispersión de ondas electrónicas surge cuando la red cristalina no es perfectamente periódica. Existen dos causas comunes de desviación de la periodicidad perfecta en una red. Una es el desplazamiento de los iones reticulares por causa de las vibraciones térmicas. Este efecto es dominante a las temperaturas ordinarias. El área efectiva que un ion presenta a un electrón es proporcional al cuadrado de la amplitud de vibración, lo cual a su vez es proporcional a la energía de vibración y por tanto, a la temperatura absoluta T . En consecuencia, el recorrido libre medio varía inversamente con T , y ρ es proporcional a T como se observa experimentalmente. La otra causa de desviaciones de la periodicidad perfecta son las impurezas. Por ejemplo, si se introduce algo de zinc en el cobre puro, la periodicidad previamente perfecta queda destruida. A temperaturas muy bajas, la resistividad de un metal se debe principalmente a las impurezas.

Resumen

1. La intensidad de corriente eléctrica es el flujo de carga que por unidad de tiempo atraviesa un área transversal. Por convenio, la dirección de la corriente es la del flujo de carga positiva. En un cable conductor, la corriente eléctrica es el resultado del desplazamiento lento de los electrones cargados negativamente, que son acelerados por un campo eléctrico en el cable y chocan rápidamente con los átomos del conductor. Las velocidades típicas de desplazamiento de los electrones en cables metálicos son del orden de 0,01 mm/s.
2. La resistencia de un segmento de alambre se define por el cociente de la pérdida de voltaje a través del segmento y la intensidad de la corriente. En los materiales óhmicos, que incluyen la mayor parte de los metales, la resistencia es independiente de la corriente, resultado experimental que se conoce con el nombre de ley de Ohm. Para todos los materiales, la diferencia de potencial, la intensidad de la corriente y la resistencia, vienen relacionados por la expresión

$$V = IR$$

3. La resistencia de un alambre es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

en donde ρ es la resistividad del material, el cual depende de su temperatura. La inversa de la resistividad se denomina conductividad σ :

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

4. La potencia suministrada a un segmento de un circuito es igual al producto de la corriente por la caída de voltaje a través del segmento:

$$P = IV$$

Un aparato que suministra energía a un circuito se denomina fuente de fuerza electromotriz. La potencia suministrada por una de estas fuentes es el producto de la fem y la intensidad de corriente:

$$P = \mathcal{E}I$$

La potencia disipada en una resistencia viene dada por

$$P = IV = IR = \frac{V^2}{R}$$

Una batería ideal es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes independientemente de la corriente suministrada. Una batería real puede considerarse como una batería ideal en serie con una pequeña resistencia llamada resistencia interna.

5. La resistencia equivalente de una serie de resistencias en serie es igual a la suma de las resistencias:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad \text{resistencias en serie}$$

Para una serie de resistencias en paralelo, la inversa de la resistencia equivalente es igual a la suma de las inversas de las resistencias individuales:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad \text{resistencias en paralelo}$$

6. En el modelo microscópico de la conducción eléctrica, los electrones libres de un metal son acelerados por el campo eléctrico, pero pierden rápidamente su energía adicional al chocar con los iones reticulares del metal. Su velocidad de desplazamiento es proporcional al campo eléctrico. La resistividad ρ está relacionada con la velocidad media v_d y con el recorrido libre medio λ (distancia media recorrida entre choques) por la expresión

$$\rho = \frac{m_e v_d}{ne^2 \lambda}$$

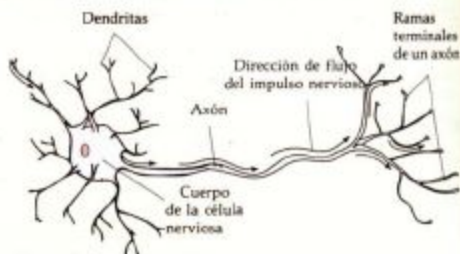
En el modelo clásico, la velocidad media se obtiene a partir de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann y es proporcional a \sqrt{T} y el recorrido libre medio depende del tamaño de los iones de la red. Este modelo predice la ley de Ohm, pero da magnitudes numéricas incorrectas para ρ , así como una dependencia incorrecta de ρ con la temperatura. La naturaleza ondulatoria de los electrones se utiliza para determinar el recorrido libre medio que resulta ser infinito para una red perfectamente periódica. Las impurezas y las vibraciones térmicas de los iones de la red son la causa de las desviaciones experimentadas por la periodicidad perfecta.

La conducción en células nerviosas

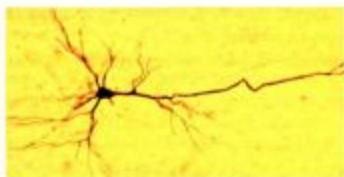
Elizabeth Pflieg Nickles
The Albany College of Pharmacy

Durante una tormenta en 1786, Luigi Galvani tocó los músculos de una pata de rana con un instrumento metálico y observó que los músculos se encogían. Llegó a la conclusión de que la electricidad engendrada por la tormenta era conducida por los nervios de la rana causando la contracción de sus músculos. Los nervios transmiten impulsos de una parte a otra del cuerpo, pero siguiendo un mecanismo muy distinto al de la transmisión de electricidad por un conductor metálico. Durante mucho tiempo se creía que un impulso nervioso era debido a un flujo de iones (es decir, a una corriente eléctrica) a lo largo de la célula nerviosa de un modo análogo al flujo de electrones por un alambre. Sin embargo, las propiedades eléctricas de una célula nerviosa son muy distintas a las de un conductor metálico; por ejemplo, la conducción neural es mucho más lenta y no varía de intensidad (es una conducción de todo o nada).

La célula nerviosa (neurona) es el elemento básico del sistema nervioso con la misión especial de transmitir información. Consta de un cuerpo celular y una o más fibras ramificadas (figura 1). Las fibras son de dos tipos, las dendritas, que a través del cuerpo celular reciben información en forma de estímulos por medio de receptores sensoriales u otras células nerviosas, y el axón, que transmite información a otras células nerviosas. Cuando los estímulos recibidos sobre las dendritas, o el cuerpo celular, están por encima de una intensidad determinada, se inicia un impulso nervioso y se propaga a lo largo del axón, alejándose del cuerpo celular hacia las ramificaciones terminales. El axón es una larga y



(a)



(b)

Figura 1 (a) Diagrama de la estructura de una célula nerviosa. (b) Micrografía de una célula nerviosa del cerebro de un gato.

estrecha extensión celular limitada por una membrana llena de un fluido viscoso intracelular llamado axoplasma (figura 2). Cuando un impulso nervioso alcanza las ramificaciones terminales de la célula nerviosa, se liberan sustancias neurotransmisoras que conducen el impulso a los receptores en la siguiente célula.

La pequeña área transversal de un axón y la alta resistividad ($R = \rho L/A$, ecuación 22-8) del axoplasma se combinan para ofrecer una resistencia extraordinariamente elevada. Un fragmento de axón nervioso de 1 cm de longitud posee una resistencia eléctrica de unos $2,5 \times 10^8 \Omega$ (comparable a la de la madera; véase tabla 22-1). Para entender cómo los nervios transmiten los impulsos a través de un medio aparentemente tan frágil, debemos conocer algo sobre la fisiología de una neurona antes de ser estimulada, cuando se encuentra en su «estado de reposo».



Elizabeth Pflieg Nickles nació en Catskill, New York, y creció en una granja lechera. Realizó el Bachelor of Sciences en Física y el

Master of Sciences en Biología en SUNY, Albany, en donde ahora está completando un Master en Física. Ha impartido clases en SUNY Brockport y en el Hudson Valley Community College y desempeñado el puesto de Senior Biophysicist en el Departamento de Salud del estado de Nueva York, profesora de física en el College of Pharmacy de Albany e investigadora en materiales biológicos con técnicas de rayos X y espectros de retrodifusión obtenidos con un microhaz de barrido obtenido en un acelerador lineal.

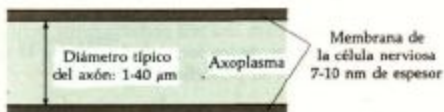


Figura 2 Sección longitudinal de un axón.

La neurona en reposo

En las células nerviosas, así como en otras células vivas, la membrana celular mantiene condiciones intracelulares que difieren de las correspondientes al ambiente extracelular. Un hecho crítico para la función de la neurona es la formación de un ligero exceso de iones negativos justo en el interior y un ligero exceso de iones positivos justo en el exterior de la membrana celular (figura 3).

La clave para entender la transmisión de los impulsos nerviosos son los gradientes electroquímicos a través de la membrana de las neuronas. La concentración de los iones potasio (K^+) es 30 veces mayor en el fluido interior a la célula que en el exterior; en cambio, la concentración de los iones sodio (Na^+) es unas 10 veces mayor en el fluido exterior a la célula que en el fluido interior, véase la tabla 1. Obsérvese que los aniones (particularmente iones cloro, Cl^-) están irregularmente distribuidos. Como todas las células vivas, las neuronas utilizan tanto la difusión pasiva como el transporte activo para mantener estos gradientes a través de las membranas celulares. La distribución desigual del Na^+ y K^+ se establece mediante una «bomba» $Na^+ - K^+$ que depende de la energía y que desplaza el Na^+ hacia el exterior de la célula y el K^+ hacia el interior. En la membrana de las neuronas se incluyen proteínas especializadas que funcionan como canales dependientes del voltaje y a través de los cuales el Na^+ y el K^+ pasan durante la transmisión de los impulsos nerviosos.

Cuando la neurona se encuentra en su estado de reposo, los canales de Na^+ dependientes del voltaje están cerrados, manteniendo así la distribución desigual del Na^+ . La membrana de la neurona en reposo no es permeable a los grandes aniones (o a otras especies grandes negativamente cargadas, tales como las proteínas), de tal modo que inmediatamente se forma un ligero exceso de cargas negativas justo en el interior de la membrana neuronal. La diferencia de potencial (sección 20-1) a través de la membrana es de unos 70 mV; considerando que el potencial eléctrico fuera de la célula es cero, el potencial eléctrico interno sería -70 mV. Este es el potencial en reposo (figura 3) de la neurona.

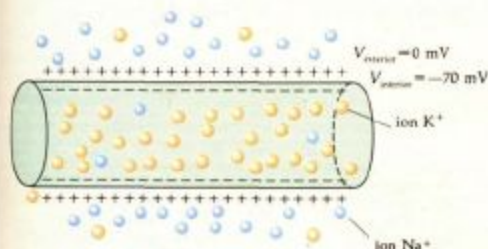


Figura 3 Distribución de carga eléctrica a lo largo de la membrana de una neurona en su estado de reposo.

Tabla 1. Concentraciones iónicas dentro y fuera de una neurona típica en reposo

	Concentración (mmol/L)	
	Dentro	Fuera
Na^+	15	145
K^+	150	5
Cl^-	9	120
Otros	156	30

La distribución de carga sobre cada superficie de la membrana neuronal recuerda la de un condensador cargado. El campo eléctrico a través de un condensador de placas paralelas es uniforme (véase sección 21-1), de modo que podemos calcular el campo eléctrico a través de una membrana celular de 7 nm de espesor:

$$E = \frac{-dV}{dL} = \frac{-(-70 \times 10^{-3} \text{ V})}{7,0 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$= 1,0 \times 10^7 \text{ V/m (en el interior)}$$

La fuerza interna debida a este campo sobre un ion positivo sería

$$F = qE = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1,0 \times 10^7 \text{ V/m})$$

$$= 1,6 \times 10^{-12} \text{ N}$$

Esta fuerza se encuentra en competencia con el gradiente de concentración del K^+ , mientras soporta el efecto del gradiente de concentración del Na^+ .

La neurona estimulada

Este potencial en reposo de una neurona puede perturbarse por estímulos físicos o químicos. Si la perturbación afecta sólo ligeramente al potencial de membrana en el punto de estimulación, éste vuelve rápidamente a su valor en reposo de -70 mV. En la figura 4 se ilustra este estímulo umbral, s_1 .

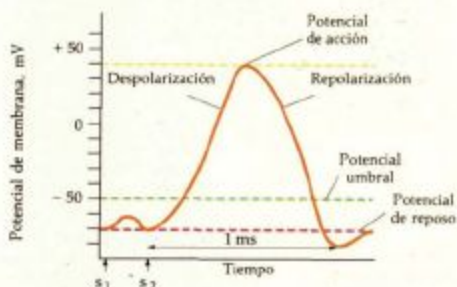


Figura 4 Pulso potencial de acción. s_1 es un estímulo inferior al umbral; s_2 es un estímulo umbral.

Sin embargo, si el estímulo es suficientemente intenso para producir la despolarización desde el potencial de reposo de -70 mV hasta unos -50 mV, se abren los canales dependientes del voltaje que a través de la membrana permiten el flujo del Na^+ . Favorecidos tanto por el gradiente de concentración (véase tabla 1) como por el gradiente eléctrico (véase la distribución de carga en la figura 3) los iones de sodio fluyen al interior de la célula, creando una corriente eléctrica ($i = \Delta Q / \Delta t$; véase ecuación 22-3). Este flujo de Na^+ crea una inversión local de la polaridad eléctrica de la membrana, modificando el potencial eléctrico hasta unos $+40$ mV (un salto de 110 mV desde el potencial de reposo). El efecto de este estímulo umbral, s_u , se muestra también en la figura 4.

Cuando el efecto del gradiente de concentración del Na^+ (externo $>$ interno) se equilibra con el del gradiente eléctrico (debido al potencial de membrana que ahora se ha hecho positivo en el interior), la despolarización se completa en el lugar del estímulo original. Los canales de Na^+ se cierran de nuevo. Los canales de K^+ responden a los cambios de polarización de la membrana algo después de la apertura de los canales de Na^+ , haciendo que los iones de K^+ fluyan hacia el exterior de la célula, mientras los iones de Na^+ fluyen hacia el interior. El movimiento de los iones K^+ y la acción más lenta de la bomba $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ restauran pronto el gradiente de concentración y el gradiente eléctrico a los valores del estado de reposo (véase la repolarización en la figura 4).

Después de la despolarización, los canales de Na^+ permanecen cerrados durante un breve período (de unos pocos milisegundos) durante el cual aquella porción de la membrana neuronal no puede ser estimulada de nuevo. Este es el *período refractario*. El cambio transitorio en el potencial eléctrico a través de la membrana se denomina *potencial de acción*.

Propagación del impulso nervioso

Los párrafos anteriores describen un simple y corto pulso eléctrico en el punto de estimulación. ¿Cómo viaja este impulso a lo largo del axón?

La despolarización local en el punto donde tiene lugar el estímulo original causa el movimiento —difusión pasiva— de los iones en las áreas adyacentes (figura 5). El potencial de membrana en un área adyacente pronto alcanza el nivel umbral de -50 mV, de modo que su permeabilidad al Na^+ es, a su vez, incrementada súbitamente y el potencial de acción de $+40$ mV se propaga en forma ondulatoria a lo largo de la longitud de la neurona (véase figura 5). A causa del período refractario, durante el cual aquella porción de la membrana recientemente despolarizada no puede ser estimulada de nuevo, el impulso nervioso sólo puede propagarse en una dirección, alejándose del cuerpo de la neurona. El impulso nervioso continúa a lo largo del axón hasta las ramificaciones terminales, en donde produce la liberación de sustancias neurotransmisoras desde la membrana neuronal. Estas sustancias saltan el hueco (sinapsis) que les separa de la siguiente neurona, permitiendo que el proceso se repita.

Obsérvese que durante la transmisión de un impulso nervioso, las corrientes eléctricas fluyen hacia dentro y hacia fuera a través de la membrana celular, *perpendicularmente* a la dirección de propagación del impulso nervioso. Además, cualquiera que sea la longitud del axón, el impulso no necesita amplificación; él continúa a lo largo del axón obteniendo cada pulso la misma altura que la inducida por el estímulo original.

Algunos axones están rodeados por una vaina discontinua de múltiples capas, la vaina de mielina. Ésta se forma cuando las células de Schwann rodean el axón (figura 6). A intervalos regulares de 1 a 2 mm a lo largo de la longitud del axón, se producen huecos de $1 \mu\text{m}$ de anchura en la vaina de mielina (nodos de Ranvier). La propagación de un impulso nervioso a lo largo de un axón con mielina difiere algo de la correspondiente a los axones sin mielina.

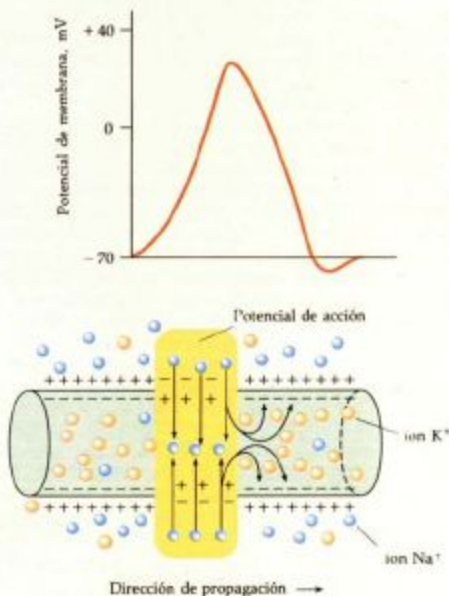


Figura 5 Propagación de un pulso potencial de acción. Con anterioridad al pulso potencial de acción, un pequeño segmento de la membrana se despolariza ligeramente debido al flujo lateral de iones interior a la membrana. Una vez esta despolarización alcanza el nivel umbral, el pulso potencial de acción se genera de nuevo en el segmento adyacente del axón. No se muestra el flujo lateral de iones a la izquierda, el cual debido al período refractario no pone en marcha el potencial de acción.

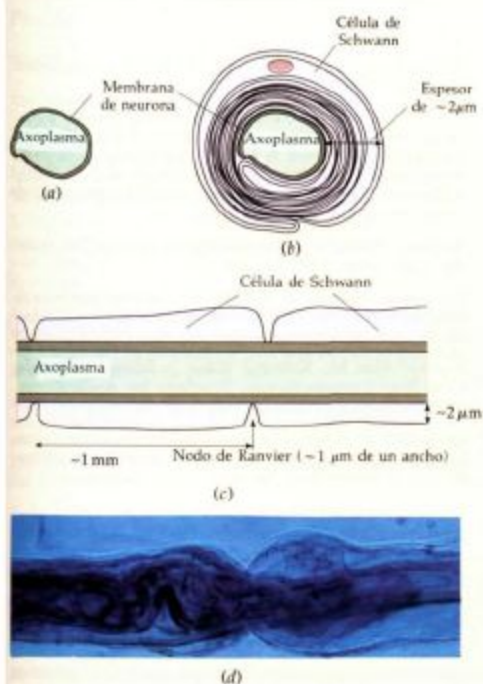


Figura 6 Secciones transversales: (a) axón nervioso «desnudo» (sin mielina), (b) axón nervioso rodeado por una vaina (con mielina). (c) Sección longitudinal del axón de una neurona con mielina. (d) Microfotografía de un axón con mielina que muestra el espesor de la vaina, así como un nodo de Ranvier en la parte central.

La vaina de mielina es un buen aislante, de modo que a su través no pueden fluir los iones. La actividad eléctrica en las células nerviosas con mielina está confinada a los nodos de Ranvier, en donde existe una concentración densa de canales iónicos dependientes del voltaje. Los potenciales de acción pueden generarse sólo en los nodos de Ranvier y «saltan» rápidamente de un nodo al siguiente a lo largo del axón (figura 7), debido a la rápida difusión de iones a través del axoplasma y el fluido extracelular. La velocidad de conducción en un axón típico con mielina es de 12 m/s.

La velocidad de conducción depende de la resistividad del axoplasma y de la capacitancia de la membrana. Como la resistencia es inversamente proporcional al área transversal, un axón con un gran diámetro posee una resistencia menor y por tanto, una mayor velocidad de conducción. Por otra parte, como demost

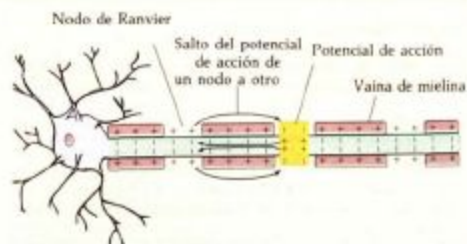


Figura 7 Durante la propagación de un pulso potencial de acción a lo largo de un axón nervioso con mielina, el impulso salta de un nodo a otro, acelerando grandemente la conducción del impulso nervioso. Esto contrasta con la propagación continua del potencial de acción a lo largo de un axón sin mielina.



Micrografía electrónica de barrido que muestra los axones de varias neuronas procedentes del lado izquierdo superior de la foto y conducen a las fibras musculares del esqueleto dispuestas horizontalmente. Los impulsos eléctricos que se propagan a lo largo de estas fibras dan lugar a la liberación de acetilcolina, sustancia neurotransmisora que inicia la contracción muscular.

mos en el condensador de placas paralelas (sección 21-1), la capacidad es inversamente proporcional a la separación de las placas. Por tanto, los axones con mielina poseen una capacidad inferior a la de los axones sin mielina. Cuanto menor es la capacidad de la membrana, más pequeña es la carga y menor el tiempo que la membrana tarda en despolarizarse y volverse a polarizar. Esta es una explicación de la mayor velocidad de conducción observada en los axones con mielina. Las medidas de velocidades de conducción realizadas en un amplio intervalo de neuronas demuestran la correlación existente con sus resistencias y capacidades calculadas.

El mecanismo de transmisión de impulsos eléctricos en neuronas es muy diferente al de la conducción eléctrica en metales, pero la física desempeña un importante papel en la comprensión de este proceso.

Sugerencias bibliográficas

Allen, Philip B.: «Electrical Conductivity», *The Physics Teacher*, vol. 17, 1979, pág. 362.

Un tratado breve, aunque avanzado, de las teorías clásica y cuántica de la conducción eléctrica.

Cotterhill, Rodney: «The Busy Electron: Conductors and Insulators», en *The Cambridge Guide to the Material World*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1985.

La distribución de los electrones externos de los átomos que constituyen un material, determinan si éste es un conductor, semiconductor o aislante. Este artículo explica las razones con diagramas y sin matemáticas.

Grundfest, Harry: «Electric Fishes», *Scientific American*, enero 1965, pág. 82.

Los miembros de muchas familias de peces producen voltajes apreciables en el exterior de sus cuerpos utilizando órganos especializados que contienen conjuntos de «membranas de electroplacas» en serie o en paralelo.

Hamakawa, Yoshihiro: «Photovoltaic Power», *Scientific American*, abril 1987, pág. 86.

Los avances en el diseño y fabricación de las células solares están disminuyendo el coste de la electricidad fotovoltaica.

de Santillana, Giorgio: «Alessandro Volta», *Scientific American*, enero 1965, pág. 82.

Este artículo describe la polémica entre Luigi Galvani y Alessandro Volta sobre si la electricidad era o no una fuerza viva y una clave del misterio de la vida, o un fenómeno que podía manifestarse sin el requisito de la presencia de un ser vivo. Volta ganó la polémica en 1800 al anunciar su invención de lo que ahora llamamos una batería.

Schluter, Michael A.: «Unaccountable Conduct», *The Sciences*, mayo/junio 1989, pág. 44.

Este artículo presenta los fundamentos del descubrimiento de la superconductividad a alta temperatura en 1986 y los intentos de explicar teóricamente este fenómeno.

Wolsky, Alan M., Robert F. Giese, y Edward J. Daniels: «The New Superconductors: Prospects for Applications», *Scientific American*, febrero 1989, pág. 60.

Los autores examinan las aplicaciones posibles de los nuevos superconductores y predicen un periodo mínimo de una década para el desarrollo de las aplicaciones prácticas.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Ser capaz de definir y discutir los conceptos de corriente eléctrica, velocidad de desplazamiento, resistencia y fem.
2. Establecer la ley de Ohm y distinguir su enunciado de la definición de resistencia.
3. Definir la resistividad y describir su dependencia con la temperatura.
4. Saber discutir el modelo simple de una batería real en función de una fuente de fem y una resistencia interna, y determinar la tensión en bornes de una batería cuando suministra la intensidad de corriente I .
5. Conocer la expresión general que relaciona la diferencia de potencial, la corriente y la potencia.
6. Saber determinar las resistencias equivalentes de las combinaciones de resistencias en serie o paralelo.
7. Discutir el modelo microscópico de la conducción eléctrica.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Intensidad de corriente	Materiales óhmicos
Amperio	Materiales no óhmicos
Velocidad de desplazamiento	Resistividad
Ley de Ohm	Conductividad
Resistencia	

Coficiente de temperatura de la resistividad	Tensión en bornes
Temperatura crítica	Resistencia interna
Superconductividad	Resistencias en serie
Calor de Joule	Resistencias en paralelo
Fuerza electromotriz	Modelo clásico de la conducción eléctrica
Fem	Tiempo de colisión
Batería ideal	Recorrido libre medio
Batería real	

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La ley de Ohm es $R = V/I$.
2. Los electrones se desplazan en la dirección de la corriente.
3. Una fuente de fem suministra potencia a un circuito eléctrico.
4. Cuando la caída de potencial en un segmento de circuito es V , la potencia suministrada a este segmento es IV .
5. La resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es siempre inferior a la resistencia de cualquiera de los componentes.
6. La tensión en bornes de una batería coincide con su fem.

Problemas

Nivel I

22-1 Corriente y movimiento de cargas

1. Por un conductor circula una corriente estacionaria de 2,0 A. (a) ¿Cuánta carga fluye por un punto del conductor en 5,0 min. (b) Si la corriente se debe al flujo de electrones, ¿cuántos electrones deberán pasar por dicho punto en este tiempo?

2. Por un conductor de cobre de calibre 10 circula una corriente de 20 A. Admitiendo que cada átomo tiene un electrón libre, calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones.

3. En un tubo fluorescente de 3,0 cm de diámetro, pasan por un punto determinado y por cada segundo $2,0 \times 10^{18}$ electrones y $0,5 \times 10^{19}$ iones positivos (con una carga +e) ¿Cuál es la corriente que circula por el tubo?

4. En un cierto haz de electrones, existen $5,0 \times 10^8$ electrones por centímetro cúbico. La energía cinética de los electrones es 10,0 keV y el haz es cilíndrico con un diámetro de 1,00 mm. (a) ¿Cuál es la velocidad de los electrones? (b) Hallar la corriente del haz.

5. Una carga +q se mueve en una circunferencia de radio r con velocidad v. (a) Expresar la frecuencia f con la cual pasa la carga por un punto en función de r y v. (b) Demostrar que la corriente media es qf y expresarla en función de v y r.

6. Un anillo de radio R tiene una carga por unidad de longitud λ . El anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. Hallar una expresión para la corriente.

7. Un haz de protones con un diámetro de 2,0 mm producido en un acelerador determinado constituye una corriente de 1,0 mA. La energía cinética de cada protón es 20 MeV. El haz choca contra un blanco metálico y es absorbido por él. (a) ¿Cuál es la densidad de protones en el haz? (b) ¿Cuántos protones chocarán contra el blanco en 1,0 min? (c) Si el blanco está inicialmente sin carga, expresar la carga del blanco en función del tiempo.

8. Un conductor de calibre 14 se suelda por su extremo a otro de calibre 10. Por los conductores circula una corriente de 15 A. Si ambos conductores son de cobre con un electrón libre por átomo, hallar la velocidad de desplazamiento en cada conductor.

22-2 Ley de Ohm y resistencia

9. Por un conductor de 10 m de longitud y una resistencia de 0,2 Ω circula una corriente de 5 A. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial en los extremos del conductor? (b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico del conductor?

10. Una diferencia de potencial de 100 V produce una corriente de 3 A en una resistencia determinada. (a) ¿Cuál es su resistencia? (b) ¿Cuál es la corriente cuando la diferencia de potencial es de 25 V?

11. Por un conductor de cobre y otro de hierro, que tienen la misma longitud y diámetro, circula la misma corriente I. (a) Hallar la caída de tensión en cada conductor y el cociente entre ellas. (b) ¿En cuál de los conductores es mayor el campo eléctrico?

12. Un trozo de carbón tiene una longitud de 3,0 cm y una sección recta cuadrada de 0,5 cm de lado. Se mantiene una

diferencia de potencial de 8,4 V entre los extremos de su dimensión más larga. (a) ¿Cuál es la resistencia del bloque? (b) ¿Cuál es la corriente en esta resistencia?

13. Una varilla de tungsteno tiene una longitud de 50 cm y una sección recta cuadrada de 1,0 mm de lado. (a) ¿Cuál es su resistencia a 20°C? (b) ¿Cuál es su resistencia a 40°C?

14. Una barra de carbón de radio 0,1 mm se utiliza para construir una resistencia. La resistividad de este material es $3,5 \times 10^{-5}$ Ω -m. ¿Qué longitud de la barra de carbón se necesita para obtener una resistencia de 10 Ω ?

15. El tercer carril (portador de corriente) de una vía de metro está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de aproximadamente 55 cm². ¿Cuál es la resistencia de 10 km de esta vía?

16. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de 30 m de longitud formado por hilo de cobre de calibre 16 por el cual circula una corriente de 5,0 A?

17. ¿A qué temperatura será la resistencia de un conductor de cobre el 10 por ciento mayor que cuando está a 20°C?

18. ¿Qué longitud tiene un conductor de cobre de calibre 14 que posee una resistencia de 2 Ω ?

22-3 Energía en los circuitos eléctricos

19. ¿Cuál es la potencia disipada en una resistencia de 10,0 Ω si la diferencia de potencial entre sus extremos es 50 V?

20. Hallar la potencia disipada en una resistencia de valor (a) 5 Ω y (b) 10 Ω conectada a una diferencia de potencial constante de 120 V.

21. Una resistencia de carbón de 10 000 Ω usada en circuitos electrónicos se diseña para disipar una potencia de 0,25 W. (a) ¿Cuál es la corriente máxima que puede transportar esta resistencia? (b) ¿Qué voltaje máximo puede establecerse a través de la misma?

22. Se proyecta una resistencia de calefacción de 1 kW para funcionar a 240 V. (a) ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circulará por ella? (b) ¿Cuál es la potencia de esta resistencia si funciona a 120 V? Se supone que la resistencia es constante.

23. Se calcula una resistencia de 10,0 Ω para disipar 5,0 W. (a) ¿Qué corriente máxima puede tolerar esta resistencia? (b) ¿Qué tensión entre sus extremos producirá esta corriente?

24. Si la energía cuesta 0,09 dólares por kilovatio-hora, (a) ¿cuánto costará hacer funcionar un tostador eléctrico durante 4 min si el tostador tiene una resistencia de 11,0 Ω y está conectada a una tensión de 120 V? (b) ¿Cuánto costará hacer funcionar un sistema de calefacción de 5,0 Ω de resistencia aplicado a una tensión de 120 V durante 8 h?

25. Una batería tiene una fem de 12,0 V. ¿Cuánto trabajo realiza en 5 s si suministra una corriente de intensidad de 3 A?

26. Una pila con una fem de 12 V tiene una tensión en bornes de 11,4 V cuando proporciona una corriente de 20 A al motor de arranque de un coche. ¿Cuál es la resistencia interna r de la batería?

27. (a) ¿Cuánta potencia suministra la fem de la batería del problema 26 cuando proporciona una corriente de 20 A? (b) ¿Qué cantidad de esta potencia se proporciona al motor de

arranque? (c) ¿En cuánto disminuye la energía química de la batería cuando está suministrando 20 A durante 3 min en el arranque de un coche? (d) ¿Cuánto calor se desarrolla en la batería cuando entrega 20 A durante 3 min?

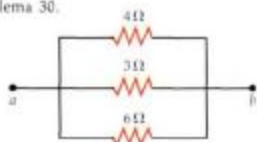
28. Una batería de 12 V de un coche posee una resistencia interna de $0,4 \Omega$. (a) ¿Cuál es la corriente si se cortocircuita momentáneamente la batería? (b) ¿Cuál es la tensión en bornes cuando la batería suministra una corriente de 20 A para poner en marcha el motor?

29. Un estudiante de física enchufa constantemente un calentador de 1200 W en su habitación durante el invierno. Si la energía eléctrica cuesta 0,09 dólares por kilovatio-hora, ¿cuánto deberá pagar por esta calefacción cada mes de 30 días?

22-4 Combinaciones de resistencias

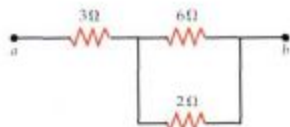
30. (a) Hallar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la figura 22-24. (b) Si la caída de potencial entre *a* y *b* es 12 V, hallar la corriente en cada resistencia.

Figura 22-24 Problema 30.



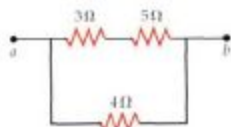
31. Repetir el problema 30 para la combinación de resistencias indicada en la figura 22-25.

Figura 22-25 Problema 31.



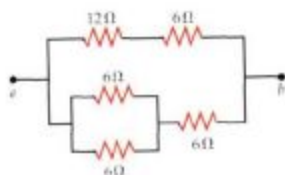
32. Repetir el problema 30 para la combinación de resistencias indicada en la figura 22-26.

Figura 22-26 Problemas 32 y 34.



33. Repetir el problema 30 para la combinación de resistencias indicada en la figura 22-27.

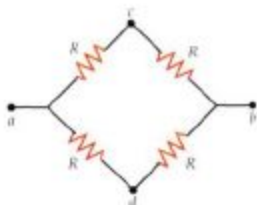
Figura 22-27 Problema 33.



34. En la figura 22-26 la corriente que circula por la resistencia de 4Ω es 4 A. (a) ¿Cuál es la caída de potencial entre *a* y *b*? (b) ¿Cuál es la intensidad de corriente en la resistencia de 3Ω ?

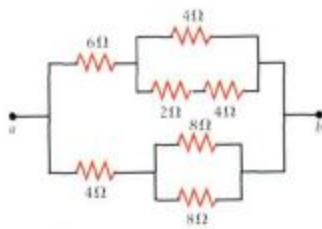
35. (a) Demostrar que la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la figura 22-28 es R . (b) ¿Qué ocurriría si se añadiese una resistencia R entre los puntos *c* y *d*?

Figura 22-28 Problema 35.



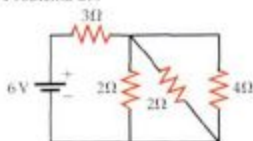
36. Repetir el problema 30 para la combinación de resistencias indicada en la figura 22-29.

Figura 22-29 Problema 36.



37. La batería de la figura 22-30 posee una resistencia interna despreciable. Determinar (a) la intensidad de corriente en cada una de las resistencias y (b) la potencia suministrada por la batería.

Figura 22-30 Problema 37.



22-5 Modelo microscópico de la conducción eléctrica

No se proponen problemas para esta sección.

Nivel II

38. Un alambre de longitud 1 m posee una resistencia de $0,3 \Omega$. ¿Cuál será su nueva resistencia si se alarga uniformemente hasta una longitud de 2 m?

39. Un cubo de cobre tiene sus aristas de longitud 2,0 cm. ¿Cuál será su resistencia si se convierte en un alambre de calibre 14?
40. Un calentador de 200 W se utiliza para calentar el agua de un vaso. Admitir que el 90 por ciento de la energía se utiliza en calentar el agua. (a) ¿Cuánto tiempo se tarda en calentar 0,25 kg de agua desde 15 a 100°C? (b) ¿Cuánto tiempo tardará en hervir la totalidad de esta agua después de que alcance los 100°C?
41. Considérese la resistencia equivalente de dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo en función de la relación $x = R_2/R_1$. (a) Demostrar que $R_{eq} = R_1 x/(1+x)$. (b) Representar gráficamente R_{eq} en función de x .
42. Un conductor de cobre de calibre 16 puede transportar con seguridad una corriente máxima de 6 A, admitiendo un aislamiento de goma. (a) ¿Cuál es el valor máximo de la diferencia de potencial que puede aplicarse en los extremos de 40 m de un conductor de este tipo? (b) Hallar la densidad de corriente y el campo eléctrico en el conductor cuando circulan por él 16 A. (c) Hallar la potencia disipada en el conductor en este último caso.
43. Una correa de un acelerador de Van de Graaff transporta una densidad de carga superficial de 5 mC/m². La correa tiene una anchura de 0,5 m y se mueve a 20 m/s. (a) ¿Qué corriente transporta? (b) Si esta carga ha de elevarse hasta un potencial de 100 kV, ¿cuál es el menor valor de la potencia del motor para accionar la corriente?
44. Se utiliza una espiral de alambre de nicrom como elemento calefactor en un evaporador de agua que genera 8,0 g de vapor por segundo. El alambre posee un diámetro de 1,80 mm y está conectado a una fuente de alimentación de 120 V. Calcular la longitud del alambre.
45. Un conductor de cobre de 80,0 m y diámetro de 1,0 mm se une por su extremo con otro conductor de 49,0 m de hierro del mismo diámetro. La corriente en cada uno de ellos es 2,0 A. (a) Hallar el campo eléctrico en cada conductor. (b) Hallar la diferencia de potencial aplicada a cada conductor. (c) Hallar la resistencia equivalente que transportaría 2,0 A a una diferencia de potencial igual a la suma de la que existe entre los dos extremos de ambos conductores y compararla con la suma de sus resistencias.
46. La corriente que circula por un alambre varía con el tiempo según la expresión $I = 20 + 3t^2$, en donde I se expresa en amperios y t en segundos. (a) ¿Cuántos coulombs se transportan por el alambre entre $t = 0$ s y $t = 10$ s? (b) ¿Qué corriente constante transportaría la misma carga en igual intervalo de tiempo?
47. Un tostador con un elemento de calefacción de nicrom posee una resistencia de 80 Ω a 0°C y una corriente inicial de 1,5 A. Cuando este elemento alcanza su temperatura final, la corriente es de 1,3 A. ¿Cuál es la temperatura final?
48. Un cilindro de vidrio de 1 cm de longitud posee una resistencia de $10^3 \Omega \cdot \text{m}$. ¿Qué longitud debería tener un alambre de cobre de la misma sección transversal para que su resistencia fuera igual a la del cilindro de vidrio?
49. Unos tubos fluorescentes compactos cuestan 20 dólares cada uno y su periodo de vida se estima en 8000 h. Estos tubos consumen 20 W de potencia, pero producen una iluminación equivalente a la de las bombillas incandescentes de 75 W. Éstas cuestan 50 centavos cada una y su periodo de vida se estima en 1200 h. (a) Si una vivienda tiene por término medio seis bombillas incandescentes de 75 W constantemente encendidas y la energía cuesta 9 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuánto dinero se ahorrará un consumidor cada año instalando en su lugar tubos fluorescentes? (b) ¿Cuál debería ser el precio del kilovatio-hora para que el coste total del uso de las bombillas fuese igual al correspondiente uso de los tubos? (Véase *Scientific American*, abril 1988, pág. 56.)
50. Los cables eléctricos de una casa deben ser suficientemente gruesos de diámetro para que no se calienten demasiado y provoquen un incendio. Supongamos que un alambre determinado transporta una corriente de 20 A, y se especifica que el calentamiento por efecto Joule no debe exceder los 2 W/m. ¿Qué diámetro debe tener un alambre de cobre para que se considere «seguro» con esta corriente?
51. Una batería de automóvil de 12 V puede suministrar una carga total de 160 A-h. (a) ¿Cuál es la energía total almacenada en la batería? (b) ¿Durante cuánto tiempo podría esta batería suministrar 150 W a un par de faros del automóvil?
52. Un coche eléctrico ligero funciona con diez baterías de 12 V. A una velocidad de 80 km/h la fuerza media de fricción es de 1200 N. (a) ¿Cuál debe ser la potencia del motor eléctrico para que el coche circule a 80 km/h? (b) Si cada batería puede distribuir una carga total de 160 A-h antes de su recarga, ¿cuál es la carga total en coulombs que pueden suministrar las 10 baterías? (c) ¿Cuál es la energía eléctrica total distribuida por las 10 baterías antes de la recarga? (d) ¿Qué distancia recorrerá el coche a 80 km/h antes de que las baterías deban ser recargadas? (e) ¿Cuál es el coste por kilómetro si el precio de recargar las baterías es de 9 centavos de dólar por kilovatio-hora?
53. Supóngase que la lámpara de una linterna de dos pilas consume 4 W de potencia. Las baterías se agotan en 45 min y cuestan 7,99 dólares. ¿Cuántos kilovatio-horas de energía pueden suministrar las dos baterías. (b) ¿Cuál es el coste por kilovatio-hora de energía si las baterías no pueden recargarse? (c) Si las baterías pueden recargarse con un coste de 9 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuál es el coste de la recarga?
54. En una máquina aceleradora de protones, estas partículas en un haz de 5 mA se mueven casi a la velocidad de la luz. (a) ¿Cuántos protones existen por metro de haz? (b) Si la sección transversal del haz es 10^{-4} m^2 , ¿cuál es la separación media de los protones?
55. En un circuito electrónico existe una resistencia de 10 Ω cableada por un alambre de cobre de longitud 50 cm y diámetro 0,6 mm. (a) ¿Qué resistencia adicional introduce el alambre? (b) ¿Qué error porcentual se comete al despreñar la resistencia del cableado? (c) Si la resistencia está formada por alambre de nicrom, ¿qué variación de su temperatura produciría un cambio en su resistencia igual a la resistencia del cableado?
56. El filamento de una lámpara posee una resistencia que crece linealmente con la temperatura. Al aplicar un voltaje constante, la corriente inicial disminuye hasta que el filamento alcanza una temperatura estacionaria. El coeficiente de temperatura de la resistividad del filamento es $4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. La corriente final a través del filamento es un octavo del valor inicial. ¿Cuál es la variación de temperatura del filamento?
57. Un tubo de caucho de 1 m de longitud con un diámetro interior de 4 mm se llena con una disolución salina de resistividad $10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$. En los extremos del tubo se disponen unos tapones metálicos que actúan de electrodos. (a) ¿Cuál es la resistencia del tubo lleno de disolución? (b) ¿Cuál es la resis-

cia del tubo lleno de disolución si se estira uniformemente hasta una longitud de 2 m?

58. Un calentador ambiental de una vieja mansión se alimenta con una corriente de 15 A. Un par de cables de cobre del calibre 12 transportan la corriente desde la caja de fusibles al enchufe de la pared a lo largo de una distancia de 30 m. El voltaje en la caja de fusibles es exactamente de 120 V. (a) ¿Cuál es el voltaje distribuido al calentador ambiental? (b) Si el fusible se funde al pasar una corriente de 20 A, ¿cuántas bombillas de 60 W pueden encenderse en esta línea cuando el calentador está funcionando? (Supóngase que los cables desde la pared al calentador espacial y a las tomas de luz son de resistencia despreciable.)

59. Un calentador ambiental eléctrico posee un alambre de nicrom con una resistencia de 8Ω a 0°C . Aplicando un voltaje de 120 V, la corriente eléctrica calienta el alambre de nicrom a 1000°C . (a) ¿Cuál es la corriente inicial que circula por el elemento de calefacción frío? (b) ¿Cuál es la resistencia del elemento de calefacción a 1000°C ? (c) ¿Cuál es la potencia operativa de este calentador?

60. Por un alambre de cobre de calibre 10 pueden circular corrientes hasta de 30 A. (a) ¿Cuál es la resistencia de 100 m de alambre de cobre de calibre 10? (b) ¿Cuál es el campo eléctrico en el alambre cuando la corriente es de 30 A? (c) ¿Cuánto tiempo tarda un electrón en recorrer 100 m de alambre cuando la corriente es de 30 A?

61. El cable de conexión para el arranque de un automóvil es de 3 m de longitud y está formado por tres hebras de cobre de calibre 12 que están trenzadas. (a) ¿Cuál es la resistencia de este cable? (b) Cuando se utiliza en el arranque, transporta una corriente de 90 A. ¿Cuál es la caída de voltaje que tiene lugar a su través? (c) ¿Cuánto calor por efecto Joule se desprende en el cable?

Nivel III

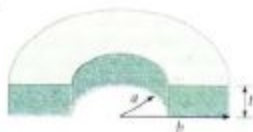
62. Un acelerador lineal produce un haz pulsante de electrones. La corriente del pulso es de 1,6 A con una duración de $0,1 \mu\text{s}$. (a) ¿Cuántos electrones se aceleran en cada pulso? (b) ¿Cuál es la corriente media del haz si existen 1000 pulsos por segundo? (c) Si cada electrón adquiere una energía de 400 MeV, ¿cuál es la potencia media suministrada al acelerador? (d) ¿Cuál es la potencia de pico suministrada? (e) ¿Qué fracción del tiempo está el acelerador realmente acelerando partículas? (Este cociente se denomina *factor de respuesta del acelerador*.)

63. Un conductor de área transversal A , longitud L_1 , resistividad ρ_1 , y coeficiente de temperatura α_1 , se conecta a otro conductor de longitud L_2 , resistividad ρ_2 , coeficiente de temperatura α_2 , y la misma área A , de modo que por los conductores circula la misma corriente. (a) Demostrar que si $\rho_1 L_1 \alpha_1 + \rho_2 L_2 \alpha_2 = 0$, la resistencia total R es independiente de la temperatura en el caso de pequeñas variaciones de temperatura. (b) Si uno de los conductores se hace de carbón y el otro de cobre, hallar el cociente de sus longitudes de modo que R sea aproximadamente independiente de la temperatura.

64. Una resistencia de calefacción de 100 W se proyecta para funcionar cuando se le aplican en sus extremos 120 V. (a) ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circula por él? (b) Demostrar que si la diferencia de potencial a través de la resistencia varía en una cantidad pequeña ΔV , la potencia varía también en una pequeña cantidad ΔP siendo $\Delta P/P \approx 2 \Delta V/V$. *Indicación:* Aproximar las variaciones por diferenciales. (c) Hallar la potencia aproximada disipada en la resistencia si la diferencia de potencial disminuye a 115 V.

65. Determinar la resistencia entre los extremos del semianillo de la figura 22-31. La resistividad del material del anillo es ρ .

Figura 22-31 Problema 65.



66. El espacio comprendido entre dos conductores esféricos concéntricos se llena con un material de resistividad $10^7 \Omega \cdot \text{m}$. Si la corteza interior posee un radio de 1,5 cm y la exterior de 5 cm, ¿cuál es la resistencia entre los conductores? *Indicación:* Determinar la resistencia de una corteza esférica del material de área $4\pi r^2$ y longitud dr e integrar para determinar la resistencia total de la serie de cortezas en serie.

67. El espacio comprendido entre dos cilindros metálicos coaxiales de longitud L y radios a y b se llena totalmente de un material de resistividad ρ . (a) ¿Cuál es la resistencia entre los dos cilindros? (Véase la indicación del problema 66.) (b) Determinar la intensidad de la corriente entre los dos cilindros si $\rho = 30 \Omega \cdot \text{m}$, $a = 1,5 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$ y se aplica una diferencia de potencial de 10 V entre los dos cilindros.

68. Un diodo semiconductor es un dispositivo no lineal cuya intensidad de corriente I está relacionada con el voltaje V a través del diodo por la expresión

$$I = I_0 (e^{V/kT} - 1)$$

en donde k es la constante de Boltzmann, e la carga del electrón y T la temperatura absoluta. (a) ¿Cuál es la resistencia del diodo para $V = 0,5 \text{ V}$ si $I_0 = 10^{-6} \text{ A}$? (b) ¿Cuál es la resistencia para $V = 0,6 \text{ V}$?

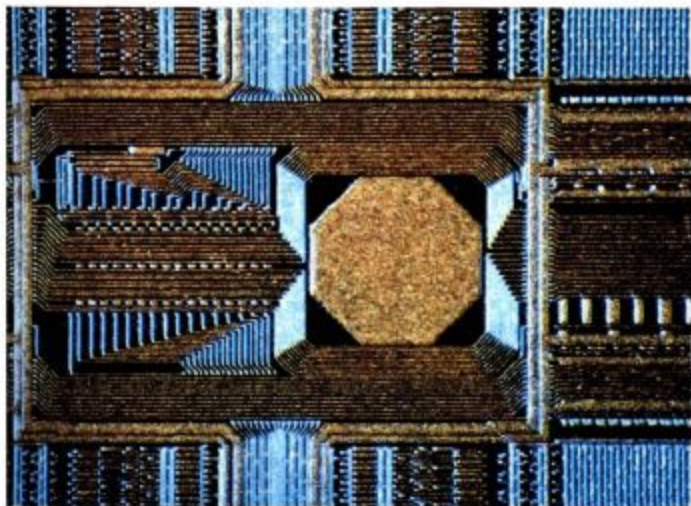
69. El radio de un alambre de longitud L crece linealmente con su longitud según la expresión

$$r = a + \frac{b-a}{L} x$$

en donde x es la distancia del extremo menor de radio a . ¿Cuál es la resistencia de este alambre en función de su resistividad ρ , longitud L , radio a y radio b ?

Capítulo 23

Circuitos de corriente continua



Fotografía microscópica (aumento aproximado $\times 1000$) de la porción central de una microplaqueta de memoria de acceso al azar (DRAM) que puede almacenar 256 000 bits de datos. La microplaqueta es más pequeña que un sello de correos y contiene unos 600 000 componentes electrónicos—resistencias, condensadores, diodos y transistores. Estos componentes se construyen sobre una sola lámina de cristal de silice depositando impurezas en regiones perfectamente definidas del cristal. El proceso de depósito que construye los componentes, también crea los cables (100 veces más finos que un cabello humano) que les conectan. Este tipo de circuito, llamado circuito integrado (CI) funciona de igual modo que los circuitos formados con componentes discretos. Pero los CIs operan con mayor rapidez y consumen menos potencia pues al ser más pequeños, las corrientes en ellos viajan distancias más cortas.

En este capítulo analizaremos algunos circuitos simples formados por baterías, resistencias y condensadores en combinaciones diversas; es decir, determinaremos los valores de V e I y otras magnitudes deducidas de éstas en distintos puntos de los circuitos. Estos circuitos se llaman de corriente continua (cc), porque la corriente en cualquiera de sus puntos circula siempre en la misma dirección. En el capítulo 28, discutiremos los circuitos de corriente alterna (ca), en los cuales la corriente en cualquier punto cambia alternativamente de dirección.

Cuando mediante un conductor se cierra un circuito, un campo eléctrico se propaga por los elementos del mismo, originando cambios complicados en el circuito a medida que se establece la corriente y la carga se acumula en diversos puntos. Sin embargo, como el campo eléctrico se propaga con una velocidad próxima a la de la luz, estos cambios ocurren rápidamente y el equilibrio se establece con igual rapidez. El tiempo necesario para este equilibrio depende de la conductividad de los elementos en el circuito, pero es prácticamente instantáneo en la mayor parte de los casos. En el equilibrio, la carga ya no se acumula más en puntos del circuito y la corriente es estacionaria. En aquellos circuitos que contienen condensadores, la corriente puede crecer o decrecer lentamente, pero los cambios apreciables ocurren sólo en tiempos mucho mayores que el necesario para alcanzar el equilibrio. En circuitos de este tipo, cada valor sucesivo de la corriente puede considerarse como un estado de quasi-equilibrio.

23-1 Reglas de Kirchoff

Aunque los métodos discutidos en el capítulo 22 para sustituir las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo por una resistencia equivalente, son muy útiles para simplificar muchas de las combinaciones posibles, no son suficientes para el análisis de todos los circuitos simples, especialmente aquellos que poseen más de una batería. Por ejemplo, las dos resistencias R_1 y R_2 del circuito de la figura 23-1 parecen estar en paralelo, pero no es así. La caída de potencial no es la misma a través de ambas resistencias, debido a la presencia de la fem \mathcal{E}_2 en serie con R_2 . Además R_1 y R_2 no transportan la misma corriente, pues no están en serie.

Existen dos reglas, llamadas **reglas de Kirchoff**, que se aplican a cualquier circuito en estado estacionario:

1. La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.
2. En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

Reglas de Kirchoff

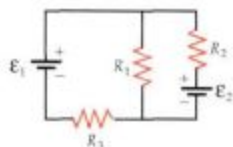


Figura 23-1 Circuito simple en el que no pueden sustituirse las resistencias en serie o en paralelo por su resistencia equivalente. Las diferencias de potencial a lo largo de las resistencias R_1 y R_2 no son iguales debido a la existencia de la fem \mathcal{E}_2 y por tanto, no están en paralelo. Obsérvese también que estas resistencias no están conectadas entre sí por sus extremos. Las resistencias no soportan la misma corriente y, por tanto, tampoco están en serie.

La regla 1, llamada **regla de las mallas**, se deduce a partir del simple hecho de que en el estado estacionario la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera es constante. En estado estacionario, el campo eléctrico en cualquier punto (fuera de una fuente de fem) es debido a la carga acumulada sobre las superficies de los bornes de la batería, resistencias, cables, u otros elementos del circuito. Como el campo eléctrico es conservativo, existe una función potencial en cualquier punto del espacio (excepto en el interior de una fuente de fem). Según nos desplazamos a lo largo de la malla del circuito, el potencial puede aumentar o disminuir en función de que nos encontremos con una resistencia o una batería, pero una vez recorrida la malla y se ha llegado al punto desde el que se comenzó, la *variación neta de potencial debe ser igual a cero*. Esta regla es una consecuencia directa del principio de conservación de la energía. Si tenemos una carga q en un punto donde el potencial es V , la energía potencial de la carga es qV . Cuando la carga recorre un bucle en un circuito, pierde o gana energía al atravesar resistencias, baterías u otros elementos, pero cuando vuelve a su punto de partida, su energía debe ser de nuevo qV .

Ejercicio

Dibujar un rectángulo que represente un circuito arbitrario y considerar seis puntos cualesquiera (por ejemplo, los cuatro vértices y otros dos puntos más) que llamaremos a, b, c, d, e, f . Asignar números arbitrarios a cada punto del diagrama. Comenzando en el punto a , sumar las diferencias entre cada par de números sucesivos mientras se recorre el circuito, teniendo en cuenta los signos de las diferencias. ¿Cuál es la suma algebraica de estas diferencias para un recorrido completo del circuito? (Respuesta: 0)

La segunda regla de Kirchoff, llamada **regla de los nudos**, se deduce de la conservación de la carga. Esta regla es necesaria para circuitos de múltiples mallas que contienen puntos en los que la corriente puede dividirse. En estado estacionario no hay posterior acumulación de carga eléctrica en ningún punto del circuito, de tal modo que la cantidad de carga que entra en un punto debe ser igual a la que sale de dicho punto. La figura 23-2 muestra la unión o nudo de tres conductores que transportan las corrientes I_1, I_2 e I_3 . En un intervalo de tiempo Δt , la carga $I_1 \Delta t$ fluye entrando en la unión por la izquierda. En el mismo intervalo de tiempo las cargas $I_2 \Delta t$ e $I_3 \Delta t$ salen de la unión hacia la derecha. Puesto que no existe ninguna causa para que se creen o se destruyan cargas en este punto, la conservación de la carga implica la regla de los nudos que en este caso nos da

$$I_1 = I_2 + I_3$$

23-1

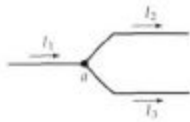


Figura 23-2 Ilustración de la regla de los nudos de Kirchoff. La corriente I_1 en el punto a es igual a la suma $I_2 + I_3$ de las corrientes que salen del punto a .

La figura 23-3 muestra un circuito formado por dos baterías con resistencias internas r_1 y r_2 y tres resistencias externas. Deseamos determinar la corriente en función de las fems y resistencias que suponemos conocidas. No podemos predecir la dirección de la corriente a menos que sepamos cuál de las fems es mayor, pero no es necesario conocer la dirección y sentido de las corrientes antes de resolver el problema. Podemos suponer un sentido cualquiera y resolver el problema con dicha hipótesis. Si la suposición fuese incorrecta, obtendríamos como valor de la corriente un número negativo indicando que su sentido es opuesto al admitido. Supongamos que I circula en el sentido de las agujas del reloj, según está indicado en la figura, y aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas recorriendo el circuito en la dirección supuesta de la corriente, comenzando en el punto a . Los extremos de mayor y menor potencial de las resistencias con la corriente elegida se indican en la figura con los signos más y menos. Las caídas y los movimientos de potencial vienen expresados en la tabla 23-1. Obsérvese que encontramos una caída de potencial al atravesar la fuente de fem entre f y g . Comenzando en el punto a , la regla de las mallas de Kirchhoff nos da:

$$-IR_1 - IR_2 - \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR_3 + \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 0 \quad 23-2$$

Despejando el valor de la corriente I , se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} \quad 23-3$$

Obsérvese que si \mathcal{E}_2 es mayor que \mathcal{E}_1 , se obtiene un número negativo para la corriente I indicando que hemos escogido el sentido equivocado para I . En el caso de que \mathcal{E}_2 sea mayor que \mathcal{E}_1 la corriente será en el sentido contrario de las agujas del reloj. Por otra parte, si \mathcal{E}_1 es la fem mayor, obtendremos un número positivo para I indicando que la dirección y sentido supuestos son correctos. Supongamos en este ejemplo que \mathcal{E}_1 es la fem mayor. En la batería 2, la carga fluye del potencial más alto al más bajo. Por tanto, una carga ΔQ saliendo de la batería 2 desde el punto c hasta el punto d pierde una energía $\mathcal{E}_2 \Delta Q$. En esta batería, se convierte la energía eléctrica en energía química y se almacena en ella; la batería 2 está cargándose.

Podemos tener en cuenta el balance de energía en este circuito multiplicando cada término de la ecuación 23-2 por la corriente I :

$$\mathcal{E}_1 I = \mathcal{E}_2 I + I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 + I^2 r_2 + I^2 r_1 \quad 23-4$$

El término $\mathcal{E}_1 I$, es la velocidad a la cual la batería 1 cede energía al circuito. Esta energía procede de la energía química interna de la batería. El término $\mathcal{E}_2 I$ es la velocidad a la cual la energía eléctrica se convierte en energía química en la batería 2. El término $I^2 R_1$ es la velocidad de producción de calor por efecto Joule en la resistencia R_1 . Existen términos semejantes para cada una de las demás resistencias.

Ejemplo 23-1

Los elementos del circuito de la figura 23-3 tienen los valores $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $\mathcal{E}_2 = 4$ V, $r_1 = r_2 = 1$ Ω , $R_1 = R_2 = 5$ Ω , $R_3 = 4$ Ω como indica la figura 23-4. Hallar los potenciales en los puntos a hasta g indicados en la figura admitiendo que el potencial en el punto f es cero y estudiar el balance energético del circuito.

El análisis del circuito se simplifica usualmente si elegimos un punto como potencial cero y referimos a éste los potenciales de los restantes puntos. Como sólo son importantes las diferencias de potencial, cualquier punto del circuito puede escogerse como potencial cero. En este ejemplo se ha escogido el punto f como potencial cero. Esto viene indicado en el circuito por el símbolo \perp en el punto f . Como vimos en la sección 18-2, la tierra puede considerarse como un conductor muy ancho con un suministro casi ilimitado de

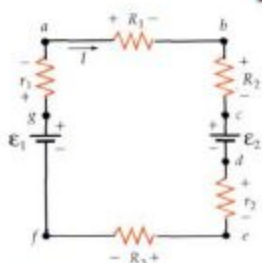


Figura 23-3 Circuito formado por dos baterías y tres resistencias externas. Los signos más y menos sobre las resistencias nos ayudan a recordar cuál extremo de cada resistencia está a mayor potencial de acuerdo con la dirección de la corriente que hemos supuesto.

Tabla 23-1 Cambios de potencial entre los puntos indicados en el circuito de la figura 23-3

$a \rightarrow b$	Caída IR_1
$b \rightarrow c$	Caída IR_2
$c \rightarrow d$	Caída \mathcal{E}_2
$d \rightarrow e$	Caída Ir_2
$e \rightarrow f$	Caída IR_3
$f \rightarrow g$	Aumento \mathcal{E}_1
$g \rightarrow a$	Caída Ir_1

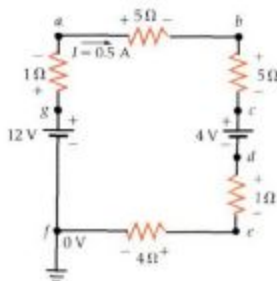


Figura 23-4 Circuito de la figura 23-3 con los valores muestra, correspondientes al ejemplo 23-1. El potencial se elige igual a cero en el punto f . Las tres líneas horizontales próximas al punto f indican que está conectado a tierra.

carga, lo cual significa que el potencial de la tierra permanece esencialmente constante. Por ello frecuentemente se le considera como potencial cero. En la práctica, los circuitos eléctricos suelen conectarse a tierra a través de un punto del circuito. La cubierta metálica externa de una máquina eléctrica de lavar, por ejemplo, suele conectarse a tierra uniéndola con un cable a un tubo de circulación del agua que está en contacto con la tierra.

Primero hallamos la corriente que circula por el circuito. A partir de la ecuación 23-3 tenemos,

$$I = \frac{12 \text{ V} - 4 \text{ V}}{5 \Omega + 5 \Omega + 4 \Omega + 1 \Omega + 1 \Omega} = \frac{8 \text{ V}}{16 \Omega} = 0,5 \text{ A}$$

Podemos ahora hallar los potenciales en los puntos *a* hasta *g* respecto al potencial cero del punto *f*. Puesto que por definición la fem mantiene una diferencia de potencial constante $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ entre el punto *g* y el punto *f*, el potencial en el punto *g* es 12 V . El potencial en el punto *a* es menor que en el punto *g* debido a la caída de potencial $Ir_1 = (0,5 \text{ A})(1 \Omega) = 0,5 \text{ V}$. Así pues, el potencial en el punto *a* es $12 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 11,5 \text{ V}$. Análogamente la caída de potencial a través de las resistencias R_1 y R_2 de 5Ω en cada una de ellas es $IR_1 = (0,5 \text{ A})(5 \Omega) = 2,5 \text{ V}$. El potencial en el punto *b* es entonces $11,5 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = 9 \text{ V}$ y en *c* es $6,5 \text{ V}$. La caída de potencial a través de \mathcal{E}_2 es 4 V . Así pues, el punto *d* tiene un potencial de $2,5 \text{ V}$. Puesto que la caída de potencial a través de la resistencia r_2 de 1Ω , es $0,5 \text{ V}$, el potencial en *e* es 2 V . La caída de potencial a través de la resistencia R_3 de 4Ω es $IR_3 = 2 \text{ V}$. Esto nos dice que el potencial en *f* es cero, de acuerdo con nuestra hipótesis original. La figura 23-5 muestra los potenciales en todos los puntos señalados, comenzando y terminando con el punto *f*.

La potencia suministrada por la fem \mathcal{E}_1 es

$$P_{\mathcal{E}_1} = \mathcal{E}_1 I = (12 \text{ V})(0,5 \text{ A}) = 6,0 \text{ W}$$

La potencia disipada en la resistencia interna de la batería 1 es

$$P_{r_1} = I^2 r_1 = (0,5 \text{ A})^2 (1 \Omega) = 0,25 \text{ W}$$

Así pues la potencia cedida por la batería 1 al circuito externo es $6,0 \text{ W} - 0,25 \text{ W} = 5,75 \text{ W}$. Este valor es también igual a $V_a I$, en donde $V_a = V_g - V_f = 11,5 \text{ V}$ corresponde a la tensión en bornes de dicha batería 1. La potencia total consumida en las resistencias externas del circuito es

$$P_R = (0,5 \text{ A})^2 (5 \Omega + 5 \Omega + 4 \Omega) = 3,5 \text{ W}$$

La potencia consumida en la batería 2 que está siendo cargada, es $(V_c - V_d)I = (6,5 \text{ V} - 2 \text{ V})(0,5 \text{ A}) = 2,25 \text{ W}$. Parte de esta potencia $P_{r_2} = P_{r_2} = 0,25 \text{ W}$, se disipa en la resistencia interna r_2 y la parte restante, $P_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E}_2 I = 2 \text{ W}$, representa la velocidad con que se almacena energía en dicha batería.

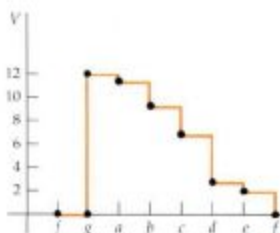


Figura 23-5 Valores del potencial en los puntos indicados del circuito de la figura 23-4. El potencial es cero en *f* y salta a 12 V en *g*. Disminuye en IR cuando pasa a través de cada resistencia en la dirección de la corriente. Al regresar a *f*, el potencial es de nuevo cero.

Obsérvese que el voltaje en bornes en la batería del ejemplo 23-1 que se está cargando es igual a $V_c - V_d = 4,5 \text{ V}$, cuyo valor es mayor que el de la fem de la batería. Debido a su resistencia interna una batería no es completamente reversible. Si la misma batería de 4 V tuviese que suministrar $0,5 \text{ A}$ a un circuito externo, su voltaje en bornes sería de $3,5 \text{ V}$ (suponiendo de nuevo que el valor de su resistencia interna es de 1Ω). Si la resistencia interna es muy pequeña, el voltaje en bornes de la batería es aproximadamente igual a su fem, tanto si cede corriente a un circuito externo como si se está cargando. Algunas baterías reales, como los acumuladores utilizados en los coches, son prácticamente reversibles y pueden recargar fácilmente; otros tipos de baterías no lo son. Si se intenta recargar una de éstas mediante el sistema de hacer pasar corriente a través de ella desde su polo positivo al negativo, en la mayor parte de los casos, sino en todos, la energía suministrada se disipa en forma de calor y no en energía química de la pila, y ésta puede explotar.

Ejemplo 23-2

Una batería de automóvil en buenas condiciones se conecta mediante cables a otra batería debilitada para proceder a su carga. (a) ¿A qué borne de la batería débil debemos conectar el borne positivo de la batería buena? (b) Suponer que ésta tiene una fem $\mathcal{E}_1 = 12$ V mientras que la débil tiene una fem $\mathcal{E}_2 = 11$ V, las resistencias internas de las baterías son $r_1 = r_2 = 0,02$ Ω y la resistencia de los cables es $R = 0,01$ Ω (todos estos valores son típicos). ¿Cuál será la corriente de carga? (c) ¿Y si las baterías se conectan incorrectamente, cuál sería la corriente?

(a) Para cargar la batería débil se conectan entre sí los bornes positivos de ambas baterías, así como los bornes negativos, a fin de que pueda suministrarse carga a través de la batería débil desde el borne positivo al borne negativo. La figura 23-6 muestra el diagrama de circuito de este proceso.

(b) La corriente de carga viene dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12 \text{ V} - 11 \text{ V}}{0,05 \Omega} = 20 \text{ A}$$

(c) La figura 23-7 muestra el diagrama de circuito para el caso en que las baterías se conectan incorrectamente, es decir, los bornes positivos con los negativos. En este caso, la corriente sería

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12 \text{ V} + 11 \text{ V}}{0,05 \Omega} = 460 \text{ A}$$

Si las baterías se conectan de este modo, ambas pueden explotar produciendo un chaparrón de ácido hirviendo de la batería.

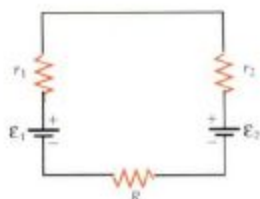


Figura 23-6 Dos baterías conectadas de modo que una carga a la otra. Como la suma de las resistencias internas de las baterías y la resistencia R de los cables de conexión es muy pequeña, se obtienen corrientes relativamente grandes incluso cuando las fuerzas electromotrices son casi iguales.

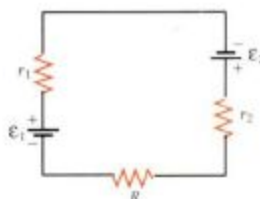


Figura 23-7 Dos baterías no conectadas correctamente para la carga. Como la resistencia total del circuito es del orden de centésimas de ohm, la corriente es muy grande y la batería puede explotar.

Circuitos de múltiples mallas

A continuación consideraremos el caso de circuitos que contienen más de una malla. Para analizar estos circuitos aplicaremos la regla de los nudos de Kirchhoff en aquellos puntos donde la corriente se divide en dos o más partes.

Ejemplo 23-3

(a) Determinar la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura 23-8. (b) Calcular la energía disipada en 3 s en la resistencia de 4 Ω .

(a) Este circuito es el mismo que el de la figura 23-1 con $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $\mathcal{E}_2 = 5$ V, $R_1 = 4$ Ω , $R_2 = 2$ Ω y $R_3 = 3$ Ω . Sea I la corriente que circula a través de la batería de 12 V en el sentido indicado. En el punto b , esta corriente se divide en las corrientes I_1 e I_2 según está indicado. Hasta que conozcamos la solución correspondiente a los valores de las corrientes no podemos estar seguros de su sentido. Por ejemplo, necesitamos saber cuál de los puntos b o e está a potencial más elevado con objeto de conocer el sentido de la corriente a través de la resistencia de 4 Ω . Aplicando la regla de los nudos al punto b obtenemos

$$I = I_1 + I_2$$

Si aplicamos la regla de los nudos al punto e se obtiene la misma información, ya que las corrientes I_1 y I_2 se unen en dicho punto para formar la corriente I que se dirige al punto f . Existen tres mallas posibles para aplicar la regla 1: las mallas $abef$ y $bcde$, interiores, y la malla $abcdef$, exterior. Sólo necesitamos dos ecuaciones más para determinar las tres corrientes incógnitas. Las ecuaciones para dos cualesquiera de las mallas serán suficientes. (La

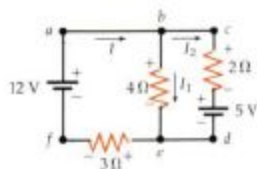


Figura 23-8 Circuito correspondiente al ejemplo 23-3. La dirección de la corriente I_1 de b a e no se conoce antes de analizar el circuito. Los signos $+$ y $-$ sobre la resistencia de 4 Ω corresponden a la dirección supuesta de I_1 de b a e .

tercera malla nos dará entonces una información redundante). Reemplazando I por $I_1 + I_2$ y aplicando la regla de las mallas al circuito exterior ($abcdef$) tenemos

$$12 \text{ V} - (2 \Omega)I_2 - 5 \text{ V} - (3 \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

Simplificando esta ecuación y dividiéndola por 1Ω , recordando que $1 \text{ V}/1 \Omega = 1 \text{ A}$, resulta

$$7 \text{ A} - 3I_1 - 5I_2 = 0 \quad 23-5$$

De igual modo, aplicando la regla 1 de Kirchhoff a la malla de la izquierda ($abef$) resulta

$$12 \text{ V} - (4 \Omega)I_1 - (3 \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

o sea,

$$12 \text{ A} - 7I_1 - 3I_2 = 0 \quad 23-6$$

Las ecuaciones 23-5 y 23-6 permiten conjuntamente determinar las intensidades de corriente I_1 y I_2 . Para eliminar I_2 , multiplicamos cada término de la ecuación 23-5 por 3 y cada término de la ecuación 23-6 por 5 resultando

$$21 \text{ A} - 9I_1 - 15I_2 = 0 \quad 23-5a$$

y

$$60 \text{ A} - 35I_1 - 15I_2 = 0 \quad 23-6a$$

Restando la ecuación 23-5a de la ecuación 23-6a se obtiene

$$39 \text{ A} - 26I_1 = 0$$

es decir,

$$I_1 = \frac{39 \text{ A}}{26} = 1,5 \text{ A}$$

Sustituyendo este valor de I_1 en la ecuación 23-5, se obtiene

$$7 \text{ A} - 3(1,5 \text{ A}) - 5I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{2,5 \text{ A}}{5} = 0,5 \text{ A}$$

La corriente total a través de la batería de 12 V es, por tanto,

$$I = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ A} + 0,5 \text{ A} = 2,0 \text{ A}$$

(b) Como la intensidad de corriente en la resistencia de 4Ω es de $1,5 \text{ A}$, la potencia disipada en esta resistencia es

$$P = I^2 R = (1,5 \text{ A})^2 (4 \Omega) = 9 \text{ W}$$

La energía total disipada en la resistencia de 4Ω en 3 s es, por tanto,

$$W = Pt = (9 \text{ W})(3 \text{ s}) = 27 \text{ J}$$

El ejemplo 23-3 ilustra algunas características generales del análisis de circuitos con mallas múltiples. Consideremos un circuito general que contiene una malla exterior y n mallas interiores. Existirán $n - 1$ puntos de unión donde la corriente se divide y otros $n - 1$ puntos de unión donde las corrientes se unen. Para determinar las intensidades de las corrientes aplicaremos la regla de las mallas a n bucles y la regla de los nudos a $n - 1$ uniones. Si se aplica la regla de las mallas o la de los nudos a un número mayor de elementos sólo se obtendrá una información redundante. En el ejemplo 23-3, teníamos dos mallas interiores y por ello, aplicamos la regla de las mallas a dos bucles y la regla de los nudos a un punto de unión (punto b), en donde la corriente se divide.

Ejemplo 23-4

Determinar la intensidad de corriente en cada parte del circuito indicado en la figura 23-9.

Observemos en primer lugar que las resistencias de $3\ \Omega$ y $6\ \Omega$ en la malla que está situada a la derecha, están conectadas en paralelo. El análisis será más simple si reemplazamos estas resistencias por la resistencia equivalente R_{eq} , que se obtiene de la expresión:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{3}{6\ \Omega} = \frac{1}{2\ \Omega}$$

en donde

$$R_{eq} = 2\ \Omega$$

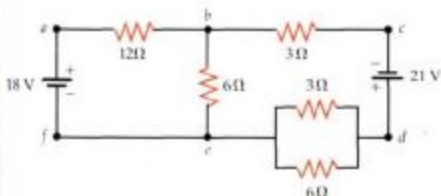


Figura 23-9 Circuito correspondiente al ejemplo 23-4.

En la figura 23-10, se ha hecho esta sustitución y se han escogido las direcciones de las corrientes. Llamamos I a la intensidad de corriente que pasa por la batería de $18\ \text{V}$ e I_1 a la que atraviesa la resistencia de $6\ \Omega$, que suponemos dirigida hacia abajo. Obsérvese que hemos aplicado la regla de los nudos al punto b usando el valor $I - I_1$ para la corriente dirigida del punto b al c . Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff en el sentido de las agujas del reloj a la malla $abef$ resulta

$$18\ \text{V} - (12\ \Omega)I - (6\ \Omega)I_1 = 0$$

Simplificando esta ecuación dividiendo todos los términos por $6\ \Omega$ y pasando el término $(18\ \text{V})/(6\ \Omega) = 3\ \text{A}$ al segundo miembro, se obtiene

$$2I - I_1 = 3\ \text{A} \quad 23-7$$

Aplicando la misma regla a la malla bcd obtenemos otra ecuación:

$$-(3\ \Omega)(I - I_1) + 21\ \text{V} - (2\ \Omega)(I - I_1) + (6\ \Omega)I_1 = 0$$

Obsérvese que al desplazarnos de e a b encontramos un incremento de voltaje, ya que la dirección supuesta de la corriente I es opuesta a la dirección en que recorremos la malla. Combinando términos, reajustando y dividiendo los términos por $1\ \Omega$, resulta

$$5I - 11I_1 = 21\ \text{A} \quad 23-8$$

De las ecuaciones 23-7 y 23-8 pueden obtenerse las intensidades de las corrientes incógnitas I e I_1 :

$$I = 2\ \text{A}$$

y

$$I_1 = -1\ \text{A}$$

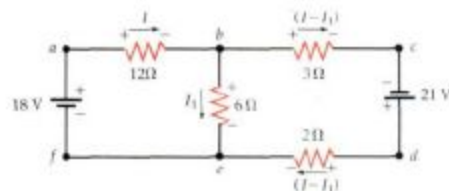


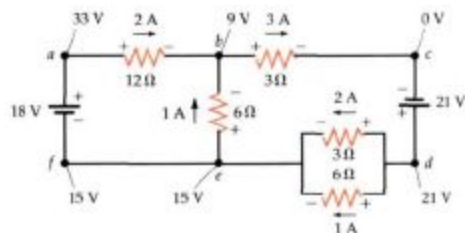
Figura 23-10 Circuito de la figura 23-9 con $R_{eq} = 2\ \Omega$ reemplazando a la combinación en paralelo. Los signos más y menos sobre la resistencia de $6\ \Omega$ corresponden a la dirección supuesta de I_1 . La regla de los nudos se aplica inmediatamente al punto b utilizando la diferencia $(I - I_1)$ para la corriente de b a c .

El valor negativo de I_1 significa que nuestra hipótesis previa respecto a su sentido fue incorrecta. Es decir, la corriente que atraviesa la resistencia de $6\ \Omega$ se dirige realmente del punto e al b . La intensidad de corriente a través de la batería de $21\ \text{V}$ es, por tanto,

$$I - I_1 = 2\ \text{A} - (-1\ \text{A}) = 3\ \text{A}$$

En el circuito original de la figura 23-9, esta corriente se divide después del punto d en una corriente de $2\ \text{A}$ a través de la resistencia de $3\ \Omega$ y una corriente de $1\ \text{A}$ a través de la resistencia de $6\ \Omega$. La figura 23-11 muestra el circuito completo con las magnitudes y direcciones correctas de las corrientes. Un buen método para comprobar la solución de un problema de circuitos es asignar un potencial cero a un punto del circuito y utilizar los valores de las corrientes deducidas para determinar el potencial en los restantes puntos. En la figura 23-11 hemos elegido el punto c como $0\ \text{V}$. Entonces el punto d se encuentra a $+21\ \text{V}$, el punto e a $15\ \text{V}$, el punto a a $33\ \text{V}$ y el punto b a $9\ \text{V}$, como se indica.

Figura 23-11 Circuito de la figura 23-9 con las magnitudes y direcciones correctas para las corrientes deducidas en el ejemplo 23-4.



Podemos resumir el método general para resolver circuitos con mallas múltiples:

1. Reemplazar todas las combinaciones de resistencias en serie o paralelo por resistencias equivalentes.
2. Elegir un sentido para la corriente en cada malla del circuito y designar las intensidades en el diagrama. Asignar los signos más y menos para indicar los extremos de alto y bajo potencial de cada fuente de fem, resistencia o capacidad.
3. Aplicar la regla de los nudos a cada unión en donde se divide la corriente.
4. En un circuito formado por n mallas interiores aplicar la regla 1 de Kirchhoff a las n mallas.
5. Resolver las ecuaciones para obtener los valores de las incógnitas.
6. Comprobar los resultados asignando un potencial nulo a un punto del circuito y utilizar los valores de las intensidades de corriente deducidas para determinar los potenciales en otros puntos del circuito.

Método general para resolver circuitos de múltiples mallas

Ejemplo 23-5

Determinar la intensidad de corriente en cada una de las partes del circuito indicado en la figura 23-12a.

Este circuito contiene tres mallas interiores y por tanto, aplicaremos tres veces la regla de las mallas. En la figura 23-12a, hemos supuesto una corriente I hacia la derecha de la resistencia de $3\ \Omega$ y hemos aplicado la regla de los nudos en las dos uniones c y e donde la corriente se divide. La corriente de c a d es I_1 , de modo que la corriente de c a h es $I - I_1$. De igual modo, la corriente de e a f es I_2 , y la corriente de e a h es $I_1 - I_2$. Aplicando la regla

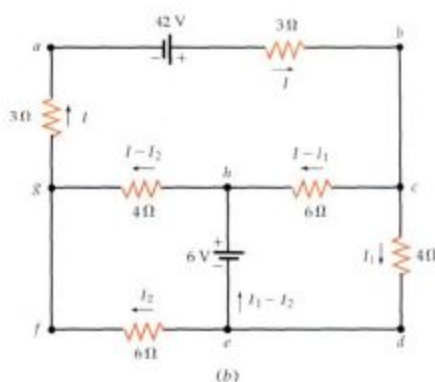
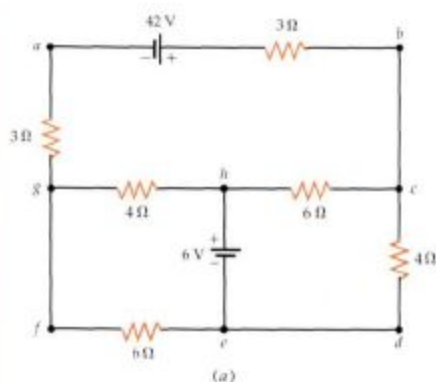


Figura 23-12 (a) Circuito que contiene tres bucles interiores según los datos del ejemplo 23-5. (b) Circuito con las corrientes supuestas. La regla de los nudos se aplica en los puntos *c* y *e*, en donde la corriente se divide.

de las mallas de Kirchhoff al circuito externo, comenzando en el punto *a*, tenemos

$$+42 \text{ V} - (3 \Omega)I - (4 \Omega)I_1 - (6 \Omega)I_2 - (3 \Omega)I = 0$$

que puede simplificarse en la forma

$$21 \text{ A} - 3I - 2I_1 - 3I_2 = 0 \quad 23-9$$

De igual modo, aplicando la regla de las mallas al circuito superior (*abchga*), resulta

$$+42 \text{ V} - (3 \Omega)I - (6 \Omega)(I - I_1) - (4 \Omega)(I - I_2) - (3 \Omega)I = 0$$

y simplificando

$$21 \text{ A} - 8I + 3I_1 + 2I_2 = 0 \quad 23-10$$

Como tercera malla escogemos el bucle inferior izquierdo (*efghe*). Así se obtiene

$$-(6 \Omega)I_2 + (4 \Omega)(I - I_2) - 6 \text{ V} = 0$$

que se simplifica en la forma

$$2I - 5I_2 - 3 \text{ A} = 0 \quad 23-11$$

Podemos eliminar I_1 multiplicando todos los términos de la ecuación 23-9 por 3 y cada término de la ecuación 23-10 por 2 obteniendo:

$$63 \text{ A} - 9I - 6I_1 - 9I_2 = 0$$

$$42 \text{ A} - 16I + 6I_1 - 4I_2 = 0$$

Sumando estas ecuaciones resulta

$$105 \text{ A} - 25I - 5I_2 = 0 \quad 23-12$$

Sustituyendo el valor $5I_2 = 2I - 3 \text{ A}$ que resulta de la ecuación 23-11, en la ecuación 23-12 resulta

$$105 \text{ A} - 25I - (2I - 3 \text{ A}) = 0$$

$$I = \frac{108 \text{ A}}{27} = 4 \text{ A}$$

y según la ecuación 23-11,

$$5I_2 = 2I - 3 \text{ A} = 2(4 \text{ A}) - 3 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

$$I_2 = 1 \text{ A}$$

y según la ecuación 23-9,

$$21 \text{ A} - 3(4 \text{ A}) - 2I_1 - 3(1 \text{ A}) = 0$$

$$I_1 = \frac{21 \text{ A} - 12 \text{ A} - 3 \text{ A}}{2} = 3 \text{ A}$$

En la figura 23-13 hemos elegido el potencial nulo en el punto a y se han indicado los valores de las intensidades de corriente deducidas en nuestra solución. El potencial en el punto b es $42 \text{ V} - (4 \text{ A})(3 \Omega) = 30 \text{ V}$. Los potenciales en otros puntos del circuito se han deducido por un razonamiento semejante.

Figura 23-13 Diagrama circuito de la figura 23-12 con los valores de los potenciales calculados a partir de las intensidades de corriente deducidas en el ejemplo 23-5, suponiendo $V = 0$ en el punto a .

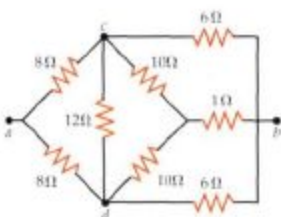
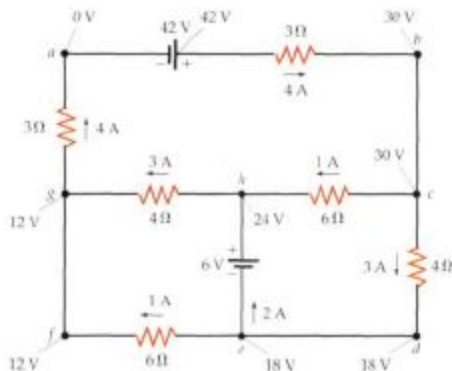


Figura 23-14 Un circuito complejo de múltiples ramas. El circuito puede simplificarse considerando que por simetría los puntos c y d deben estar al mismo potencial. Al no existir corriente entre los puntos c y d de la resistencia de 12Ω , esta resistencia puede ser extraída sin que ello afecte a la corriente o potencial en cualquier punto del circuito. Así los puntos c y d pueden considerarse como un solo punto cd .

Análisis de los circuitos por simetría

Algunos circuitos complejos de resistencias pueden analizarse más fácilmente utilizando la regla de los nudos y consideraciones de simetría en lugar de la regla de las mallas. Si dos puntos de un circuito están al mismo potencial, pueden conectarse con un cable sin que se modifiquen las corrientes o potenciales en otros puntos del circuito. Estos puntos frecuentemente se identifican considerando la simetría del circuito. El circuito puede entonces simplificarse conectando estos puntos y dibujando un nuevo diagrama.

Consideremos el circuito de la figura 23-14. Nos proponemos determinar la intensidad de la corriente en cada una de las partes del circuito al establecer una diferencia de potencial V_{ab} entre los puntos a y b . Como este circuito tiene cuatro mallas interiores, su análisis aplicando la regla de las mallas a cada bucle, es realmente complicado. Sin embargo, por simetría podemos ver que los puntos designados c y d se encuentran al mismo potencial, de modo que la corriente es nula en la resistencia de 12Ω que conecta estos puntos. Por tanto, si conectamos estos puntos por un alambre, la corriente a su través será cero. En la figura 23-15 se ha dibujado de nuevo el diagrama con los puntos c y d conectados. Ahora es posible hallar la resistencia equivalente R_{ab} entre los puntos a y b utilizando los métodos habituales en combinaciones de resistencias en serie y paralelo discutidas en el capítulo 22. La intensidad de corriente total entre a y b es entonces V_{ab}/R_{ab} y las corrientes en cada parte del circuito pueden determinarse por los métodos discutidos previamente en esta sección.

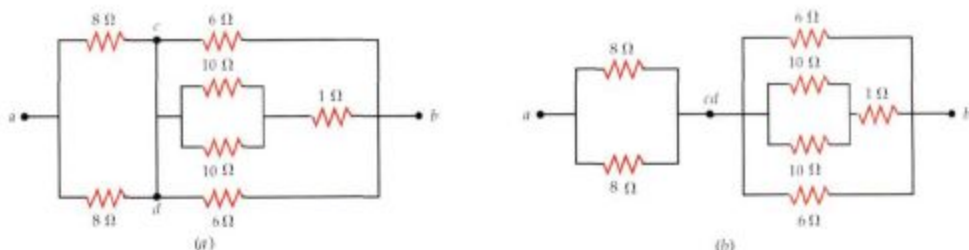


Figura 23-15 (a) Diagrama simplificado correspondiente al circuito de la figura 23-14 con los puntos c y d conectados. Las dos resistencias de 8Ω están conectadas en paralelo y existen tres trayectorias en paralelo desde el punto cd al punto b . (b) Diagrama alternativo en el que los puntos c y d se consideran como un punto único.

Ejercicio

Determinar (a) la resistencia equivalente entre los puntos a y b en el circuito de la figura 23-15 y (b) la intensidad de corriente en las resistencias de 10Ω si $V_{ab} = 12 \text{ V}$. [Respuesta: (a) $R_{eq} = 6 \Omega$, (b) $I_{10} = \frac{1}{3} \text{ A}$]

La figura 23-16 muestra 12 resistencias iguales en las aristas de un cubo y queremos determinar la resistencia equivalente entre los vértices opuestos del cubo designados con las letras a y g . Analizar esta red sin usar los principios de simetría sería difícil. Por simetría podemos ver que si aplicamos una diferencia de potencial V_{ag} entre los puntos a y g , los puntos b , d , y e deben estar todos al mismo potencial. Si conectamos estos puntos mediante un alambre tendremos tres resistencias en paralelo entre el punto a y el punto común bde . También vemos que los puntos c , f y h están a igual potencial y podemos, por tanto, conectarlos mediante un alambre. Existen seis trayectorias en paralelo, cada una de resistencia R entre el punto bde y el punto cfh y tres trayectorias en paralelo desde el punto cfh al punto g . El diagrama simplificado de este circuito se muestra en la figura 23-17. La resistencia equivalente entre a y g es, por tanto,

$$R_{eq} = \frac{1}{3} R + \frac{1}{3} R + \frac{1}{3} R = \frac{1}{3} R$$

Existe otra forma de resolver este problema. Sea I la corriente desde el punto a al punto g cuando la diferencia de potencial es V_{ag} . Por simetría, la corriente se divide en tres partes iguales en el punto a , de modo que la corriente desde a a b es $\frac{1}{3} I$. En el punto b , la corriente se divide en dos partes iguales, pues los puntos f y c están a igual potencial. Así pues, la corriente de b a c es $\frac{1}{6} I$. Finalmente, como existen tres trayectorias simétricas en el punto g , la intensidad de corriente de c a g es $\frac{1}{3} I$. Por tanto, si nos desplazamos desde el punto a a los puntos b , c y g las caídas de potencial son:

$$V_{ag} = \frac{1}{3} IR + \frac{1}{6} IR + \frac{1}{3} IR = \frac{2}{3} IR = IR_{eq}$$

o sea

$$R_{eq} = \frac{1}{3} R$$

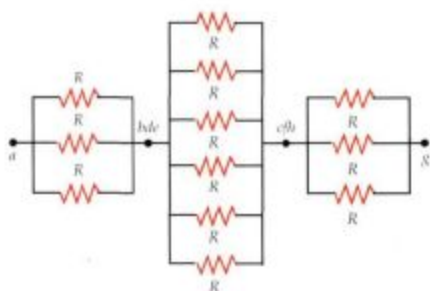


Figura 23-17 Diagrama simplificado correspondiente al circuito de la figura 23-16 con los puntos b , d y e conectados, así como los puntos c , f y h . Las seis trayectorias en paralelo entre los puntos bde y cfh son las seis aristas del cubo, bc , bd , de , cf , fh y ch .

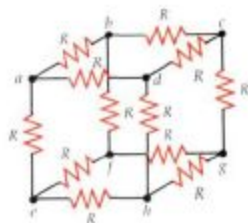


Figura 23-16 Doce resistencias iguales constituyen las aristas de un cubo. El diagrama circuito puede simplificarse teniendo en cuenta por simetría que los puntos b , d y e deben estar a igual potencial lo mismo que los puntos c , f y h .

23-2 Circuitos RC

Se denomina **circuito RC** aquél en el que interviene una resistencia y una capacidad. En tal circuito, la corriente no es estacionaria, sino que varía con el tiempo. Ejemplos prácticos de circuitos RC son los de un dispositivo de flash en una cámara fotográfica. Antes de tomar la fotografía, la batería del flash carga el condensador a través de una resistencia. Cuando esto se verifica, el flash está preparado. Al tomar la imagen, el condensador se descarga a través de la lámpara del flash. El condensador se recarga por acción de la batería y poco tiempo después, el flash está dispuesto para otra fotografía. Mediante las reglas de Kirchhoff, podemos obtener unas ecuaciones que relacionan la carga Q y la intensidad de corriente I en función del tiempo, tanto en el proceso de carga como en el de descarga de un condensador a través de una resistencia.

Descarga de un condensador

La figura 23-18 muestra un condensador con una carga inicial $+Q_0$ en la placa superior y $-Q_0$ en la placa inferior. Se conecta a una resistencia R y a un interruptor S que está abierto para evitar que la carga fluya a través de la resistencia. La diferencia de potencial a través del condensador es inicialmente $V_0 = Q_0/C$, siendo C la capacidad. Puesto que no existe corriente cuando está abierto el interruptor, no existe caída de potencial a través de la resistencia. Así pues, existe también una diferencia de potencial V_0 aplicada a los extremos del interruptor.

Cerremos el interruptor en el instante $t=0$. Puesto que ahora existe una diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia, debe pasar una corriente por la misma. La corriente inicial es

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad 23-13$$

La corriente se debe al flujo de carga que va desde la placa positiva a la negativa pasando por la resistencia y así, después de un cierto tiempo, la carga sobre el condensador se ve reducida. Como la carga sobre el condensador va *decreciendo* y estamos tomando como positiva la corriente en el sentido de las agujas del reloj, la intensidad de corriente es igual a la *disminución* de esa carga por unidad de tiempo. Si Q es la carga sobre el condensador en un instante cualquiera, la corriente en dicho momento es

$$I = - \frac{dQ}{dt} \quad 23-14$$

Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente, nos encontramos con una caída de potencial IR en la resistencia y un aumento de potencial Q/C entre las placas del condensador. La primera regla de Kirchhoff nos da

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \quad 23-15$$

en donde tanto Q como I son funciones de tiempo y están relacionadas por la ecuación 23-14. Sustituyendo I por $-dQ/dt$ en la ecuación 23-15, tenemos

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

o sea,

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{RC} Q \quad 23-16$$

La ecuación 23-16 establece que la variación de la función $Q(t)$ con el tiempo es proporcional a la función $Q(t)$. Para resolver esta ecuación, separemos las variables Q y t . Multiplicando ambos miembros de la ecuación dt/Q , se obtiene

$$\frac{dQ}{Q} = - \frac{dt}{RC} \quad 23-17$$

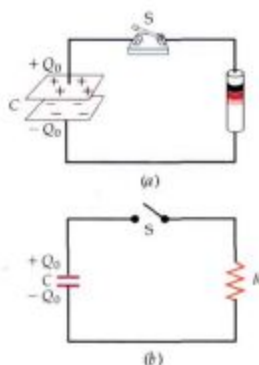


Figura 23-18 (a) Condensador de láminas planoparalelas en serie con un interruptor y una resistencia R . (b) Diagrama que representa este circuito.

Integrando resulta

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + A$$

en donde A es una constante de integración arbitraria que viene determinada por las condiciones iniciales. Tomando la exponencial de ambos miembros de esta ecuación, se obtiene

$$e^{\ln Q} = e^{-t/RC + A} = e^A e^{-t/RC}$$

o sea,

$$Q = B e^{-t/RC}$$

Podemos obtener la constante $B = e^A$ teniendo en cuenta que en las condiciones iniciales $Q = Q_0$ para $t = 0$. Por tanto

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau} \quad 23-18$$

en donde τ , llamada **constante de tiempo**, es el tiempo durante el cual la carga disminuye hasta $1/e$ de su valor original:

$$\tau = RC \quad 23-19$$

Constante de tiempo

La figura 23-19 muestra la carga del condensador en el circuito de la figura 23-18 en función del tiempo. La línea de trazos es la pendiente inicial de la función $Q(t)$. Si la carga continuase disminuyendo a un ritmo constante, igual a su ritmo inicial, alcanzaría el valor cero para un valor del tiempo igual a la constante de tiempo τ . Sin embargo, la disminución de Q respecto al tiempo $-dQ/dt$, no es constante, sino que también decrece con el tiempo. Esto es evidente en la ecuación 23-16 que muestra como esta disminución temporal de la carga es proporcional a la propia carga. Después de un tiempo $t = \tau$, la carga es $Q = Q_0 e^{-1} = 0,37 Q_0$. Después de un tiempo $t = 2\tau$, la carga es $Q = Q_0 e^{-2} = 0,135 Q_0$, y así sucesivamente. Después de un tiempo igual a varias constantes de tiempo, la carga del condensador es despreciable. Este tipo de disminución, muy corriente en la naturaleza se llama **decrecimiento exponencial**. Ocurre siempre que la disminución de una magnitud con el tiempo es proporcional a la propia magnitud. (Ya vimos disminuciones exponenciales en el capítulo 11 cuando estudiamos el decaimiento de la presión del aire con la altura y en el capítulo 12 al estudiar la disminución de energía con el tiempo de un oscilador amortiguado.) La disminución de carga en un condensador puede compararse a la disminución de la cantidad de agua en un vaso que tiene un pequeño agujero en el fondo. El flujo de agua por el orificio es proporcional a la presión del agua, la cual es, a su vez, proporcional a la cantidad de agua existente en el vaso.

La corriente se obtiene a partir de la ecuación 23-14 por diferenciación de la ecuación 23-18:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

o sea,

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \quad 23-20$$

en donde $I_0 = Q_0/RC = V_0/R$ es la corriente inicial. La corriente también disminuye exponencialmente con el tiempo y llega a valer $1/e$ de su valor inicial des-

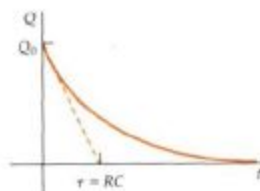


Figura 23-19 Representación de la carga Q situada sobre un condensador en función del tiempo t para el circuito de la figura 23-18 cuando el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$. La constante de tiempo $\tau = RC$ es el tiempo necesario para que la carga decaiga en $e^{-1} Q_0$. Después de un tiempo igual a dos constantes de tiempo, la carga es $e^{-2} Q_0$. Este es un ejemplo de decrecimiento exponencial. La constante de tiempo es también el tiempo que tardaría el condensador en descargarse completamente si su velocidad de descarga fuera constante, como indica la línea de trazos.

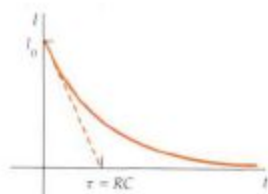


Figura 23-20 Gráfico de la intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 23-18. La curva tiene la misma forma que la de la figura 23-19.

pués de transcurrir un tiempo $t = \tau = RC$. Este proceso se representa en la figura 23-20.

Ejemplo 23-6

Un condensador de $4 \mu\text{F}$ se carga a 24 V y luego se conecta a una resistencia de 200Ω . Determinar (a) la carga inicial del condensador, (b) la corriente inicial a través de la resistencia de 200Ω , (c) la constante de tiempo y (d) la carga que posee el condensador después de 4 ms .

- (a) La carga inicial es $Q_0 = CV = (4 \mu\text{F})(24 \text{ V}) = 96 \mu\text{C}$.
 (b) La corriente inicial es $I_0 = V_0/R = (24 \text{ V})/(200 \Omega) = 0,12 \text{ A}$.
 (c) La constante de tiempo es $\tau = RC = (200 \Omega)(4 \mu\text{F}) = 800 \mu\text{s} = 0,8 \text{ ms}$.
 (d) En el tiempo $t = 4 \text{ ms}$, la carga del condensador es

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96 \mu\text{C})e^{-(4 \text{ ms})/(0,8 \text{ ms})} = (96 \mu\text{C})e^{-5} = 0,647 \mu\text{C}$$

Ejercicio

Hallar la corriente a través de una resistencia de 200Ω para $t = 4 \text{ ms}$. (Respuesta: $0,809 \text{ mA}$)

Carga de un condensador

La figura 23-21a muestra un circuito utilizado para la carga de un condensador, que admitiremos inicialmente descargado. El interruptor, abierto inicialmente, se cierra en el instante $t = 0$. Inmediatamente empieza a fluir la carga a través de la resistencia depositándose sobre la placa positiva del condensador (figura 23-21 b). Si la carga del condensador en un instante cualquiera es Q y la corriente en el circuito es I , la primera regla de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E} - V_R - V_C = 0$$

o sea

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad 23-21$$

En este circuito la corriente es igual a la variación con el tiempo de la carga (creciente) en el condensador:

$$I = + \frac{dQ}{dt}$$

Sustituyendo $+dQ/dt$ por I en la ecuación 23-21 se obtiene

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad 23-22$$

En el instante $t = 0$ la carga es cero y la corriente vale $I_0 = \mathcal{E}/R$. La carga, por lo tanto, aumenta y la corriente disminuye como puede verse en la ecuación 23-21. La carga alcanza un valor máximo $Q_0 = C\mathcal{E}$, como resulta de la ecuación 23-21, cuando la corriente I es igual a cero.

La ecuación 23-22 es un poco más difícil de resolver que la ecuación 23-16. Multiplicando los dos miembros por C y reagrupando esta ecuación toma la forma

$$RC \frac{dQ}{dt} - C\mathcal{E} - Q = 0$$

Podemos ahora separar las variables Q y t multiplicando ambos miembros por dt/RC , y dividiendo por $C\mathcal{E} - Q$, resulta

$$\frac{dQ}{C\mathcal{E} - Q} = \frac{dt}{RC} \quad 23-23$$

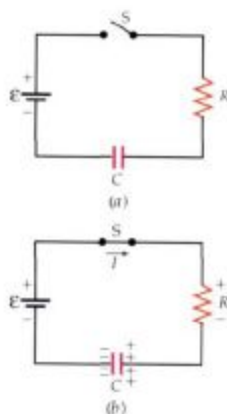


Figura 23-21 Circuito para cargar un condensador hasta una diferencia de potencial \mathcal{E} . (a) Después de cerrar el interruptor S , existe una caída de potencial a través de la resistencia y una carga sobre el condensador.

Integrando en ambos miembros resulta

$$-\ln(C\mathcal{E} - Q) = t/RC + A \quad 23-24$$

en donde A es una constante arbitraria de integración. Pasando a la forma exponencial, la ecuación 23-24 se escribe:

$$C\mathcal{E} - Q = e^{-A} e^{-t/RC} = B e^{-t/RC}$$

o sea,

$$Q = C\mathcal{E} - B e^{-t/RC} \quad 23-25$$

en donde $B = e^{-A}$ es otra constante. El valor de B viene determinado por la condición inicial $Q = 0$ para $t = 0$. Haciendo $t = 0$ y $Q = 0$ en la ecuación 23-25 se obtiene

$$0 = C\mathcal{E} - B$$

es decir,

$$B = C\mathcal{E}$$

Sustituyendo $B = C\mathcal{E}$ en la ecuación 23-25, se obtiene finalmente para la carga la ecuación

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau}) \quad 23-26$$

en donde $Q_f = C\mathcal{E}$ es la carga final. La intensidad de corriente se obtiene derivando la ecuación 23-26:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\mathcal{E} e^{-t/RC} (-1/RC)$$

o también

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau} \quad 23-27$$

Las figuras 23-22 y 23-23 muestran la carga y la intensidad de corriente en función del tiempo. Obsérvese también en la figura 23-22 que la constante de tiempo τ es el tiempo en el cual el condensador estaría completamente cargado si la intensidad permaneciera constante en su valor inicial.

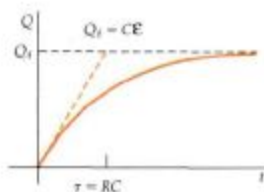


Figura 23-22 Representación de la carga de un condensador en función del tiempo en el caso del circuito de la figura 23-21 después de cerrar el interruptor en $t = 0$. Después del tiempo $t = \tau = RC$ la carga en el condensador es $0.63 C\mathcal{E}$, donde $C\mathcal{E}$ es su carga final. Si la velocidad de carga fuese constante e igual a su valor inicial, el condensador se cargaría por completo al cabo de un tiempo $t = \tau$.

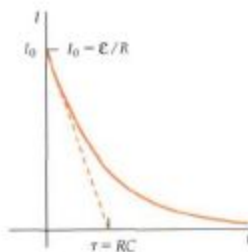


Figura 23-23 Gráfico de la corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 23-21. La corriente es inicialmente \mathcal{E}/R y disminuye exponencialmente con el tiempo.

Ejercicio

Demostrar que la ecuación 23-26 satisface la ecuación 23-22 sustituyendo en ésta los valores de $Q(t)$ y dQ/dt .

Ejercicio

¿Qué fracción de la carga máxima existe en un condensador en proceso de carga al cabo de un tiempo $t = \tau$? (Respuesta: 0,63)

Ejemplo 23-7

Una batería de 6 V y resistencia interna despreciable se utiliza para cargar un condensador de $2 \mu\text{F}$ a través de una resistencia de 100Ω . Hallar (a) la corriente inicial, (b) la carga final y (c) el tiempo necesario para obtener un 90 por ciento de la carga final.

(a) La corriente inicial es

$$I_0 = \mathcal{E}/R = (6 \text{ V})/(100 \Omega) = 0,06 \text{ A}$$

(b) La carga final del condensador es

$$Q_f = \mathcal{E}C = (6 \text{ V})(2 \mu\text{F}) = 12 \mu\text{C}$$

(c) La constante de tiempo de este circuito es $\tau = RC = (100 \Omega)(2 \mu\text{F}) = 200 \mu\text{s}$. Es de esperar que la carga alcance el 90 por ciento de su valor final en un tiempo del orden de varias constantes de tiempo. Podemos hallar la solución exacta a partir de la ecuación 23-26 utilizando $Q = 0,9 \mathcal{E}C$:

$$Q = 0,9 \mathcal{E}C = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC})$$

$$0,9 = 1 - e^{-t/RC}$$

$$e^{-t/RC} = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$\ln e^{-t/RC} = -\frac{t}{RC} = \ln 0,1 = -2,3$$

Por tanto,

$$t = 2,3RC = 2,3(200 \mu\text{s}) = 460 \mu\text{s}$$

Ejemplo 23-8

El condensador del circuito que se muestra en la figura 23-24a está inicialmente descargado. Determinar la corriente que atraviesa la batería (a) inmediatamente después de cerrar el interruptor y (b) un largo tiempo después de cerrar el interruptor.

(a) Como el condensador está inicialmente descargado, el potencial en el punto d es el mismo que en el punto c inmediatamente después de cerrar el interruptor. No hay corriente inicial a través de la resistencia de 8Ω entre b y e . Aplicando la regla de las mallas al bucle exterior ($abcdefa$), se obtiene

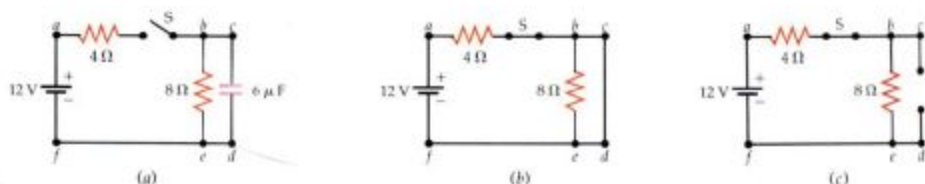
$$12 \text{ V} - (4 \Omega)I_0 = 0$$

$$I_0 = 3 \text{ A}$$

(b) En tanto el condensador se carga, la corriente se divide en el punto b y la carga fluye sobre la placa superior y se separa de la inferior. Después de un largo tiempo, el condensador se carga completamente y la carga deja de fluir o de escapar de las placas. Aplicando la regla de las mallas al bucle de la izquierda ($abefa$), se obtiene

$$12 \text{ V} - (4 \Omega)I_1 - (8 \Omega)I_1 = 0$$

$$I_1 = 1 \text{ A}$$



Vemos pues, que el análisis de este circuito en los tiempos extremos, cuando el condensador está descargado o totalmente cargado, es simple. Cuando el condensador está descargado actúa igual que un cortocircuito entre los puntos c y d , es decir, el circuito es equivalente al mostrado en la figura 23-24b, en donde se ha reemplazado el condensador por un alambre de resistencia cero. Cuando el condensador está totalmente cargado, actúa como el circuito abierto indicado en la figura 23-24c.

Durante el proceso de carga fluye una carga total $Q = \mathcal{E}C$ a través de la batería. Ésta realiza un trabajo,

$$W = Q\mathcal{E} = \mathcal{E}^2C$$

La energía almacenada en el condensador es precisamente la mitad de esta cantidad. Según la ecuación 21-16,

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2C$$

Demostremos ahora que la otra mitad de energía proporcionada por la batería se transforma precisamente en calor por efecto Joule en la resistencia. La potencia que se cede a la resistencia es

$$\frac{dW_R}{dt} = I^2R$$

Utilizando la ecuación 23-27 para el valor de la corriente, tenemos

$$\frac{dW_R}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$$

El calor total producido se obtiene integrando desde $t=0$ hasta $t=\infty$:

$$W_R = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC} dt$$

La integración puede realizarse sustituyendo $x = 2t/RC$. Entonces,

$$dt = \frac{RC}{2} dx$$

y

$$W_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{RC}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2C$$

puesto que la integral es 1. Esta respuesta es independiente de la resistencia R . Cuando un condensador se carga mediante una fem constante, la mitad de la energía proporcionada por la batería se almacena en el condensador y la otra mitad se transforma en calor independientemente de la resistencia. Esta energía térmica incluye la potencia disipada en la resistencia interna de la batería.

Ejemplo 23-9

Determinar para el condensador del ejemplo 23-6 en proceso de descarga, (a) la energía inicial almacenada en el condensador, (b) la potencia inicial de entrada en la resistencia, y (c) la energía almacenada en el tiempo $t = 0,8 \text{ ms} = 1 \tau$.

Figura 23-24 (a) Un condensador en paralelo con una resistencia a través de una fem. El condensador se supone descargado antes de cerrar el interruptor. (b) Inmediatamente después de cerrar el interruptor no existe caída de potencial a través del condensador y, por tanto, éste puede sustituirse por un alambre de resistencia cero. (c) Un tiempo largo después de cerrar el interruptor, el condensador está completamente cargado y toda la carga que entra por el punto b fluye a través de la resistencia de 8Ω . El condensador puede reemplazarse por un circuito abierto.



La fotografía muestra un critrón, dispositivo disparador de alta velocidad, utilizado para descargar condensadores en la detonación de una bomba atómica, formada por un núcleo de uranio rodeado de una capa de explosivos. El condensador, accionado por el critrón, descarga su energía a los detonadores que hacen explotar la capa de explosivos. La explosión comprime rápida y simétricamente el núcleo de uranio, el cual alcanza la masa crítica, desencadena la fisión nuclear y explota. La venta de critrones y ciertos condensadores especializados está controlada. En 1985 y 1990 fueron el tema de operaciones de contrabando divulgadas infructuosamente.

(a) En el ejemplo 23-6 encontramos que la carga inicial del condensador era $96 \mu\text{C}$. La energía inicial almacenada es, por tanto,

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(96 \mu\text{C})^2}{4 \mu\text{F}} = 1,152 \text{ mJ}$$

El mismo resultado se obtiene a partir de $U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} (96 \mu\text{C})(24 \text{ V}) = 1,152 \text{ mJ}$.

(b) La potencia inicial de entrada en la resistencia es

$$P_0 = I_0^2 R = (0,12 \text{ A})^2 (200 \Omega) = 2,88 \text{ W}$$

en donde hemos utilizado el valor $I_0 = 0,12 \text{ A}$ obtenido en el ejemplo 23-6.

(c) La carga del condensador al cabo de $t = 0,8 \text{ ms} = 1\tau$ es

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96 \mu\text{C}) e^{-1} = 35,3 \mu\text{C}$$

La energía almacenada en ese momento es, por tanto,

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(35,3 \mu\text{C})^2}{4 \mu\text{F}} = 0,156 \text{ mJ}$$

Obsérvese que no podíamos utilizar la expresión $U = \frac{1}{2} QV$, a menos que determinásemos primero el potencial V , el cual también disminuye a medida que se descarga el condensador.

Ejemplo 23-10

Demostrar que la disminución de energía almacenada en el condensador del ejemplo 23-9 desde $t = 0$ a $t = 1\tau$ es igual al calor de Joule disipado en la resistencia.

En el ejemplo 23-9, determinamos que la energía almacenada en el condensador era $1,152 \text{ mJ}$ para $t = 0$ y $0,156 \text{ mJ}$ para $t = 1\tau$. La disminución de energía almacenada es, por tanto,

$$-\Delta U = 1,152 \text{ mJ} - 0,156 \text{ mJ} = 0,996 \text{ mJ}$$

La potencia de entrada en la resistencia es $I^2 R$, en donde I viene dada por la ecuación 23-20. Como esta potencia varía con el tiempo, debe integrarse desde $t = 0$ a $t = 1\tau$ para determinar la energía total disipada en la resistencia. Así tenemos:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\tau} I^2 R dt = \int_0^{\tau} (I_0 e^{-t/\tau})^2 R dt \\ &= I_0^2 R \int_0^{\tau} e^{-2t/\tau} dt = I_0^2 R \left[\frac{\tau}{-2} \right] e^{-2t/\tau} \Big|_0^{\tau} \\ &= I_0^2 R \left(\frac{\tau}{2} \right) (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la expresión

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

obtenida de las tablas integrales. Por tanto, como $I_0^2 R = 2,88 \text{ W}$ (ejemplo 23-9) y $\tau = 0,8 \text{ ms}$ (ejemplo 23-6), resulta

$$W = (2,88 \text{ W})(0,4 \text{ ms})(1 - e^{-2}) = 0,996 \text{ mJ}$$

que coincide con la disminución de energía almacenada.

Cuestión

- Una piscina se llena mediante un sifón con agua procedente de un lago próximo. ¿En qué sentido es este proceso análogo a la carga de un condensador?

23-3 Amperímetros, voltímetros y ohmímetros

Volvamos ahora a la consideración de la medida de las magnitudes eléctricas en circuitos de corriente continua. Los dispositivos que miden la corriente, la diferencia de potencial y la resistencia se denominan **amperímetros**, **voltímetros** y **ohmímetros** respectivamente. A menudo, los tres dispositivos están incluidos en un solo «multímetro», que se conecta según el uso de cada uno de ellos. Cualquiera puede usar un voltímetro para medir la tensión entre los bornes de la batería del coche o un ohmímetro para determinar la resistencia entre dos puntos de un aparato eléctrico doméstico (por ejemplo, un tostador de pan) en el que se sospecha un cortocircuito o un alambre roto. Por todo ello es muy útil tener algún conocimiento de las operaciones básicas de estos dispositivos.

Para medir la intensidad de corriente a través de la resistencia en el circuito simple de la figura 23-25 colocaremos un amperímetro en serie con la resistencia, según se indica en la figura. Puesto que el amperímetro tiene cierta resistencia, la corriente del circuito se modifica cuando se incluye el amperímetro. En el caso ideal, el amperímetro deberá tener una resistencia muy pequeña de modo que introduzca una variación muy pequeña en la corriente a medir.

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia se mide colocando un voltímetro en paralelo con la misma, según se indica en la figura 23-26. El voltímetro reduce la resistencia entre los puntos *a* y *b* aumentando así la corriente total que circula en el circuito y variando la caída de potencial a través de la resistencia. Un voltímetro ideal tiene una resistencia muy grande, para hacer mínima su influencia sobre el circuito.

El componente principal de un amperímetro o voltímetro es el **galvanómetro**, aparato que detecta una pequeña corriente que pasa a su través. El galvanómetro se proyecta de modo que la lectura en la escala sea proporcional a la corriente que pasa por él. Actualmente muchos de estos medidores poseen una lectura digital en lugar de un indicador y una escala, pero el método básico de operación es semejante al descrito.

El galvanómetro posee dos propiedades importantes para su uso como amperímetro o como voltímetro. Tales son, la resistencia del galvanómetro R_g y la intensidad de corriente necesaria para producir una desviación a fondo de escala, I_g . Valores típicos de estas magnitudes en un galvanómetro portátil de laboratorio son $R_g = 20 \Omega$ e $I_g = 0,5 \text{ mA}$. La caída de voltaje a través de este galvanómetro para una desviación a fondo de escala es, por tanto,

$$V = I_g R_g = (20 \Omega)(5,0 \times 10^{-4} \text{ A}) = 10^{-2} \text{ V}$$

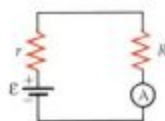


Figura 23-25 Para medir la corriente que circula por la resistencia R se coloca un amperímetro (A) en serie con ella, de tal modo que transporta la misma corriente que la resistencia.

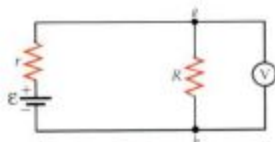


Figura 23-26 Para medir la caída de tensión entre los extremos de una resistencia, se coloca un voltímetro (V) en paralelo con ella, de modo que las caídas de potencial a través del voltímetro y la resistencia son las mismas.



(a) Multímetro analógico. (b) Multímetro digital. Generalmente los multímetros digitales son más exactos y más caros que los analógicos.

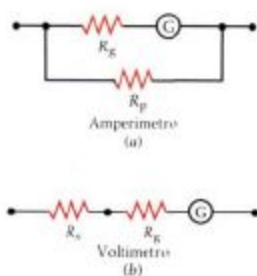


Figura 23-27 (a) Un amperímetro se compone de un galvanómetro G cuya resistencia es R_g y una resistencia pequeña en paralelo R_p . (b) Un voltímetro se compone de un galvanómetro G y una resistencia grande en serie R_g . En estos diagramas, la resistencia del galvanómetro se muestra a continuación del símbolo del galvanómetro.

Para construir un amperímetro mediante un galvanómetro se coloca una resistencia pequeña, denominada **resistencia shunt**, en paralelo con el galvanómetro. Puesto que la resistencia shunt es normalmente mucho menor que la resistencia del galvanómetro, la mayor parte de la corriente circula por el shunt y la resistencia efectiva del amperímetro es mucho menor que la resistencia del galvanómetro. Realmente la resistencia equivalente del amperímetro es aproximadamente igual a la resistencia del shunt. Para construir un voltímetro se adiciona en serie con el galvanómetro una gran resistencia de manera que la resistencia equivalente del voltímetro es mucho mayor que la del galvanómetro solo. La figura 23-27 ilustra la construcción de un amperímetro y de un voltímetro a partir de un galvanómetro. En estos dibujos esquemáticos se muestra separadamente la resistencia del galvanómetro R_g , pero realmente forma parte de este último, pues se debe esencialmente a la resistencia del arrollamiento del galvanómetro. La elección de las resistencias apropiadas para la construcción de un amperímetro o voltímetro a partir de un galvanómetro, se ilustra mejor mediante unos ejemplos.

Ejemplo 23-11

Utilizando un galvanómetro en una resistencia de 20Ω para el cual una corriente de $5 \times 10^{-4} \text{ A}$ da una desviación a fondo de escala, proyectar un amperímetro que se desvíe a fondo de escala cuando la corriente sea 5 A .

Puesto que la corriente total a través del amperímetro debe ser 5 A cuando la corriente que pasa por el galvanómetro es sólo $5 \times 10^{-4} \text{ A}$, la mayor parte de la corriente debe pasar a través de la resistencia shunt. Sea R_p la resistencia shunt e I_p la corriente a través de la misma. Puesto que el galvanómetro y el shunt están en paralelo, tenemos

$$I_g R_g = I_p R_p$$

y

$$I_p + I_g = 5 \text{ A}$$

o sea,

$$I_p = 5 \text{ A} - I_g = (5 \text{ A}) - (5 \times 10^{-4} \text{ A}) \approx 5 \text{ A}$$

Así pues, el valor de la resistencia shunt debe ser

$$R_p = \frac{I_g}{I_p} R_g = \frac{5 \times 10^{-4} \text{ A}}{5 \text{ A}} (20 \Omega) = 2 \times 10^{-3} \Omega$$

Puesto que la resistencia del shunt es mucho menor que la resistencia del galvanómetro, la resistencia efectiva de la combinación en paralelo es aproximadamente igual a la resistencia del shunt.

Ejemplo 23-12

Utilizando el mismo galvanómetro del ejemplo 23-11, diseñar un voltímetro que se desvíe a fondo de escala con una diferencia de potencial de 10 V .

Sea R_s el valor de la resistencia en serie con el galvanómetro. Debemos escoger R_s de modo que una corriente de $I_g = 5 \times 10^{-4} \text{ A}$ dé una caída de potencial de 10 V . Así pues,

$$I_g (R_s + R_g) = 10 \text{ V}$$

$$R_s + R_g = \frac{10 \text{ V}}{5 \times 10^{-4} \text{ A}} = 2 \times 10^4 \Omega$$

$$\begin{aligned} R_s &= 2 \times 10^4 \Omega - R_g = (2 \times 10^4 \Omega) - 20 \Omega \\ &= 19,980 \Omega \approx 20 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Ejemplo 23-13

Se pretende medir una resistencia de $100\ \Omega$ mediante el circuito indicado en la figura 23-28. La resistencia del voltímetro es $2000\ \Omega$ y la del amperímetro $0,002\ \Omega$. ¿Qué error se comete al calcular R mediante la expresión V/I , en donde V es la lectura del voltímetro e I la del amperímetro?

En el circuito indicado, el voltímetro mide la caída de potencial a través de la resistencia, pero el amperímetro mide la intensidad total de la corriente en el circuito, incluyendo la que pasa a través del voltímetro. La resistencia equivalente R'_{eq} del voltímetro en paralelo con la resistencia es

$$R'_{eq} = \left(\frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{2000\ \Omega} \right)^{-1} = 95,238\ \Omega$$

y la resistencia equivalente del circuito completo es

$$R_{eq} = R_s + R'_{eq} = 0,002\ \Omega + 95,238\ \Omega = 95,240\ \Omega$$

La corriente del amperímetro es

$$I = \frac{12\ \text{V}}{R_{eq}} = \frac{12\ \text{V}}{95,240\ \Omega} = 0,126\ \text{A}$$

Si llamamos I_1 a la corriente que atraviesa la resistencia de $100\ \Omega$ e I_2 la que atraviesa el voltímetro, se verifica $100I_1 = 2000I_2$, es decir, $I_2 = 0,05I_1$. La intensidad de corriente a través de la resistencia de $100\ \Omega$ es, por tanto,

$$I_1 = I - I_2 = I - 0,05I_1$$

o sea,

$$I_1 = \frac{I}{1,05} = \frac{0,126\ \text{A}}{1,05} = 0,120\ \text{A}$$

La caída de tensión a través de la resistencia de $100\ \Omega$ medida por el voltímetro es $RI_1 = (100\ \Omega)(0,120\ \text{A}) = 12,0\ \text{V}$, y el valor medido de la resistencia será

$$R = \frac{V}{I} = \frac{12,0\ \text{V}}{0,126\ \text{A}} = 95,2\ \Omega$$

que difiere del valor real aproximadamente en un 5 por ciento. Este resultado es lógico, ya que la resistencia del voltímetro es 20 veces mayor que R y por tanto, al conectar el voltímetro y la resistencia R en paralelo, la intensidad de la corriente se incrementa en un 5 por ciento.

La figura 23-29 muestra un circuito mejor para medir esta resistencia con los medidores utilizados. El amperímetro mide la corriente real que pasa por la resistencia más el amperímetro. Como la resistencia del amperímetro es sólo el 0,002 por ciento de R , el error cometido con este circuito será sólo del 0,002 por ciento. Si la resistencia R fuera sólo de $0,1\ \Omega$ en lugar de $100\ \Omega$, el circuito de la figura 23-28 sería preferible.

Un ohmímetro simple para medir resistencias consiste en una batería conectada en serie con un galvanómetro y una resistencia, como indica la figura 23-30a. La resistencia R_s se elige de modo que cuando los terminales a y b se cortocircuitan (se unen entre sí), es decir, cuando no hay resistencia entre ellos, la corriente a través del galvanómetro es I_g . Esta es la intensidad de corriente para la cual el galvanómetro ofrece una desviación a fondo de escala. Así, una desviación a fondo de escala significa que no hay resistencia entre los terminales a y b , y una desviación nula indica que existe una resistencia infinita entre los termi-

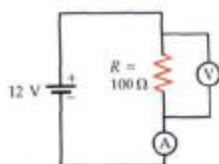


Figura 23-28 Circuito posible para medir la resistencia de $100\ \Omega$ del ejemplo 23-13.

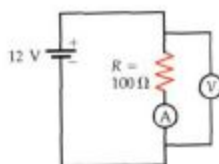


Figura 23-29 Una alternativa mejor para medir la resistencia de $100\ \Omega$ con los medidores del ejemplo 23-13.

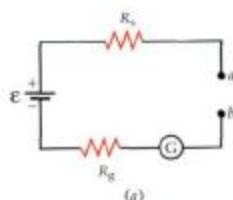
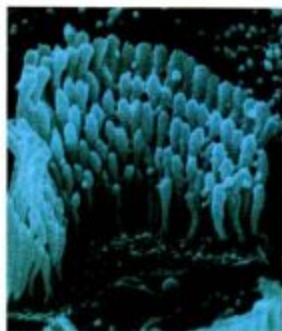
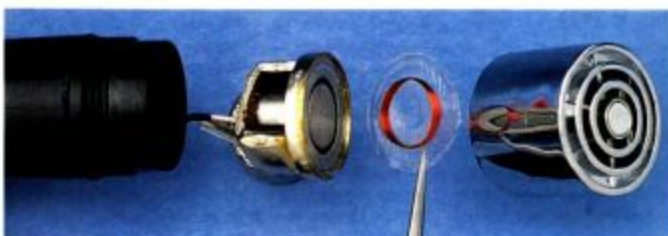


Figura 23-30 (a) Ohmímetro formado por una batería en serie con un galvanómetro y una resistencia R_s elegida de tal modo que el galvanómetro se desvía a fondo de escala cuando los puntos a y b están en cortocircuito. (b) Escala del galvanómetro calibrada para hacer lecturas en ohmios.



(a)

Los dispositivos que convierten una forma de energía en otra se llaman transductores. Los que aquí mostramos convierten energía no eléctrica en energía eléctrica. (a) Las ondas sonoras transmitidas a la cámara espiral del oído interno hacen vibrar al líquido acuoso. Adheridas a las paredes de la cámara están las células receptoras sensoriales (mostradas aquí con un aumento de 3500 X aproximadamente). El líquido vibrante estimula las células receptoras y hace que las neuronas, conectadas en su base, transmitan impulsos eléctricos. Los impulsos, propagándose a lo largo de una cadena de neuronas, eventualmente registran en el cerebro la sensación «sonora». Como este sistema convierte la energía sonora en energía eléctrica, constituye la contrapartida biológica de un micrófono. (b) Un micrófono convierte energía sonora en eléctrica. En el modelo que aquí se muestra, un anillo de cobre se acopla a una membrana delgada de plástico. Las ondas sonoras al chocar contra la membrana, hacen que ésta y el anillo comiencen a vibrar. El anillo está montado en el campo de un imán permanente. Este movimiento de vaivén a través del campo hace que la vibración induzca una corriente alterna en el anillo. Esta corriente es causa de que surja un campo magnético alternativo secundario, el cual a su vez crea una corriente alterna secundaria en una bobina de alambre situada detrás del anillo. (c) Las células fotovoltaicas convierten la energía luminosa en energía eléctrica. Las células se componen de dos semiconductores. En la unión de ambos semiconductores, éstos interactúan formando un dipolo eléctrico. La luz absorbida cerca de la unión crea cargas positivas y negativas, que se desvían en direcciones opuestas en el campo del



(b)

nales. Cuando éstos se conectan a través de una resistencia incógnita R , la intensidad de corriente a través del galvanómetro es menor que I_g . Específicamente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_s + R_g} \quad 23-28$$

Como esta corriente depende de R , la escala puede calibrarse para dar una lectura directa de R , como se muestra en la figura 23-30b. Obsérvese que esta escala no es lineal. Como la exactitud de esta lectura depende de la constancia de la fem de la batería, este tipo de ohmímetro simple no es un instrumento de gran exactitud. Sin embargo, es muy útil para una determinación rápida y aproximada de una resistencia desconocida.

Como el ohmímetro suministra una corriente a través de la resistencia a medir, este instrumento debe manejarse con precaución. Por ejemplo, consideremos un ohmímetro construido con una batería de 1,5 V y un galvanómetro semejante al de los ejemplos 23-11 y 23-12. La resistencia en serie R_s necesaria se determina de la expresión

$$I_g (R_s + R_g) = 1,5 \text{ V}$$

o sea

$$R_s = \frac{1,5 \text{ V}}{5 \times 10^{-4} \text{ A}} - R_g = 3000 \Omega - 20 \Omega = 2980 \Omega$$

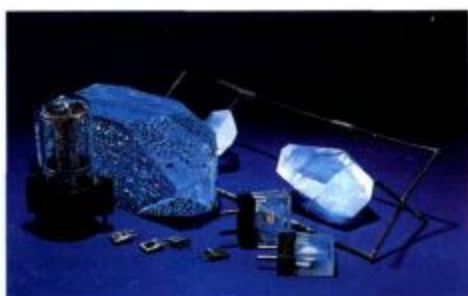
Supongamos que utilizamos este ohmímetro para medir la resistencia de un galvanómetro de laboratorio muy sensible que responde con una desviación a fondo de escala cuando la intensidad de corriente que le atraviesa es de 10^{-5} A y posee una resistencia de unos 20 Ω . Cuando los terminales a y b se disponen a través de este galvanómetro sensible, la corriente que circula es ligeramente inferior a 5×10^{-4} A, pues la resistencia total es de 3020 Ω , es decir, ligeramente superior a 3000 Ω . Esta intensidad de corriente es unas 50 veces superior a la necesaria para producir la desviación a fondo de escala. El resultado sería un chasquido, un poco de humo, un galvanómetro menos sensible y probablemente, una reprimenda del profesor de laboratorio.

Cuestiones

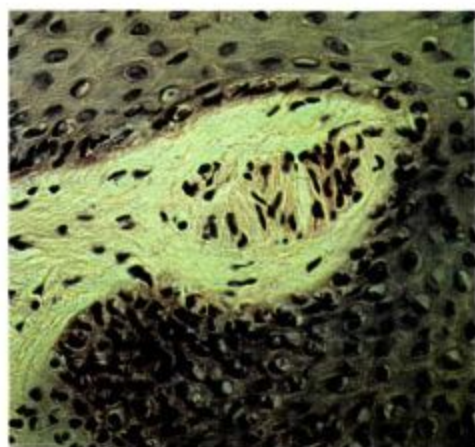
- ¿En qué condiciones sería ventajoso utilizar un galvanómetro menos sensible que el discutido en los ejemplos 23-11 y 23-12, es decir, un galvanómetro que requiera una corriente mayor I_g para la desviación a fondo de escala?
- Cuando la resistencia en serie, R_s , se elige apropiadamente para la fem de un ohmímetro, puede medirse cualquier resistencia entre cero e infinito. ¿Por qué, entonces, los ohmímetros prácticos tienen escalas diferentes para medir distintos intervalos de resistencia?
- Un estudiante no muy brillante decide medir la resistencia interna de la batería de su automóvil con un ohmímetro del laboratorio de física. ¿Por qué es una mala idea?



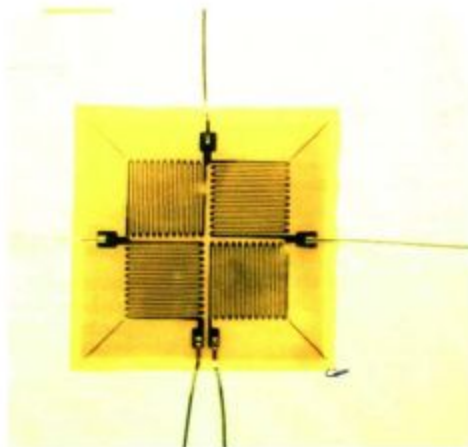
(c)



(d)



(e)



(f)

dipolo. Esta separación de carga crea una diferencia de potencial entre los dos semiconductores. Actualmente, las mejores células fotovoltaicas convierten la energía luminosa en eléctrica con una eficacia comprendida entre el 20 y el 30 por ciento. (a) Los cristales piezoeléctricos, tales como el cuarzo, la turmalina y el topacio se polarizan eléctricamente cuando se comprimen, doblan o se distorsionan de algún modo. La polarización crea una caída de voltaje a través del cristal deformado que puede utilizarse para producir una corriente eléctrica. El proceso es reversible: el voltaje aplicado a través de un cristal piezoeléctrico, es causa de una distorsión. El cuarzo piezoeléctrico (mostrado aquí) se introduce normalmente en circuitos eléctricos oscilantes que poseen aproximadamente la misma frecuencia que la que posee de un modo natural el cristal. El resultado

es que ambos, el cristal y el circuito eléctrico, vibran con la frecuencia natural del cristal. Este efecto puede utilizarse para estabilizar la frecuencia de los osciladores de radio y construir relojes con un error inferior a 0.1 s por año. (e) Nuestro sentido del tacto es debido a unas fibras nerviosas encapsuladas llamadas corpúsculos de Meissner que están localizadas directamente bajo la caja exterior de la piel. Al tocar la piel que les recubre, los corpúsculos se deforman y desencadenan impulsos eléctricos en las fibras nerviosas. Un contacto más intenso produce una mayor deformación y se incrementa la frecuencia de los impulsos. El sistema constituye, en cierto aspecto, una contrapartida biológica de un calibrador por deformación: en ambos transductores, la energía de una tensión mecánica se utiliza para modular cambios en la conducción eléctrica. (f) Un calibrador por

deformación consiste en una rejilla de alambre o láminas muy finas de una sustancia como el carbón que cambia su resistencia eléctrica cuando se somete a una deformación mecánica. El alambre está unido a un soporte aislante que se acopla mediante adhesivos a un objeto. Las tensiones que distorsionan el objeto, deforman también el calibrador descrito. El grado de deformación viene medido por el cambio de resistencia del dispositivo. Si se aplica un voltaje fijo entre los extremos del alambre del calibrador, el cambio de resistencia produce variaciones en la corriente.

Resumen

- Las reglas de Kirchhoff son
 - Al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial es igual a cero.
 - En toda unión de un circuito, donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.
- Los métodos generales de análisis de circuitos con múltiples bucles pueden resumirse del modo siguiente:
 - Reemplazar todas las combinaciones de resistencias en serie o paralelo por sus resistencias equivalentes.
 - Elegir un sentido para la corriente en cada rama del circuito y designar, por ejemplo con letras, las corrientes en el diagrama correspondiente. Añadir signos más y menos para indicar los extremos de alto y bajo potencial de cada fem, resistencia o capacidad.
 - Aplicar la regla de los nudos a cada unión en que se divide la corriente.
 - En un circuito que contiene n bucles interiores, aplicar la regla de las mallas a todos ellos.
 - Resolver las ecuaciones para obtener los valores de las incógnitas.
 - Comprobar los resultados asignando un potencial cero a un punto del circuito y utilizando los valores de las intensidades de las corrientes deducidas, determinar los potenciales en otros puntos del circuito.
- Los circuitos o redes complejas de resistencias, pueden simplificarse considerando su simetría. Si el potencial de dos puntos es el mismo, estos puntos pueden conectarse mediante un alambre y obtener así un diagrama más simple.
- Cuando un condensador se descarga a través de una resistencia, tanto la carga del condensador como la intensidad de corriente disminuyen exponencialmente con el tiempo. La constante de tiempo $\tau = RC$ es el tiempo que tarda en aumentar o disminuir $e^{-1} = 0,37$ veces el valor original. Cuando un condensador se carga a través de una resistencia, la carga por unidad de tiempo, que equivale a la corriente, disminuye exponencialmente con el tiempo. Después de un tiempo $\tau = RC$, la carga del condensador alcanza el 63 por ciento de su carga final.
- Un galvanómetro es un aparato que detecta una pequeña corriente que pasa a su través y muestra una desviación de su escala proporcional a la corriente. Un amperímetro es un aparato que mide la corriente. Consta de un galvanómetro más una resistencia en paralelo llamada resistencia shunt. Para medir la corriente que atraviesa una resistencia se conecta un amperímetro en serie con dicha resistencia. El amperímetro tiene una pequeña resistencia, de modo que ejerce poco efecto sobre la corriente a medir. Un voltímetro mide diferencias de potencial. Consta de un galvanómetro más una resistencia grande en serie. Para medir la caída de potencial a través de una resistencia se dispone un voltímetro en paralelo con la resistencia. El voltímetro posee una resistencia muy grande, de modo que ejerce efecto sobre la caída de potencial a medir. Un ohmímetro es un dispositivo para medir resistencias. Consta de un galvanómetro, una fuente de fem y una resistencia.

Sugerencias bibliográficas

Rosenfeld, L.: "Gustav Robert Kirchhoff", *The Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, Charles C. Gillespie (ed.), Charles Scribner's Sons, New York, 1973, pág. 379.

Las famosas reglas de Kirchhoff de los circuitos eléctricos fueron sólo el primero de una serie de importantes descubrimientos.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Definir las reglas de Kirchhoff y saber usarlas en el análisis de distintos circuitos de corriente continua.
2. Utilizar conceptos de simetría para determinar la resistencia equivalente de redes de resistencias complejas, pero simétricas.
3. Representar en un esquema la carga depositada en un condensador y la corriente I en función del tiempo en los procesos de carga y descarga del condensador.
4. Saber calcular las resistencias apropiadas en serie o en paralelo para construir un amperímetro, un voltímetro o un ohmímetro, a partir de un determinado galvanómetro, y dibujar los diagramas correspondientes a estos dispositivos.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Reglas de Kirchhoff	Voltímetro
Regla de las mallas	Amperímetro
Regla de los nudos	Ohmímetro
Círculo RC	Galvanómetro
Constante de tiempo	Resistencia en paralelo o shunt
Disminución exponencial	

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La variación neta de potencial alrededor de un circuito completo en estado estacionario es cero.
2. La constante de tiempo de un circuito RC es el tiempo necesario para descargar completamente el condensador.
3. Para medir la caída de potencial a través de una resistencia se sitúa un voltímetro en serie con la resistencia.

Problemas

Nivel I

23-1 Reglas de Kirchhoff

1. Una batería de 6 V con una resistencia interna de 0.3Ω , se conecta a una resistencia variable R . Hallar la corriente y la potencia liberada por la batería cuando R es (a) 5Ω , (b) 10Ω .
2. Se conecta una resistencia variable R a través de una diferencia de potencial V que permanece constante independientemente de R . Para un valor $R = R_1$, la corriente es de 6.0 A . Cuando R se aumenta hasta $R_2 = R_1 + 10.0 \Omega$, la corriente cae hasta 2.0 A . Hallar (a) R_1 y (b) V .
3. Una batería tiene una fem \mathcal{E} y una resistencia interna r . Cuando se conecta una resistencia de 5.0Ω entre los terminales de la misma, la corriente es 0.5 A . Cuando se sustituye esta resistencia por otra de 11.0Ω , la corriente es 0.25 A . Hallar (a) la fem \mathcal{E} y (b) la resistencia interna r .
4. En la figura 23-31 la fem es de 6 V y $R = 0.5 \Omega$. La producción de calor por efecto Joule en R es 8 W . (a) ¿Cuál es la corriente en el circuito? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de R ? (c) ¿Cuál es el valor de r ?
5. En el caso del circuito indicado en la figura 23-32 hallar, (a) la intensidad de corriente, (b) la potencia liberada o absorbida por cada fem y (c) la producción de calor por unidad de tiempo en cada resistencia. (Admitir que las baterías tienen unas resistencias internas despreciables.)

Figura 23-31 Problema 4.

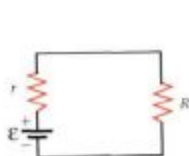
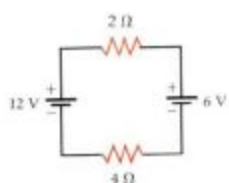
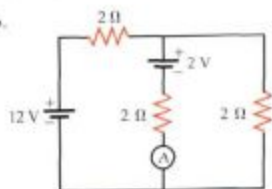


Figura 23-32 Problema 5.



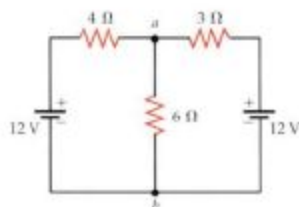
6. En el circuito indicado en la figura 23-33, las baterías tienen unas resistencias internas despreciables y el amperímetro tiene una resistencia despreciable. (a) Hallar la corriente que pasa a través del amperímetro. (b) Hallar la energía suministrada por la batería de 12 V en 3 s . (c) Hallar el calor total disipado en dicho tiempo. (d) Explicar la diferencia en las respuestas de las partes (b) y (c).

Figura 23-33 Problema 6.



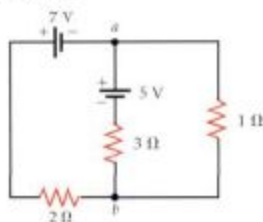
7. En el circuito indicado en la figura 23-34, las baterías tienen una resistencia interna despreciable. (a) Hallar la corriente en cada resistencia, (b) la diferencia de potencial entre los puntos a y b , y (c) la potencia suministrada por cada batería.

Figura 23-34 Problema 7.



8. Repetir el problema 7 en el caso del circuito indicado en la figura 23-35.

Figura 23-35 Problema 8.



23-2 Circuitos RC

9. Un condensador de $6\ \mu\text{F}$ está cargado inicialmente a $100\ \text{V}$ y luego se unen sus armaduras a través de una resistencia de $500\ \Omega$. (a) ¿Cuál es la carga inicial del condensador? (b) ¿Cuál es la corriente inicial en el instante después de que se conecte el condensador a la resistencia? (c) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? (d) ¿Cuánta carga existe sobre el condensador después de $6\ \text{ms}$?

10. (a) En el caso del problema 9, hallar la energía inicial almacenada en el condensador. (b) Demostrar que la energía almacenada en el condensador viene dada por $U = U_0 e^{-t/\tau}$, en donde U_0 es la energía inicial y $\tau = RC$ es la constante de tiempo. (c) Hacer un esquema cuidadoso de la energía U en el condensador en función del tiempo t .

11. A un condensador de $0,12\ \mu\text{F}$ se le da una carga Q_0 . Después de $4\ \text{s}$ se observa que su carga es $\frac{1}{2}Q_0$. ¿Cuál es la resistencia efectiva a través de este condensador?

12. Un condensador de $1,6\ \mu\text{F}$ inicialmente descargado se conecta en serie con una resistencia de $10\ \text{k}\Omega$ y una batería de $5,0\ \text{V}$ de resistencia interna despreciable. (a) ¿Cuál es la carga en el condensador después de un tiempo muy largo? (b) ¿Cuánto tiempo emplea el condensador para alcanzar el 99 por ciento de su carga final?

13. Se conecta una resistencia de $2\ \text{M}\Omega$ en serie con un condensador de $1,5\ \mu\text{F}$ y una batería de $6,0\ \text{V}$ de resistencia inter-

na despreciable. El condensador está inicialmente descargado. Después de un tiempo $t = \tau = RC$, hallar (a) la carga en un condensador, (b) el ritmo o velocidad con el que está aumentando la carga, (c) la corriente, (d) la potencia suministrada por la batería, (e) la potencia disipada en la resistencia y (f) la velocidad a la que está aumentando la energía almacenada en el condensador.

14. Repetir el problema 13 para el caso del tiempo $t = 2\tau$.

23-3 Amperímetros, voltímetros y ohmímetros

15. Un galvanómetro tiene una resistencia de $140\ \Omega$. Se necesita $1,2\ \text{mA}$ para dar una desviación a fondo de escala. (a) ¿Qué resistencia deberá colocarse en paralelo con el galvanómetro para tener un amperímetro que señale $2\ \text{A}$ a fondo de escala? (b) ¿Qué resistencia deberá colocarse en serie para obtener un voltímetro que señale $5\ \text{V}$ con una desviación a fondo de escala?

16. Los galvanómetros sensibles pueden detectar corrientes tan pequeñas como $1\ \text{pA}$. ¿Cuántos electrones por segundo representa esta corriente?

17. Un galvanómetro sensible tiene una resistencia de $120\ \Omega$ y exige una corriente de $1,4\ \mu\text{A}$ para producir una desviación a fondo de escala. (a) Hallar la resistencia shunt necesaria para construir un amperímetro que lea $1,0\ \text{mA}$ a fondo de escala. (b) ¿Cuál es la resistencia del amperímetro? (c) ¿Qué resistencia se necesitará para construir un voltímetro que señale $3,0\ \text{V}$ a fondo de escala con este galvanómetro?

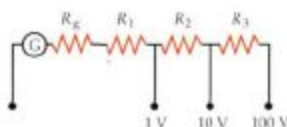
18. Un galvanómetro de resistencia $90\ \Omega$ da una desviación a fondo de escala cuando su corriente es $1,5\ \text{mA}$. Se utiliza para construir un amperímetro cuya lectura a fondo de escala sea $1,5\ \text{A}$. (a) Hallar la resistencia shunt necesaria. (b) ¿Cuál es la resistencia del amperímetro? (c) Si la resistencia shunt se compone de un trozo de alambre de cobre de calibre 10 (diámetro $2,59\ \text{mm}$), ¿cuál deberá ser su longitud?

19. El galvanómetro del problema 18 se utiliza con una batería de $1,5\ \text{V}$ de una resistencia interna despreciable para construir un ohmímetro. (a) ¿Qué resistencia R_s deberá colocarse en serie con el galvanómetro? (b) ¿Qué resistencia R dará una desviación a mitad de escala? (c) ¿Qué resistencia R dará una desviación de un décimo de la correspondiente a fondo de escala?

20. En el caso del ohmímetro del problema 19, indicar cómo deberá calibrarse la escala del galvanómetro representándola en una línea recta de una cierta longitud L en donde el extremo de la línea ($x = L$) representa la lectura a fondo de escala cuando $R = 0$. Dividir la línea en 10 divisiones iguales e indicar los valores de la resistencia en cada división.

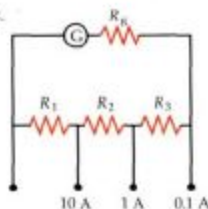
21. Un galvanómetro de $110\ \Omega$ de resistencia da una lectura a fondo de escala cuando la corriente es $0,13\ \text{mA}$. Ha de utilizarse en un voltímetro de varias escalas como se indica en la figura 23-36 en donde las conexiones se refieren a las lecturas a fondo de escala. Determinar R_1 , R_2 y R_3 .

Figura 23-36 Problema 21.



22. El galvanómetro del problema 21 ha de utilizarse en un amperímetro de varias escalas con las lecturas a fondo de escala indicadas en la figura 23-37. Determinar R_1 , R_2 y R_3 .

Figura 23-37 Problema 22.



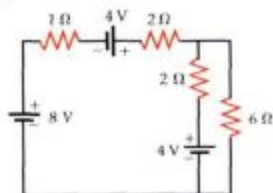
Nivel II

23. Dos baterías idénticas con fem \mathcal{E} y resistencia interna r pueden conectarse a través de una resistencia R bien en serie o paralelo. ¿Qué método de conexión suministra la mayor potencia a R , cuando (a) $R < r$, (b) $R > r$?

24. Se conecta una batería de un coche prácticamente descargada de 11,4 V de fem y 0,01 Ω de resistencia interna a una carga de 2,0 Ω . Para ayudar a esta batería se conecta una segunda batería de 12,6 V de fem y 0,01 Ω de resistencia interna, a los bornes de la primera mediante unos cables adecuados. (a) Dibujar un diagrama del circuito. (b) Calcular la corriente que circula por cada una de las partes del mismo. (c) Calcular la potencia cedida por la segunda batería y discutir en qué se invierte ésta; suponer para ello que en ambas baterías la fem y la resistencia interna permanecen constantes.

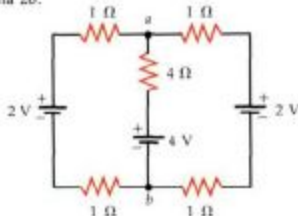
25. En el circuito indicado en la figura 23-28 hallar (a) la corriente en cada resistencia, (b) la potencia suministrada por cada fem y (c) la potencia disipada en cada resistencia.

Figura 23-28 Problema 25.



26. En el circuito indicado en la figura 23-39, hallar la diferencia de potencial entre los puntos a y b .

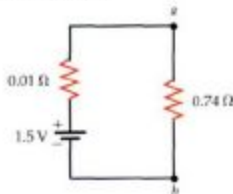
Figura 23-39 Problema 26.



27. El espacio existente entre las placas de un condensador de placas paralelas se llena con un dieléctrico de constante κ y resistividad ρ . (a) Demostrar que la carga sobre las placas disminuye con la constante de tiempo $\tau = \epsilon_0 \kappa \rho$. (b) Si el dieléctrico es mica con un valor de $\kappa = 5,0$ y $\rho = 9 \times 10^{13} \Omega \cdot m$, hallar el tiempo para que la carga disminuya hasta $1/e^2 = 14$ por ciento de su valor inicial.

28. En el circuito indicado en la figura 23-40 la batería tiene una resistencia interna de 0,01 Ω . Se inserta en el punto a un amperímetro de resistencia 0,01 Ω . (a) ¿Cuál es la lectura del amperímetro? (b) ¿En qué porcentaje variará la corriente por la presencia del amperímetro? (c) Se retira el amperímetro y se conecta un voltímetro de 1 k Ω de resistencia entre a y b . ¿Cuál es la lectura del voltímetro? (d) ¿En qué porcentaje varía la caída de potencial entre a y b por la presencia del voltímetro?

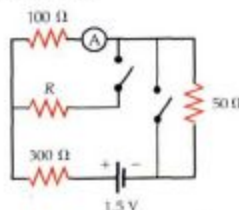
Figura 23-40 Problema 28.



29. Se dispone de dos baterías una con $\mathcal{E} = 9,0$ V y $r = 0,8$ Ω y la otra con $\mathcal{E} = 3,0$ V y $r = 0,4$ Ω . (a) ¿Cómo deberán conectarse para dar la máxima corriente a través de una resistencia R ? Determinar la corriente para (b) $R = 0,2$ Ω , (c) $R = 0,6$ Ω , (d) $R = 1,0$ Ω y (e) $R = 1,5$ Ω .

30. En el circuito indicado en la figura 23-41 la lectura del amperímetro es la misma cuando ambos interruptores están abiertos o ambos cerrados. Hallar la resistencia R .

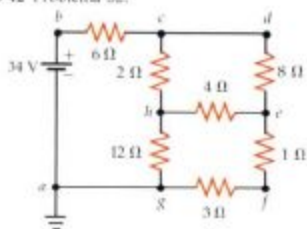
Figura 23-41 Problema 30.



31. Un galvanómetro da una desviación a fondo de escala cuando el voltaje a su través es de 10 mV y la corriente que le atraviesa es de 50 μA . (a) Diseñar un voltímetro que, usando este galvanómetro, dé una lectura a fondo de escala para una diferencia de potencial de 50 V. (b) Diseñar un amperímetro que dé una lectura a fondo de escala con este galvanómetro y una corriente de 10 A.

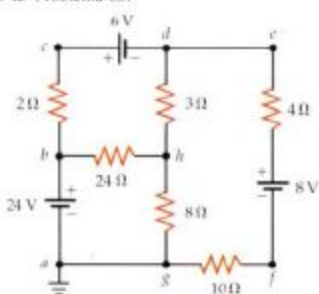
32. (a) Determinar la intensidad de corriente en cada una de las partes del circuito de la figura 23-42. (b) Utilizar los resultados de (a) para asignar un potencial en cada punto indicado, suponiendo que el potencial en el punto a es cero.

Figura 23-42 Problema 32.



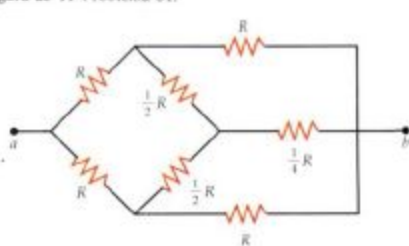
33. (a) Determinar la corriente en cada parte del circuito de la figura 23-43. (b) Utilizar los resultados de (a) para asignar un potencial en cada punto indicado, suponiendo que el potencial en el punto a es cero.

Figura 23-43 Problema 33.



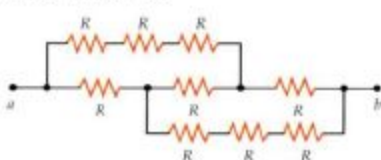
34. (a) Utilizar el concepto de simetría para determinar la resistencia equivalente de la red de la figura 23-44. (b) ¿Cuál es la intensidad de corriente en cada resistencia si R es 10Ω y una diferencia de potencial de 80 V se aplica entre a y b ?

Figura 23-44 Problema 34.



35. Nueve resistencias de 10Ω cada una se conectan como indica la figura 23-45, y se aplica una diferencia de potencial de 20 V entre los puntos a y b . (a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de esta red? (b) Determinar la intensidad de corriente en cada una de las nueve resistencias.

Figura 23-45 Problema 35.



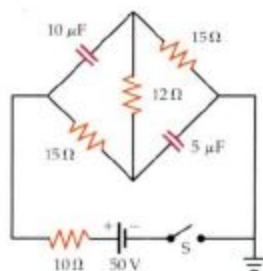
36. Una combinación en paralelo de una resistencia de 8Ω y una resistencia incógnita R se conectan en serie con una resistencia de 16Ω y una batería. A continuación se conectan las tres resistencias en serie y la misma batería. En ambas combinaciones la corriente a través de la resistencia de 8Ω es la misma. ¿Cuánto vale la resistencia incógnita R ?

37. Una caja cerrada tiene dos terminales metálicos a y b . Dentro de la caja existe una fem \mathcal{E} incógnita en serie con una resistencia R . Cuando una diferencia de potencial de 21 V se establece entre a y b , una corriente de 1 A entra en la caja por a y sale por b . Si se invierte esta diferencia de potencial, se observa una corriente de 2 A en dirección inversa a la situación anterior. Determinar \mathcal{E} y R .

38. Un voltímetro posee una resistencia de $10^5 \Omega$. Una batería de 60 V que posee una resistencia interna de 10Ω se conecta a través de una resistencia de $68 \text{ k}\Omega$ y otra de $56 \text{ k}\Omega$ conectadas en serie. (a) ¿Cuál es la lectura del voltímetro a través de la resistencia de $68 \text{ k}\Omega$? (b) ¿Cuál es la lectura del voltímetro a través de la resistencia de $56 \text{ k}\Omega$? (c) ¿Cuál es la lectura del voltímetro a través de la batería? (d) Expresar el error porcentual de cada medida de voltaje.

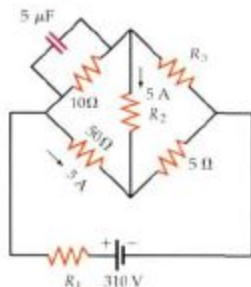
39. Los condensadores del circuito de la figura 23-46 están inicialmente descargados. (a) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente suministrada por la batería cuando se cierra el interruptor S ? (b) ¿Cuál es la intensidad de la corriente de la batería después de un tiempo largo? (c) ¿Cuáles son las cargas finales sobre los condensadores?

Figura 23-46 Problema 39.



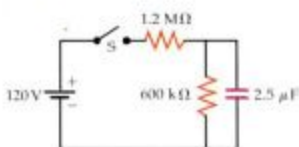
40. En estado estacionario, la carga sobre el condensador de $5 \mu\text{F}$ del circuito de la figura 23-47 es de $1000 \mu\text{C}$. (a) Determinar la corriente de la batería. (b) Determinar las resistencias R_1 , R_2 y R_3 .

Figura 23-47 Problema 40.



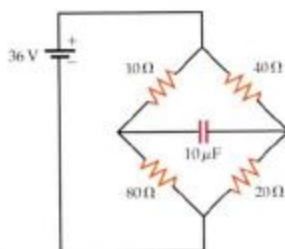
41. Considérese el circuito de la figura 23-48. Determinar (a) la corriente inicial de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor; (b) la corriente estacionaria a través de la batería después de transcurrido un largo tiempo; (c) el voltaje máximo a través del condensador.

Figura 23-48 Problema 41.



42. (a) Determinar el voltaje a través del condensador del circuito de la figura 23-49. (b) Si la batería se desconecta, expresar la corriente del condensador en función del tiempo. (c) ¿Cuánto tiempo tardará en descargarse el condensador hasta que la diferencia de potencial a su través sea de 1 V?

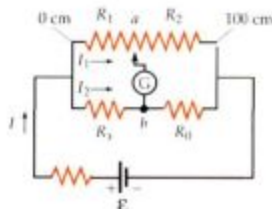
Figura 23-49 Problemas 42 y 59.



43. El circuito de la figura 23-50 es un puente de Wheatstone de hilo. Se utiliza para determinar una resistencia incógnita R_x en función de las resistencias conocidas R_1 , R_2 y R_0 . Las resistencias R_1 y R_2 comprenden un alambre de 1 m de longitud. El punto a es un contacto deslizante que se mueve a lo largo del alambre modificando estas resistencias. La resistencia R_1 es proporcional a la distancia desde el extremo izquierdo del alambre (0 cm) al punto a , y R_2 es proporcional

a la distancia desde el punto a al extremo derecho del alambre (100 cm). Cuando los puntos a y b están a igual potencial, no pasa corriente por el galvanómetro y el puente se dice que está equilibrado. (Como el galvanómetro se utiliza para detectar la ausencia de corriente, se le llama detector de cero.) Si la resistencia fija vale $R_0 = 200 \Omega$, hallar la resistencia incógnita R_x si (a) el puente se equilibra en la marca de 18 cm, (b) el puente se equilibra en la marca de 60 cm y (c) el puente se equilibra en la marca de 95 cm.

Figura 23-50 Problema 43.



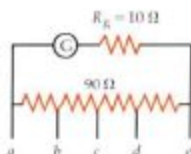
44. En el puente Wheatstone del problema 43, si $R_0 = 200 \Omega$, el puente se equilibra en la marca de 98 cm. (a) ¿Cuál es la resistencia incógnita? (b) ¿Qué influencia tendría un error de 2 mm sobre el valor medido de la resistencia incógnita? (c) ¿Cómo debería variarse R_0 de modo que esta resistencia incógnita diese un punto de equilibrio más próximo a la marca de 50 cm?

Nivel III

45. Suponer en el problema 24 que la fem correspondiente a la primera batería se incrementa respecto al tiempo con un ritmo de 0,2 V/h, pero que la fem de la segunda batería y las resistencias internas de ambas permanecen constantes. (a) Calcular en función del tiempo la corriente en cada una de las partes del circuito. (b) Dibujar un gráfico de la potencia cedida a la primera batería en función del tiempo.

46. En el amperímetro de la figura 23-51, el galvanómetro tiene una resistencia de 10Ω y se conecta a través de una resistencia de 90Ω . El valor de la corriente que produce una desviación a fondo de escala puede escogerse utilizando las conexiones ab , ac , ad o ae . (a) ¿Cómo deberá ser la resistencia de 90Ω de modo que la corriente que produce la desviación a fondo de escala disminuya en el factor de 10 para cada conexión sucesiva ab , ac , etc.? (b) ¿Cuál deberá ser la corriente de desviación a fondo de escala en el galvanómetro I_g de modo que este amperímetro tenga márgenes de 1,0 mA, 10 mA, 100 mA y 1 A?

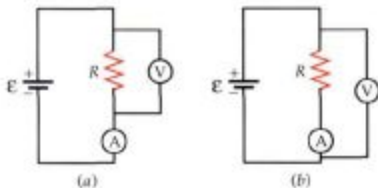
Figura 23-51 Problema 46.



47. La figura 23-52 muestra dos modos posibles de utilizar un voltímetro y un amperímetro para medir una resistencia.

incógnita R . Admitir que la resistencia interna de la batería es despreciable y que la resistencia del voltímetro es 1000 veces la del amperímetro. $R_v = 1000 R_a$. El valor de R se considera que es $R_v = V/I$, en donde V e I son las lecturas del voltímetro y amperímetro. (a) Estudiar qué circuito es preferible para valores de R en el intervalo comprendido desde $10 R_a$ hasta $0,9 R_v$. ¿Por qué? Hallar R_v para cada circuito si $R_a = 0,1 \Omega$, $R_v = 100 \Omega$, y (b) $R = 0,5 \Omega$, (c) $R = 3 \Omega$ y (d) $R = 80 \Omega$.

Figura 23-52 Problemas 47 y 48.



48. (a) Demostrar en los circuitos de la figura 23-52 que $R_v = V/I$ está relacionado con el valor real R por la expresión $1/R_v = 1/R + 1/R_v$ en el circuito a y $R_v = R + R_a$ en el circuito b. (Véase problema 47.) Si $\mathcal{E} = 1,5 \text{ V}$, $R_a = 0,01 \Omega$ y $R_v = 10 \text{ k}\Omega$, ¿para qué intervalo de valores de R está R_v dentro del 5 por ciento de R usando (b) el circuito a y (c) el circuito b?

49. Consideremos el circuito de la figura 23-53 en el cual r es la resistencia interna de la fuente de fem y R_a la resistencia del amperímetro. (a) Demostrar que la lectura del amperímetro viene dada por

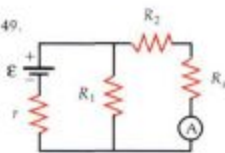
$$\mathcal{I} \left(R_2 + R_a + r + \frac{R_2 + R_a}{R_1} r \right)^{-1}$$

(b) Demostrar que si se intercambian el amperímetro y la fuente de fem, la lectura del amperímetro es

$$\mathcal{I} \left(R_2 + R_a + r + \frac{R_2 + r}{R_1} R_a \right)^{-1}$$

Obsérvese que si $R_a = r$ o si ambas son despreciables, la lectura es la misma. (Cuando se pueden despreciar R_a y r , esta simetría puede ser de gran utilidad al analizar circuitos con una sola fuente de fem; no es válida en el caso de que haya más de un fuente de fem.)

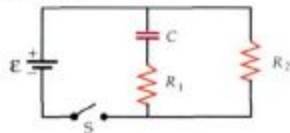
Figura 23-53 Problema 49.



50. En el circuito indicado en la figura 23-54 el condensador está inicialmente descargado estando abierto el interruptor. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor. (a) ¿Cuál es la co-

rriente suministrada por la fuente de fem en el momento en que se cierra el interruptor? (b) ¿Cuál es la corriente una vez transcurrido un tiempo bastante largo después de haber cerrado el interruptor? (c) Deducir una expresión que nos dé la corriente que circula a través de la fuente de fem durante un instante cualquiera después de haber cerrado el interruptor. (d) Después de que ha transcurrido un tiempo largo t' se abre de nuevo el interruptor. ¿Cuánto tiempo se tarda en que la carga del condensador disminuya hasta el 10 por ciento del valor que tiene en $t = t'$, si $R_1 = R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ y $C = 1,0 \mu\text{F}$?

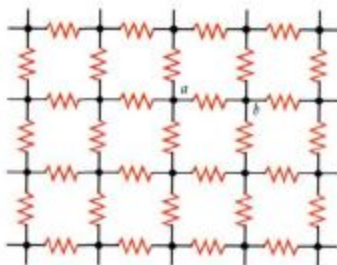
Figura 23-54 Problema 50.



51. Dos baterías de fems \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 y de resistencias internas r_1 y r_2 se conectan en paralelo. Demostrar que la resistencia de carga óptima (para la cesión de una potencia máxima) R conectada en paralelo con esta combinación es $R = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$.

52. La figura 23-55 muestra una red plana e infinita de resistencias iguales en dos dimensiones. Si el valor de cada resistencia es R , determinar la resistencia equivalente entre los puntos a y b.

Figura 23-55 Problema 52.

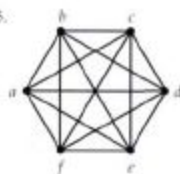


53. Considerar una red triangular de resistencias periódica e infinita de dos dimensiones. Si el valor de cada resistencia es R , ¿cuál es la resistencia equivalente a través de cualquiera de ellas?

54. Considerar una red de resistencias cúbica, periódica y tridimensional que se extiende al infinito en todas direcciones. Si R es el valor de cada resistencia, ¿cuál es la resistencia equivalente a través de cualquiera de ellas?

55. Cada uno de los seis terminales a, b, c, d, e y f de la figura 23-56 está conectado con los restantes por medio de un cable de resistencia R . Los cables están aislados, de modo que sólo hacen contacto eléctrico con los terminales. Utilizar el concepto de simetría para determinar la resistencia entre dos terminales cualesquiera.

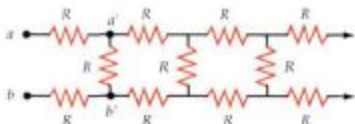
Figura 23-56 Problema 55.



56. (a) Determinar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* del cubo de 12 resistencias de la figura 23-16. (b) ¿Cuál es la resistencia equivalente entre *a* y *b* si se extrae precisamente la resistencia que existe directamente entre estos dos puntos?

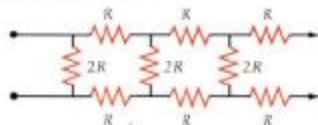
57. En la figura 23-57 se muestra una cadena infinita de resistencias. Determinar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b*. *Indicación:* La resistencia R_{ab} es la misma que $R_{a'b'}$ si la sección a la izquierda de *a' b'* se elimina. La red sigue siendo una cadena infinita con igual estructura.

Figura 23-57 Problema 57.



58. En la figura 23-58 se muestra una cadena infinita de resistencias. Determinar la resistencia de entrada. (Véase problema 57.)

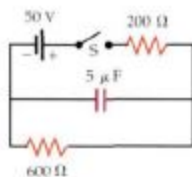
Figura 23-58 Problema 58.



59. Si el condensador del circuito de la figura 23-49 se reemplaza por una resistencia de 30 Ω , ¿cuáles son las intensidades de las corrientes que fluyen por las resistencias?

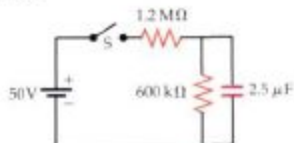
60. En el circuito de la figura 23-59, (a) ¿cuál es la corriente inicial de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor S? (b) ¿Cuál es la corriente de la batería un tiempo largo después de cerrar el interruptor S? (c) ¿Cómo varía la intensidad de corriente en la resistencia de 600 Ω en función del tiempo?

Figura 23-59 Problema 60.



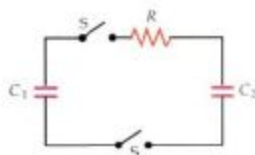
61. En el circuito de la figura 23-60, (a) ¿cuál es la intensidad inicial de la corriente suministrada por la batería inmediatamente después de cerrado el interruptor S? (b) ¿Y al cabo de un largo tiempo del cierre de S? (c) Si el interruptor ha estado cerrado durante un largo tiempo y luego se abre, determinar la variación de la intensidad de corriente a través de la resistencia de 600 $\text{k}\Omega$ en función del tiempo.

Figura 23-60 Problema 61.



62. Los condensadores C_1 y C_2 están conectados en paralelo con una resistencia y dos interruptores tal como muestra la figura 23-61. El condensador C_1 está inicialmente cargado con un voltaje V_0 y el condensador C_2 está sin carga. Los interruptores S se cierran entonces. (a) ¿Cuáles son las cargas finales sobre C_1 y C_2 ? (b) Comparar las energías inicial y final almacenadas en el sistema. (c) ¿Cuál es la causa de la disminución de la energía almacenada en los condensadores?

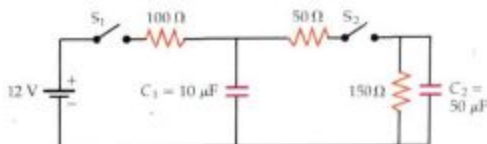
Figura 23-61 Problema 62.



63. (a) En el problema 62 determinar la intensidad de corriente que circula por R en función del tiempo después de cerrar los interruptores S. (b) Determinar la energía disipada en la resistencia en función del tiempo. (c) Determinar la energía total disipada en la resistencia y compararla con la pérdida de energía almacenada, deducida en la parte (b) del problema 62.

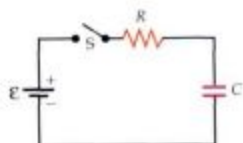
64. Los condensadores del circuito de la figura 23-62 están inicialmente descargados. El interruptor S_1 se cierra primero y después se cierra el S_2 . (a) ¿Cuál es la corriente de la batería inmediatamente después de cerrar S_1 ? (b) ¿Cuál es la corriente de la batería un tiempo largo después de cerrar ambos interruptores? (c) ¿Cuál es el voltaje final a través de C_1 ? (d) ¿Cuál es el voltaje final a través de C_2 ? (e) Después de un largo tiempo, se abre de nuevo el interruptor S_2 . Expresar la intensidad de corriente en la resistencia de 150 Ω en función del tiempo.

Figura 23-62 Problema 64.



65. El condensador del circuito RC de la figura 23-63 está inicialmente descargado y el interruptor se cierra en el tiempo $t=0$. (a) ¿Cuál es la potencia suministrada por la batería en función del tiempo? (b) ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia en función del tiempo? (c) Determinar el ritmo con que la energía se almacena en el condensador en función del tiempo. Representar las respuestas a las partes (a), (b) y (c) en función del tiempo sobre el mismo gráfico. (d) Determinar el ritmo máximo con el que se almacena la energía en el condensador en función del voltaje \mathcal{E} de la batería y la resistencia R . ¿En qué instante ocurre este máximo?

Figura 23-63 Problema 65.



Capítulo 24

El campo magnético



Este tren experimental Maglev que utiliza la repulsión magnética para la levitación, guía y propulsión, alcanza velocidades superiores a 300 km/h.

No se sabe cuándo fue apreciada por vez primera la existencia del magnetismo. Sin embargo, hace ya más de 2000 años que los griegos sabían que cierto mineral (llamado ahora magnetita) tenía la propiedad de atraer piezas de hierro, y existen referencias escritas del uso de imanes en la navegación desde el siglo doce.

En 1269, Pierre de Maricourt descubrió que si una aguja se deja libremente en distintas posiciones sobre un imán natural esférico, se orienta a lo largo de líneas que, rodeando el imán, pasan por puntos situados en extremos opuestos de la esfera. Estos puntos fueron llamados polos del imán. Posteriormente, muchos experimentadores observaron que todo imán, cualquiera que sea su forma, posee dos polos, un polo norte y un polo sur, en donde la fuerza ejercida por el imán tiene su máxima intensidad. También se observó que los polos iguales de dos imanes se repelen entre sí y los polos distintos se atraen mutuamente.

En 1600, William Gilbert descubrió que la Tierra es un imán natural con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte y sur. (Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al norte geográfico, lo que llamamos polo magnético norte es realmente un polo sur, como se ilustra en la figura 24-1.) Hacia 1750, John Michell hizo un estudio cuantitativo de la atracción y repulsión de los polos magnéticos por medio de una balanza de torsión. Así descubrió que

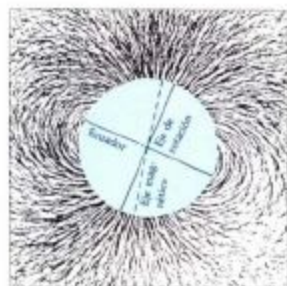


Figura 24-1 Las líneas de campo magnético de la Tierra indicadas por limaduras de hierro alrededor de una esfera imantada de modo uniforme. Las líneas son algo semejantes, pero no exactamente las mismas que las de una barra magnética.

la fuerza ejercida por un polo sobre otro varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia. Estos resultados fueron poco después confirmados por Coulomb.

La ley de la fuerza existente entre dos polos magnéticos es semejante a la que existe entre dos cargas eléctricas, pero existe una diferencia importante: los polos magnéticos siempre se presentan por parejas. Si se rompe un imán por la mitad, aparecen polos iguales y opuestos a cada lado del punto de rotura; es decir, aparecen dos imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur. A lo largo del tiempo se ha especulado mucho sobre la posible existencia de un polo magnético aislado, y más recientemente se ha realizado un considerable esfuerzo experimental a fin de localizar tal objeto. Hasta ahora no existe una evidencia conclusiva sobre la existencia de un polo magnético aislado.

La conexión entre la electricidad y magnetismo no se conoció hasta el siglo XIX, cuando Hans Christian Oersted descubrió que una corriente eléctrica influye sobre la orientación de la aguja de una brújula. Experimentos subsiguientes realizados por André Marie Ampère y otros, demostraron que las corrientes eléctricas atraen trocitos o limaduras de hierro y que corrientes paralelas se atraen entre sí. Ampère propuso un modelo teórico del magnetismo que todavía sirve de base a la teoría moderna del magnetismo: la fuente fundamental del magnetismo no es un polo magnético, sino una corriente eléctrica. Propuso que el magnetismo de un imán permanente es debido al alineamiento de espiras moleculares de corriente dentro del material. Actualmente se sabe que estas espiras de corriente resultan parcialmente del movimiento de los electrones dentro del átomo y parcialmente del espín electrónico, una propiedad mecánico-cuántica del electrón. La interacción magnética básica es la fuerza magnética que existe entre dos cargas en movimiento relativo. Esta fuerza se suma a la fuerza eléctrica que existe entre las dos cargas. Lo mismo que en el caso de la fuerza eléctrica, se considera que la fuerza magnética se transmite por otro agente, el campo magnético. La carga móvil produce un **campo magnético**, y el campo, a su vez ejerce una fuerza sobre la otra carga móvil. Como una carga móvil constituye una corriente eléctrica, la interacción magnética puede considerarse como una interacción entre dos corrientes.

En los primeros años de la década de 1830, Michael Faraday y Joseph Henry demostraron mediante experimentos independientes que un campo magnético variable produce un campo eléctrico. Varios años después (hacia 1860), James Clerk Maxwell desarrolló una teoría completa de la electricidad y el magnetismo, según la cual un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

En este capítulo consideraremos sólo los efectos de un campo magnético determinado sobre cargas móviles y sobre alambres portadores de corrientes. Las fuentes de los campos magnéticos serán el objeto del capítulo 28.

24-1 Fuerza ejercida por un campo magnético

La existencia de un campo magnético* \mathbf{B} en un punto del espacio puede demostrarse de un modo directo. Basta colocar una brújula en dicho punto y comprobar si tiende a alinearse en una dirección particular. Si no existen imanes o corrientes eléctricas en las proximidades, la aguja apuntará en la dirección del campo magnético terrestre. Si existen imanes o corrientes eléctricas próximas, la aguja apuntará en la dirección del campo magnético resultante debido a la Tierra y los imanes, o corrientes.

* Por razones históricas, el campo magnético \mathbf{B} se denomina a veces *vector de inducción magnética* o *densidad de flujo magnético*. Aquí le llamaremos simplemente *campo magnético*.

Experimentalmente se demuestra que cuando una carga q posee la velocidad v dentro de un campo magnético, aparece una fuerza que depende de q y de la magnitud y dirección de la velocidad. Supongamos que conocemos la dirección del campo magnético B en un punto del espacio mediante la medida realizada con una brújula. Realizando experimentos con distintas cargas que se mueven con distintas velocidades en tal punto, se obtienen los siguientes resultados para la fuerza magnética:

1. La fuerza es proporcional a la carga q . La fuerza que actúa sobre una carga negativa posee dirección opuesta a la de una carga positiva con igual velocidad.
2. La fuerza es proporcional al módulo de la velocidad v .
3. La fuerza es perpendicular a ambos, el campo magnético y la velocidad.
4. La fuerza es proporcional a $\sin \theta$, en donde θ es el ángulo que forman la velocidad v y el campo magnético B . Si v es paralela o antiparalela con B , la fuerza es nula.

Estos resultados experimentales pueden resumirse del modo siguiente. Cuando una carga q se mueve con velocidad v en un campo magnético B , la fuerza magnética F que actúa sobre la carga es

$$F = qv \times B$$

24-1

Fuerza magnética sobre una carga móvil

Como F es perpendicular a ambos v y B , resulta ser perpendicular al plano definido por estos dos vectores. La dirección de F viene dada por la regla de la mano derecha como el eje de rotación cuando v gira hacia B , como se muestra en la figura 24-2.

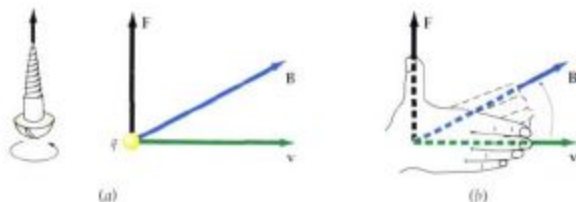


Figura 24-2 Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga moviéndose en un campo magnético. (a) La fuerza es perpendicular a ambos v y B y su sentido es el que correspondería a un tornillo que avanza al girarle de tal modo que v gire hacia B en el menor de los dos ángulos posibles. (b) Si los dedos de la mano derecha señalan la dirección de v de tal modo que giran hacia B , el pulgar señala la dirección de F .

En la figura 24-3 se muestran algunos ejemplos de la dirección de las fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles cuando el vector campo magnético B se encuentra en la dirección vertical hacia arriba. Obsérvese que la dirección de cualquier campo magnético particular B puede encontrarse experimentalmente uniendo F y v y aplicando después la ecuación 24-1.

La ecuación 24-1 define el **campo magnético B** en función de la fuerza ejercida sobre una carga móvil. La unidad SI del campo magnético es el **tesla (T)**. Una

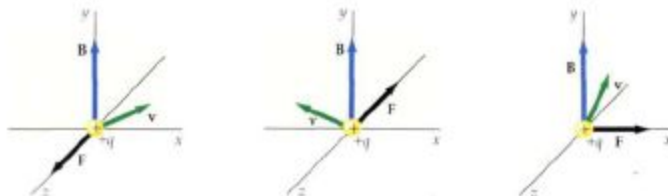


Figura 24-3 Dirección y sentido de la fuerza magnética sobre una partícula cargada con velocidad v con diversas orientaciones en el interior de un campo magnético B . El sombreado indica el plano definido por v y B .

carga de un culombio que se mueve con una velocidad de un metro por segundo perpendicular a un campo magnético de un tesla, experimenta la fuerza de un newton:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N/C}}{\text{m/s}} = 1 \text{ N/A}\cdot\text{m} \quad 24-2$$

Esta unidad es bastante grande. El campo magnético terrestre es algo menor que 10^{-4} T. Los campos magnéticos próximos a imanes permanentes poderosos suelen ser de 0,1 a 0,5 T y los grandes electroimanes de laboratorio y de la industria producen campos de 1 a 2 T. Campos magnéticos superiores a 10 T son muy difíciles de producir, pues las fuerzas magnéticas resultantes romperían los imanes en pedazos o los aplastarían. Una unidad usada corrientemente, deducida del sistema cgs es el **gauss** (G) relacionada con el tesla por:

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G} \quad 24-3$$

Como normalmente se utiliza el gauss como unidad del campo magnético, que no es una unidad del SI, no debe olvidarse la conversión de esta magnitud en teslas cuando se realizan los cálculos.

Ejemplo 24-1

El campo magnético de la Tierra tiene un valor de 0,6 G y está dirigido hacia abajo y hacia el norte, formando un ángulo de 70° aproximadamente con la horizontal. (La magnitud y dirección del campo magnético terrestre varía de un lugar a otro. Los datos que aquí se dan corresponden aproximadamente a la parte central de los Estados Unidos.) Un protón de carga $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, se mueve horizontalmente en dirección norte con velocidad $v = 10^7$ m/s. Calcular la fuerza magnética sobre el protón.

La figura 24-4 muestra las direcciones del campo magnético \mathbf{B} y la velocidad del protón \mathbf{v} . El ángulo que forman ambos es $\theta = 70^\circ$. La fuerza magnética es paralela a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, es decir hacia el oeste para un protón que se mueve al norte. La magnitud de la fuerza magnética es

$$F = qvB \sin \theta \\ = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s})(0,6 \times 10^{-4} \text{ T})(0,94) = 9,02 \times 10^{-17} \text{ N}$$

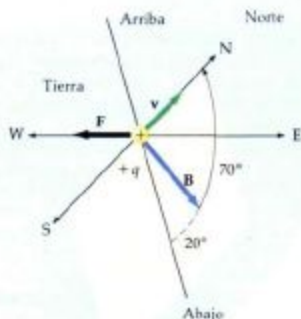


Figura 24-4 Fuerza magnética sobre un protón que se mueve hacia el norte en el campo magnético de la Tierra, que forma un ángulo hacia abajo de 70° con la dirección horizontal norte (ejemplo 24-1). La fuerza está dirigida hacia el oeste.

Resulta instructivo desarrollar este ejemplo utilizando vectores unitarios. Elegimos las direcciones x e y hacia el este y norte, respectivamente, y la dirección z hacia arriba, como indica la figura 24-5. Por tanto, el vector veloci-

dad está en la dirección y y el campo magnético de la Tierra tiene los componentes $B_x=0$, $B_y=B \cos 70^\circ=(0,6 \times 10^{-4} \text{ T})(0,342)=2,05 \times 10^{-5} \text{ T}$, y $B_z=-B \sin 70^\circ=(-0,6 \times 10^{-4} \text{ T})(0,940)=-5,64 \times 10^{-5} \text{ T}$. El vector campo magnético viene así dado por

$$\mathbf{B}=0 \mathbf{i}+2,05 \times 10^{-5} \text{ T } \mathbf{j}-5,64 \times 10^{-5} \text{ T } \mathbf{k}$$

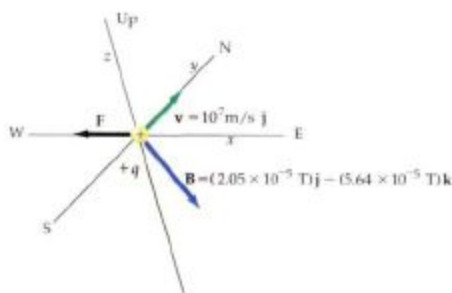


Figura 24-5 Sistema de coordenadas para expresar la velocidad \mathbf{v} , el campo magnético \mathbf{B} y la fuerza \mathbf{F} en función de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

y la fuerza magnética sobre el protón es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s } \mathbf{j}) \\ &\quad \times (0 \mathbf{i}+2,05 \times 10^{-5} \text{ T } \mathbf{j}-5,64 \times 10^{-5} \text{ T } \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Como $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s } \mathbf{j}) \times (-5,64 \times 10^{-5} \text{ T } \mathbf{k}) \\ &= -9,02 \times 10^{-17} \text{ N } \mathbf{i} \end{aligned}$$

Ejercicio

Determinar la fuerza que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad $\mathbf{v}=4 \times 10^6 \text{ m/s } \mathbf{i}$ en un campo magnético $\mathbf{B}=2,0 \text{ T } \mathbf{k}$. (Respuesta: $-1,28 \times 10^{-12} \text{ N } \mathbf{j}$)

Cuando por un hilo situado en el interior de un campo magnético circula una corriente, existe una fuerza que se ejerce sobre el conductor que es simplemente la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas cuyo movimiento produce la corriente. La figura 24-6 muestra un segmento corto de hilo de área de sección recta A y longitud ℓ por el cual circula la corriente I . Si el hilo está en el interior de un campo magnético \mathbf{B} , la fuerza magnética sobre cada carga es $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$, siendo \mathbf{v}_d la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga. El número de cargas en el interior del segmento de hilo es el número n de las que hay por unidad de volumen multiplicado por el volumen $A\ell$. Así pues, la fuerza total \mathbf{F} sobre el segmento de hilo es

$$\mathbf{F}=(q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nA\ell$$

Según la ecuación 22-3 la corriente que circula por el hilo es

$$I=nqv_d A$$

Así pues, la fuerza puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F}=I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

en donde $\boldsymbol{\ell}$ es un vector cuyo módulo es la longitud del hilo y cuya dirección es paralela a $q\mathbf{v}_d$, que es la dirección de la corriente I . Para la corriente en la di-

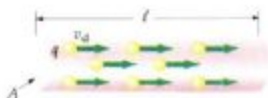


Figura 24-6 Segmento de alambre de longitud ℓ que transporta una corriente de intensidad I . Si el alambre está en un campo magnético, se producirá una fuerza sobre cada portador de carga, dando lugar a una fuerza resultante sobre el alambre.

Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente

Fuerza magnética sobre un elemento de corriente

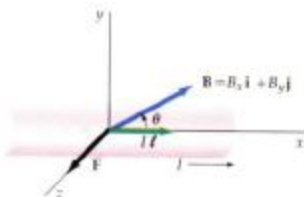
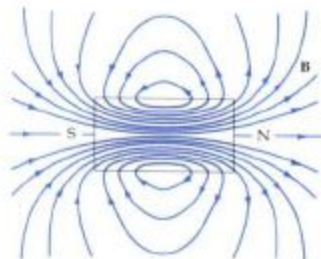
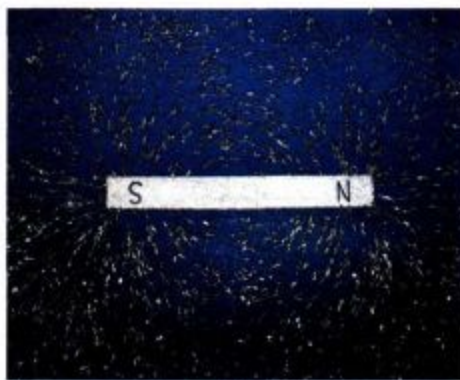


Figura 24-7 Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente en un campo magnético. La corriente lleva la dirección x . El campo magnético está en el plano xy y forma un ángulo θ con el eje z . La fuerza F está dirigida en el sentido positivo de z , perpendicular a ambos, B y l . Su magnitud es $lB \sin \theta$.

Figura 24-8 (a) Líneas del campo magnético dentro y fuera de una barra magnética. Las líneas emergen del polo norte y entran en el polo sur, pero carecen de principio y de fin. En su lugar forman circuitos cerrados. (b) Líneas de campo magnético exteriores a una barra imanada, visualizadas por limaduras de hierro.



(a)



(b)

rección x positiva y el campo magnético en el plano xy mostrado en la figura 24-7, la fuerza sobre el alambre está dirigida a lo largo del eje z positivo. En la ecuación 24-4 se admite que el segmento de cable es recto y que el campo magnético no varía en toda su longitud. Se generaliza fácilmente el caso de un conductor de forma arbitraria en el interior de un campo magnético cualquiera. Simplemente hay que escoger un segmento de hilo suficientemente pequeño $d\ell$ y escribir la fuerza que actúa sobre dicho segmento dF :

$$dF = I d\ell \times B$$

24-5

en donde B es el vector inducción magnética en el segmento. La magnitud $I d\ell$ se denomina **elemento de corriente**. Se halla la fuerza total que actúa sobre el conductor sumando (o integrando) respecto a todos los elementos de corriente y utilizando el campo apropiado B en cada uno de ellos.

La ecuación 24-5 es la misma que la ecuación 24-1 con el elemento de corriente $I d\ell$ sustituyendo a qv y define el campo magnético B en función de la fuerza extendida sobre un elemento de corriente.

Del mismo modo que el campo eléctrico E puede representarse mediante líneas de campo eléctrico, también el campo magnético B puede ser representado mediante líneas de campo magnético. En ambos casos, la dirección del campo viene indicada por la dirección de las líneas de campo y la magnitud del campo por su densidad.

Existen, sin embargo, dos importantes diferencias entre líneas del campo eléctrico y líneas del campo magnético. La primera está relacionada con la dirección de la fuerza que el campo ejerce sobre una carga. La fuerza eléctrica que actúa sobre una carga positiva posee la dirección del campo eléctrico y por tanto, la correspondiente a las líneas de campo eléctrico. Sin embargo, la fuerza magnética que actúa sobre una carga móvil, es perpendicular al campo magnético y por tanto, las líneas de campo magnético *no* poseen la dirección de la fuerza magnética sobre una carga móvil.

La segunda diferencia es que las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Sin embargo, como los polos magnéticos aislados aparentemente no existen, no hay puntos en el espacio en donde las líneas de campo magnético comiencen o terminen. En su lugar, forman espiras cerradas. La figura 24-8 muestra las líneas de campo magnético, tanto fuera como dentro de una barra imanada.

Ejemplo 24-2

Un segmento de cable de 3 mm de longitud transporta una corriente de 3 A en la dirección x . Se encuentra en el interior de un campo magnético de magnitud 0,02 T en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje xy , como indica la figura 24-7. ¿Cuál es la fuerza magnética ejercida sobre el segmento de cable?

Como puede verse fácilmente en la figura, la fuerza magnética posee la dirección del eje z . Su magnitud viene dada por la ecuación 24-4:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I\ell \times \mathbf{B} = I\ell B \sin 30^\circ \mathbf{k} \\ &= (3,0 \text{ A})(0,003 \text{ m})(0,02 \text{ T})(\sin 30^\circ) \mathbf{k} \\ &= 9 \times 10^{-5} \text{ N } \mathbf{k} \end{aligned}$$

La fuerza total sobre un alambre portador de corriente se determina sumando las fuerzas que actúan sobre cada uno de los segmentos.

Cuestiones

- Una carga q se mueve con velocidad \mathbf{v} a través de un campo magnético \mathbf{B} . En este instante experimenta la acción de una fuerza magnética \mathbf{F} . ¿En qué diferiría la fuerza si la carga tuviese signo opuesto? ¿Si la velocidad tuviese sentido opuesto? ¿Si el campo magnético tuviese sentido opuesto?
- ¿Para qué ángulo entre \mathbf{B} y \mathbf{v} tiene la fuerza magnética ejercida sobre q su valor máximo? ¿su mínimo valor?
- Una carga eléctrica móvil puede experimentar la acción de fuerzas tanto eléctricas como magnéticas. ¿Cómo podría distinguirse si una fuerza que hace que una carga se desvíe de la trayectoria recta es una fuerza eléctrica o una fuerza magnética?
- ¿Cómo puede moverse una carga a través de un campo magnético sin experimentar nunca la acción de la fuerza magnética?
- Demostrar que la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente es la misma en dirección, sentido y módulo, independientemente de que sean cargas positivas, cargas negativas o una mezcla de cargas positivas y negativas las que crean la corriente.
- Un hilo por el que circula una corriente pasa a través de un campo magnético, pero el hilo no experimenta la acción de ninguna fuerza magnética. ¿Cómo es esto posible?
- ¿En qué aspectos son semejantes los campos magnéticos a los eléctricos? ¿En qué aspectos son diferentes?

24-2 Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético

Una característica importante de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula móvil a través de un campo magnético es que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. La fuerza magnética por consiguiente no realiza trabajo sobre la partícula y la energía cinética de ésta no se ve afectada por esta fuerza. La fuerza magnética sólo modifica la dirección de la velocidad pero no su módulo.

En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la figura 24-9, la partícula se mueve describiendo una órbita circular. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. Podemos relacionar el radio de la circunferencia r con el campo magnético B y la velocidad de la partícula v haciendo que la fuerza resultante sea igual a la masa m multiplicada por la acelera-

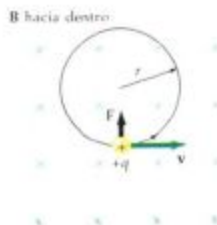


Figura 24-9 Partícula cargada que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme que está dirigido hacia el plano de papel (indicado por las cruces). La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula haciendo que se mueva en una órbita circular.

ción centrípeta v^2/r de acuerdo con la segunda ley de Newton. La fuerza neta en este caso es qvB ya que v y B son perpendiculares. Así pues, según la segunda ley de Newton, resulta

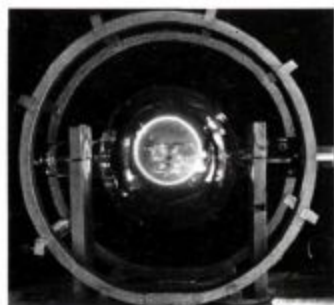
$$F = ma$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

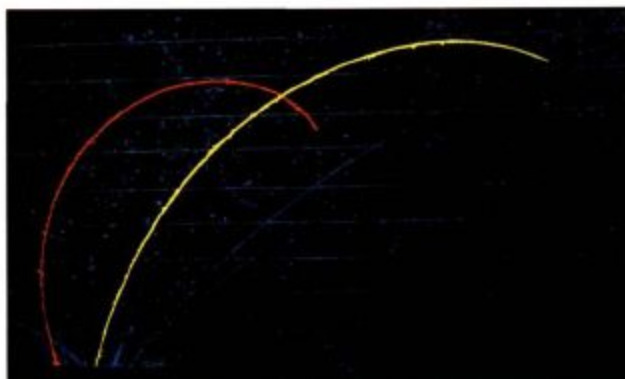
o sea,

$$r = \frac{mv}{qB} \quad 24-6$$

(a) Trayectoria circular de los electrones que se mueven en el interior de un campo magnético producido por dos grandes bobinas. Los electrones ionizan el gas contenido en el tubo produciendo un destello azulado que indica la trayectoria del haz. (b) Fotografía en falso color que muestra las trayectorias de un protón de 1,6 MeV (rojo) y una partícula α de 7 MeV (amarillo) en una cámara de niebla. El radio de curvatura es proporcional al momento lineal e inversamente proporcional a la carga de la partícula. Para estas energías, el momento lineal de la partícula α , que posee doble carga que el protón, es aproximadamente cuatro veces el del protón y su radio de curvatura guarda esta proporción.



(a)



(b)

Sustituyendo en $r = mv/qB$ (ecuación 24-6) se obtiene,

$$T = \frac{2\pi(mv/qB)}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad 24-7$$

La frecuencia del movimiento circular es el valor recíproco del período.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad 24-8$$

Frecuencia del ciclotrón

Obsérvese que el período y la frecuencia dados por las ecuaciones 24-7 y 24-8 no dependen del radio de la órbita ni de la velocidad de la partícula. Se llaman respectivamente **período del ciclotrón** y **frecuencia del ciclotrón**. Entre las muchas aplicaciones interesantes del movimiento circular de partículas cargadas dentro de un campo magnético uniforme mencionaremos dos, la espectrografía de masas y el ciclotrón, que se estudiarán más tarde en esta sección.

Ejemplo 24-3

Un protón de masa $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg y carga $q = e = 1,6 \times 10^{-19}$ C se mueve en un círculo de radio 21 cm, perpendicularmente a un campo magnético $B = 4000$ G. Determinar (a) el periodo del movimiento y (b) la velocidad del protón.

(a) Para determinar el periodo no es necesario conocer el radio del círculo. Expresando el campo magnético en unidades SI ($4000 \text{ G} = 0,4 \text{ T}$) y utilizando la ecuación 24-7 tenemos

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,4 \text{ T})} \\ = 1,64 \times 10^{-7} \text{ s}$$

(b) La velocidad v del protón está relacionada con el radio del círculo por la ecuación 24-6:

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0,21 \text{ m})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,4 \text{ T})}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \\ = 8,05 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Podemos comprobar nuestros resultados sabiendo que el producto de la velocidad v por el periodo T es la circunferencia del círculo $2\pi r$. Entonces

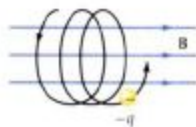
$$r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{(8,05 \times 10^6 \text{ m/s})(1,64 \times 10^{-7} \text{ s})}{2\pi} \\ = 0,21 \text{ m} = 21 \text{ cm}$$

En estos cálculos, todas las magnitudes están expresadas en unidades SI, de modo que los resultados son segundos para el periodo y metros por segundo para la velocidad.

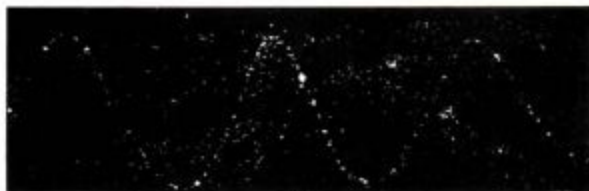
Obsérvese que según la ecuación 24-6 el radio del movimiento circular es proporcional a la velocidad. Si duplicamos la velocidad del protón en este ejemplo, el radio se duplica, pero el periodo y la frecuencia no se modifican.

Supongamos que una partícula cargada entra en un campo magnético uniforme con una velocidad que no es perpendicular a B . La velocidad de la partícula puede resolverse en dos componentes, v_{\parallel} paralela a B y v_{\perp} perpendicular a B . El movimiento debido al componente perpendicular es el mismo que hemos discutido anteriormente. El componente de la velocidad paralelo a B no se afecta por el campo magnético y por tanto, permanece constante. La trayectoria de la partícula es una hélice, como muestra la figura 24-10.

Figura 24-10 (a) Cuando una partícula cargada posee un componente de velocidad paralelo a un campo magnético y otro perpendicular al mismo, se mueve en una trayectoria helicoidal alrededor de las líneas del campo. (b) Fotografía de la cámara de niebla de la trayectoria helicoidal de un electrón moviéndose en un campo magnético. La trayectoria de los electrones se hace visible por la condensación de gotitas de agua en la cámara de niebla.



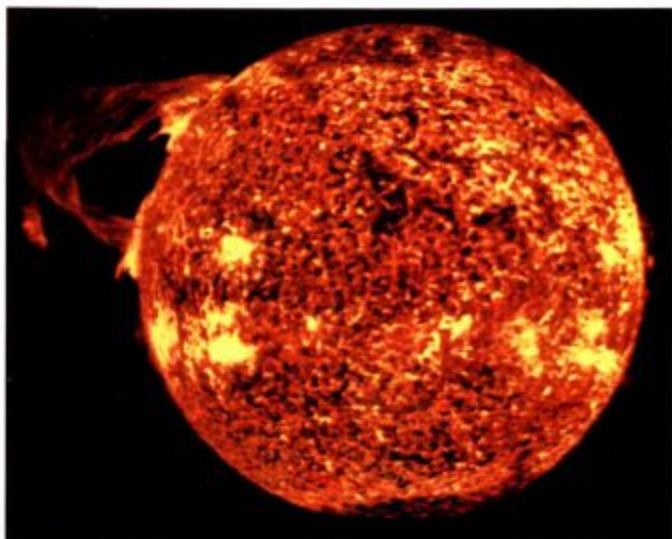
(a)



(b)

El movimiento de las partículas cargadas en campos magnéticos no uniformes es muy complicado. La figura 24-11 muestra una **botella magnética**, una interesante configuración de campos magnéticos, en la cual el campo es débil en el centro y fuerte en ambos extremos. Un análisis detallado del movimiento de una partícula cargada en tal campo muestra que la partícula recorrerá una trayectoria en espiral alrededor de las líneas de campo y quedará atrapada oscilando atrás y adelante entre los puntos P_1 y P_2 de la figura. Estas configuraciones de campo magnético se utilizan para confinar haces densos de partículas carga-

(a) La erupción solar que aparece a la izquierda de esta fotografía tomada por el skylab-4 está formada por partículas cargadas confinadas en el campo magnético del Sol. (b) Los granos de polvo interestelar, alineados por los campos magnéticos de galaxias distantes, actúan como filtros polarizantes. Este mapa del campo magnético de la galaxia NGC 1316 obtenida con un radiotelescopio muestra en rojo los chorros magnéticos en doble lóbulo. El mapa magnético está superpuesto a una fotografía de luz visible de la galaxia.



(a)



(b)

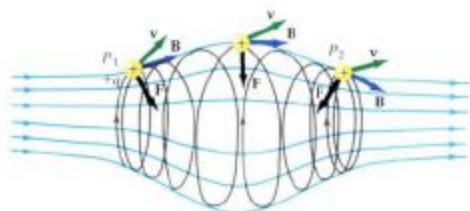


Figura 24-11 Botella magnética. Cuando una partícula cargada se mueve en este campo, muy intenso en ambos extremos y débil en el medio, la partícula queda atrapada y se mueve en espiral atrás y adelante alrededor a las líneas de campo.

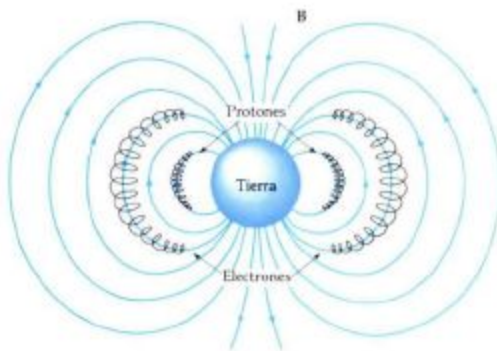


Figura 24-12 Cinturones de Van Allen. Los protones (cinturones internos) y los electrones (cinturones externos) están atrapados en el campo magnético terrestre y se mueven en espiral a lo largo de las líneas de campo que existen entre los polos norte y sur.

das, el *plasma*, en las investigaciones sobre fusión nuclear. Un fenómeno semejante es la oscilación de iones que tienen lugar entre los polos magnéticos de la Tierra en los llamados cinturones de Van Allen (figura 24-12).

Selector de velocidades

La fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática si se escogen adecuadamente los valores y direcciones de los campos magnético y eléctrico. Puesto que la fuerza eléctrica tiene la dirección del campo eléctrico (en el caso de partículas positivas) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares entre sí, para que se contrarresten estas fuerzas. La figura 24-13 muestra una región del espacio entre las placas de un condensador en el cual existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendicular (que puede producirse por un imán no indicado). Una disposición de campos perpendiculares como ésta se denomina **campos cruzados**. Consideremos una partícula de carga q que entra en este espacio procedente de la izquierda. Si q es positiva, la fuerza eléctrica de magnitud qE está dirigida hacia abajo y la fuerza magnética de magnitud qvB está dirigida hacia arriba. Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Las dos fuerzas se equilibrarán si $qE = qvB$, o sea,

$$v = \frac{E}{B}$$

24-9

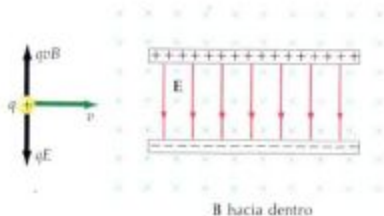


Figura 24-13 Campos eléctrico y magnético cruzados. Cuando una partícula positiva se mueve hacia la derecha experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo qE y otra fuerza magnética dirigida hacia arriba qvB . Estas fuerzas se equilibran si la velocidad de la partícula está relacionada con las magnitudes de ambos campos por la expresión $v = E/B$.

Para determinadas magnitudes de los campos eléctrico y magnético, las fuerzas se equilibrarán sólo para partículas cuya velocidad sea la dada por la ecuación 24-9. Cualquier partícula con esta velocidad, independientemente de su masa o carga, atravesará el espacio sin desviarse. Una partícula de velocidad mayor se desviará en el sentido de la fuerza magnética y otra de velocidad menor se desviará en el sentido de la fuerza eléctrica. Un dispositivo de campos de esta forma se denomina por ello, **selector de velocidades**.

Ejercicio

Un protón se mueve en la dirección x en una región de campos cruzados, en donde $\mathbf{E} = 2 \times 10^5 \text{ N/C } \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = -3000 \text{ G } \mathbf{j}$. (a) ¿Cuál es la velocidad del protón si no se desvía? (b) Si el protón se mueve con una velocidad doble a la anterior, en qué dirección se desviará? [Respuestas: (a) 667 km/s; (b) en la dirección z negativa]

Medida de Thomson del cociente q/m para electrones

Un ejemplo del uso de un selector de velocidades es el famoso experimento de J.J. Thomson en 1897, en el cual demostró que los rayos de los tubos de rayos catódicos podían desviarse mediante campos eléctrico y magnético y, por consiguiente, se componían de partículas cargadas. Observando la desviación de estos rayos con diversas combinaciones de campos eléctrico y magnético, Thomson pudo demostrar que todas las partículas tenían la misma relación carga a masa q/m y determinar este cociente. Demostró que las partículas con esta razón carga a masa pueden obtenerse utilizando un material cualquiera como cátodo, lo que significa que estas partículas, ahora denominadas electrones, son un constituyente fundamental de toda materia.

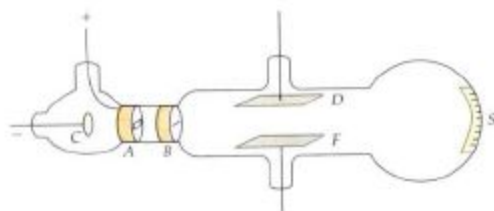


Figura 24-14 (a) Diagrama esquemático del tubo de rayos catódicos de Thomson utilizado para medir el cociente q/m para las partículas que forman los rayos catódicos (electrones). Los electrones procedentes del cátodo C pasan a través de las rendijas A y B e inciden sobre una pantalla fosforescente S. El haz puede desviarse mediante un campo eléctrico situado entre las placas D y F o mediante un campo magnético (no indicado). (b) J.J. Thomson en su laboratorio.



(b)

La figura 24-14 muestra un diagrama esquemático del tubo de rayos catódicos utilizado por Thomson. Los electrones son emitidos por el cátodo C, que está a un potencial negativo respecto a las rendijas A y B. Existe un campo eléctrico en la dirección que va desde A hasta C que acelera a los electrones. Éstos pasan a través de las rendijas A y B hacia el interior de una región libre de campo y luego se encuentran con un campo eléctrico entre las placas D y F que es perpendicular a la velocidad de los electrones. La aceleración producida por este campo eléctrico da a los electrones un componente vertical de la velocidad al abandonar la región situada entre las placas. A continuación inciden en la pantalla fosforescente S situada en el extremo del tubo en un punto que presenta un determinado desplazamiento Δy respecto al punto en el cual incidirían si no existiese campo entre las placas D y F. Cuando los electrones chocan contra la pantalla, se produce un destello que indica la posición del haz. La desviación Δy se produce

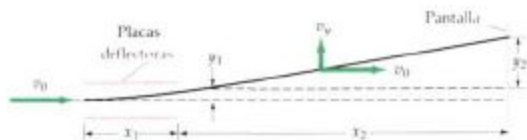


Figura 24-15 La desviación total del haz en los experimentos de J.J. Thomson consta de una desviación, y_1 , mientras los electrones se encuentran entre las placas, más la desviación y_2 que ocurre en la región libre del campo entre las placas y la pantalla.

en dos partes: Δy_1 , que tiene lugar mientras los electrones se encuentran entre las placas, y Δy_2 , que tiene lugar una vez los electrones abandonan la región entre las placas (figura 24-15).

Sea x_1 la distancia horizontal a través de las placas deflectoras D y F . Si los electrones se mueven horizontalmente con velocidad v_0 al entrar en la región de las placas, el tiempo que transcurre en esta región es $t_1 = x_1/v_0$, y la velocidad vertical cuando abandonan las placas es

$$v_y = at_1 = \frac{qE}{m} t_1 = \frac{qE}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

siendo E el campo eléctrico existente entre las placas. La desviación en esta región será

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

El electrón entonces se mueve recorriendo una distancia horizontal adicional x_2 en la región libre de campo entre las placas de deflexión y la pantalla. Como la velocidad del electrón es constante en esta región, el tiempo necesario para alcanzar la pantalla es $t_2 = x_2/v_0$ y la desviación vertical adicional es

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

La desviación total en la pantalla es, por tanto,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2 + \frac{qE}{m} \frac{x_1 x_2}{v_0^2} \quad 24-10$$

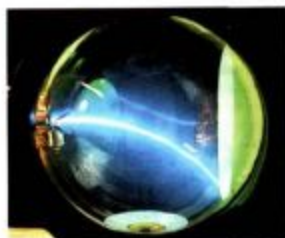
La velocidad inicial v_0 se determina introduciendo un campo magnético \mathbf{B} entre las placas en una dirección perpendicular tanto al campo eléctrico como a la velocidad inicial de los electrones. La magnitud de \mathbf{B} se ajusta entonces hasta que el haz no se desvía, y la velocidad se determina mediante la ecuación 24-9. La desviación medida Δy se utiliza para determinar la relación carga-masa, q/m según la ecuación 24-10.

Ejemplo 24-4

Los electrones pasan sin desviarse a través de las placas del aparato de Thomson cuando el campo eléctrico es de 3000 V/m y existe un campo magnético cruzado de 1,40 G. Si las placas tienen 4 cm de longitud y el extremo de las placas dista 30 cm de la pantalla, determinar la desviación sobre la pantalla cuando se interrumpe el campo magnético.

En este ejemplo utilizamos la carga $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C y la masa $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg conocidas del electrón para determinar la desviación Δy . La velocidad inicial de los electrones se determina a partir de la ecuación 24-9:

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000 \text{ V/m}}{1,40 \times 10^{-4} \text{ T}} = 2,14 \times 10^7 \text{ m/s}$$



Un haz de electrones moviéndose de izquierda a derecha se desvía hacia abajo por la acción de un campo magnético producido por bobinas. ¿En qué dirección está el campo magnético?

Utilizando la ecuación 24-10 con $v_0 = 2,14 \times 10^7$ m/s, $x_1 = 4$ cm y $x_2 = 30$ cm, se obtiene para la desviación

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{2} \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3000 \text{ V/m})}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \left(\frac{0,04 \text{ m}}{2,14 \times 10^7 \text{ m/s}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3000 \text{ V/m})}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \frac{(0,04 \text{ m})(0,30 \text{ m})}{(2,14 \times 10^7 \text{ m/s})^2} \\ &= 9,20 \times 10^{-4} \text{ m} + 1,38 \times 10^{-2} \text{ m} \\ &= 0,92 \text{ mm} + 13,8 \text{ mm} = 14,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

Espectrómetro de masas

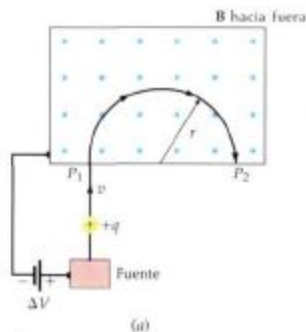
El **espectrómetro de masas**, diseñado por vez primera por Francis William Aston en 1919 y mejorado posteriormente por Kenneth Bainbridge y otros, fue desarrollado para medir las masas de los isótopos. Estas medidas constituyen un medio importante para la determinación de la existencia de isótopos y su abundancia en la naturaleza. Por ejemplo, así se comprobó que el magnesio natural está formado por 78,7 por ciento de ^{24}Mg , 10,1 por ciento de ^{25}Mg y 11,2 por ciento de ^{26}Mg . Estos isótopos poseen masas en la relación aproximada 24:25:26.

El espectrómetro de masas se utiliza para determinar la relación masa-carga de iones de carga conocida midiendo el radio de sus órbitas circulares en un campo magnético conocido. La ecuación 24-6 $r = mv/qB$ nos ofrece el radio r para la órbita circular de una partícula de masa m y carga q que se mueve con velocidad v en un campo magnético B perpendicular a la velocidad de la partícula. La figura 24-16 muestra un dibujo esquemático simple de un espectrómetro de masas. Los iones procedentes de una fuente, son acelerados por un campo eléctrico y entran en un campo magnético uniforme producido por un electroimán. Si los iones parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial ΔV , su energía cinética cuando entran en el imán es igual a la pérdida de energía potencial, $q \Delta V$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q \Delta V \quad 24-11$$

Los iones se mueven en una semicircunferencia de radio r dado por la ecuación 24-6 e inciden sobre una película fotográfica P_2 , a una distancia $2r$ del punto en el que entraron en el electroimán. La velocidad v puede eliminarse entre las ecuaciones 24-6 y 24-11 para hallar m/q en función de las magnitudes conocidas ΔV ,

Figura 24-16 (a) Dibujo esquemático de un espectrómetro de masas. Los iones procedentes de la fuente iónica se aceleran bajo una diferencia de potencial ΔV y entran en un campo magnético uniforme. El campo magnético es perpendicular y saliente del plano del papel como indican los puntos dibujados. Los iones se curvan en arcos circulares y chocan sobre una placa fotográfica en P_2 . El radio de la circunferencia es proporcional a la masa del ion. (b) Espectrómetro moderno de masas utilizado para la investigación en la Universidad de Rockefeller.



B , y r . En primer lugar se despeja v de la ecuación 24-6 y se elevan al cuadrado los dos miembros

$$v^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2}$$

Sustituyendo este valor de v^2 en la ecuación 24-11 se obtiene

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} \right) = q \Delta V$$

Simplificando esta ecuación y despejando m/q resulta

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 \Delta V} \quad 24-12$$

En el espectrómetro de masas original de Aston, las diferencias de masas podían medirse con una precisión de 1 parte en 10 000. La precisión se ha mejorado por la introducción de un selector de velocidades entre la fuente de iones y el imán, haciendo posible determinar la velocidad de los iones exactamente y limitar el margen de velocidades de los iones que entran en la zona del imán.

Ejemplo 24-5

Un ion de ^{58}Ni de carga $+e$ y masa $9,62 \times 10^{-26}$ kg se acelera a través de una diferencia de potencial de 3 kV y se desvía en un campo magnético de 0,12 T. (a) Determinar el radio de curvatura de la órbita del ion. (b) Determinar la diferencia que existe entre los radios de curvatura de los iones ^{58}Ni y ^{60}Ni . (Suponer que la relación de masas es 58/60.)

(a) De la ecuación 24-12 se obtiene

$$r^2 = \frac{2m \Delta V}{qB^2} = \frac{2(9,62 \times 10^{-26} \text{ kg})(3000 \text{ V})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,12 \text{ T})^2} = 0,251 \text{ m}^2$$

$$r = \sqrt{0,251 \text{ m}^2} = 0,501 \text{ m}$$

(b) El radio de la órbita de un ion en un determinado campo magnético es proporcional a la raíz cuadrada de su masa para un determinado voltaje acelerador. Si r_1 es el radio de la órbita del ion ^{58}Ni y r_2 el de la órbita del ion ^{60}Ni , la relación de los radios es

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

Por tanto, el radio de la órbita del ion ^{60}Ni es

$$r_2 = 1,017 r_1 = (1,017)(0,501 \text{ m}) = 0,510 \text{ m}$$

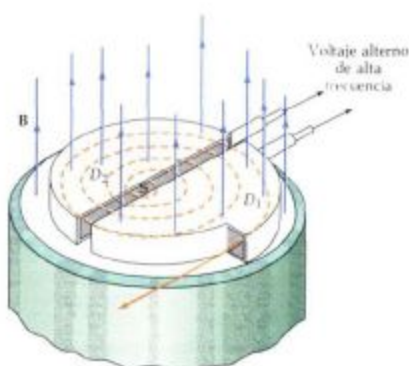
La diferencia entre los radios de las órbitas es

$$r_2 - r_1 = 0,510 \text{ m} - 0,501 \text{ m} = 0,009 \text{ m} = 9 \text{ mm}$$

El ciclotrón

El ciclotrón fue inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1932 para acelerar partículas tales como protones o deuterones hasta conseguir una energía cinética elevada. (El deuterón es el núcleo de hidrógeno pesado, ^2H , formado por un protón y un neutrón fuertemente ligados entre sí.) Las partículas de energía alta se utilizan a continuación para bombardear los núcleos, produciendo reacciones nucleares que se estudian con objeto de obtener información acerca del núcleo. Se utilizan también protones o deuterones de alta energía para producir materiales radiactivos y con fines médicos.

Figura 24-17 Dibujo esquemático de un ciclotrón. Se ha omitido la cara del polo superior del imán. Las partículas cargadas, tales como protones, procedentes de una fuente S situada en el centro, son aceleradas por la diferencia de potencial establecida a través del hueco entre las *des* del ciclotrón. Esta diferencia de potencial alterna su signo con el periodo del ciclotrón de la partícula, el cual es independiente del radio de la circunferencia descrita. Así, cuando las partículas llegan al hueco de nuevo, la diferencia de potencial ha cambiado de signo y vuelven a acelerarse describiendo un círculo mayor.



El funcionamiento del ciclotrón se basa en el hecho de que el periodo de movimiento de una partícula cargada en el interior de un campo magnético uniforme es independiente de la velocidad de la partícula, como indica la ecuación 24-7:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

La figura 24-17 es un dibujo esquemático de un ciclotrón. Las partículas se mueven en el interior de dos recipientes metálicos semicirculares denominados *des* (debido a su forma). Los recipientes están contenidos en una cámara de vacío en el interior de un campo magnético proporcionado por un electroimán. (En la región en la cual se mueven las partículas debe haberse realizado el vacío para que las partículas no pierdan energía y no sean dispersadas en choques con las moléculas del aire.) Las *des* se mantienen a una diferencia de potencial ΔV que se alterna en el tiempo con periodo T , escogido de modo que sea igual al periodo del ciclotrón dado por la ecuación 24-7. Esta diferencia de potencial crea un campo eléctrico con el espacio hueco comprendido entre las *des*. Al mismo tiempo no existe campo eléctrico dentro de las *des* debido al blindaje metálico.

Las partículas cargadas se inyectan inicialmente en la *de* 1 con una velocidad pequeña procedentes de una fuente de iones S próxima al centro de las *des*. Se mueven en una semicircunferencia en una de las *des* y llegan al espacio situado entre las *des* al cabo de un tiempo $\frac{1}{2}T$, en donde T es el periodo del ciclotrón y también el periodo del potencial alterno aplicado a las *des*. La alternancia del

(a) Primer ciclotrón construido por E.O. Lawrence en 1932. (b) Moderno ciclotrón utilizado para acelerar protones o deuterones destinados a la producción de radioisótopos de vida corta en diagnóstico médica.



(a)



(b)

potencial se ajusta de modo que la *de* 1 está a mayor potencial que la *de* 2 cuando las partículas llegan al espacio hueco entre ambas. Cada partícula se acelera, por tanto, a través de este hueco a causa del campo eléctrico y gana una energía cinética igual a $q \Delta V$. Al poseer más energía cinética, la partícula se mueve en un semicírculo de mayor radio en la *de* 2 y de nuevo llega al hueco después de un tiempo $\frac{1}{2}T$. En este tiempo el potencial entre las *des* se ha invertido de modo que la *de* 2 está ahora a mayor potencial. De nuevo la partícula se acelera a través del hueco y gana energía cinética adicional igual a $q \Delta V$. Cada vez que la partícula llega al hueco, es acelerada y gana energía cinética igual a $q \Delta V$. De este modo se mueve en órbitas semicirculares cada vez mayores hasta que eventualmente abandona el campo magnético. En un ciclotrón típico, cada partícula realiza de 50 a 100 revoluciones y emerge con energías de hasta varios centenares de MeV.

Esta energía cinética de una partícula que emerge de un ciclotrón puede calcularse mediante la ecuación 24-6 sustituyendo r por el valor máximo del radio de las *des* y despejando el valor de v :

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Por tanto

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 B^2}{m} \right) r^2 \quad 24-13$$

Ejemplo 24-6

Un ciclotrón que acelera protones posee un campo magnético de 1,5 T y un radio máximo de 0,5 m. (a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón? (b) Determinar la energía cinética con que emergen los protones.

(a) La frecuencia del ciclotrón viene dada por la ecuación 24-8:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1,5 \text{ T})}{2\pi(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2,29 \times 10^7 \text{ Hz} = 22,9 \text{ MHz}$$

(b) La energía cinética de los protones emergentes viene dada por la ecuación 24-13:

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (1,5 \text{ T})^2}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right] (0,5 \text{ m})^2$$

$$= 4,31 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Las energías de los protones y otras partículas elementales se expresan usualmente en electrón-voltios. Como $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, resulta

$$E_c = 4,31 \times 10^{-12} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 26,9 \text{ MeV}$$

Cuestiones

- Observando la trayectoria de una partícula, ¿cómo puede distinguirse si la partícula se desvía por un campo magnético o por un campo eléctrico?
- Un haz de partículas cargadas positivamente pasa sin desviarse desde la izquierda hasta la derecha a través de un selector de velocidades en el cual el campo eléctrico es dirigido hacia arriba. El haz se invierte entonces de modo que se mueve de derecha a izquierda. ¿Se verá desviado el haz en el selector de velocidades? Si es así, ¿en qué dirección y sentido?

24-3 Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes

La figura 24-18 muestra una espira de alambre rectangular de longitud a y anchura b por la que circula una corriente I en un campo magnético externo y uniforme \mathbf{B} que es paralelo al plano de la espira. En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre cada segmento de la espira. En aquellos segmentos donde la corriente es paralela o antiparalela al campo magnético \mathbf{B} , las fuerzas son nulas, ya que $I \, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ es cero. Las fuerzas sobre los lados de la espira, donde el campo es perpendicular a la corriente, tienen la magnitud

$$F_1 = F_2 = IabB$$

Como estas fuerzas son iguales y opuestas, forman entre sí un par. La fuerza resultante es, por tanto, cero y el momento respecto a cualquier punto es independiente de la localización del punto. El punto P es un punto conveniente respecto al cual calcular el momento del par. La magnitud del momento es

$$\tau = F_1 b = IabB = IAB$$

en donde $A = ab$ es el área de la espira. El momento del par es igual al producto de la intensidad de la corriente, el área de la espira y el campo magnético \mathbf{B} . Este momento tiende a girar la espira de modo que su plano sea perpendicular a \mathbf{B} .

La orientación de la espira puede describirse convenientemente mediante un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular al plano de la espira. El sentido de $\hat{\mathbf{n}}$ se elige mediante la regla de la mano derecha aplicada a la circulación de la corriente, como indica la figura 24-19. El momento del par tiende a girar $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección de \mathbf{B} .

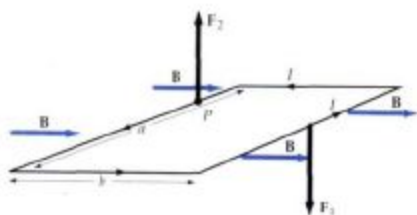


Figura 24-18 Fuerzas ejercidas sobre una espira rectangular de corriente en un campo magnético uniforme \mathbf{B} que es paralelo al plano de la espira. Las fuerzas producen un par que tiende a girar la espira de modo que su plano se sitúe perpendicularmente a \mathbf{B} .

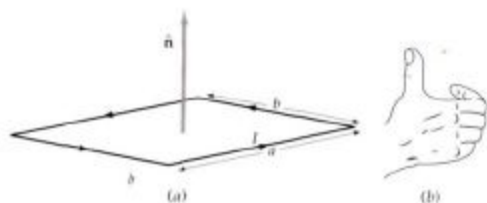


Figura 24-19 (a) La orientación de una espira de corriente viene descrita por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular al plano de la espira. (b) Regla de la mano derecha para determinar el sentido de $\hat{\mathbf{n}}$. Cuando los dedos de la mano derecha se incurvan alrededor de la espira, con los dedos apuntando en la dirección de la corriente, el dedo pulgar señala la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$.

La figura 24-20 muestra las fuerzas ejercidas por un campo magnético uniforme sobre una espira rectangular cuyo vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$ forma un ángulo θ con el campo magnético \mathbf{B} . De nuevo, la fuerza resultante sobre la espira es cero. El momento respecto a cualquier punto es igual al producto de la fuerza por el brazo de palanca. Por ejemplo, el momento respecto al punto P es igual a la fuerza $F_2 = IabB$ por el brazo de palanca $b \sin \theta$. El momento tiene, por tanto, la magnitud

$$\tau = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta$$

en donde, de nuevo $A = ab$ es el área de la espira. Para una espira de N vueltas, la magnitud del par es

$$\tau = NIAB \sin \theta$$

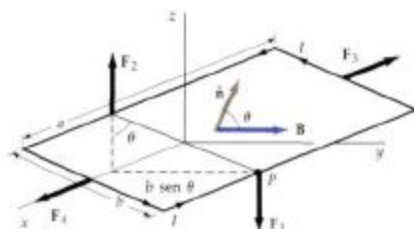


Figura 24-20 Espira rectangular de corriente cuyo vector unitario normal \hat{n} forma un ángulo θ con un campo magnético uniforme \mathbf{B} . El momento del par sobre la espira tiene la magnitud $IAB \sin \theta$ y su dirección es tal que \hat{n} tiende a girar para alinearse con \mathbf{B} . El momento puede expresarse en la forma $\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, en donde $\mathbf{m} = I\mathbf{A}\hat{n}$ es el momento magnético de la espira.

El momento puede escribirse convenientemente en función del **momento dipolar magnético** \mathbf{m} (o simplemente **momento magnético**) de la espira de corriente, definido por

$$\mathbf{m} = NIA \hat{n}$$

24-14

Momento dipolar magnético de una espira de corriente

La unidad SI del momento magnético es el amperio-metro² ($\text{A}\cdot\text{m}^2$). En función del momento dipolar magnético, el momento sobre la espira de corriente viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

24-15

Momento sobre una espira de corriente

La ecuación 24-15, deducida para una espira rectangular, es válida en general para una espira de cualquier forma. El momento sobre cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético \mathbf{m} de la espira y el campo magnético \mathbf{B} , en donde el momento magnético se define como un vector perpendicular al área de la espira (figura 24-21), de magnitud igual a NIA . Comparando la ecuación 24-15 con la ecuación 18-11 correspondiente al momento sobre un dipolo eléctrico, resulta que una espira de corriente en un campo magnético actúa del mismo modo que un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico.

Cuando un pequeño imán permanente, tal como la aguja de una brújula, se sitúa en un campo magnético \mathbf{B} , tiende a orientarse de modo que su polo norte apunte en la dirección de \mathbf{B} . Este efecto también se presenta con limaduras de hierro previamente diseminadas, las cuales se imanarán en presencia de un campo magnético \mathbf{B} . La figura 24-22 muestra un pequeño imán que forma un ángulo θ con un campo magnético \mathbf{B} . Existe una fuerza F_1 sobre el polo norte en la dirección de \mathbf{B} y una fuerza igual, pero opuesta, F_2 sobre el polo sur. Estas dos fuerzas no producen movimiento de traslación por ser iguales y opuestas, pero dan lugar a un momento que tiende a girar el imán, de modo que éste se alinee con el campo. Una pequeña barra magnética se comporta, por tanto, igual que una espira de corriente. Este hecho no es accidental. El origen del momento magnético de una barra imanada son, realmente, las espiras de corriente microscópicas que resultan del movimiento de los electrones en los átomos del imán.

Podemos utilizar las fuerzas y momentos observados experimentalmente sobre una barra magnética para definir la intensidad de polo y el momento magnético

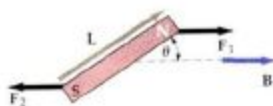


Figura 24-22 Un pequeño imán en un campo magnético uniforme experimenta la acción del momento de un par que tiende a girar el imán en la dirección del campo. El momento magnético del imán tiene la dirección del vector \mathbf{L} dirigido del polo sur al polo norte.

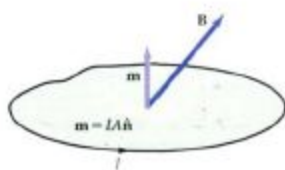


Figura 24-21 El momento magnético de una espira de corriente de forma arbitraria es $\mathbf{m} = I\mathbf{A}\hat{n}$. En un campo magnético \mathbf{B} , la espira experimenta la acción de un momento $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$.

Definición de la intensidad de polo magnético

tico del imán. Se define la intensidad de polo de un imán q_m de tal modo que la fuerza ejercida sobre el polo de un campo magnético \mathbf{B} viene dada por*

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{B} \quad 24-16$$

La intensidad de polo es positiva para un polo norte y negativa para un polo sur. El momento magnético \mathbf{m} de un imán se define por la expresión

$$\mathbf{m} = |q_m| \mathbf{L} \quad 24-17$$

en donde \mathbf{L} es el vector longitud del polo sur al polo norte. El momento ejercido sobre una barra magnética en un campo magnético viene dado por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, la misma expresión que la ecuación 24-15. Aunque hemos definido la intensidad de polo magnético como análoga a la carga eléctrica, debemos recordar que los polos magnéticos aparecen siempre a pares; es decir, la unidad fundamental del magnetismo es el dipolo magnético. Experimentalmente, el momento dipolar magnético \mathbf{m} de un imán se mide fácilmente introduciendo el imán en un campo magnético de intensidad conocida y determinando el momento resultante. Mediante la ecuación 24-17 se obtiene entonces la intensidad de polo dividiendo el momento magnético por la longitud del imán.

Ejemplo 24-7

Una espira circular de radio 2 cm posee 10 vueltas de alambre y transporta una corriente de 3 A. El eje de la espira forma un ángulo de 30° con un campo magnético de 8000 G. Determinar el momento que actúa sobre la espira.

La magnitud del momento magnético de la espira es

$$m = NIA = (10)(3 \text{ A}) \pi (0,02 \text{ m})^2 = 3,77 \times 10^{-2} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

La magnitud del momento del par es, por tanto,

$$\begin{aligned} \tau &= mB \sin \theta = (3,77 \times 10^{-2} \text{ A}\cdot\text{m}^2)(0,8 \text{ T})(\sin 30^\circ) \\ &= 1,51 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que $8000 \text{ G} = 0,8 \text{ T}$ y $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A}\cdot\text{m}$.

Ejemplo 24-8

Una bobina rectangular cuadrada de 12 vueltas, con lados de 40 cm de longitud, transporta una corriente de 3 A. Está situada en el plano xy como indica la figura 24-23 en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 0,3 \text{ T } \mathbf{i} + 0,4 \text{ T } \mathbf{k}$. Determinar (a) el momento magnético de la bobina y (b) el momento del par ejercido sobre la bobina. (c) ¿Cuál es la intensidad de polo y la orientación de una barra magnética de longitud 8 cm que posee un momento magnético igual al de la bobina?

(a) Según vemos en la figura 24-23, el momento magnético de la bobina posee la dirección positiva del eje z . Su magnitud es $m = NIA = (12)(3 \text{ A})(0,40 \text{ m})^2 = 5,76 \text{ A}\cdot\text{m}^2$. El momento magnético es, por tanto,

$$\mathbf{m} = 5,76 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \mathbf{k}$$

(b) El momento del par sobre la bobina de corriente viene dado por la ecuación 24-15:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = (5,76 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \mathbf{k}) \times (0,3 \text{ T } \mathbf{i} + 0,4 \text{ T } \mathbf{k}) = 1,73 \text{ N}\cdot\text{m } \mathbf{j}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

* La notación q_m para la intensidad de polo magnético tiene por objeto que las ecuaciones magnéticas recuerden las correspondientes ecuaciones de las cargas eléctricas en campos eléctricos. El subíndice m recuerda que q_m designa un polo magnético y no una carga eléctrica.

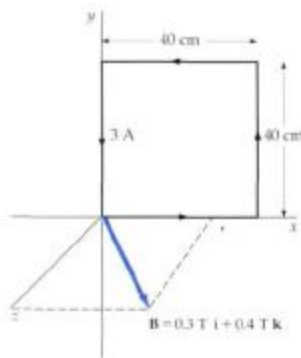


Figura 24-23 Espira cuadrada de corriente en el plano xy dentro de un campo magnético $\mathbf{B} = 0,3 \text{ T } \mathbf{i} + 0,4 \text{ T } \mathbf{k}$ (ejemplo 24-8).

(c) Una barra magnética con un momento magnético en la dirección positiva del eje z debe estar situada a lo largo del eje z o ser paralela a este eje con el vector L de sur a norte en la dirección positiva z . Para $L=8\text{ cm}=0,08\text{ m}$ y $m=5,76\text{ A}\cdot\text{m}^2$, la intensidad de polo, q_m , es

$$q_m = \frac{m}{L} = \frac{5,76\text{ A}\cdot\text{m}^2}{0,08\text{ m}} = 72\text{ A}\cdot\text{m} = 72\text{ N/T}$$

Cuestión

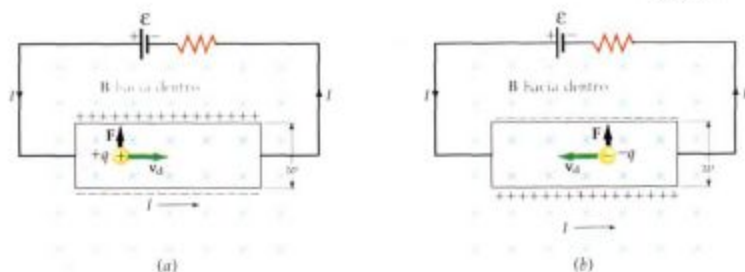
10. El momento magnético de una espira de corriente es antiparalelo a un campo magnético uniforme B . ¿Cuál es el momento del par ejercido sobre la espira? ¿Es estable o inestable este equilibrio?

24-4 Efecto Hall

En la sección 24-1 calculábamos la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un alambre por el que circulaba una corriente. Esta fuerza se transfiere al alambre por las fuerzas que enlazan los electrones con el conductor en la superficie. Puesto que los portadores de carga por sí mismos experimentan la fuerza magnética cuando un conductor por el que circula corriente está en el interior de un campo magnético, los portadores se ven acelerados hacia un lado del conductor. Debido a esto se produce una separación de carga en el alambre denominada **efecto Hall**. Este fenómeno, nos permite determinar el signo de la carga en un portador y el número de portadores n por unidad de volumen del conductor. También proporciona un método conveniente para medir campos magnéticos.

La figura 24-24 muestra dos cintas conductoras cada una de las cuales transporta una corriente I hacia la derecha, pues sus extremos izquierdos están conectados al terminal positivo de una batería y sus extremos derechos al terminal negativo. Las cintas se encuentran en un campo magnético dirigido perpendicularmente hacia el papel. Supongamos de momento que la corriente está formada por partículas positivamente cargadas que se mueven hacia la derecha como indica la figura 24-24a. La fuerza magnética sobre estas partículas es $qv_d \times B$ (en donde v_d es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga). Esta fuerza está dirigida hacia arriba. Las partículas positivas, por tanto, se mueven hacia la parte alta de la cinta, dejando el fondo de la misma con un exceso de carga negativa. Esta separación de carga produce un campo electrostático en la cinta que se opone a la fuerza magnética sobre los portadores de carga. Cuando las fuerzas electrostática y magnética se equilibran, los portadores de carga no se moverán ya más hacia arriba. En esta situación de equilibrio, la parte superior de la cinta está positivamente cargada, de modo que está a mayor potencial que la parte inferior negativamente cargada. Si la corriente consta de partículas negativamente cargadas, como indica la figura 24-24b, los portadores de carga se moverán hacia la izquierda (puesto que la corriente se mueve hacia la derecha). La fuerza magnética $qv_d \times B$ se dirige de nuevo hacia arriba, pues los signos de

Figura 24-24 Efecto Hall. El campo magnético está dirigido perpendicularmente y hacia dentro del plano del papel como indican las cruces dibujadas. La fuerza magnética sobre una partícula cargada está dirigida hacia arriba para una corriente que circula hacia la derecha si la corriente es debida a (a) partículas positivas que se mueven hacia la derecha o (b) partículas negativas que se mueven hacia la izquierda.



ambos, q y v_d se han cambiado. De nuevo los portadores son forzados a la parte superior de la cinta, pero como éstos son negativos, la carga negativa se acumula en la parte superior de la cinta y la carga positiva en la parte inferior.

Una medida del signo de la diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta nos dirá el signo de los portadores de carga. Para un conductor metálico normal encontramos que la parte superior de la cinta en la figura 24-24 está a menor potencial que la parte inferior —lo cual significa que la parte superior es portadora de una carga negativa. Este fue el tipo de experimento que condujo al descubrimiento de que los portadores de carga en los conductores metálicos son negativos. Por tanto, la figura 24-24b es la ilustración correcta de la corriente en un conductor normal.

Si unimos las partes superior e inferior de la cinta con un conductor de resistencia R , los electrones negativos fluirán desde la parte superior de la cinta a través del conductor hasta la parte inferior. Tan pronto como algunos electrones abandonan la parte superior de la cinta y alcanzan la parte inferior, la magnitud de la separación de carga a través de la cinta se reduce momentáneamente. Como resultado, la fuerza electrostática que actúa sobre los electrones de la cinta se debilita también momentáneamente, de tal forma que ya no equilibra la fuerza magnética que actúa sobre los mismos. Esta fuerza magnética, por tanto, conducirá más electrones hacia la parte alta de la cinta y mantendrá la diferencia de potencial a través de la misma. La cinta es, por tanto, una fuente de fem. La diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta se llama **voltaje Hall**.

La magnitud del voltaje Hall no es difícil de calcular. La magnitud de la fuerza magnética sobre los portadores de carga en la cinta es qv_dB . Esta fuerza magnética es equilibrada por la fuerza electrostática de magnitud qE , en donde E es el campo eléctrico debido a la separación de cargas. Así resulta $E = v_dB$. Si la anchura de la cinta es w , la diferencia de potencial es Ew . El voltaje Hall es, por tanto,

$$V_H = Ew = v_d B w \quad 24-18$$

Ejercicio

Una cinta conductora de anchura $w = 2,0$ cm está situada en un campo magnético de 8000 G. Calcular el voltaje Hall si la velocidad de desplazamiento es $4,0 \times 10^{-5}$ m/s. (Respuesta: 0.64 μ V)

Podemos ver a partir de la ecuación 24-18, que en el caso de cintas de tamaño ordinario y campos magnéticos normales, el voltaje Hall es muy pequeño puesto que la velocidad de desplazamiento en el caso de corrientes ordinarias es muy pequeña. A partir de medidas del valor del voltaje Hall para una cinta de un tamaño determinado por la que circula una corriente conocida en el interior de un campo magnético de valor dado, podemos determinar el número de portadores de carga por unidad de volumen de la cinta. Según la ecuación 22-3, la intensidad de corriente es

$$I = nqv_d A$$

en donde A es la sección transversal de la cinta. Para una cinta de anchura w y espesor t , el área transversal es $A = wt$. Como los portadores de carga son electrones, la magnitud q es la carga de un electrón, e . La densidad numérica de los portadores de carga n viene así dada por

$$n = \frac{I}{Aqv_d} = \frac{I}{wtv_d e} \quad 24-19$$

Sustituyendo $v_d w = V_H / B$ en la ecuación 24-18, resulta

$$n = \frac{IB}{e t V_H} \quad 24-20$$

Ejemplo 24-9

Un segmento conductor de plata de espesor 1 mm y anchura 1,5 cm transporta una corriente de 2,5 A en una región donde existe un campo magnético de magnitud 1,25 T perpendicular al segmento. En consecuencia se produce un voltaje Hall de $0,334 \mu\text{V}$. (a) Calcular la densidad numérica de los portadores de carga. (b) Comparar la respuesta de (a) con la densidad numérica de átomos en la plata, de densidad $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$ y masa molecular $M = 107,9 \text{ g/mol}$.

(a) Según la ecuación 24-20, tenemos

$$n = \frac{(2,5 \text{ A})(1,25 \text{ T})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,001 \text{ m})(33,4 \times 10^{-7} \text{ V})} \\ = 5,85 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

(b) El número de átomos por unidad de volumen es n_a y viene dada por

$$n_a = \frac{N_A \rho}{M} = \frac{(6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})(10,5 \text{ g/cm}^3)}{107,9 \text{ g/mol}} \\ = 5,86 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 = 5,86 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

Estos resultados indican que el número de portadores de carga en la plata es aproximadamente uno por átomo.

Aunque el voltaje Hall es ordinariamente muy pequeño, proporciona un método conveniente para medir campos magnéticos. Reajustando la ecuación 24-20 podemos escribir para el voltaje Hall

$$V_H = \frac{I}{net} B \quad 24-21$$

Una cinta puede calibrarse midiendo el voltaje para una determinada intensidad de corriente en un campo magnético conocido. La intensidad de un campo magnético B desconocido puede entonces medirse situando la cinta en este campo, haciendo circular una corriente por la cinta y midiendo V_H .

Efecto Hall cuántico

Según la ecuación 24-21, el voltaje Hall debe incrementarse linealmente con el campo magnético B para una determinada corriente en un segmento dado de conductor. En 1980, mientras estudiaba el efecto Hall en semiconductores a muy bajas temperaturas y campos magnéticos muy intensos, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió un gráfico escalonado de V_H en función de B , como in-

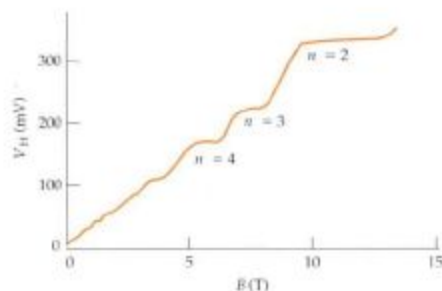


Figura 24-25 Un gráfico del voltaje Hall en función del campo magnético aplicado muestra tramos horizontales indicando que el voltaje Hall está cuantizado. Estos datos se tomaron a una temperatura de 1,39 K con una intensidad de corriente I fija de $25,52 \mu\text{A}$.

dica la figura 24-25, en lugar de una línea recta. Es decir, el voltaje Hall está cuantizado. Por este descubrimiento del **efecto Hall cuántico**, von Klitzing recibió el Premio Nobel de Física de 1985. Según la teoría del efecto Hall cuantizado, la resistencia Hall, definida por $R_{\text{H}} = V_{\text{H}}/I$, sólo puede tomar los valores

$$R_{\text{H}} = \frac{V_{\text{H}}}{I} = \frac{R_{\text{K}}}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 24-22$$

en donde n es un número entero y R_{K} la llamada **constante de von Klitzing**, relacionada por la carga electrónica fundamental e y la constante de Planck h por la expresión

$$R_{\text{K}} = \frac{h}{e^2} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2} = 25\,813 \, \Omega \quad 24-23$$

Como la constante de von Klitzing puede medirse con una exactitud de unas pocas partes en 10^6 , el efecto Hall cuántico se utiliza actualmente para definir el patrón de resistencia. Desde enero de 1990, el ohmio se define de modo que R_{K} tiene exactamente el valor de 25 812.807 Ω .

Experimentos recientes han demostrado que bajo ciertas condiciones especiales la resistencia Hall viene dada por la ecuación 24-22 con el número entero n reemplazado por una fracción racional f . Actualmente, la teoría de este **efecto Hall cuántico fraccional** está incompleta.

Resumen

- Las cargas móviles interactúan entre sí por medio de fuerzas magnéticas. Como las corrientes eléctricas están formadas por cargas móviles, también ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Esta fuerza se describe diciendo que una carga o corriente móvil crea un campo magnético, el cual, a su vez, ejerce una fuerza sobre la otra carga o corriente móvil. En último término, todos los campos magnéticos son causados por cargas en movimiento.
- Cuando una carga q se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} , experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La fuerza que actúa sobre un elemento de corriente viene dada por

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

La unidad SI de campo magnético es el tesla (T). Una unidad comúnmente utilizada es el gauss (G), relacionada con el tesla por

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$$

- Una partícula de masa m y carga q moviéndose con velocidad \mathbf{v} en un plano perpendicular a un campo magnético se mueve en una órbita circular de radio r , dado por

$$r = \frac{mv}{qB}$$

El período y frecuencia de este movimiento circular son independientes del radio de la órbita o de la velocidad de la partícula. El período, llamado período del ciclotrón, viene dado por

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

La frecuencia, llamada frecuencia del ciclotrón, viene dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

- Un selector de velocidades está formado por campos eléctricos y magnéticos cruzados, de tal manera que las fuerzas eléctrica y magnética se equilibran para una partícula cuya velocidad viene dada por $v = E/B$.
- La relación masa-carga de un ion de velocidad conocida puede determinarse midiendo el radio de la trayectoria circular descrita por el ion en un campo magnético conocido en un espectrómetro de masas.
- Una espira de corriente en un campo magnético uniforme se comporta como un dipolo magnético con un momento magnético \mathbf{m} dado por

$$\mathbf{m} = NIA \hat{\mathbf{n}}$$

en donde N es el número de vueltas, A el área de la espira, I la intensidad de corriente y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario perpendicular al plano de la espira en la dirección dada por la regla de la mano derecha. Cuando un dipolo magnético se encuentra dentro de un campo magnético experimenta la acción del momento de un par dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

el cual tiende a alinear el momento magnético de la espira de corriente con el campo externo. La fuerza resultante que actúa sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es nula.

- Una barra magnética experimenta también la acción del momento de un par dentro de un campo magnético. El momento medido experimentalmente puede utilizarse para definir el momento magnético de la barra según la expresión $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. La intensidad de polo de una barra magnética q_m puede definirse expresando la fuerza ejercida sobre el polo en la forma $\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}$. El polo magnético norte tiene una intensidad de polo positiva y el polo sur una intensidad de polo negativa. En función de la intensidad de polo, el momento magnético de una barra magnética es $\mathbf{m} = |q_m|L$ en donde L es el vector longitud del polo sur al polo norte.
- Cuando una cinta conductora que transporta una corriente, se sitúa dentro de un campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre los portadores de carga origina una separación de cargas que se denomina efecto Hall. Este fenómeno da lugar a un voltaje V_H , llamado voltaje Hall que viene dado por

$$V_H = v_d B t w = \frac{I}{nqt} B$$

en donde v_d es la velocidad de desplazamiento, B el campo magnético, w la anchura de la cinta, t el espesor de la cinta, n la densidad numérica de los portadores de carga y q la carga de cada portador. El signo de los portadores de carga puede determinarse midiendo el signo del voltaje Hall y su número por unidad de volumen a partir de la magnitud de V_H . Las medidas a muy bajas temperaturas y campos magnéticos muy grandes indican que la resistencia Hall $R_H = V_H/I$ está cuantizada y puede tomar valores dados por

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n}$$

en donde n es un número entero y R_K es la constante de von Klitzing, cuyo valor es

$$R_K = \frac{h}{e^2} \approx 25\,813 \, \Omega$$

Sugerencias bibliográficas

Akasofu, Syun-Ichi: «The Dynamic Aurora», *Scientific American*, mayo 1989, pág. 90.

Expone cómo el «viento solar», de partículas cargadas, interactúa con el campo magnético terrestre para producir la aurora, por qué la aurora aparentemente se mueve y cambia, y de dónde procede su energía.

Nier, Alfred O.C.: «The Mass Spectrometer», *Scientific American*, marzo 1953, pág. 68.

Este dispositivo, mediante el cual han sido posibles grandes avances en química y otras ciencias, permite la determinación de la composición de una sustancia, basado en el principio de desviación de un haz de partículas cargadas en un campo magnético.

Shamos, Morris H.: «The Electron—J.J. Thomson», en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt y Co., New York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

Informe de Thomson sobre su descubrimiento del electrón con notas editoriales para mayor claridad y un resumen biográfico.

Van Allen, James A.: «Interplanetary Particles and Fields», *Scientific American*, septiembre 1975, pág. 160.

Este artículo, escrito por el científico, cuyo nombre se dio a los cinturones de radiación de Van Allen, describe la deflexión del «viento solar» en el campo magnético terrestre.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer-se los siguientes conocimientos:

1. Calcular la fuerza magnética sobre un elemento de corriente y sobre una carga móvil en un campo magnético determinado.
2. Calcular el momento dipolar magnético de una espira de corriente y el momento del par ejercido sobre la espira en un campo magnético.
3. Discutir el experimento en el cual Thomson midió el cociente q/m de los electrones.
4. Describir un selector de velocidades, un espectrómetro de masas y un ciclotrón.
5. Discutir el efecto Hall.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Campo magnético	Periodo del ciclotrón
Tesla	Frecuencia del ciclotrón
Gauss	Botella magnética
Elementos de corriente	Campos cruzados
Líneas de campo magnético	Selector de velocidades

Espectrómetro de masas	Voltaje Hall
Ciclotrón	Efecto Hall cuántico
Momento dipolar magnético	Constante de von Klitzing
Efecto Hall	

C. Verdadero o falso. Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada móvil es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula.
2. El momento del par que actúa sobre un imán tiende a alinear el momento magnético en la dirección del campo magnético.
3. Una espira de corriente en un campo magnético uniforme se comporta como un pequeño imán.
4. El periodo de una partícula moviéndose en círculo en un campo magnético es proporcional al radio del círculo.
5. La velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre puede determinarse a partir del efecto Hall.

Problemas

Nivel 1

24-1 Fuerza ejercida por un campo magnético

1. Hallar la fuerza magnética que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad $4,46 \text{ Mm/s}$ en el sentido positivo de las x en el interior de un campo magnético de $1,75 \text{ T}$ dirigido en el sentido positivo de las z .
2. Una carga $q = -2,64 \text{ nC}$ se mueve con velocidad de $2,75 \times 10^6 \text{ m/s}$ i . Hallar la fuerza que actúa sobre la carga si el campo magnético es (a) $\mathbf{B} = 0,48 \text{ T } j$, (b) $\mathbf{B} = 0,65 \text{ T } i + 0,65 \text{ T } j$, (c) $\mathbf{B} = 0,75 \text{ T } i$, (d) $\mathbf{B} = 0,65 \text{ T } i + 0,65 \text{ T } k$.
3. Un campo magnético uniforme de valor $1,28 \text{ T}$ está en la dirección y sentido positivo del eje de las z . Hallar la fuerza que actúa sobre un protón si su velocidad es (a) $\mathbf{v} = 3,5 \text{ Mm/s } i$, (b)

$\mathbf{v} = 2,5 \text{ Mm/s } j$, (c) $\mathbf{v} = 6,5 \text{ Mm/s } k$ y (d) $\mathbf{v} = 3,0 \text{ Mm/s } i + 4,0 \text{ Mm/s } j$.

4. Un electrón se mueve con velocidad $3,75 \text{ Mm/s}$ en el plano xy formando un ángulo de 60° con el eje x y un ángulo de 30° con el eje y . Un campo magnético de $0,85 \text{ T}$ está dirigido en el sentido positivo del eje de las y . Hallar la fuerza que actúa sobre el electrón.
5. Un segmento de conductor recto de 2 m de largo forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de $0,5 \text{ T}$. Hallar la fuerza que actúa sobre el conductor si por él circula una corriente de 2 A .
6. Un segmento de conductor recto $\mathbf{r} = (2,5 \text{ A}) (3 \text{ cm } i + 4 \text{ cm } j)$ se encuentra en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 1,5 \text{ T } i$. Determinar la fuerza que actúa sobre el conductor.

7. Un conductor largo paralelo al eje x lleva una corriente de 8,5 A en el sentido positivo de x . Existe un campo magnético uniforme de valor $\mathbf{B} = 1,65 \text{ T } \hat{j}$. Hallar la fuerza por unidad de longitud del conductor.

24-2 Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético

8. Un protón se mueve en una órbita circular de radio 65 cm perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 0,75 T. (a) ¿Cuál es el período correspondiente a este movimiento? (b) Hallar la velocidad del protón. (c) Hallar la energía cinética del protón.

9. Un electrón de energía cinética 45 keV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético de 0,325 T. (a) Hallar el radio de la órbita. (b) Hallar la frecuencia angular y el período del movimiento.

10. Una partícula alfa (carga $+2e$) se mueve en una trayectoria circular de radio 0,5 m en el interior de un campo magnético de 1,0 T. Hallar (a) el período, (b) la velocidad y (c) la energía cinética (en electronvoltios) de la partícula alfa. Tomar $m = 6,65 \times 10^{-27} \text{ kg}$ como masa de la partícula alfa.

11. Un haz de protones se mueve a lo largo del eje x en su sentido positivo con una velocidad de 12,4 km/s a través de una región de campos cruzados equilibrados con desviación nula. (a) Si existe un campo magnético de valor 0,85 T en el sentido positivo de las y , hallar el valor y dirección del campo eléctrico. (b) ¿Se verán desviados los electrones de la misma velocidad por estos campos? Si es así, ¿en qué dirección y sentido?

12. Un selector de velocidad tiene un campo magnético de valor 0,28 T perpendicular a un campo eléctrico de valor 0,46 MV/m. (a) ¿Cuál deberá ser la velocidad de una partícula para pasar a través de dicho selector sin ser desviada? ¿Qué energía deberían tener (b) los protones y (c) los electrones para pasar a través del mismo sin ser desviados?

13. Un electrón procedente del Sol con una velocidad de $1 \times 10^8 \text{ m/s}$ entra en el campo magnético terrestre por encima del ecuador en donde el campo magnético es $4 \times 10^{-5} \text{ T}$. El electrón se mueve aproximadamente según una circunferencia, excepto en una pequeña desviación a lo largo de la dirección del campo magnético terrestre hacia el polo norte. (a) ¿Cuál es el radio del movimiento circular? (b) ¿Cuál es el radio del movimiento circular cerca del polo norte donde el campo magnético es $2 \times 10^{-3} \text{ T}$?

14. Un ion ^{24}Mg simplemente ionizado (masa $3,983 \times 10^{-26} \text{ kg}$) se acelera a través de un potencial de 2,5 kV y se desvía en un campo magnético de 55,7 mT que existe en un espectrómetro de masas. (a) Hallar el radio de curvatura de la órbita del ion. (b) ¿Cuál es la diferencia de los radios para los iones ^{24}Mg y ^{26}Mg ? (Suponer que su relación de masas es 26/24.)

15. Un ciclotrón para acelerar protones tiene un campo magnético de 1,4 T y un radio de 0,7 m. (a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón? (b) Hallar la energía máxima de los protones cuando salen del mismo. (c) ¿En qué variará la respuesta a este problema si se utilizan deuterones, que tienen la misma carga pero doble masa, en lugar de protones?

16. Un determinado ciclotrón tiene un campo magnético de 1,8 T y está proyectado para acelerar protones hasta 25 MeV. (a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón? (b) ¿Cuál deberá ser el radio mínimo del imán para obtener una energía de salida de 25 MeV? (c) Si se aplica un potencial alternativo a las *des* con

un valor máximo de 50 kV, ¿cuántas vueltas orbitales deberán realizar los protones antes de emerger con la energía de 25 MeV?

24-3 Pares de fuerzas sobre espiras de corriente e imanes

17. Una bobina circular pequeña de 20 vueltas de alambre está en un campo magnético uniforme de 0,5 T de modo que la normal al plano de la bobina forma un ángulo de 60° con la dirección de \mathbf{B} . El radio de la bobina es 4 cm y por ella circula una corriente de 3 A. (a) ¿Cuál es el valor del momento magnético de la bobina? (b) ¿Qué momento o par de fuerzas se ejerce sobre la bobina?

18. La unidad SI correspondiente al momento magnético de una espira es $\text{A} \cdot \text{m}^2$. Utilizar esta expresión para demostrar que $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$.

19. ¿Cuál es el momento del par máximo que actúa sobre una bobina circular de 400 vueltas de radio 0,75 cm que transporta una corriente de 1,6 mA y está situada en un campo magnético uniforme de 0,25 T?

20. La unidad de intensidad de polo magnético, definida por la ecuación 24-16, es el newton/tesla (N/T). Demostrar que esta unidad es también igual a un amperio-metro (A·m).

21. Un alambre conductor se dobla en forma de un cuadrado de lado $L = 6 \text{ cm}$ y se sitúa en el plano xy . Transporta una corriente de $I = 2,5 \text{ A}$. ¿Cuál es el momento del par que actúa sobre el conductor si existe un campo magnético de 0,3 T (a) en la dirección z , (b) en la dirección x ?

22. Repetir el problema 21 para el caso en que el alambre se dobla en forma de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

23. Una pequeña barra magnética de longitud 8,5 cm e intensidad de polo 25 N/T está situada a lo largo del eje x en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 1,5 \text{ T } \hat{i} + 2,5 \text{ T } \hat{j} + 1,6 \text{ T } \hat{k}$. (a) ¿Cuál es el momento magnético del imán? (b) Determinar el momento del par ejercido sobre el imán.

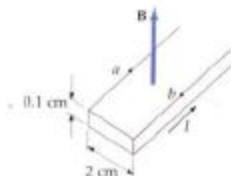
24. Un pequeño imán de longitud 6,8 cm se coloca formando un ángulo de 60° respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de valor 0,04 T. El momento del par observado tiene el valor 0,10 N·m. (a) Hallar el momento magnético del imán. (b) Hallar la intensidad del polo q_m .

24-4 Efecto Hall

25. Una cinta de metal de 2,0 cm de ancho y 0,1 cm de espesor lleva una corriente de 20 A y está situada en el interior de un campo magnético de 2,0 T según se ve en la figura 24-26. La fem Hall se mide y resulta ser de 4,27 μV . (a) Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta. (b) Hallar la densidad numérica de los portadores de carga de la cinta.

26. (a) En la figura 24-26 ¿cuál de los puntos (a o b) estará a potencial más alto? (b) Si la cinta de metal se sustituye por un semiconductor tipo p en el que los portadores de carga son positivos, ¿qué punto estará a un potencial más elevado?

Figura 24-26 Problemas 25, 26 y 27.



27. La densidad numérica de electrones libres en el cobre es de 8.47×10^{23} electrones por centímetro cúbico. Si la cinta de metal de la figura 24-26 es de cobre y la corriente es 10 A, hallar (a) la velocidad de desplazamiento v_d y (b) el voltaje Hall. (Admitir que el campo magnético es 2.0 T .)

28. Se utiliza una cinta de cobre ($n = 8.47 \times 10^{23}$ electrones por centímetro cúbico) de 2 cm y 0.1 cm de espesor para medir los valores de campos magnéticos desconocidos que son perpendiculares a la cinta. Hallar el valor de B cuando $I = 20 \text{ A}$ y el voltaje Hall es (a) $2.00 \mu\text{V}$, (b) $5.25 \mu\text{V}$ y (c) $8.00 \mu\text{V}$.

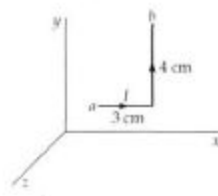
29. La sangre contiene iones cargados de modo que al moverse desarrolla un voltaje Hall a través del diámetro de una arteria. Una arteria gruesa con un diámetro de 0.85 cm tiene una velocidad de flujo de 0.6 m/s. Si una sección de esta arteria se encuentra en un campo magnético de 0.2 T , ¿cuál es la diferencia de potencial a través del diámetro de la arteria?

Nivel II

30. Un haz de iones ^6Li y ^7Li pasa a través de un selector de velocidades y entra en un espectrómetro magnético. Si el diámetro de la órbita de los iones ^6Li es de 15 cm, ¿cuál es el diámetro de la correspondiente a los iones ^7Li ?

31. El segmento conductor de la figura 24-27 transporta una corriente de 1.8 A de a a b y se encuentra en el interior de un campo magnético $\mathbf{B} = 1.2 \text{ T k}$. Determinar la fuerza total que actúa sobre el conductor y demostrar que es la misma que actuaría si se tratara de un segmento recto de a a b .

Figura 24-27 Problema 31.



32. Un conductor recto, rígido y horizontal, de longitud 25 cm y masa 50 g está conectado a una fuente de fem por conductores flexibles. Un campo magnético de 1.33 T es horizontal y perpendicular al conductor. Hallar la corriente necesaria para hacer flotar el conductor, es decir, de modo que la fuerza magnética equilibre el peso del alambre.

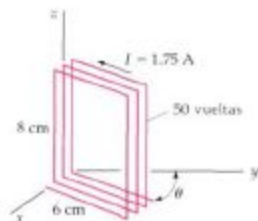
33. Las placas de un aparato Thomson q/m son de 6.0 cm de largo y están separadas por 1.2 cm. El extremo de las placas está a 30.0 cm de la pantalla del tubo. La energía cinética de los electrones es de 2.8 keV. (a) Si se aplica un potencial de 25.0 V a través de las placas de deflexión, ¿en cuánto se desviará el haz? (b) Hallar el valor de un campo cruzado que permita al haz pasar sin verse desviado.

34. Un simple magnetoscopio (*galvanómetro*) para la medida de campos magnéticos horizontales, consiste en un alambre rígido de 50 cm que cuelga de un pivote conductor de modo que su extremo libre hace contacto con una cubeta de mercurio. El alambre posee una masa de 5 g y conduce una corriente hacia abajo. (a) ¿Cuál es el desplazamiento angular de equilibrio del alambre de la posición vertical si el campo magnético horizontal es 0.04 T y la corriente de 0.20 A ? (b) Si la corrien-

te es 20 A y un desplazamiento de la vertical de 0.5 mm puede detectarse para el extremo libre, ¿cuál es la sensibilidad de medida de campos magnéticos horizontales para este magnetoscopio?

35. Una bobina rectangular de 50 vueltas tiene lados de 6.0 y 8.0 cm y transporta una corriente de 1.75 A. Está orientada como indica la figura 24-28 y pivota alrededor del eje z . (a) Si el alambre situado en el plano xy forma un ángulo de 37° con el eje y y como se indica, ¿qué ángulo forma el vector unitario normal \hat{n} con el eje x ? (b) Expresar \hat{n} en función de los vectores unitarios i y j . (c) ¿Cuál es el momento magnético de la bobina? (d) Determinar el momento del par que actúa sobre la bobina cuando se sitúa en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 1.5 \text{ T j}$.

Figura 24-28 Problemas 35 y 36.



36. La bobina del problema 35 pivota alrededor del eje z y se mantiene en diversas posiciones en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 2.0 \text{ T j}$. Dibujar la posición de la bobina y determinar el momento del par cuando el vector unitario normal es (a) $\hat{n} = i$, (b) $\hat{n} = j$, (c) $\hat{n} = -j$ y (d) $\hat{n} = (i + j)/\sqrt{2}$.

37. Una partícula de carga q y masa M se mueve en una circunferencia de radio r con una velocidad angular ω . (a) Demostrar que la corriente media es $I = q\omega/2\pi$ y que el momento magnético tiene por valor $m = \frac{1}{2}q\omega r^2$. (b) Demostrar que el movimiento angular de esta partícula tiene el valor $L = Mr^2\omega$ y que los vectores de momento magnético y movimiento angular están relacionados por $\mathbf{m} = (q/2M)\mathbf{L}$.

38. Una partícula de carga q y masa m tiene una cantidad de movimiento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y una energía cinética $E_c = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \mathbf{p}^2/2m$. Si se mueve en una órbita circular de radio r en el interior de un campo magnético B , demostrar que (a) $\mathbf{p} = Bqr$ y (b) $E_c = B^2q^2r^2/2m$.

39. Protones, deuterones (cada uno de carga $+e$) y partículas alfa (de carga $+2e$) de la misma energía cinética entran en un campo magnético uniforme \mathbf{B} que es perpendicular a sus velocidades. Sean r_p , r_d y r_α los radios de sus órbitas circulares. Hallar los cocientes r_d/r_p y r_α/r_p . Admitir que $m_\alpha = 2m_p = 4m_n$.

40. Demostrar que la frecuencia del ciclotrón es la misma para deuterones que para partículas alfa y que es la mitad de la correspondiente a un protón en el interior del mismo campo magnético. (Véase problema 39.)

41. Un protón y una partícula alfa se mueven en un campo magnético uniforme en circunferencias de igual radio. Comparar (a) sus velocidades, (b) sus energías cinéticas y (c) sus momentos angulares. (Véase problema 39.)

42. El berilio tiene una densidad de 1.83 g/cm^3 y una masa molecular de 9.01 g/mol . Una cinta de berilio de espesor

1.4 mm y anchura 1.2 cm transporta una corriente de 3.75 A en una región donde existe un campo magnético de magnitud 1.88 T perpendicular a la cinta. El voltaje Hall medido es de $0.130 \mu\text{V}$. (a) Calcular la densidad numérica de los portadores de carga. (b) Calcular la densidad numérica de los átomos de berilio. (c) ¿Cuántos electrones libres existen por átomo de berilio?

43. Una espira circular rígida de radio R y masa M se encuentra en el plano xy sobre una mesa plana y rugosa. El campo magnético es $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$. ¿Cuánto debe valer la intensidad de corriente antes de que un lado de la espira se levante de la mesa?

44. Un galvanómetro de bobina móvil consta de un carrete de alambre suspendido en un campo magnético radial \mathbf{B} mediante una fibra delgada y muy flexible. Cuando una corriente I pasa a través de la bobina se genera un momento que tiende a girarla. A su vez en la fibra se engendra un par restaurador $\tau = k\theta$, proporcional al ángulo de torsión θ . La constante k se llama constante de torsión. Demostrar que $I = k\theta / (NAB)$, en donde N es el número de vueltas de alambre de la bobina, A el área del arrollamiento y \mathbf{B} el campo magnético.

45. Un alambre de longitud L se enrolla en una bobina circular de N espiras. Demostrar que cuando esta bobina transporta una corriente I , su momento magnético tiene la magnitud $IL^2/4\pi N$.

46. Un disco de metal de radio 6 cm se monta sobre un eje sin rozamiento. La corriente puede fluir a través del eje y a lo largo del disco hasta alcanzar un contacto deslizante situado en la periferia de aquél. Paralelo al eje del disco existe un campo magnético uniforme $B = 1.25$ T. Cuando la corriente es 3 A, el disco gira con velocidad angular constante. ¿Cuál es la fuerza de fricción que se produce entre el contacto eléctrico estacionario y el borde rotatorio del disco?

47. Una partícula de masa m y carga q entra en una región donde existe un campo magnético uniforme B a lo largo del eje x . La velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, de modo que la partícula se mueve en una trayectoria helicoidal. (a) Demostrar que el radio de la hélice es $r = mv_y / qB$. (b) Demostrar que la partícula tarda un tiempo $t = 2\pi m / qB$ en completar una órbita alrededor de la hélice.

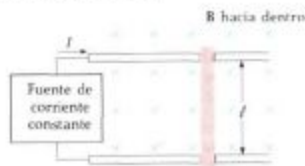
48. Un espectrómetro de masas se encuentra precedido por un selector de velocidad constituido por placas paralelas separadas entre sí 2.0 mm y entre las que existe una diferencia de potencial de 160 V. El campo magnético entre las placas es de 0.42 T. El campo magnético en el espectrómetro de masas es de 1.2 T. Calcular (a) la velocidad con la que se introducen los iones en el espectrómetro y (b) la diferencia en los diámetros de las órbitas del ^{235}U y ^{238}U simplemente ionizados. (La masa de un ion ^{235}U es 3.903×10^{-26} kg.)

49. Un alambre conductor es paralelo al eje y . Se mueve en la dirección x positiva con una velocidad de 20 m/s en un campo magnético $\mathbf{B} = 0.5$ T \mathbf{k} . (a) Determinar la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre un electrón en el conductor. (b) Debido a esta fuerza magnética, los electrones se mueven a un extremo del conductor, dejando el otro extremo positivamente cargado hasta que el campo eléctrico debido a esta separación de carga ejerce una fuerza sobre los electrones que equilibra la fuerza magnética. Determinar la magnitud y dirección de este campo eléctrico en estado estacionario. (c) Suponemos que el cable móvil tiene 2 metros de longitud. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus dos extremos debido a este campo eléctrico?

50. Una barra metálica de masa M está apoyada sobre un par de varillas conductoras horizontales separadas una distancia

L y unidas a un dispositivo que suministra una corriente constante I al circuito, según se ve en la figura 24-29. Se establece un campo magnético uniforme \mathbf{B} del modo indicado. (a) Si no existe rozamiento y la barra parte del reposo cuando $t = 0$, demostrar que en el instante t la barra tiene una velocidad $v = (BIL/M)t$. (b) ¿En qué sentido se moverá la barra? (c) Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_s , hallar el valor mínimo del campo B necesario para hacer que se ponga la barra en movimiento.

Figura 24-29 Problemas 50 y 51.



51. En la figura 24-29 admitir que los conductores de apoyo carecen de rozamiento pero están inclinados hacia arriba de modo que forman un ángulo θ con la horizontal. (a) ¿Qué campo magnético vertical \mathbf{B} se necesita para que la barra no se deslice hacia abajo por los conductores? (b) ¿Cuál es la aceleración de la barra si \mathbf{B} es el doble del valor hallado en (a)?

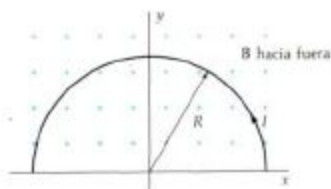
Nivel III

52. Un cable rígido, recto y horizontal de longitud 25 cm y masa 20 g, se soporta mediante contactos eléctricos en sus extremos, pero es libre de moverse verticalmente hacia arriba. El cable se encuentra en un campo magnético uniforme y horizontal, de magnitud 0.4 T perpendicular al cable. Un interruptor que conecta el cable con una batería se cierra y el cable se dispara hacia arriba alcanzando una altura máxima h . La batería suministra una carga total de 2 C durante el corto tiempo que hace contacto con el alambre. Determinar la altura h .

53. Una espira circular de alambre de masa M transporta una corriente I en un campo magnético uniforme. Inicialmente está en equilibrio con su vector momento magnético alineado con el campo magnético. Damos a la espira un pequeño giro alrededor de un diámetro y luego se deja en libertad. ¿Cuál es el período del movimiento? (Suponer que el único momento ejercido sobre la espira se debe al campo magnético.)

54. Un cable conductor por el que circula una corriente I tiene la forma de una espira semicircular de radio R situada sobre el plano xy . Existe un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$ perpendicular al plano de la espira (figura 24-30). Demostrar que la fuerza que actúa sobre la espira es $\mathbf{F} = 2IRB \mathbf{j}$.

Figura 24-30 Problema 54.



55. Demostrar que el radio de la órbita de una partícula cargada en un ciclotrón es proporcional a la raíz cuadrada del número de órbitas recorridas.

56. Se dobla de forma arbitraria un conductor y por él se hace circular una corriente I en el interior de un campo magnético uniforme, \mathbf{B} . Demostrar que la fuerza total sobre la parte de un conductor que va desde un punto a a otro punto b es $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$, siendo \mathbf{L} el vector que va desde a hasta b .

57. Se dispone de un conductor de longitud fija L y formamos con él una bobina de N vueltas. Cuanto menor sea el área encerrada en una espira mayor será el número de vueltas. Demostrar que en el caso de un conductor de longitud determinada por el que circula una corriente I , se obtiene el momento magnético máximo con una bobina de una sola vuelta y que el valor de este momento magnético es $IL^2/4\pi$. (Sólo es necesario considerar bobinas circulares. ¿Por qué?)

58. Una varilla no conductora de masa M y longitud ℓ tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ y se hace girar con velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa a través de uno de sus extremos y es perpendicular a la varilla. (a) Considerar un pequeño segmento de longitud dx y carga $dq = \lambda dx$ a una distancia x del eje de giro. Demostrar que el momento magnético de este segmento es $\frac{1}{2}\lambda\omega x^2 dx$. (b) Integrar el resultado para demostrar que el momento magnético total de la varilla es $m = \frac{1}{2}\lambda\omega\ell^2$. (c) Demostrar que el momento magnético \mathbf{m} y el movimiento angular \mathbf{L} están relacionados por $\mathbf{m} = (Q/2M)\mathbf{L}$, en donde Q es la carga total sobre la varilla.

59. Un disco no conductor de masa M y radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ y gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. (a) Consideremos un anillo de radio r y anchura dr . Demostrar que la corriente total

en este anillo es $dI = (\omega/2\pi)dq = \omega\sigma r dr$. (b) Demostrar que el momento magnético del anillo es $d\mathbf{m} = \pi\omega\sigma r^3 dr$. (c) Integrar el resultado de la parte (b) para demostrar que el momento magnético total del disco es $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\pi\omega\sigma R^3$. (d) Demostrar que el momento magnético \mathbf{m} y el movimiento angular \mathbf{L} están relacionados por $\mathbf{m} = (Q/2M)\mathbf{L}$, en donde Q es la carga total sobre el disco.

60. Un imán pequeño de momento \mathbf{m} forma un ángulo θ con un campo magnético uniforme \mathbf{B} . (a) ¿Cuánto trabajo deberá realizar un par de fuerzas externo para girar el imán en una pequeña cantidad $d\theta$? (b) Demostrar que el trabajo necesario para hacer girar el imán hasta que sea perpendicular al campo es $W = mB \cos \theta$. (c) Utilizar el resultado de la parte (b) para demostrar que si se escoge igual a cero la energía potencial del imán cuando éste es perpendicular al campo, la energía potencial cuando forma un ángulo θ es $U(\theta) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$. (d) ¿Qué parte de este problema sería diferente si el imán se sustituyese por una bobina por la que circulase una corriente de modo que su momento magnético fuese también \mathbf{m} ?

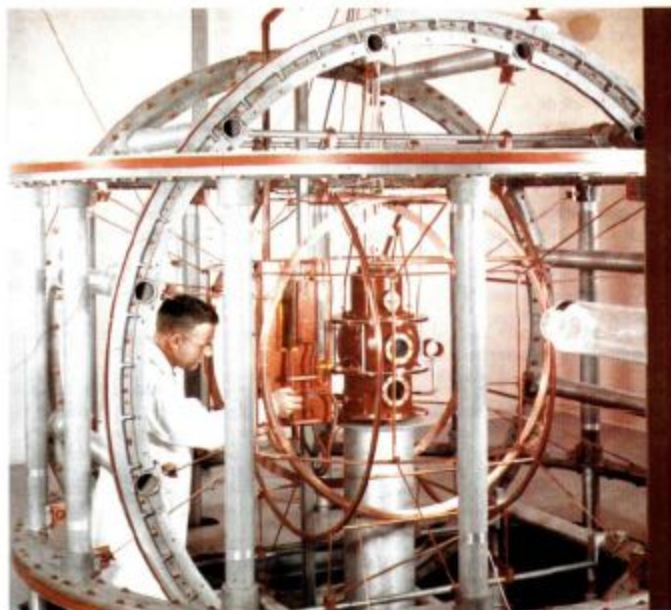
61. Un haz de partículas entra en una región de campo magnético uniforme \mathbf{B} con velocidad \mathbf{v} que forma un pequeño ángulo θ con \mathbf{v} . Demostrar que después de que una partícula se mueve una distancia $2\pi(m/qB)v \cos \theta$ medida a lo largo de la dirección de \mathbf{B} , la velocidad de la partícula tiene la misma dirección que cuando entra en el campo.

62. Un pequeño imán en forma de barra posee un momento magnético \mathbf{m} que forma un ángulo θ con el eje x y se encuentra en un campo magnético no uniforme dado por $\mathbf{B} = B_x(x)\mathbf{i} + B_y(y)\mathbf{j}$. Demostrar que sobre el imán actúa una fuerza que viene dada aproximadamente por

$$\mathbf{F} = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{j} \quad 24-24$$

Capítulo 25

Fuentes del campo magnético



Estas bobinas del Kettering Magnetics Laboratory de la Universidad de Oakland (EE.UU.) se denominan bobinas de Helmholtz. Se utilizan para neutralizar el campo magnético terrestre y proporcionar un campo magnético uniforme en una pequeña región del espacio con el fin de estudiar las propiedades magnéticas de la materia.

Volvamos ahora a considerar los orígenes del campo magnético \mathbf{B} . Las primeras fuentes conocidas del magnetismo fueron los imanes permanentes. Un mes después de que Oersted anunciase su descubrimiento acerca de la desviación de la aguja de una brújula por la acción de una corriente eléctrica, Jean Baptiste Biot y Felix Savart describieron los resultados de sus medidas sobre la fuerza que actúa sobre un imán próximo a un conductor largo por el que circula corriente y analizaron estos resultados en función del campo magnético producido por cada elemento de la corriente. André Marie Ampère amplió estos experimentos y demostró que los propios elementos de corriente experimentan una fuerza en presencia de un campo magnético; en particular demostró que dos corrientes ejercen fuerzas entre sí.

Comenzaremos por considerar el campo magnético producido por una simple carga móvil y por las cargas de un elemento de corriente. A continuación calcularemos los campos magnéticos producidos por algunas configuraciones de corriente comunes, tales como un segmento de alambre recto, un alambre largo y recto, una espira de corriente y un solenoide. Finalmente discutiremos la ley de Ampère que relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una espira cerrada con la corriente total que atraviesa la espira.

25-1 Campo magnético creado por las cargas puntuales móviles

Cuando una carga puntual q se mueve con velocidad v , se produce un campo magnético \mathbf{B} en el espacio dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times \hat{r}}{r^2} \quad 25-1$$

Campo magnético de una carga móvil



Figura 25-1 Una carga puntual q moviéndose con velocidad v produce un campo magnético \mathbf{B} en un punto del campo P en la dirección $v \times \hat{r}$, en donde \hat{r} es el vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo. (La cruz azul en el punto del campo indica que la dirección del campo es perpendicular al papel y hacia dentro.)

en donde \hat{r} es un vector unitario que apunta desde la carga q al punto del campo P (figura 25-1) y μ_0 es una constante de proporcionalidad llamada **permeabilidad del espacio libre**, de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad 25-2$$

Las unidades de μ_0 son de tal índole que cuando q se expresa en culombios, v en metros por segundo y r en metros, resulta B en teslas. La unidad N/A^2 procede del hecho de que $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A}\cdot\text{m}$. La constante $1/4\pi$ se incluye arbitrariamente en la ecuación 25-1 a fin de que el factor 4π no aparezca en la ley de Ampère (ecuación 25-15), que estudiaremos en la sección 25-4. La ecuación 25-1 correspondiente al campo magnético debido a una carga móvil es análoga a la ley de Coulomb del campo eléctrico producido por una carga puntual:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$

Según la ecuación 25-1, el campo magnético creado por una carga móvil tiene las siguientes características:

1. La magnitud de \mathbf{B} es proporcional a la carga q y a la velocidad v y varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga al punto del campo.
2. El campo magnético es cero a lo largo de la línea de movimiento de la carga. En otros puntos del espacio es proporcional a $\sin \theta$, siendo θ el ángulo formado por el vector velocidad v y el vector r desde la carga al punto del campo.
3. La dirección de \mathbf{B} es perpendicular a ambos, la velocidad v y el vector r . Pese a la dirección dada por la regla de la mano derecha cuando v gira hacia r .

Ejemplo 25-1

Una carga puntual de magnitud $q_1 = 4,5 \text{ nC}$ se mueve con la velocidad $3,6 \times 10^7 \text{ m/s}$ paralelamente al eje x a lo largo de la línea $y = 3 \text{ m}$. Determinar el campo magnético producido en el origen por esta carga situada en el punto $x = -4 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$, como indica la figura 25-2.

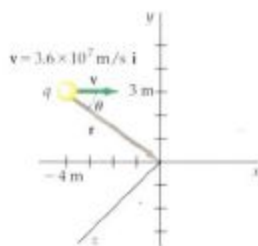


Figura 25-2 Partícula cargada que se mueve paralelamente al eje x (ejemplo 25-1).

La velocidad de la carga es $\mathbf{v} = v\hat{i} = 3,6 \times 10^7 \text{ m/s } \hat{i}$, y el vector dirigido desde la carga al origen viene dado por $\mathbf{r} = 4 \text{ m } \hat{i} - 3 \text{ m } \hat{j}$. Por tanto, $r = 5 \text{ m}$ y el vector unitario \hat{r} es

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{4 \text{ m } \hat{i} - 3 \text{ m } \hat{j}}{5 \text{ m}} \\ &= 0,8\hat{i} - 0,6\hat{j}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \hat{r} &= (v\hat{i}) \times (0,8\hat{i} - 0,6\hat{j}) \\ &= -0,6v\hat{k}\end{aligned}$$

y la ecuación 25-1 nos da

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{r}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(-0,6v\hat{k})}{r^2} \\ &= -(10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{(4,5 \times 10^{-9} \text{ C})(0,6)(3,6 \times 10^7 \text{ m/s})}{(5 \text{ m})^2} \hat{k} \\ &= -3,89 \times 10^{-10} \text{ T } \hat{k}\end{aligned}$$

También es posible determinar el campo magnético sin determinar explícitamente el vector unitario \hat{r} . Como puede verse en la figura, el producto vectorial $\mathbf{v} \times \hat{r}$ tiene la dirección z negativa. Como la magnitud de $\mathbf{v} \times \hat{r}$ es $v \sin \theta$, en donde $\sin \theta = 3 \text{ m}/5 \text{ m} = 0,6$, resulta:

$$\mathbf{v} \times \hat{r} = v \sin \theta (-\hat{k}) = -v(0,6)\hat{k}$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente. De este ejemplo sacamos la consecuencia de que el campo magnético debido a una carga móvil es muy pequeño. Consideremos, como comparación, que la magnitud del campo magnético terrestre próximo a su superficie es de unos 10^{-4} T .

La fuerza magnética y la conservación del momento lineal

La fuerza magnética ejercida por una carga móvil sobre otra puede determinarse combinando la ecuación 24-1 correspondiente a la fuerza que actúa sobre una carga móvil en un campo magnético y la ecuación 25-1 que corresponde al campo magnético creado por una carga. La fuerza \mathbf{F}_{12} ejercida por una carga q_1 moviéndose con velocidad \mathbf{v}_1 sobre una carga q_2 moviéndose con velocidad \mathbf{v}_2 viene dada por

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \mathbf{v}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) \quad 25-3a$$

en donde \mathbf{B}_1 es el campo magnético en la posición de la carga q_2 debido a la carga q_1 y \hat{r}_{12} es el vector unitario que apunta de q_1 a q_2 . De igual modo, la fuerza \mathbf{F}_{21} ejercida por una carga q_2 moviéndose con velocidad \mathbf{v}_2 sobre una carga q_1 que se mueve con velocidad \mathbf{v}_1 viene dada por

$$\mathbf{F}_{21} = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1 \mathbf{v}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 \mathbf{v}_2 \times \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} \right) \quad 25-3b$$

Estas relaciones son notables por el hecho de que la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 no es igual y opuesta a la ejercida por la carga q_2 sobre la carga q_1 . Es decir, estas fuerzas no obedecen la tercera ley de Newton, como

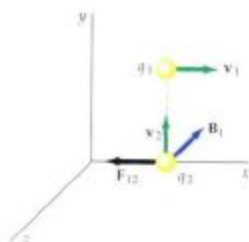


Figura 25-3 Las fuerzas ejercidas por las cargas móviles entre sí no son iguales y opuestas. El campo magnético \mathbf{B}_1 sobre la carga q_2 debido a la carga q_1 posee la dirección del eje z , de tal modo que se ejerce una fuerza \mathbf{F}_{12} sobre q_2 hacia la izquierda en la dirección x negativa. Sin embargo, el campo \mathbf{B}_2 sobre la carga q_1 debido a la carga q_2 es cero, pues no se ejerce fuerza alguna sobre q_1 .

puede demostrarse considerando el caso especial ilustrado en la figura 25-3. Aquí, el campo magnético \mathbf{B}_1 debido a la carga q_1 sobre la carga q_2 posee la dirección negativa de z y la fuerza sobre q_2 está dirigida hacia la izquierda en la dirección negativa de x . Sin embargo, el campo magnético \mathbf{B}_2 debido a q_2 sobre q_1 es cero, porque q_1 se encuentra en un punto a lo largo de la línea de movimiento de q_2 . Por tanto, q_1 no ejerce fuerza magnética sobre q_2 . Sólo existe una fuerza neta \mathbf{F}_{12} que actúa sobre el sistema de las dos cargas. El sistema acelerará en la dirección de esta fuerza y el momento lineal no se conserva. Esta aparente violación del principio de conservación del momento lineal, resulta al tratar la fuerza ejercida por una carga sobre otra como si se tratara de una acción a distancia, despreciando así el momento lineal transportado por los campos eléctrico y magnético de las cargas móviles. En el capítulo 21 ya vimos que un campo eléctrico posee energía asociada y como veremos posteriormente, también existe energía asociada a un campo magnético. Un tratamiento avanzado de los campos eléctrico y magnético creados por cargas móviles muestran la existencia de un momento lineal asociado a estos campos. Cuando las cargas se mueven, como en la figura 25-3, el momento lineal producido cuando el sistema acelera hacia la izquierda se equilibra mediante el momento lineal de sentido opuesto transportado por los campos. De este modo, al incluir el momento lineal de los campos, el momento lineal total del sistema se conserva.

Ejemplo 25-2

Una carga puntual q_1 se encuentra en el punto de vector posición $\mathbf{R} = xi + yj$ y se mueve paralelamente al eje x con velocidad $\mathbf{v}_1 = v_1i$. Una segunda carga puntual q_2 se encuentra en el origen y se mueve a lo largo del eje x con velocidad $\mathbf{v}_2 = v_2i$ como se indica en la figura 25-4a. Determinar la fuerza magnética ejercida por cada una de las cargas sobre la otra.

En primer lugar determinamos la fuerza ejercida sobre la carga q_1 . Observemos que el vector \mathbf{r}_{21} dirigido desde la carga q_2 a la q_1 es justamente \mathbf{R} . Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{r}_{21}/r_{21} = \mathbf{R}/R$, resulta

$$\frac{\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{v_2 i \times (xi + yj)}{R^3} = \frac{y v_2}{R^3} \mathbf{k}$$

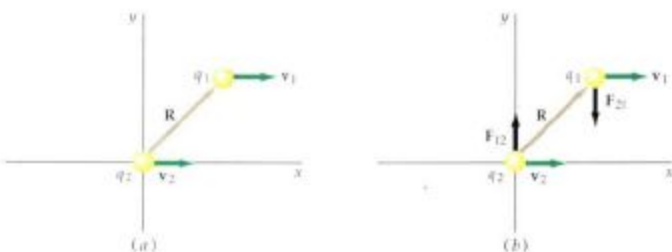
de modo que el campo magnético producido por la carga q_2 en la posición de la carga q_1 es

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 y v_2}{R^3} \mathbf{k}$$

La fuerza magnética ejercida por la carga q_2 sobre la carga q_1 es, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1 (v_1 i) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 y v_2}{R^3} \mathbf{k} \right) \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2 y}{R^3} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Figura 25-4 (a) Dos cargas moviéndose en direcciones paralelas según los datos del ejemplo 25-2. (b) Las fuerzas magnéticas ejercidas por las cargas entre sí son iguales y opuestas, pero no están dirigidas a lo largo de la línea que une las cargas.



Para determinar la fuerza magnética ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 , observemos que el vector \mathbf{r}_{12} , dirigido desde la carga q_1 a la carga q_2 es $-\mathbf{R}$. Por tanto,

$$\frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{v}_1 \times (-\mathbf{R})}{R^3} = \frac{v_1 \mathbf{i} \times (-x\mathbf{i} - y\mathbf{j})}{R^3} = -\frac{v_1 v_2}{R^3} \mathbf{k}$$

La fuerza magnética ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 es, por consiguiente,

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = q_2 (v_2 \mathbf{i}) \times \left(-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 v_1 v_2}{R^3} \mathbf{k} \right) = +\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R^3} \mathbf{j}$$

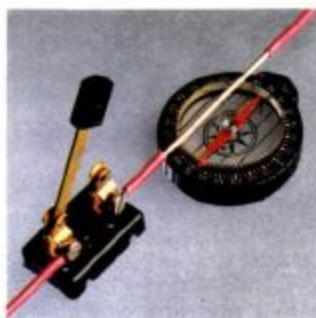
En este caso, las fuerzas son iguales y opuestas como muestra la figura 25-4b, pero no poseen la dirección de la línea que une las dos partículas. Las fuerzas magnéticas ejercen, por tanto, un momento sobre el sistema de las dos partículas. En este caso, la aparente falta de conservación del momento angular implicado por la existencia de este momento se resuelve por la consideración del momento angular transportado por el campo electromagnético.

25-2 Campo magnético creado por corrientes eléctricas: Ley de Biot y Savart

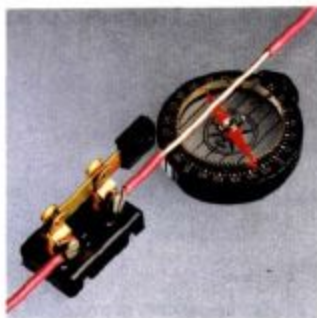
Como hicimos en el capítulo anterior al determinar la fuerza ejercida sobre cargas y elementos de corriente, podemos obtener el campo magnético $d\mathbf{B}$ producido por un elemento de corriente $I d\mathbf{\ell}$ reemplazando qv en la ecuación 25-1 por $I d\mathbf{\ell}$. Así resulta

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad 25-4 \quad \text{Ley de Biot y Savart}$$

La ecuación 25-4, conocida como **ley de Biot y Savart**, fue también deducida por Ampère. Esta ley, como la ecuación 25-1, es análoga a la ley de Coulomb correspondiente al campo eléctrico de una carga puntual. La fuente del campo magnético es una carga móvil qv o un elemento de corriente $I d\mathbf{\ell}$, del mismo modo que la carga q es la fuente del campo electrostático. El campo magnético decrece con el cuadrado de la distancia desde la carga móvil o elemento de corriente, de igual modo que el campo eléctrico decrece con el cuadrado de la distancia desde una carga puntual. Sin embargo, los aspectos direccionales de los campos eléctrico y magnético son completamente distintos. Mientras el campo eléctrico apunta



(a)



(b)

Experimento de Oersted. (a) Si por el alambre no pasa corriente, la aguja de la brújula apunta al norte. (b) Al pasar corriente por el alambre, la aguja se desvía en la dirección del campo magnético resultante. La corriente en el alambre está dirigida hacia arriba, de izquierda a derecha. Para mejorar el contraste de la fotografía, se ha quitado el aislamiento que recubre el alambre.

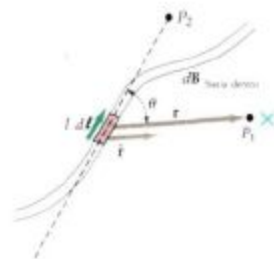


Figura 25-5 El elemento de corriente $I d\ell$ produce un campo magnético en el punto P_1 que es perpendicular tanto a $I d\ell$ como a \hat{r} . Este elemento no produce campo en el punto P_2 , que está en la misma línea de $I d\ell$.

en la dirección radial \hat{r} desde la carga puntual al punto del campo (para una carga positiva), el campo magnético es perpendicular a \hat{r} y a la dirección de movimiento de las cargas, v , que es la dirección del elemento de corriente. En un punto situado a lo largo de la línea de un elemento de corriente, tal como el punto P_2 de la figura 25-5, el campo magnético debido a dicho elemento es cero, pues el ángulo θ entre $I d\ell$ y el vector \hat{r} dirigido a ese punto es cero. El campo magnético debido a la corriente total en un circuito puede calcularse utilizando la ley de Biot y Savart para calcular el campo debido a cada elemento de corriente y después sumando (integrando) para todos los elementos de corriente del circuito. Este cálculo es muy difícil excepto en los casos de circuitos de geometría simple.

Campo magnético debido a una espira de corriente

Un cálculo relativamente directo es la determinación del campo magnético en el centro de una espira circular. La figura 25-6 muestra un elemento de corriente $I d\ell$ de una espira de corriente de radio R y el vector unitario \hat{r} dirigido desde el elemento al centro de la espira. El campo magnético en el centro de la espira debido a este elemento está dirigido a lo largo del eje de la misma y su magnitud viene dada por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin \theta}{R^2}$$

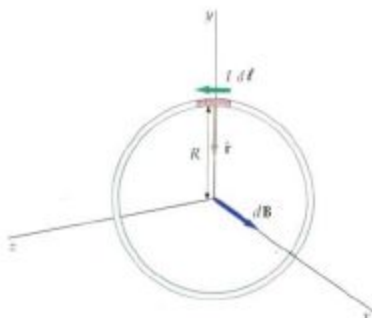
en donde θ es el ángulo que forman $I d\ell$ y \hat{r} que vale 90° para cada elemento de corriente, de modo que $\sin \theta = 1$. El campo magnético debido a la corriente total se obtiene integrando para todos los elementos de corriente de la espira. Como R es constante para todos los elementos, se obtiene

$$B = \oint dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint d\ell$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira completa es la longitud total $2\pi R$ o circunferencia de la espira. El campo magnético causado por la espira completa es, por tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{en el centro de la espira}) \quad 25-5$$

Figura 25-6 Elemento de corriente para el cálculo del campo magnético en el centro de una espira circular. Cada elemento produce un campo magnético dirigido a lo largo del eje de la espira.



Ejercicio

Hallar la corriente en una espira circular, de 8 cm de radio, que pueda crear un campo magnético de 2 G en el centro de la espira. (Respuesta: 25.5 A)

La figura 25-7 muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular de corriente a la distancia x de su centro. Consideremos en primer lugar el elemento de corriente situado en la parte superior de la espira. Aquí, como en todos los puntos de la espira, $I d\ell$ es tangente a la misma y perpendicular al vector r dirigido desde el elemento de corriente al punto del campo P . El campo magnético $d\mathbf{B}$ debido a este elemento se encuentra en la dirección mostrada en la figura, perpendicular a r y también perpendicular a $I d\ell$. La magnitud de $d\mathbf{B}$ es

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|d\ell \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{x^2 + R^2}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $r^2 = x^2 + R^2$ y que $d\ell$ y \hat{r} son perpendiculares, de modo que $|d\ell \times \hat{r}| = d\ell$.

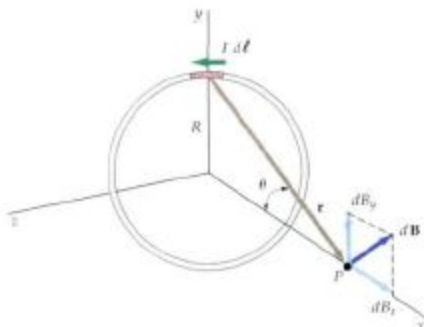


Figura 25-7 Geometría para el cálculo del campo magnético en un punto sobre el eje de una espira de corriente circular.

Cuando sumamos para todos los elementos de corriente de la espira, los componentes de $d\mathbf{B}$ perpendiculares al eje de la espira, tal como dB_z en la figura, suman cero, quedando sólo los componentes dB_x que son paralelos al eje. Por tanto, debemos calcular sólo el componente x del campo. Según la figura, tenemos

$$dB_x = dB \sin \theta = dB \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Para determinar el campo debido a la espira completa, integraremos $d\mathbf{B}$, alrededor de la espira:

$$B_x = \oint d\mathbf{B}_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} d\ell$$

Como x y R no varían al sumar para todos los elementos de la espira, la expresión anterior puede escribirse en la forma

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira es $2\pi R$. Por tanto,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR (2\pi R)}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 25-6$$

Campo magnético sobre el eje de una espira de corriente

Ejercicio

Demostrar que la ecuación 25-6 se reduce a la ecuación 25-5 en el centro de la espira.

A grandes distancias de la espira, x es mucho mayor que R , de modo que $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = x^3$. Por tanto,

$$B_x \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{x^3}$$

o sea

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{x^3} \quad 25-7$$

Campo de un dipolo magnético sobre el eje del dipolo

en donde $m = I\pi R^2$ es la magnitud del momento magnético de la espira. Obsérvese la semejanza de esta expresión con la ecuación 18-10 correspondiente al campo eléctrico sobre el eje de un dipolo eléctrico de momento p :

$$E_x \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{x^3}$$

Aunque no lo hemos demostrado, nuestro resultado de que una espira de corriente produce un campo dipolar magnético lejos de la misma, es válido en general para cualquier punto que esté sobre el eje o fuera del eje. Así, una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético, ya que experimenta un momento $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ cuando se sitúa en un campo magnético externo (como vimos en el capítulo 24) y produce un campo dipolar magnético a gran distancia de él. La figura 25-8 muestra las líneas de campo magnético de una espira de corriente.

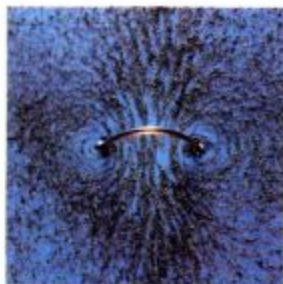


Figura 25-8 Líneas de campo magnético de una espira de corriente circular visualizadas mediante limaduras de hierro.

Ejemplo 25-3

Una bobina circular de radio 5,0 cm tiene 12 vueltas y se encuentra en el plano xy . Por ella circula una corriente de 4 A en un sentido tal que el momento magnético de la espira está dirigido a lo largo del eje x . Determinar el campo magnético sobre el eje x en (a) $x = 15$ cm y (b) $x = 3$ m.

(a) La ecuación 25-6 nos da el campo magnético debido a la corriente en una sola vuelta. El campo magnético debido a una bobina de N vueltas es N veces mayor que el debido a una sola vuelta. Por tanto, el campo magnético en $x = 15$ cm vale

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{2\pi (0,05 \text{ m})^2 (12)(4 \text{ A})}{[(0,15 \text{ m})^2 + (0,05 \text{ m})^2]^{3/2}} \\ &= 1,91 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

Obsérvese que el campo magnético es considerablemente mayor que el debido a una sola carga móvil, como el calculado en el ejemplo 25-1.

(b) Como 3 m es muy superior al radio 0,05 m, podemos utilizar la ecuación 25-7 para determinar el campo magnético lejos de la bobina. La magnitud del momento dipolar magnético de una espira con N vueltas es

$$\begin{aligned} m &= NIA = (12)(4 \text{ A})\pi(0,05 \text{ m})^2 \\ &= 0,377 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

El campo magnético en $x = 3$ m es, por tanto,

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{x^3} = (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{2(0,377 \text{ A}\cdot\text{m}^2)}{(3 \text{ m})^3} = 2,79 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Campo magnético debido a una corriente en un solenoide

Utilizaremos ahora la ecuación 25-6 para calcular el campo magnético de un solenoide, es decir, de un alambre arrollado estrechamente en forma de una hélice, como indica la figura 25-9. El solenoide se usa para producir un campo magnético intenso y uniforme en la región rodeada por sus espiras. Juega un papel en magnetismo análogo al que jugaba el condensador de placas paralelas con objeto de proporcionar un campo electrostático uniforme e intenso entre sus placas. El campo magnético de un solenoide es esencialmente el de una serie de N espiras idénticas situadas unas junto a otras. En la figura 25-10 se ven líneas de campo magnético para dos espiras. En el espacio existente entre ellas y cerca del eje, los campos de las espiras individuales poseen la misma dirección y sus magnitudes se suman, mientras que en la región comprendida entre las espiras, pero a distancias del eje grandes comparadas con su radio, los campos tienden a cancelarse. La figura 25-11 muestra las líneas de campo correspondientes a un solenoide largo y enrollado de forma compacta. Dentro del solenoide, las líneas son aproximadamente paralelas al eje y están espaciadas estrecha y uniformemente, indicando la existencia de un campo uniforme e intenso. Fuera del solenoide las líneas son mucho menos densas. Divergen en un extremo y convergen en el otro. Comparando esta figura con la figura 24-8 vemos que las líneas de campo de un solenoide, tanto en el interior como en el exterior, coinciden con las de una barra imantada de igual forma que el solenoide.

Calcularemos el campo magnético sólo en un punto del eje del solenoide y entre sus extremos. Consideremos un solenoide de longitud L formado por N vueltas de cable conductor que transporta una corriente de intensidad I . Elegimos el eje del solenoide como eje x , con el extremo izquierdo en $x = -a$ y el ex-

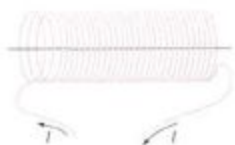


Figura 25-9 Un solenoide estrechamente arrollado puede considerarse como una serie de espiras de corriente circulares situadas paralelamente que transportan la misma corriente. En su interior se produce un campo magnético uniforme.

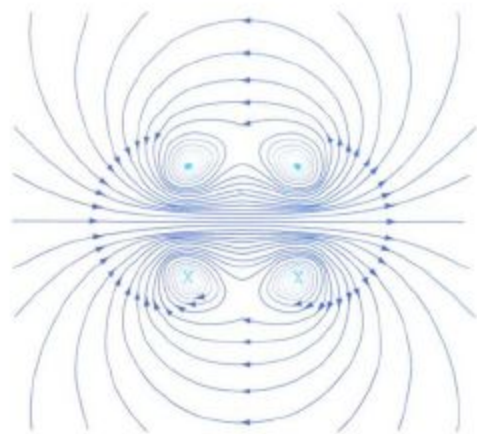
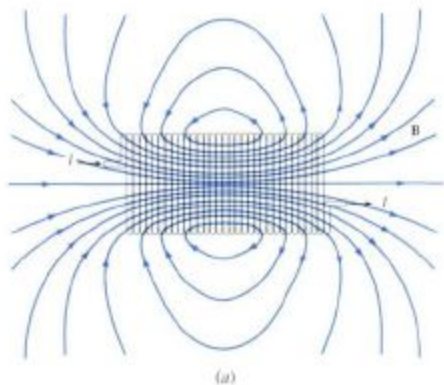


Figura 25-10 Líneas de campo magnético debidas a dos espiras que transportan la misma corriente en el mismo sentido. Los puntos donde las espiras cortan el plano de la página están marcados por una cruz azul cuando la corriente se dirige hacia dentro y por un punto azul cuando la corriente emerge. En la región comprendida entre las espiras, los campos magnéticos de las espiras individuales se suman, de modo que el campo resultante es intenso, mientras que en las regiones alejadas de las espiras, los campos se restan y el campo resultante es débil.

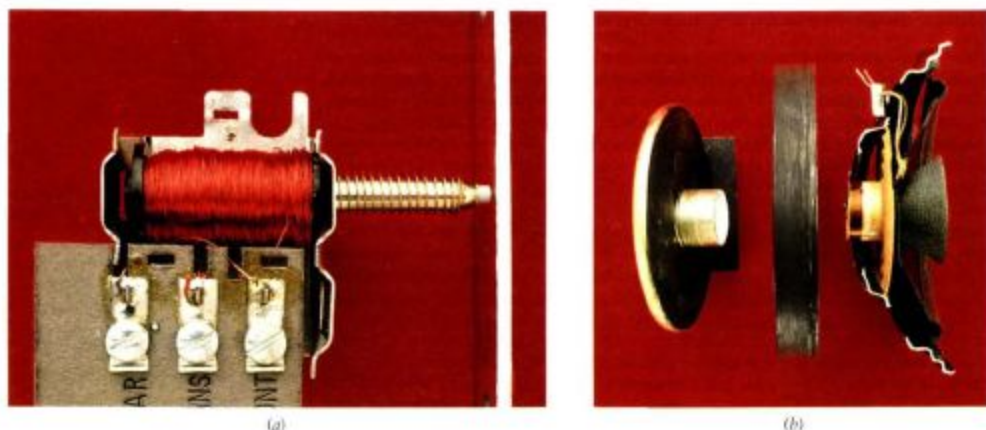


(a)



(b)

Figura 25-11 (a) Líneas de campo magnético de un solenoide. Las líneas son idénticas a las de una barra imantada de igual forma (figura 25-8). (b) Líneas de campo magnético de un solenoide indicadas por limaduras de hierro.



(a) Sección transversal del timbre de una puerta. Cuando pasa corriente por el solenoide exterior, su campo magnético hace que el émbolo interior choque con la campana del timbre. (b) Sección transversal de un altavoz. El cono del altavoz está unido a una bobina situada en el campo magnético de un imán permanente. Una corriente alterna en la bobina, tal como la salida de una radio, hace que el cono vibre dando lugar a la emisión de ondas sonoras.

tremo derecho en $x = +b$ como indica la figura 25-12. Calculemos el campo magnético en el origen. La figura muestra un elemento del solenoide de longitud dx a una distancia x del origen. Si $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, en este elemento existen $n dx$ vueltas de alambre, cada una de las cuales transporta una corriente I . Por tanto, el elemento es equivalente a una simple espira que transporta una corriente $di = nI dx$. El campo magnético en un punto x sobre el eje causado por una espira en el origen que transporta una corriente $nI dx$ viene dado por la ecuación 25-6 reemplazando I por $nI dx$:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi nI R^2 dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Esta expresión representa también el campo magnético en el origen debido a una espira de corriente en x . Determinaremos el campo magnético debido al solenoide completo integrando esta expresión desde $x = -a$ a $x = b$:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi nI R^2 \int_{-a}^b \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 25-8$$

Esta integral puede determinarse mediante una tabla estándar. Su valor es:

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{-a}^b = \frac{b}{R^2 \sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{R^2 \sqrt{a^2 + R^2}}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 25-8 resulta

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 nI \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \quad 25-9$$

Figura 25-12 Geometría para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide sobre el eje. El número de vueltas en el elemento dx es $n dx$, en donde $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El elemento dx se trata como una espira de corriente que transporta una corriente $di = nI dx$.



Para un solenoide largo, en el cual a y b son mucho mayores que R , los dos términos del paréntesis tienden a valer 1. Con esta aproximación el campo magnético es

$$B = \mu_0 nI \quad 25-10$$

Si el origen está en un extremo del solenoide, a o b será cero. Por tanto, si el otro extremo está a una distancia grande comparada con el radio, uno de los términos del paréntesis de la ecuación 25-9 es cero y el otro es 1, de modo que $B = \frac{1}{2} \mu_0 nI$. Por tanto, la magnitud de B en un punto próximo a cualquiera de los extremos de un solenoide largo, es aproximadamente igual a la mitad que en los puntos interiores al solenoide, lejos de los extremos. La figura 25-13 es la representación del campo magnético sobre el eje de un solenoide en función de la posición (con el origen en el centro del solenoide). La aproximación de que el campo es constante, independientemente de la posición a lo largo del eje, es muy buena excepto en los puntos muy próximos a los extremos.

Ejemplo 25-4

Determinar el campo magnético en el centro de un solenoide de longitud 20 cm, radio 1,4 cm y 600 vueltas, por el que circula una corriente de intensidad 4 A.

Calcularemos exactamente el campo mediante la ecuación 25-9. Para un punto en el centro del solenoide, $a = b = 10$ cm. Así, cada término de los paréntesis de la ecuación 25-9 tiene el valor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{(10 \text{ cm})^2 + (1,4 \text{ cm})^2}} = 0,990$$

Por tanto, según la ecuación 25-9, el campo magnético en el centro del solenoide es

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \mu_0 nI \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \\ &= (0,5)(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(600 \text{ vueltas}/0,2 \text{ m})(4 \text{ A})(0,990 + 0,990) \\ &= 1,50 \times 10^{-2} \text{ T} \end{aligned}$$

Obsérvese que la aproximación obtenida según la ecuación 25-10 supone reemplazar 0,99 por 1,00, es decir, una diferencia del 1 por ciento. Obsérvese también que la magnitud del campo magnético dentro del solenoide es bastante grande —unas 100 veces el campo magnético terrestre.

Campo magnético en el interior de un solenoide largo

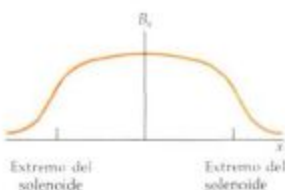
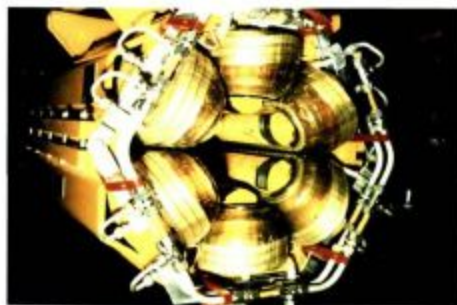
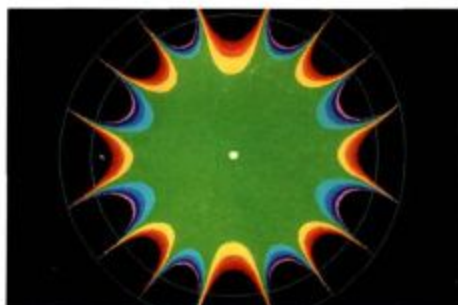


Figura 25-13 Gráfico del campo magnético sobre el eje dentro de un solenoide en función de la posición x sobre el eje. El campo interior al solenoide es casi constante excepto cerca de los extremos.

(a) Ímán sextupolar para el enfoque de haces de partículas cargadas. (b) Gráfico de ordenador que muestra la distribución del campo magnético de un ímán superconductor utilizado en el Brookhaven National Laboratory. Los contornos muestran iguales desviaciones del campo que en el centro del ímán.



(a)

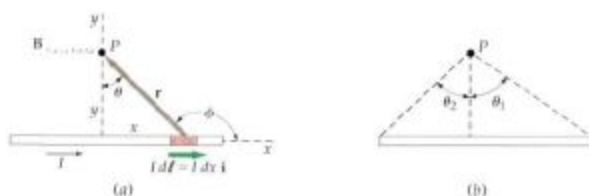


(b)

Campo magnético debido a una corriente en un conductor rectilíneo

La figura 25-14 muestra la geometría que es necesario considerar para calcular el campo magnético \mathbf{B} en un punto P debido a la corriente en el segmento de conductor que se indica en la figura. Escojamos el conductor de modo que coincida con el eje x y de tal modo que el eje y sea perpendicular al mismo pasando por el punto P . Se indica un elemento de corriente típico $I d\ell$ situado a una distancia x del origen. El vector \mathbf{r} señala desde el elemento hasta el punto de campo

Figura 25-14 (a) Geometría para el cálculo del campo magnético en el punto P causado por un segmento rectilíneo de corriente. Cada elemento del segmento contribuye al campo magnético total en el punto P , que está dirigido hacia fuera del papel. (b) El resultado se expresa en función de los ángulos θ_1 y θ_2 .



P . La dirección del campo magnético en P debido a este elemento está dirigida hacia el lector según queda determinada por la dirección del producto $I d\ell \times \mathbf{r}$. Obsérvese que todos los elementos de corriente del conductor dan contribuciones en esta misma dirección y sentido y así sólo necesitamos calcular la magnitud del campo. El campo debido al elemento de corriente indicado tiene el valor

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \sin \phi$$

Más conveniente es escribir esta expresión en función de θ en lugar de ϕ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta \quad 25-11$$

Para sumar los campos elementales de todos los elementos de corriente necesitamos relacionar las variables θ , r y x . Lo más sencillo es expresar x y r en función de θ . Así tenemos:

$$x = y \operatorname{tg} \theta$$

Por tanto,

$$dx = y \sec^2 \theta d\theta = y \frac{r^2}{y^2} d\theta = \frac{r^2}{y} d\theta$$

en donde hemos tenido en cuenta que $\sec \theta = r/y$. Sustituyendo esta expresión en lugar de dx en la ecuación 25-11, resulta

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{r^2 d\theta}{y} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \cos \theta d\theta$$

Calculemos primeramente la contribución procedente de los elementos de corriente a la derecha del punto $x=0$. Se suma respecto a todos estos elementos integrando desde $\theta=0$, hasta $\theta=\theta_1$, siendo θ_1 el ángulo comprendido entre la línea perpendicular al conductor y la línea que va desde P hasta el extremo derecho del conductor, según está indicado en la figura 25-14b. Tenemos para esta contribución:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^{\theta_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \int_0^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Análogamente, la contribución procedente de los elementos a la izquierda de $x=0$ es

$$B_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \sin \theta_2$$

El campo magnético total debido al segmento conductor, es la suma de B_1 y B_2 . Sustituyendo y por R , distancia perpendicular desde el segmento conductor al punto del campo, tenemos

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad 25-12$$

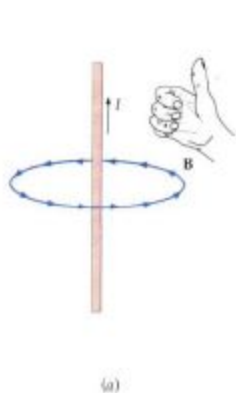
Campo magnético debido a un segmento de conductor recto

Este resultado expresa el campo magnético producido por un segmento de conductor en función de la distancia R perpendicular, y los ángulos subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor. Si éste es muy largo, los ángulos indicados son próximos a 90° . El resultado correspondiente a un conductor muy largo se obtiene de la ecuación 25-12 haciendo $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$:

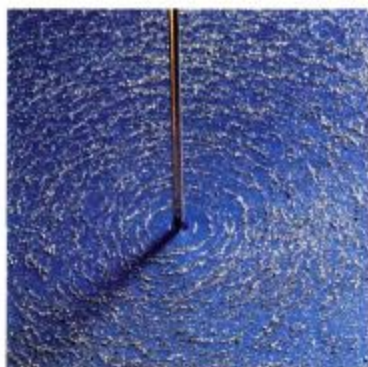
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \quad 25-13$$

Campo magnético debido a un conductor largo rectilíneo

En cualquier punto del espacio, las líneas de campo magnético de un conductor largo rectilíneo que transporta una corriente, son tangentes a un círculo de radio R alrededor del conductor, en donde R es la distancia perpendicular desde el conductor al punto del campo. La dirección de \mathbf{B} puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha como se indica en la figura 25-15a. Las líneas de campo magnético rodean el conductor como se indica en la figura 25-15b.



(a)



(b)

Figura 25-15 (a) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético debido a un conductor largo y recto, portador de corriente. Las líneas de campo magnético rodean el conductor en la dirección de los dedos de la mano derecha cuando el dedo pulgar apunta en la dirección de la corriente. (b) Líneas de campo magnético debidas a un largo conductor visualizadas por limaduras de hierro.

El resultado expresado por la ecuación 25-13 fue determinado experimentalmente por Biot y Savart en 1820. Mediante su análisis determinaron la expresión del campo magnético debido a un elemento de corriente, dada por la ecuación 25-4.



Figura 25-16 Espira de corriente cuadrada correspondiente a los datos del ejemplo 25-5.

Ejemplo 25-5

Determinar el campo magnético en el centro de una espira de corriente cuadrada, de lado $L = 50$ cm, por la cual circula una corriente de intensidad $1,5$ A (figura 25-16).

Como puede verse en la figura 25-16, cada lado de la espira contribuye con un campo perpendicular al papel y de sentido hacia fuera. Debido a la simetría de esta figura, sólo necesitamos calcular el campo producido por un lado de la espira y multiplicar el resultado por 4. La distancia entre un lado y el punto del campo es $R = \frac{1}{2}L = 0,25$ m. Por tanto, según la ecuación 25-12, el campo es

$$B = 4 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I}{\frac{1}{2}L} (\sin 45^\circ + \sin 45^\circ) = (4 \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{1,5 \text{ A}}{0,25 \text{ m}} (2 \sin 45^\circ) \\ = 3,39 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Ejercicio

Comparar el campo magnético en el centro de una espira circular de corriente de radio R con el correspondiente a una espira cuadrada de corriente de lado $L = 2R$. ¿Cuál es mayor? (Respuesta: B es un 10 por ciento mayor en el caso del círculo)

Ejemplo 25-6

Determinar el campo magnético a una distancia de 20 cm de un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente de intensidad $I = 5$ A.

De la ecuación 25-13, resulta

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{y} = (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}) \frac{2(5 \text{ A})}{0,2 \text{ m}} = 5,00 \times 10^{-6} \text{ T}$$

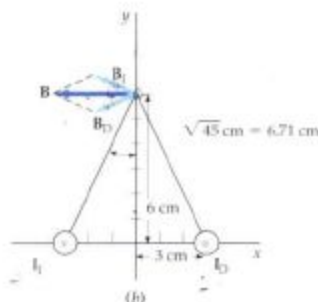
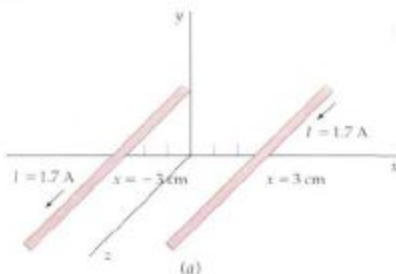
Obsérvese que el campo magnético próximo a un conductor que transporta una corriente de tamaño ordinario es pequeño. En este ejemplo es sólo aproximadamente el 1 por ciento del campo magnético terrestre.

Ejemplo 25-7

Un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente de intensidad de $1,7$ A en la dirección z positiva, se encuentra a lo largo de la línea $x = -3$ cm. Un conductor semejante que transporta una corriente de $1,7$ A en la dirección z positiva está situado sobre la línea $x = +3$ cm como indica la figura 25-17a. Determinar el campo magnético en un punto sobre el eje y en $y = 6$ cm.

En la figura 25-17b, se ha dibujado el plano xy en el plano de la página y sobre él se indican las direcciones del campo magnético B_i debido a la co-

Figura 25-17 (a) Dos conductores paralelos transportan corrientes en el mismo sentido, según los datos del ejemplo 25-7. (b) Geometría para el cálculo del campo magnético resultante debido a las dos corrientes.





Pistola de corriente para medir la intensidad de la corriente eléctrica. Las mordazas de la pistola rodean el conductor sin tocarlo. El campo magnético producido por el conductor al paso de la corriente se mide con un dispositivo basado en el efecto Hall que está montado sobre la pistola. Este dispositivo acusa un voltaje proporcional al campo magnético, el cual a su vez es proporcional a la corriente que circula por el conductor.

riente del conductor de la izquierda y B_1 debido a la corriente del conductor de la derecha. Como las corrientes tienen igual magnitud y están cada una a una distancia $R = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 6,71 \text{ cm}$ del punto del campo, estos campos tienen magnitudes iguales dadas por

$$B_0 = B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} = (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{2(1,7 \text{ A})}{0,0671 \text{ m}} = 5,07 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Como muestra la figura 25-17b, el campo magnético resultante posee la dirección x negativa y su magnitud es $2B_1 \cos \theta$ en donde $\cos \theta = (6 \text{ cm}) / (6,71 \text{ cm}) = 0,894$. El campo magnético resultante es, por tanto,

$$\mathbf{B} = -2B_1 \cos \theta \mathbf{i} = -2 (5,07 \times 10^{-6} \text{ T}) (0,894) \mathbf{i} = -9,07 \times 10^{-6} \text{ T} \mathbf{i}$$

Ejemplo 25-8

Un conductor infinitamente largo que transporta una corriente de 4,5 A se dobla en la forma indicada en la figura 25-18. Determinar el campo magnético en el punto $x = 3 \text{ cm}$, $y = 2 \text{ cm}$.

Obsérvese en primer lugar que el campo magnético debido a cada parte del conductor posee la dirección z positiva. La magnitud del campo debido al segmento de conductor que posee la dirección del eje y , B_1 , viene dada por la ecuación 25-2, con $R = 3 \text{ cm}$, $\theta_1 = 90^\circ$ y $\theta_2 = \alpha = \arctg(\frac{2}{3}) = 33,7^\circ$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ &= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{4,5 \text{ A}}{0,03 \text{ m}} (\sin 90^\circ + \sin 33,7^\circ) = 2,33 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

De modo semejante, la magnitud del campo B_2 debido al segmento de conductor que posee la dirección del eje x viene dada por la ecuación 25-12 con $R = 2 \text{ cm}$, $\theta_1 = \beta = 90^\circ - 33,7^\circ = 56,3^\circ$ y $\theta_2 = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ &= (10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}) \frac{4,5 \text{ A}}{0,02 \text{ m}} (\sin 56,3^\circ + \sin 90^\circ) = 4,12 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

Por tanto, el campo magnético resultante es

$$\mathbf{B} = (B_1 + B_2) \mathbf{k} = (2,33 \times 10^{-5} \text{ T} + 4,12 \times 10^{-5} \text{ T}) \mathbf{k} = 6,45 \times 10^{-5} \text{ T} \mathbf{k}$$

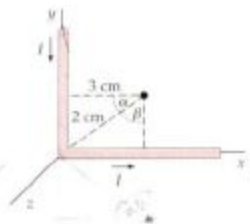


Figura 25-18 Conductor portador de corriente correspondiente a los datos del ejemplo 25-8.

25-3 Definición del amperio

Podemos utilizar la ecuación 25-13 correspondiente al campo magnético producido por un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente, y la ecuación 24-4 correspondiente a la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un segmento de conductor portador de corriente, para determinar la fuerza ejercida por una corriente larga y rectilínea sobre otra. La figura 25-19 muestra dos conductores paralelos, largos y rectilíneos que transportan corriente en la misma dirección. Consideremos la fuerza que actúa sobre un segmento $\Delta \ell_2$ por el que circula la corriente I_2 como se indica. El campo magnético B_1 en este segmento debido a la corriente I_1 es perpendicular al segmento $I_2 \Delta \ell_2$ como se indica en la figura. Esto es cierto para todos los elementos de corriente a lo largo del conductor. La fuerza magnética sobre el segmento de corriente $I_2 \Delta \ell_2$ está dirigida hacia la corriente I_1 . De igual modo, un segmento de corriente $I_1 \Delta \ell_1$ experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente I_2 . Así pues, dos corrientes paralelas se atraen una a la otra. Si una de las corrientes se invierte, la fuerza se invertirá, es decir, dos corrientes antiparalelas se repelerán. La atracción o repulsión de corrientes paralelas o antiparalelas fue descubierta experimentalmente por Ampère una semana después de conocer el descubrimiento de Oersted del efecto de una corriente sobre la aguja imantada de una brújula.

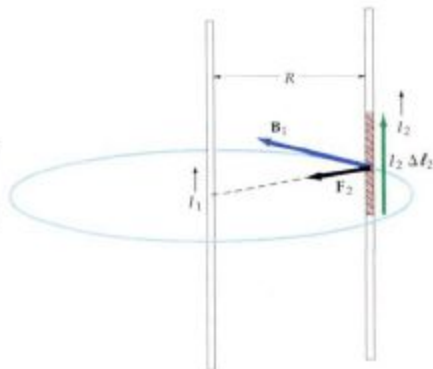


Figura 25-19 Dos conductores rectilíneos y largos portadores de corrientes paralelas. El campo magnético B_1 debido a la corriente I_1 es perpendicular a la corriente I_2 . La fuerza que actúa sobre la corriente I_2 está dirigida hacia la corriente I_1 . Existe una fuerza igual y opuesta ejercida por la corriente I_2 sobre I_1 . Las corrientes, por tanto, se atraen mutuamente.

La magnitud de la fuerza magnética sobre el segmento $I_2 \Delta \ell_2$ es

$$F_2 = |I_2 \Delta \ell_2 \times B_1|$$

Como el campo magnético en el segmento $I_2 \Delta \ell_2$ es perpendicular a éste, tenemos

$$F_2 = I_2 \Delta \ell_2 B_1$$

Si la distancia R entre los conductores es mucho menor que su longitud, el campo en $I_2 \Delta \ell_2$ debido a la corriente I_1 es aproximadamente igual al campo debido a un conductor infinitamente largo, portador de corriente, dado por la ecuación 25-13. La magnitud de la fuerza sobre el segmento $I_2 \Delta \ell_2$ es, por tanto

$$F_2 = I_2 \Delta \ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{F_2}{\Delta \ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \quad 25-14$$

En el capítulo 18, el culombio fue definido en función del amperio, pero la definición del amperio fue aplazada. Ahora podemos definir el amperio del modo siguiente:

Si por dos conductores paralelos muy largos situados a una distancia de 1 m entre sí circulan corrientes iguales, se define la corriente en cada uno de ellos como igual a un amperio si la fuerza por unidad de longitud sobre cada conductor es $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$.

Definición del amperio

Esta definición del amperio hace que la permeabilidad del espacio libre sea exactamente $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$. También permite determinar la unidad de corriente (y por tanto la unidad de carga eléctrica) mediante un experimento mecánico. En la práctica, como es natural, se escogen las corrientes de modo que estén mucho más próximas que 1 m; así no es necesario que los conductores sean tan largos y, sin embargo, la fuerza resulta suficientemente grande para poderse medir con exactitud. La figura 25-20 muestra una **balanza de corriente** que puede utilizarse para calibrar un amperímetro a partir de la definición fundamental del amperio. El conductor superior está libre para poder girar alrededor de los bordes en forma de cuchilla y está equilibrado de modo que los conductores están separados a una corta distancia. Los conductores se conectan en serie de modo que circula la misma corriente pero en sentidos opuestos, de modo que los conductores se repelen en lugar de atraerse. La fuerza de repulsión puede medirse colocando pesos sobre el conductor superior hasta que se consigue de nuevo el equilibrio en la separación original. La fuerza de repulsión se determina midiendo el peso total que se necesita para equilibrar el conductor superior.



Figura 25-20 Balanza de corriente utilizada en un laboratorio de física elemental para calibrar un amperímetro. Las dos barras paralelas transportan corrientes iguales, pero de sentido opuesto y por tanto, se repelen entre sí. La fuerza de repulsión está equilibrada por pesos situados sobre la barra superior, que forma parte de un rectángulo equilibrado sobre los bordes de una cuchilla. El espejo en la parte superior del aparato se utiliza para reflejar un haz de láser a fin de determinar exactamente la posición de la barra superior.

Ejemplo 25-9

Dos barras rectilíneas de 50 cm de longitud y separadas 1,5 mm en una balanza de corriente transportan corrientes de 15 A de intensidad en direcciones opuestas. ¿Qué masa debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

La fuerza ejercida por la barra inferior sobre la superior de longitud L tiene de magnitud

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} L$$

$$= (2 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2) \frac{(15 \text{ A})(15 \text{ A})}{0,0015 \text{ m}} (0,5 \text{ m}) = 1,5 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Esta fuerza puede equilibrarse mediante un peso mg :

$$mg = 1,5 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$m = \frac{1,5 \times 10^{-2} \text{ N}}{9,81 \text{ N/kg}} = 1,53 \times 10^{-3} \text{ kg} = 1,53 \text{ g}$$

Obsérvese que la fuerza magnética entre dos conductores portadores de corriente eléctrica es pequeña, incluso para intensidades tan grandes como 15 A.

25-4 Ley de Ampère

En el capítulo 24, decíamos que las cargas magnéticas fundamentales o «polos» no juegan un papel semejante al observado en las cargas eléctricas. En su lugar, la fuente fundamental de los campos magnéticos es la corriente eléctrica. Los campos magnéticos que surgen de las corrientes no se originan o terminan en puntos del espacio, sino que forman bucles cerrados que rodean la corriente. Por ejemplo, vimos en la sección 25-2 que las líneas de campo magnético debidas a un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente, rodean en círculo al conductor. Existe, por tanto, una diferencia definida entre la forma característica de las líneas de campo eléctrico y las líneas de campo magnético, pues las primeras comienzan y terminan sobre las cargas eléctricas.

En el capítulo 19, estudiamos la ley de Gauss, que relaciona el componente normal del campo eléctrico, sumado sobre una superficie cerrada con la carga neta interior a la superficie. Existe una ecuación análoga para el campo magnético, llamada ley de Ampère, que relaciona el componente tangencial de \mathbf{B} , sumado alrededor de una curva cerrada C con la corriente I_C que pasa a través de la curva. En forma matemática, la ley de Ampère es

Ley de Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_C \quad C, \text{ cualquier curva cerrada} \quad 25-15$$

en donde I_C es la corriente neta que penetra en el área limitada por la curva C . La ley de Ampère es válida para cualquier curva C en tanto las corrientes sean continuas, es decir, no comiencen o terminen en cualquier punto finito. Como la ley de Gauss, la ley de Ampère puede utilizarse para obtener una expresión del campo magnético en situaciones de alto grado de simetría. Si la simetría es suficientemente grande, la integral de línea $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ puede escribirse como el producto de B por cierta longitud. Entonces, si I_C es conocido, B puede determinarse. También, como la ley de Gauss, la ley de Ampère no es válida para determinar una expresión del campo magnético en el caso de que no exista simetría. Sin embargo, es de considerable importancia teórica.

La aplicación más simple de la ley de Ampère es la determinación del campo magnético creado por un conductor infinitamente largo y rectilíneo portador de una corriente. La figura 25-21 muestra una curva circular alrededor de un punto situado sobre un conductor largo en el centro del mismo. Si suponemos que estamos lejos de los extremos del conductor, podemos usar la simetría para eliminar la posibilidad de cualquier componente de \mathbf{B} paralelo al conductor. Podemos suponer que el campo magnético es tangente a este círculo y que posee la misma magnitud B en cualquier punto del círculo. La ley de Ampère, por tanto, nos dará:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B \oint_C d\ell = \mu_0 I_C$$

en donde se ha tenido en cuenta que B tiene el mismo valor en todos los puntos del círculo. La integral de $d\ell$ alrededor del círculo es igual a $2\pi r$ y la intensidad I_C es la que corresponde al conductor. Así se obtiene

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

que es la ecuación 25-13.

Ejemplo 25-10

Un conductor largo y recto de radio a transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda el área transversal del conductor (figura 25-22). Determinar el campo magnético dentro y fuera del conductor.

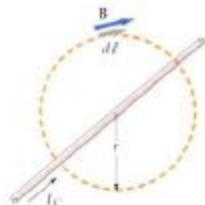


Figura 25-21 Geometría para el cálculo del campo magnético de un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente, mediante la ley de Ampère. Sobre una circunferencia que rodea al conductor, el campo magnético es constante y tangente a la misma.

Utilizaremos la ley de Ampère para calcular \mathbf{B} en virtud del alto grado de simetría. A una distancia r sabemos que \mathbf{B} es tangente a la circunferencia de radio r alrededor del conductor y constante en magnitud en todos los puntos de la misma. Así pues,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B \oint_C d\ell = B2\pi r$$

La corriente a través de C depende de que r sea menor o mayor que el radio del conductor a . Para r mayor que a , la corriente total I cruza el área limitada por C y se obtiene la ecuación 25-13 correspondiente al campo magnético debido a un conductor largo y recto por el que circula una corriente. Dentro del conductor, consideramos una circunferencia de radio $r < a$. La corriente que pasa a través del círculo correspondiente es

$$I_C = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I$$

La ley de Ampère nos da

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= B2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \\ B &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r \quad r < a \end{aligned} \quad 25-16$$

La figura 25-23 nos da un gráfico de B en función de r para este ejemplo.

En nuestra siguiente aplicación de la ley de Ampère, calcularemos el campo magnético de un **toroide**, formado por espiras de conductor arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático como indica la figura 25-24. Tenemos N vueltas de conductor, cada una transportando una corriente I . Para calcular \mathbf{B} , determinaremos la integral lineal $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de una circunferencia de radio r centrada en el centro del toroide. Por simetría, \mathbf{B} es tangente a este círculo y constante en magnitud en todos los puntos de la circunferencia. Por tanto,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

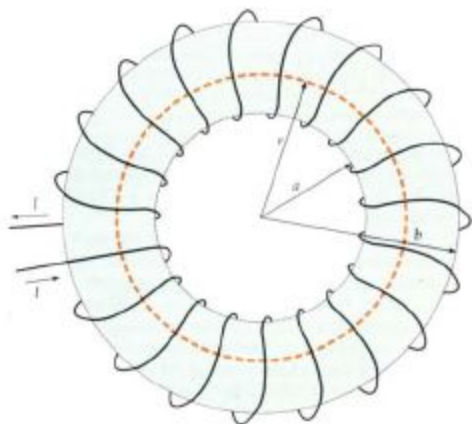


Figura 25-24 Un toroide está formado por espiras de alambre arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático. El campo magnético a cualquier distancia r puede determinarse aplicando la ley de Ampère al círculo de radio r .



Figura 25-22 Conductor largo de radio a que transporta una corriente I uniformemente distribuida en su área transversal. Debido a su simetría, el campo magnético a cualquier distancia r puede calcularse aplicando la ley de Ampère a una circunferencia de radio r .

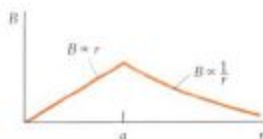


Figura 25-23 Representación de B en función de r para un conductor de radio a que transporta una corriente uniformemente distribuida en su área transversal. Dentro del conductor, el campo magnético es proporcional a la distancia r desde el eje al conductor.



(a)

(a) El reactor de ensayo de fusión Tokamak es un gran toroide que produce un campo magnético para confinar partículas cargadas. Las bobinas que contienen unos 10 km de alambre de cobre, refrigerado por agua, transportan una corriente pulsante con un valor pico de 75 000 A y produce un campo magnético de 5,2 T durante 3 s.



(b)

(b) Inspección del ensamblaje del Tokamak desde el interior del toroide.

Sean a y b los radios interior y exterior del toroide respectivamente. La corriente total a través del círculo de radio r para $a < r < b$ es NI . La ley de Ampère nos da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B2\pi r = \mu_0 I_C = \mu_0 NI$$

o sea,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad a < r < b$$

25-17

Campo magnético interior al toroide estrechamente arrollado

Si r es menor que a , no existe corriente a través del círculo de radio r . Si r es mayor que b , la corriente total a través de r es cero, pues por cada corriente I hacia dentro de la página de la figura 25-24 en la superficie interna del toroide, existe una corriente igual I hacia fuera de la página en la superficie exterior. Así, el campo magnético es cero, tanto para $r < a$ y $r > b$:

$$B = 0 \quad r < a \text{ o } r > b$$

El campo magnético interior al toroide no es uniforme, sino que decrece con r . Sin embargo, si el diámetro de las espiras del toroide, $b - a$, es mucho menor que su radio medio, la variación de r desde $r = a$ a $r = b$ es pequeña y B es aproximadamente uniforme como en un solenoide.

La ley de Ampère puede utilizarse también para determinar una expresión del campo magnético dentro de un solenoide estrechamente arrollado, suponiendo que el campo es uniforme dentro del solenoide y nulo en el exterior. Para ello escogemos el rectángulo de lados a y b indicado en la figura 25-25 para nuestra curva cerrada C . La corriente que pasa a través de esta curva es la corriente I de cada vuelta multiplicada por el número de vueltas existentes en la longitud a . Si el solenoide tiene n vueltas por unidad de longitud, el número de vueltas en la longitud a será na y la corriente a través de la curva rectangular será $I_C = naI$. La única contribución a la suma de la integral $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ para esta curva

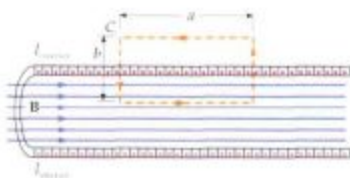


Figura 25-25 El campo magnético en el interior de un solenoide puede calcularse aplicando la ley de Ampère a la curva rectangular C indicada, admitiendo que B es uniforme en el interior y cero en el exterior. La integral de línea $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de la curva C es justamente Ba .

es la que corresponde a lo largo del lado mayor del rectángulo dentro del solenoide, la cual vale Ba . La ley de Ampère nos da

$$\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ba = \mu_0 I_C = \mu_0 n a l$$

El campo magnético dentro del solenoide es, por tanto,

$$B = \mu_0 n I$$

de acuerdo con la ecuación 25-10, que fue obtenida mediante la ley de Biot y Savart.

Limitaciones de la ley de Ampère

Para ver un ejemplo en el que la ley de Ampère no resulta útil para el cálculo del campo magnético debido a una corriente constante, consideremos una espira de corriente como la indicada en la figura 25-26. Hemos calculado el campo magnético en el eje de dicha espira a partir de la ley de Biot y Savart. De acuerdo con la ley de Ampère, la integral de línea $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de una curva tal como la C de la figura es igual a μ_0 multiplicado por la corriente I de la espira. Aunque la ley de Ampère es cierta para esta curva, el campo magnético B no es constante a lo largo de una curva cualquiera que rodea la corriente ni es en todos los puntos tangente a dicha curva. Así pues no hay simetría suficiente en este caso para permitirnos calcular B a partir de la ley de Ampère.

La figura 25-27 muestra un segmento de corriente finita de longitud ℓ . Deseamos encontrar el campo magnético en el punto P , el cual equidista de los extremos del segmento y está a una distancia r desde el centro del segmento. Una aplicación directa de la ley de Ampère nos da de nuevo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Este resultado es el mismo que en el caso de un conductor infinitamente largo puesto que tenemos los mismos razonamientos de simetría. El resultado no concuerda con el obtenido a partir de la ley de Biot-Savart. Esta ley da un resultado menor que depende de la longitud del segmento de corriente y concuerda con la experiencia. Si el segmento de corriente es sólo una parte de un circuito continuo que transporta una corriente, como se indica en la figura 25-28, la ley de Ampère es válida para la curva C , pero no puede utilizarse para determinar el campo magnético en el punto P porque no hay simetría.

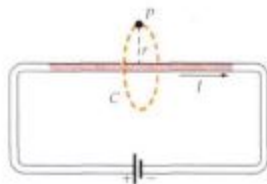


Figura 25-28 Si el segmento de corriente de la figura 25-27 es una parte de un circuito completo es correcta la ley de Ampère para la curva C , pero no existe la simetría suficiente para utilizarla con objeto de hallar el campo magnético en el punto P .

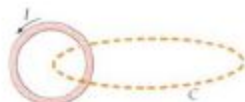


Figura 25-26 La ley de Ampère es válida para la curva C que envuelve a la corriente de la espira circular pero no es útil para hallar B debido a que B no es constante sobre la curva ni tangente a ella.

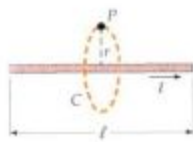


Figura 25-27 La aplicación de la ley de Ampère para hallar el campo magnético en la mediatriz de un segmento de corriente finita da un resultado incorrecto.

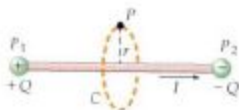


Figura 25-29 Si el segmento de corriente de la figura 25-27 es debido a un flujo momentáneo de carga desde un pequeño conductor a la izquierda hasta otro a la derecha, hay suficiente simetría para utilizar la ley de Ampère y calcular el campo magnético en P , pero la ley de Ampère no es válida porque la corriente no es continua en el espacio.

En la figura 25-29, la corriente en el segmento surge de un pequeño conductor esférico con una carga inicial $+Q$ a la izquierda del segmento y otra $-Q$ a la derecha. Cuando se conectan ambas cargas, durante un corto tiempo se produce en el segmento una corriente $I = -dQ/dt$ hasta que las esferas se descargan. En este caso, tenemos la simetría necesaria para suponer que \mathbf{B} es tangente a la curva y constante en magnitud a lo largo de la misma. En una situación como ésta, en la cual la corriente es discontinua en el espacio, la ley de Ampère no es válida. En el capítulo 29 veremos como Maxwell fue capaz de modificar la ley de Ampère, de modo que fuera válida para todas las corrientes. Cuando la forma generalizada de Maxwell para la ley de Ampère se utiliza para calcular el campo magnético correspondiente a un segmento de corriente como el indicado en la figura 25-29, el resultado concuerda con el obtenido mediante la ley de Biot y Savart.

Resumen

1. El campo magnético producido por una carga puntual q de velocidad \mathbf{v} en un punto a la distancia r viene dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo y μ_0 es una constante llamada permeabilidad del espacio libre, de magnitud

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

2. El campo magnético $d\mathbf{B}$ a una distancia r de un elemento de corriente $I d\boldsymbol{\ell}$ es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

lo cual se conoce como ley de Biot y Savart. El campo magnético es perpendicular, tanto al elemento de corriente como al vector \mathbf{r} dirigido desde el elemento de corriente al punto del campo considerado.

3. Las fuerzas magnéticas entre dos cargas móviles no obedecen la tercera ley de Newton sobre la acción y reacción, lo cual implica que el momento lineal del sistema de las dos cargas no se conserva. Sin embargo, cuando se incluye el momento asociado al campo electromagnético, se conserva el momento lineal total del sistema formado por las dos cargas, más el campo.
4. El campo magnético sobre el eje de una espira de corriente viene dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

en donde \mathbf{i} es un vector unitario dirigido a lo largo del eje de la espira. A grandes distancias de la espira, se tiene un campo dipolar:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{x^3}$$

en donde \mathbf{m} es el momento dipolar de la espira, cuya magnitud es el producto de la intensidad de la corriente por el área de la espira, y su dirección es perpendicular a la espira, según la regla de la mano derecha.

5. Dentro de un solenoide y lejos de los extremos, el campo magnético es uniforme y su magnitud es

$$B = \mu_0 n I$$

siendo n el número de vueltas por unidad de longitud del solenoide.

6. El momento magnético de un segmento de conductor rectilíneo, portador de corriente es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

en donde R es la distancia perpendicular al conductor y θ_1 y θ_2 son los ángulos subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor. Si el conductor es muy largo, o el punto del campo está muy próximo al conductor, el campo magnético vale aproximadamente

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

La dirección de B es tal que las líneas de campo magnético rodean el conductor en el sentido indicado por los dedos de la mano derecha cuando el pulgar apunta en la dirección de la corriente.

7. El campo magnético dentro de un toroide estrechamente arrollado viene dado por

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

en donde r es la distancia desde el centro del toroide.

8. El amperio se define de tal modo que dos conductores largos y paralelos transportando cada uno la corriente de 1 A y separados por 1 m ejercen una fuerza exacta el uno sobre el otro de 2×10^{-7} N/m.
9. La ley de Ampère relaciona la integral del componente tangencial del campo magnético alrededor de una curva cerrada con la corriente total I_C que pasa a través del área limitada por la curva:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C \quad C, \text{ cualquier curva cerrada}$$

La ley de Ampère sólo es válida si las corrientes son continuas. Puede utilizarse para deducir expresiones del campo magnético en situaciones de alto grado de simetría, tales como un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente; un toroide estrechamente arrollado; y un solenoide largo estrechamente arrollado.

Sugerencias bibliográficas

Banerjee, Subir K.: «Polar Flip-Flop». *The Sciences*, noviembre/diciembre 1984, pág. 24.

La primera mitad de este artículo es una deliciosa historia corta de nuestro conocimiento sobre el campo magnético terrestre. A continuación se discute la teoría moderna del campo magnético terrestre, así como la evidencia de que este campo puede experimentar una inversión norte-sur en los próximos 2000 años.

Carrigan, Charles R., y David Gubbins: «The Source of the Earth's Magnetic Field». *Scientific American*, febrero 1979, pág. 118.

La Tierra actúa como una gigantesca dinamo en la cual las corrientes eléctricas en el núcleo metálico fundido se auto-mantienen produciendo el campo magnético que desvía las agujas de las brújulas en la superficie.

Shamos, Morris H.: «Electromagnetism—Hans Christian Oersted», en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt and Co., New York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

Descripción de Oersted de su descubrimiento del campo magnético que acompaña a una corriente eléctrica con anotaciones editoriales aclaratorias y un resumen biográfico.

Williams, L. Pearce: «André-Marie Ampère», *Scientific American*, enero 1989, pág. 90.

Corta biografía de Ampère, describiendo sus experimentos y descubrimientos en electricidad y magnetismo y los fundamentos de sus métodos de investigación.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseer los siguientes conocimientos:

1. Establecer la ley de Biot y Savart y saber utilizarla para calcular el campo magnético \mathbf{B} producido por un conductor recto, portador de corriente, y sobre el eje de una espira circular de corriente.
2. Dibujar las líneas de campo magnético correspondientes a una corriente larga y rectilínea; una espira de corriente circular; un solenoide; y un toroide.
3. Establecer la ley de Ampère y discutir sus usos y limitaciones.
4. Usar la ley de Ampère para deducir las expresiones de \mathbf{B} correspondientes a una corriente recta infinita; un toroide; y un solenoide largo, estrechamente enrollado.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Permeabilidad del espacio libre	Balanza de corriente
Ley de Biot y Savart	Ley de Ampère
Solenoides	Toroide

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. El campo magnético debido a un elemento de corriente es paralelo a este elemento.
2. El campo magnético producido por un elemento de corriente varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia al elemento.
3. El campo magnético debido a un conductor largo varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia al conductor.
4. La ley de Ampère es válida sólo si existe un alto grado de simetría.
5. La ley de Ampère es válida sólo para corrientes continuas.

Problemas

Nivel I

25-1 Campo magnético creado por las cargas puntuales móviles

1. En un determinado instante una partícula de carga $q = 12 \mu\text{C}$ está localizada en $x = 0$, $y = 2 \text{ m}$; su velocidad en ese instante es $\mathbf{v} = 30 \text{ m/s } \hat{i}$. Determinar el campo magnético en (a) el origen; (b) $x = 0$, $y = 1 \text{ m}$; (c) $x = 0$, $y = 3 \text{ m}$; y (d) $x = 0$, $y = 4 \text{ m}$.
2. Determinar el campo magnético para la partícula del problema 1 en (a) $x = 1 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$; (b) $x = 2 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$; y (c) $x = 2 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$.
3. Un protón (carga $+e$), moviéndose con una velocidad de $\mathbf{v} = 1 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{i} + 2 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{j}$ está localizado en $x = 3 \text{ m}$, $y = 4 \text{ m}$ en un cierto instante. Determinar el campo magnético en las siguientes posiciones: (a) $x = 2 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$; (b) $x = 6 \text{ m}$, $y = 4 \text{ m}$; y (c) $x = 3 \text{ m}$, $y = 6 \text{ m}$.
4. Dos cargas iguales q localizadas en $(0, 0, 0)$ y $(0, b, 0)$ en el tiempo cero se mueven con velocidad \mathbf{v} en la dirección x positiva ($v \ll c$). Determinar la relación que existe entre las magnitudes de la fuerza magnética y electrostática sobre cada una de ellas.
5. Un electrón gira alrededor de un protón en una órbita de $5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$. Determinar el campo magnético en el protón producido por el movimiento orbital del electrón.

25-2 Campo magnético creado por corrientes eléctricas:

Ley de Biot y Savart

6. Un elemento pequeño de corriente $I d\ell$ en el que $d\ell = 2 \text{ mm } \hat{k}$ tiene una corriente $I = 2 \text{ A}$ y está centrado en el origen. Hallar el campo magnético $d\mathbf{B}$ en los puntos siguientes: (a) En el eje x en $x = 3 \text{ m}$, (b) en el eje $x = -6 \text{ m}$, (c) en el eje z en $z = 3 \text{ m}$, (d) en el eje y en $y = 3 \text{ m}$.

7. En el caso del elemento de corriente del problema 6, hallar el valor e e indicar la dirección de $d\mathbf{B}$ en el punto $x = 0$, $y = 3 \text{ m}$, $z = 4 \text{ m}$.

8. En el caso del elemento de corriente del problema 6, hallar el valor de $d\mathbf{B}$ e indicar su dirección en un diagrama para los puntos (a) $x = 2 \text{ m}$, $y = 4 \text{ m}$, $z = 0$; y (b) $x = 2 \text{ m}$, $y = 0$, $z = 4 \text{ m}$.

9. Una sola espira circular de radio $10,0 \text{ cm}$ ha de producir un campo en su centro que equilibre exactamente el campo terrestre en el ecuador, que vale $0,7 \text{ G}$ y está dirigido hacia el norte. Hallar la corriente en el conductor y hacer un esquema que muestre la orientación de la espira y de la corriente.

10. Un solenoide de longitud 30 cm , radio $1,2 \text{ cm}$ y 300 vueltas transporta una corriente de $2,6 \text{ A}$. Determinar el campo magnético sobre el eje del solenoide (a) en el centro, (b) dentro del solenoide en un punto situado a 10 cm de un extremo, y (c) en un extremo.

11. Un solenoide de $2,7 \text{ m}$ de longitud posee un radio de $0,85 \text{ cm}$ y 600 vueltas. Por él circula una corriente I de $2,5 \text{ A}$. Determinar aproximadamente el campo magnético \mathbf{B} sobre el eje del solenoide.

12. Una sola espira de alambre de radio 3 cm transporta una corriente de $2,6 \text{ A}$. ¿Cuál es la magnitud de \mathbf{B} sobre el eje de la espira en (a) el centro de la espira, (b) a 1 cm del centro, (c) a 2 cm del centro y (d) a 35 cm del centro?

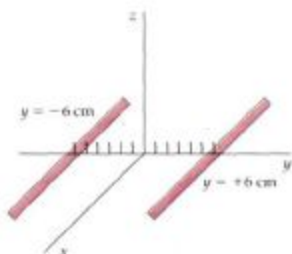
13. ¿En qué punto del eje de la espira del problema 12, el campo magnético es (a) el 10 por ciento del campo en el centro, (b) el 1 por ciento del campo en el centro y (c) el 0,1 por ciento del campo en el centro?

14. Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 10 A . Hallar el valor de \mathbf{B} a una distancia de (a) 10 cm , (b) 50 cm y (c) 2 m del centro del conductor.

Los problemas 15 a 20 se refieren a la figura 25-30, que muestra dos conductores rectilíneos largos, paralelos al eje x que

están contenidos en el plano xy . Uno de los conductores está en $y = -6$ cm y el otro en $y = +6$ cm. La corriente que circula por cada conductor es de 20 A.

Figura 25-30 Problemas 15 a 20.



15. Si las corrientes de la figura 25-30 circulan en el sentido negativo del eje de las x , hallar \mathbf{B} en los puntos situados en el eje y en (a) $y = -3$ cm, (b) $y = 0$, (c) $y = +3$ cm, (d) $y = +9$ cm.

16. Hacer una representación esquemática de \mathbf{B} en función de y para los puntos situados sobre el eje y cuando ambas corrientes circulan en el sentido negativo de las x .

17. Hallar \mathbf{B} en los puntos situados en el eje y como en el problema 15, pero en el caso en que la corriente que circula por el conductor en $y = -6$ cm circula en el sentido negativo del eje de las x , y la corriente en el otro circula en $y = +6$ cm en el sentido positivo del eje de las x .

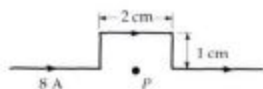
18. Hacer un esquema de \mathbf{B} en función de y para los puntos situados sobre el eje y cuando las corrientes tienen sentidos opuestos a los indicados en el problema 17.

19. Hallar \mathbf{B} en el punto situado en el eje z a $z = +8$ cm si (a) las corrientes son paralelas, como en el problema 15; (b) las corrientes son antiparalelas como en el problema 17.

20. Hallar el valor de la fuerza por unidad de longitud ejercida por un conductor sobre el otro.

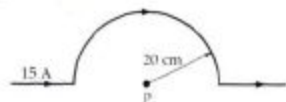
21. La corriente en el conductor de la figura 25-31 es 8,0 A. Hallar \mathbf{B} en el punto P debido a cada segmento del conductor y sumar para hallar el valor resultante de \mathbf{B} .

Figura 25-31 Problema 21.



22. Determinar el campo magnético del punto P en la figura 25-32.

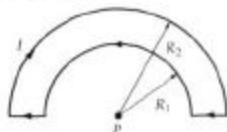
Figura 25-32 Problema 22.



23. Una sola espira circular de radio 8,5 cm ha de producir un campo en su centro que neutralice exactamente el campo terrestre de magnitud 0,7 G dirigido 70° por debajo de la dirección horizontal norte. Determinar la intensidad de la corriente y hacer un esquema que muestre la orientación de la espira y la corriente.

24. Hallar el campo magnético en el punto P de la figura 25-33 que es el centro común de los dos arcos de semicircunferencia.

Figura 25-33 Problema 24.



25-3 Definición del amperio

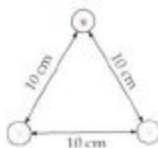
25. Por dos conductores rectilíneos paralelos situados a una distancia de 8,6 cm circulan corrientes de valor igual I . Se repelen entre sí con una fuerza por unidad de longitud de 3,6 nN/m. (a) ¿Son paralelas o antiparalelas las corrientes? (b) Hallar I .

26. Un conductor de 16 cm de longitud está suspendido por cables flexibles encima de un conductor rectilíneo largo. Se establecen en los conductores corrientes iguales y opuestas de modo que el conductor de 16 cm flota a 1,5 mm por encima del conductor largo sin que en los cables de suspensión aparezca ninguna tensión. Si la masa del conductor de 16 cm es 14 g, ¿cuál es la corriente?

27. En un experimento para alumnos con una balanza de corriente, el conductor superior cuya longitud es 30 cm está pivotado de modo que cuando no hay corriente se equilibra a 2 mm por encima de un conductor paralelo fijo, también de 30 cm de largo. Cuando por los conductores circulan corrientes iguales y opuestas I , el conductor superior se equilibra de nuevo en su posición original cuando se sitúa sobre él una masa de 2,4 g. ¿Cuál es la corriente I ?

28. Tres conductores rectilíneos largos y paralelos pasan a través de los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, según se ve en la figura 25-34, en donde los puntos indican que la corriente está dirigida hacia el lector y la cruz significa que está dirigida hacia el papel. Si cada corriente vale 15,0 A, hallar (a) la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el conductor superior y (b) el campo magnético \mathbf{B} en dicho conductor debido a los otros dos conductores inferiores. Indicación: Es más sencillo hallar la fuerza por unidad de longitud directamente a partir de la ecuación 25-14 y utilizar el resultado para hallar \mathbf{B} , que hallar \mathbf{B} primero y utilizarlo para hallar la fuerza.

Figura 25-34 Problemas 28 y 29.



29. Resolver el problema 28 cuando la corriente en el vértice derecho inferior de la figura 25-34 tiene sentido contrario.

25-4 Ley de Ampère

30. Por una corteza cilíndrica larga y recta de paredes delgadas cuyo radio vale R circula una corriente I . Hallar B en el interior y en el exterior del cilindro.

31. En la figura 25-35, una corriente vale 8 A y está dirigida hacia el papel, la otra corriente vale 8 A y está dirigida hacia el lector y cada una de las curvas de las trayectorias circular. (a) Hallar $\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ para cada trayectoria indicada. (b) ¿Cuál de las trayectorias, si es que la hay, puede utilizarse para hallar B en cualquier punto debido a estas corrientes?

Figura 25-35 Problema 31.

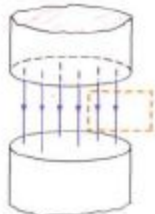


32. Un cable coaxial muy largo tiene un conductor interior y una corteza conductora cilíndrica exterior concéntrica con la anterior de radio R . En un extremo, el conductor interno se conecta a la corteza exterior. Por el otro extremo el conductor y la corteza están unidos a los terminales opuestos de una batería de modo que existe una corriente que circula por ambos. Admitir que el cable es rectilíneo y hallar B (a) en puntos alejados de los extremos y entre el conductor y la corteza y (b) en el exterior del cable.

33. Por un conductor de radio $0,5\text{ cm}$, circula una corriente de 100 A uniformemente distribuida en toda su sección recta. Hallar B (a) a $0,1\text{ cm}$ del centro del conductor, (b) en la superficie del mismo y (c) en un punto exterior al conductor a $0,2\text{ cm}$ de la superficie del conductor. (d) Construir un gráfico de B en función de la distancia al centro del conductor.

34. Demostrar que no es posible obtener un campo magnético uniforme en el que no existe ningún campo disperso, como se ve en la figura 25-36, debido a que viola la ley de Ampère. Comprobarlo aplicando la ley de Ampère a la curva rectangular indicada por las líneas a trazos.

Figura 25-36 Problema 34.



35. Un toroide estrechamente arrollado de radio interior 1 cm y radio exterior 2 cm posee 1000 vueltas de conductor y transporta una corriente de $1,5\text{ A}$. (a) ¿Cuál es el campo magnético a una distancia de $1,1\text{ cm}$ del centro? (b) ¿Y a $1,5\text{ cm}$ del centro?

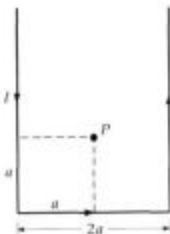
Nivel II

36. Un conductor de longitud L se enrolla en forma de una bobina circular de N espiras y transporta una corriente de intensidad I . Demostrar que el campo magnético en el centro de la bobina viene dado por $B = \mu_0 \pi N I / R$.

37. Por un conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de $20,0\text{ A}$. Un electrón está a $1,0\text{ cm}$ del centro del conductor y se mueve con una velocidad de $5,0 \times 10^6\text{ m/s}$. Hallar la fuerza sobre el electrón cuando se mueve (a) directamente alejándose del conductor, (b) paralelo al conductor en el sentido de la corriente y (c) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con el conductor.

38. Un conductor muy largo que transporta una corriente I se dobla en la forma indicada en la figura 25-37. Determinar el campo magnético en el punto P .

Figura 25-37 Problema 38.



39. Una espira conductora de longitud L transporta una corriente I . Comparar el campo magnético en el centro de la espira para los casos en que (a) se trata de una circunferencia, (b) un cuadrado y (c) un triángulo equilátero. ¿Cuál campo es mayor?

40. Un cable de transmisión de energía por el cual circulan $50,0\text{ A}$ está situado a $2,0\text{ m}$ por debajo de la superficie terrestre, pero se ignora su dirección y posición precisa. Explicar cómo podría localizarse utilizando una brújula. Admitir que se encuentra en el ecuador, en donde el campo magnético terrestre es $0,7\text{ G}$ dirigido hacia el norte.

41. Por cuatro conductores paralelos y rectilíneos circula una corriente I . En un plano perpendicular a los mismos, los conductores están en las esquinas de un cuadrado de lado a . Hallar la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre uno de los conductores si (a) todas las corrientes tienen el mismo sentido, y (b) las corrientes en los conductores situados en vértices adyacentes tiene sentido opuesto.

42. Una corriente I está distribuida uniformemente en toda la sección transversal de un conductor recto y largo de radio $1,40\text{ mm}$. En la superficie del conductor, el campo magnético tiene la magnitud $B = 2,46\text{ mT}$. Determinar la magnitud del campo magnético (a) a $2,10\text{ mm}$ del eje y (b) a $0,60\text{ mm}$ del eje. (c) Determinar la intensidad I de la corriente.

43. Un cable coaxial está formado por un conductor sólido interno cilíndrico de radio $1,00\text{ mm}$ y una corteza cilíndrica externa conductora de radio interno $2,00\text{ mm}$ y un radio ex-

terno de 3,00 mm. Por el conductor interior circula una corriente de intensidad 18 A y una corriente igual retorna por el conductor exterior. Las corrientes son uniformes en toda la sección transversal de cada conductor. Determinar el valor numérico de $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ para una trayectoria circular cerrada (centrada en el eje del cable y en un plano perpendicular al eje) de radio r para (a) $r=1,50$ mm, (b) $r=2,50$ mm y (c) $r=3,50$ mm.

44. Un conductor aislado infinitamente largo está sobre el eje x y transporta una corriente de intensidad I en la dirección x positiva. Un segundo conductor infinitamente largo y aislado está sobre el eje y y transporta la corriente $I/4$ en la dirección y positiva. ¿En qué punto del plano xy el campo magnético resultante es cero?

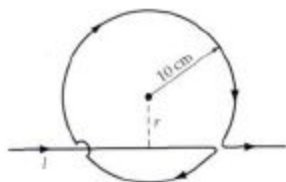
45. Una bobina circular de 50 vueltas y radio 10,0 cm transporta una corriente de 4,0 A. En el centro de esta gran bobina existe una pequeña bobina de 20 vueltas de radio 0,5 cm que transporta una corriente de 1,0 A. Los planos de las dos bobinas son perpendiculares. Determinar el momento ejercido por la bobina grande sobre la pequeña. (Despreciar cualquier variación de \mathbf{B} debida a que la gran bobina cubre la región ocupada por la pequeña.)

46. Puede construirse un amperímetro relativamente barato, denominado *galvanómetro de tangentes*, utilizando el campo terrestre. Una bobina circular plana de N espiras y un radio R está orientada de modo que el campo \mathbf{B}_t que se produce en el centro de la bobina está dirigido hacia el este o hacia el oeste. Se coloca en el centro de la misma una brújula. Cuando no circula corriente por la bobina, la brújula señala hacia el norte. Cuando existe una corriente I , la brújula señala en la dirección del campo magnético resultante \mathbf{B} formando un ángulo θ con el norte. Demostrar que la corriente I está relacionada con θ y con el componente horizontal del campo terrestre B_t por

$$I = \frac{2RB_t}{\mu_0 N} \tan \theta$$

47. Un conductor recto infinitamente largo se dobla en la forma indicada en la figura 25-38. La porción circular tiene un radio de 10 cm con su centro a la distancia r de la parte recta. Determinar r de modo que el campo magnético en el centro de la porción circular sea cero.

Figura 25-38 Problema 47.



48. Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R está situado a lo largo del eje z . En la mitad superior del cilindro hay cinco cables conductores largos, paralelos al mismo e igualmente espaciados. Cada cable transporta una corriente I en la dirección z positiva. Determinar el campo magnético sobre el eje z .

49. Un cable conductor infinitamente largo, situado a lo largo del eje z transporta una corriente de 20 A en la dirección

z positiva. Un segundo cable también infinitamente largo, es paralelo al eje z en $x=10$ cm. (a) Determinar la intensidad de la corriente en el segundo alambre sabiendo que el campo magnético en $x=2$ cm es cero. (b) ¿Cuál es el campo magnético en $x=5$ cm?

50. Tres alambres conductores muy largos y paralelos se hacen pasar por los vértices de un cuadrado, según se muestra en la figura 25-39. Calcular el campo magnético \mathbf{B} en el vértice no ocupado cuando (a) el sentido de todas las intensidades de corriente es hacia dentro del papel, (b) I_1 e I_2 circulan en el sentido hacia dentro e I_3 hacia fuera, y (c) I_1 e I_2 hacia dentro e I_3 hacia fuera.

Figura 25-39 Problema 50.



51. (a) Determinar el campo magnético en el punto P generado por la corriente de intensidad I que circula por el conductor mostrado en la figura 25-40. (b) Utilizar el resultado de (a) para determinar el campo en el centro de un polígono de N lados. Demostrar que cuando N es muy grande, el resultado se aproxima al del campo magnético en el centro de un círculo.

Figura 25-40 Problema 51.



52. Una espira circular de radio R por la que circula una corriente I está centrada en el origen con su eje dirigido a lo largo del eje x . Su corriente es tal que produce un campo magnético en el sentido positivo del eje de las x . (a) Hacer un esquema de B_x en función de x para todos los puntos del eje x . Incluir tanto valores positivos como negativos de x . Comparar este esquema con el correspondiente a E_x debido a un anillo cargado del mismo tamaño. (b) Otra segunda espira idéntica por la que circula la misma corriente y en el mismo sentido está en un plano paralelo al plano yz con su centro en el punto $x=d$. Hacer un esquema del campo magnético en el eje x debido a cada bobina por separado y el campo resultante debido a ambas bobinas. Demostrar a partir de este es-

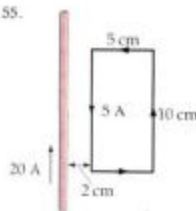
quema que dB_x/dx es cero en el punto medio entre las bobinas.

53. Dos bobinas que están separadas por una distancia igual a su radio y por ellas circulan corrientes iguales de modo que sus campos axiales se suman, se denominan **bobinas de Helmholtz**. Una característica de las bobinas de Helmholtz es que el campo magnético resultante entre ellas es muy uniforme. Sea $R = 10$ cm, $I = 20$ A y $N = 300$ vueltas para cada bobina. Situar una de ellas en el plano yz con su centro en el origen y la otra en un plano paralelo en $x = 10$ cm. (a) Calcular el campo resultante B_x en los puntos $x = 5$ cm, $x = 7$ cm, $x = 9$ cm y $x = 11$ cm. (b) Utilizar los resultados obtenidos y el hecho de que B_x es simétrico alrededor del punto medio de las bobinas para representar B_x en función de x . (Véase también el problema 62.)

54. Una corteza cilíndrica gruesa infinitamente larga de radio interior a y radio exterior b transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda la sección transversal de la corteza. Determinar el campo magnético en (a) $r < a$, (b) $a < r < b$, y (c) $r > b$.

55. Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 20 A, según se ve en la figura 25-41. Una bobina rectangular con dos de sus lados paralelos al conductor recto tiene sus lados de 5 y 10 cm estando su lado más próximo a una distancia de 2 cm del conductor. La bobina transporta una corriente de 5 A. (a) Determinar la fuerza que actúa sobre cada segmento de la bobina rectangular. (b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la bobina?

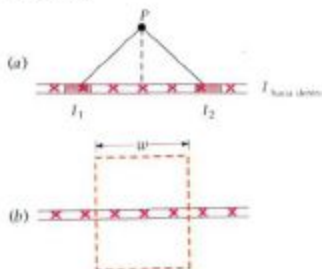
Figura 25-41 Problema 55.



56. El plano xz contiene una lámina infinita de corriente en la dirección z positiva. La intensidad de corriente por unidad de longitud (a lo largo de la dirección x) es λ . La figura 25-42a muestra un punto P por encima de la lámina ($y > 0$) y dos porciones de la lámina de corriente especificadas por I_1 e I_2 . (a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético B en P debido a las dos porciones de la corriente indicadas? (b) ¿Cuál es la dirección del campo magnético B en P debido a la lámina entera? (c) ¿Cuál es la dirección de B en un punto por debajo de la lámina ($y < 0$)? (d) Aplicar la ley de Ampère a la figura rectangular mostrada en la figura 25-42b y demostrar que el campo magnético en cualquier punto por encima de la lámina viene dado por

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 \lambda \hat{y}$$

Figura 25-42 Problema 56.



Nivel III

57. Una espira cuadrada de lado L yace en el plano yz con su centro en el origen. Transporta una corriente I . Determinar el campo magnético B en cualquier punto sobre el eje x y demostrar que para x mucho mayor que L ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{x^3}$$

en donde $m = IL^2$ es el momento magnético de la espira.

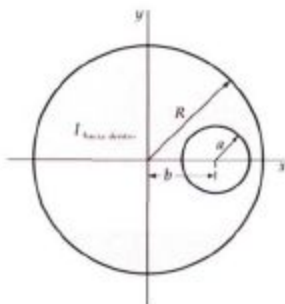
58. Una espira circular recorrida por una corriente I se encuentra en el plano yz con su eje a lo largo del eje x . (a) Evaluar la integral de línea $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo del eje de la espira desde $x = -L$ a $x = +L$. (b) Demostrar que cuando $L \rightarrow \infty$, la integral de línea se aproxima a $\mu_0 I$. Este resultado puede relacionarse con la ley de Ampère cerrando la curva de integración con una semicircunferencia de radio L para la cual $B = 0$ para valores muy grandes de L .

59. Un conductor rectilíneo muy largo posee una sección transversal circular de radio R y por él circula una intensidad de corriente I . En el interior del conductor se ha practicado un orificio cilíndrico de radio a , cuyo eje es paralelo al eje del conductor y se encuentra a una distancia b de éste (figura 25-43). Hacemos coincidir el eje del conductor con el eje z , y el eje del orificio cumple la condición $x = b$. Calcular el campo magnético B en los puntos (a) sobre el eje x en $x = 2R$, y (b) sobre el eje y en $y = 2R$. *Indicación:* Considerar una distribución de corriente uniforme a lo largo del cilindro de radio R , y que circula una corriente en sentido opuesto por el orificio.

60. Demostrar para el cilindro sobre el que se ha practicado un orificio del problema 59, que el campo magnético en el interior del orificio es uniforme y calcular su módulo y dirección.

61. Un disco de radio R lleva una carga fija de densidad σ y gira con velocidad angular ω . (a) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr con carga dq . Demostrar que la corriente producida por este anillo es $dI = (\omega/2\pi)dq = \omega r dr$. (b) Utilizar este resultado de la parte (a) para demostrar que

Figura 25-43 Problemas 59 y 60.



el campo magnético en el centro del disco es $B = \frac{1}{2} \mu_0 n i R$.
 (c) Utilizar el resultado de la parte (a) para hallar el campo magnético en un punto situado en el eje del disco a una distancia x del centro.

62. Dos bobinas de Helmholtz de radio R poseen sus ejes a lo largo del eje x (véase problema 53). Una de las bobinas está en el plano yz y la otra en un plano paralelo a $x = R$. Demostrar que en el punto medio de las bobinas ($x = \frac{1}{2} R$), $dB_x/dx = 0$, $d^2B_x/dx^2 = 0$ y $d^3B_x/dx^3 = 0$. Esto demuestra que el campo magnético en puntos próximos al punto medio es aproximadamente igual al correspondiente al punto medio.

63. Un solenoide posee n vueltas por unidad de longitud, un radio R y por él circula una corriente I . Su eje coincide con el eje x y uno de sus extremos se encuentra en $x = -\frac{1}{2} L$ y el otro en $x = +\frac{1}{2} L$, siendo L la longitud total del solenoide. Demostrar que el campo magnético B en cualquier punto del eje x viene dado por

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad 25-18$$

en donde

$$\cos \theta_1 = \frac{x + \frac{1}{2} L}{[R^2 + (x + \frac{1}{2} L)^2]^{1/2}}$$

y

$$\cos \theta_2 = \frac{x - \frac{1}{2} L}{[R^2 + (x - \frac{1}{2} L)^2]^{1/2}}$$

64. En el problema 63, se obtiene una fórmula para el campo magnético a lo largo del eje de un solenoide. Para $x \gg L$ y $L \gg R$, los ángulos θ_1 y θ_2 de la ecuación 25-18 son muy pequeños, de modo que la aproximación de ángulos pequeños $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$ es válida. (a) Dibujar un diagrama y demostrar que

$$\theta_1 = \frac{R}{x + \frac{1}{2} L}$$

y

$$\theta_2 = \frac{R}{x - \frac{1}{2} L}$$

(b) Demostrar que el campo magnético en un punto alejado de los extremos del solenoide puede escribirse en la forma

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{q_m}{r_1^2} - \frac{q_m}{r_2^2} \right) \quad 25-19$$

en donde $r_1 = x - \frac{1}{2} L$ es la distancia al extremo próximo del solenoide, $r_2 = x + \frac{1}{2} L$ es la distancia al extremo alejado y $q_m = nI\pi R^2 = m/L$, siendo $m = N\pi R^2$ el momento magnético del solenoide.

65. En este problema debe deducirse la ecuación 25-19 por otro método. Consideremos un solenoide estrechamente arrollado, largo, de longitud L y radio $R \ll L$, situado a lo largo del eje x con su centro en el origen. Posee N vueltas y transporta una corriente I . Consideremos un elemento del solenoide de longitud dx . (a) ¿Cuál es el momento magnético de este elemento? (b) Demostrar que el campo magnético dB debido a este elemento en un punto x_0 sobre el eje x , lejos del elemento, viene dado por

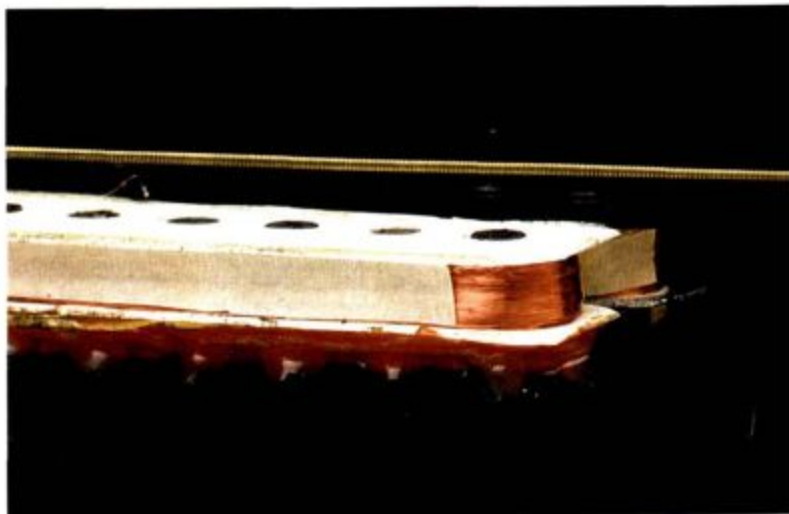
$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} nIA \frac{dx}{x^3}$$

en donde $A = \pi R^2$ y $x' = x_0 - x$ es la distancia desde el elemento al punto del campo. (c) Integrar esta expresión desde $x = -\frac{1}{2} L$ a $x = +\frac{1}{2} L$ para obtener la ecuación 25-19.

Capítulo 26

Inducción magnética

Sección transversal del fonocaptor de una guitarra eléctrica. Este dispositivo consta de un imán permanente cilíndrico arrollado por una bobina de alambre. La cuerda de la guitarra está imanada por el imán situado bajo la misma y produce un flujo magnético oscilante a través de la bobina del fonocaptor cuando entra en vibración. Por tanto, se induce en la bobina una corriente de igual frecuencia que la cuerda vibrante. La corriente es amplificada y enviada a un altavoz. (En esta foto la cuerda de la guitarra se ha colocado paralelamente a los seis pares de fonocaptadores. Cuando se toca la guitarra, las cuerdas están dispuestas perpendicularmente a la dirección mostrada aquí y cada una de ellas cruza sobre un par de fonocaptadores.)



En un capítulo anterior aprendimos que el paso de una corriente por un conductor crea un campo magnético. A principios de la década de 1830, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Norteamérica descubrieron independientemente que un campo magnético induce una corriente en un conductor, siempre que el campo magnético sea *variable*. A veces, al extraer la clavija del enchufe de un circuito eléctrico observamos la producción de una pequeña chispa. Antes de la desconexión, el cordón eléctrico transporta una corriente, que como sabemos genera un campo magnético alrededor de la corriente. Al desconectar, la corriente cesa bruscamente y el campo magnético que le rodea se colapsa. El campo magnético variable produce una fem que tiende a mantener la corriente original engendrando así una chispa a través del enchufe. Una vez el campo magnético se ha anulado y, por tanto, deja de ser variable, la fem es cero. Las fuerzas electromotrices y las corrientes causadas por los campos magnéticos variables se denominan **corrientes inducidas**. En sí mismo, el proceso se denomina **inducción magnética**.

En el caso del cordón eléctrico que se desconecta de su fuente de potencia, el campo magnético variable está causado por un cambio de la corriente eléctrica. No obstante, un campo magnético variable puede también producirse desplazando un imán. La figura 26-1 ilustra una simple demostración de cátedra sobre las corrientes inducidas. Los extremos del hilo de una bobina se conectan a un

galvanómetro y un imán intenso se introduce o se extrae de la bobina. La desviación momentánea de la aguja del galvanómetro *durante* el movimiento indica la existencia de una corriente eléctrica inducida en el circuito bobina-galvanómetro. También se produce una corriente inducida si la bobina se acerca o se aleja del conductor, o si la bobina gira en un campo magnético fijo. Una bobina girando en un campo magnético es el elemento básico de un generador que convierte la energía mecánica o térmica en energía eléctrica. En una central hidroeléctrica, las aguas de un río se almacenan en la presa y el agua se libera de forma controlada haciendo girar las bobinas del generador. En una central térmica se calienta agua y se produce vapor a expensas de la combustión del carbón o de la fisión nuclear. La presión del vapor se utiliza entonces para girar las bobinas.



Figura 26-1 Demostración de la fem inducida. Cuando el imán se aleja de la bobina se induce en ésta una fem como indica la desviación del galvanómetro. No se observa ninguna desviación con el imán en reposo.

Todos los métodos de inducción magnética pueden resumirse mediante una simple expresión llamada ley de Faraday, que relaciona la fem inducida en un circuito en el cambio de flujo magnético a través del circuito.

26-1 Flujo magnético

El flujo magnético es el análogo magnético al flujo eléctrico, que vimos en la sección 19-2. Está relacionado con el número de líneas de campo magnético que pasan a través de un área determinada. En la figura 26-2, el campo magnético es perpendicular al área limitada por un simple circuito formado por una vuelta de conductor. En este caso, el **flujo magnético** ϕ_m se define como el producto del campo magnético \mathbf{B} y el área A limitada por el circuito:

$$\phi_m = BA$$

La unidad de flujo magnético es la del campo magnético multiplicada por la unidad del área, tesla-metro cuadrado, y se denomina **weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad 26-1$$

Como el campo magnético es proporcional al número de líneas de campo magnético por unidad de área, el flujo magnético es proporcional al número de líneas que atraviesan el área.

Si el campo magnético no es perpendicular a la superficie, como en la figura 26-3, el flujo ϕ_m viene definido por

$$\phi_m = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}A = BA \cos \theta = B_n A \quad 26-2$$

en donde $B_n = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es el componente del vector campo magnético que es perpendicular o normal a la superficie.



Figura 26-2 Cuando el campo magnético \mathbf{B} es perpendicular al área cerrada por un bucle, el flujo magnético que atraviesa éste es BA .

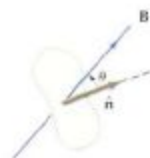


Figura 26-3 Si el campo \mathbf{B} forma un ángulo θ con la normal al área de un bucle, el flujo a través del mismo es $B \cos \theta A$.

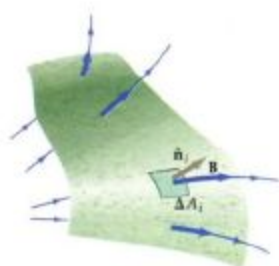


Figura 26-4 Cuando el campo B varía en magnitud o dirección, el área se divide en pequeños elementos ΔA_i . El flujo a través del área se calcula sumando $B_i \Delta A_i$ para todos los elementos de área.

Podemos generalizar nuestra definición de flujo magnético a superficies curvas en las cuales el campo magnético puede variar en magnitud o dirección (o ambas cosas), dividiendo la superficie en un gran número de elementos de área muy pequeños. Si cada elemento es suficientemente pequeño, puede considerarse como una superficie plana y la variación del campo magnético a través del elemento puede despreciarse. Sea \hat{n}_i el vector unitario perpendicular a tal elemento y ΔA_i su área (figura 26-4). El flujo del campo magnético a través de este elemento es

$$\Delta\phi_{mi} = \mathbf{B} \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$$

El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta\phi_{mi}$, extendida a todos los elementos. En el límite, cuando el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma se convierte en una integral. La definición general del flujo magnético es, por tanto,

$$\phi_m = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{B} \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} \, dA$$

Si se trata de una bobina de N vueltas, el flujo a su través es igual al producto de N por el flujo que atraviesa una sola vuelta

$$\phi_m = NBA \cos \theta \quad 26-3$$

Para el caso general en el cual \mathbf{B} no es necesariamente constante en todo el área, el flujo es

$$\phi_m = \int_S N \mathbf{B} \cdot \hat{n} \, dA = \int_S N B_n \, dA \quad 26-4$$

Definición de flujo magnético

Ejemplo 26-1

Un campo magnético uniforme de magnitud 2000 G forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 4 cm. Determinar el flujo magnético a través de la bobina.

Como $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$, este campo magnético en unidades SI es 0,2 T. El área de la bobina es

$$A = \pi r^2 = (3,14)(0,04 \text{ m})^2 = 0,00502 \text{ m}^2$$

El flujo a través de la bobina es, por tanto,

$$\phi_m = NBA \cos \theta = (300)(0,2 \text{ T})(0,00502 \text{ m}^2)(0,866) = 0,26 \text{ Wb}$$

Ejemplo 26-2

Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de 40 cm de longitud, cuyo radio es 2,5 cm, posee 600 vueltas y transporta una corriente de 7,5 A.

El campo magnético dentro del solenoide viene dado por la ecuación 25-10:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 n I = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(600 \text{ vueltas}/0,40 \text{ m})(7,5 \text{ A}) \\ &= 1,41 \times 10^{-2} \text{ T} \end{aligned}$$

Como el campo magnético es esencialmente constante a través del área transversal de la bobina, el flujo magnético es

$$\phi_m = NBA = (600)(1,41 \times 10^{-2} \text{ T})\pi(0,025 \text{ m})^2 = 1,66 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

Obsérvese que como $\phi_m = NBA$ y B es proporcional al número de vueltas N , el flujo es proporcional a N^2 .

26-2 Fem inducida y ley de Faraday

Los experimentos de Faraday, Henry y otros, demostraron que si el flujo magnético a través de un circuito varía por cualquier medio, se induce una fem que es igual en magnitud a la variación por unidad de tiempo del flujo inducido en el circuito. La fem se detecta usualmente observando una corriente en el circuito, pero aparece incluso aunque el circuito sea incompleto (abierto), de modo que no existe corriente. En nuestras discusiones previas, la fem en un circuito se localizó en una región específica del mismo, por ejemplo, entre los terminales de la batería. Sin embargo, la fem inducida por un flujo magnético variable puede considerarse distribuida a través del circuito.

Consideremos una sola espira de un conductor en un campo magnético, como se indica en la figura 26-5. Si el flujo a través de la espira es variable, se induce en la misma una fem. Como esta fem es el trabajo realizado por unidad de carga, debe existir una fuerza ejercida sobre la carga asociada con la fem. La fuerza por unidad de carga es el campo eléctrico E , inducido en este caso por el flujo variable. La integral lineal del campo eléctrico alrededor de un circuito completo es igual al trabajo realizado por unidad de carga, el cual, por definición, es la fem del circuito:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

26-5 Definición de fuerza electromotriz

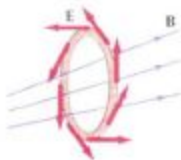


Figura 26-5 Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira de alambre es variable, se induce en la misma una fem. La fem se distribuye a través de toda la espira y equivale a un campo eléctrico no conservativo E paralelo al alambre. En esta figura el sentido de E corresponde al caso en que el flujo que atraviesa la espira es creciente.

Los campos eléctricos que hemos estudiado previamente eran el resultado de cargas eléctricas estáticas. Estos campos son conservativos, lo cual significa que la integral lineal del campo electrostático alrededor de una curva cerrada es cero. Sin embargo, el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable no es conservativo. La integral de línea alrededor de una curva cerrada es igual a la fem inducida, la cual es igual a la variación con el tiempo del flujo magnético:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

26-6 Ley de Faraday

Este resultado se conoce con el nombre de **ley de Faraday**. El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida, lo cual discutiremos más adelante.

Ejercicio

Demostrar que un weber por segundo es un voltio.

El flujo magnético a través de un circuito puede variarse de muchas maneras distintas: la corriente que produce el flujo puede aumentarse o hacerse disminuir;



Michael Faraday (1791-1867).

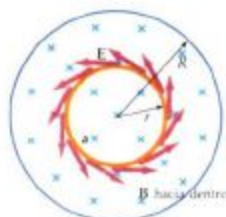


Figura 26-6 Diagrama correspondiente al ejemplo 26-3. El campo magnético \mathbf{B} es uniforme y perpendicular al papel hacia dentro y abarca una región circular de radio R . Al variar \mathbf{B} , el flujo magnético cambia y se induce una fem $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ alrededor de cualquier curva que encierre el flujo. El campo eléctrico inducido \mathbf{E} a una distancia r es tangente al círculo de radio r y posee el sentido indicado cuando \mathbf{B} es creciente.

pueden moverse unos imanes permanentes alejándolos o acercándolos al circuito; el propio circuito puede moverse alejándose o acercándose a la fuente de flujo; o puede aumentarse o disminuirse el área del circuito en el interior de un campo magnético fijo. En todos los casos, se induce una fem en el circuito cuyo valor es igual a la variación del flujo magnético por unidad de tiempo.

Ejemplo 26-3

Un campo magnético \mathbf{B} es perpendicular al plano de la página y es uniforme en una región circular de radio R como se indica en la figura 26-6. Fuera de la región circular, $\mathbf{B} = 0$. La variación por unidad de tiempo de la magnitud de \mathbf{B} es $d\mathbf{B}/dt$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en el plano de la página a una distancia r del centro de la región circular?

Según la ecuación 26-6, la integral lineal de \mathbf{E} alrededor de una curva cerrada es igual al valor negativo de la variación con el tiempo del flujo magnético a través de la curva. Como sólo nos interesan las magnitudes prescindiremos del signo negativo de esta ecuación. Por tanto

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d\phi_m}{dt}$$

En la figura, hemos elegido una curva circular de radio $r < R$ para calcular la integral de línea $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$. Por simetría, \mathbf{E} es tangente a esta curva y posee el mismo valor en cualquiera de sus puntos. Por tanto,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E(2\pi r)$$

Como \mathbf{B} es perpendicular al plano de esta curva, el flujo que atraviesa la misma es

$$\phi_m = BA = B\pi r^2$$

y la variación del flujo por unidad de tiempo es

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Por tanto, según la ecuación 26-6, resulta

$$2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

o sea,

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad r < R$$

Para un círculo de radio $r > R$, la integral de línea $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ es de nuevo $2\pi r E$. Sin embargo, como $\mathbf{B} = 0$ para $r > R$, el flujo es ahora $\pi R^2 B$. Para este caso, la ecuación 26-6 nos da

$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

Este ejemplo muestra que la ley de Faraday implica que un campo magnético variable produce un campo eléctrico.

Ejemplo 26-4

Una bobina de 80 vueltas tiene un radio de 5,0 cm y una resistencia de 30 Ω . Determinar cuál debe ser la variación del campo magnético perpendicular al plano de la bobina para inducir en ésta una corriente de 4,0 A.

La fem en la bobina debe ser igual a la caída de potencial a través de su resistencia:

$$\mathcal{E} = IR = (4,0 \text{ A})(30 \Omega) = 120 \text{ V}$$

Como el plano de la bobina es perpendicular al campo, el flujo es

$$\phi_m = NBA = N\pi r^2 B$$

Según la ley de Faraday, la magnitud de la fem inducida es igual a la variación temporal de este flujo. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = 120 \text{ V} &= \frac{d\phi_m}{dt} = N\pi r^2 \frac{dB}{dt} \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{120 \text{ V}}{(80)\pi(0,05 \text{ m})^2} = 191 \text{ T/s} \end{aligned}$$

Ejemplo 26-5

Una pequeña bobina de N vueltas tiene su plano perpendicular a un campo magnético uniforme B como indica la figura 26-7. La bobina se conecta a un integrador de corriente \odot , un aparato destinado a medir la carga total que le atraviesa. Determinar la carga que pasa a través de la bobina, cuando ésta gira a través de 180° alrededor de su diámetro.

El flujo a través de la bobina es

$$\phi_m = NBA$$

en donde N es el número de vueltas y A es el área de la bobina. Si ésta gira a través de 180° , el flujo se invierte, de modo que el cambio total de flujo tiene la magnitud $2NBA$. En tanto el flujo varía se genera una fem, y por tanto, existe una corriente en la bobina. La corriente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\phi_m}{dt}$$

en donde R es la resistencia total de la bobina. La carga total que pasa a través de la bobina es

$$\begin{aligned} Q &= \int I dt = \frac{1}{R} \int d\phi_m \\ &= \frac{\Delta\phi_m}{R} = \frac{2NBA}{R} \end{aligned}$$

La bobina descrita en el ejemplo 26-5, llamada **bobina balística**, se utiliza para medir campos magnéticos. Si una carga total Q pasa a través de la bobina cuando gira 180° , el campo magnético B resulta ser

$$B = \frac{RQ}{2NA} \quad 26-7$$

Ejercicio

Una bobina balística de 40 vueltas y radio 3 cm, posee una resistencia de 16 Ω . Si la bobina gira 180° en un campo magnético de 5000 G, ¿cuánta carga pasa a su través? (Respuesta: 7,07 mC)

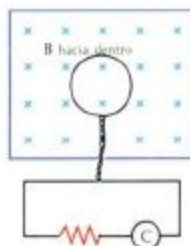


Figura 26-7 Circuito balístico para medir el campo magnético B . Al girar la bobina, la carga total que fluye a través del integrador de corriente \odot es proporcional a B .

26-3 Ley de Lenz

El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio general físico llamado **ley de Lenz**:

Ley de Lenz

La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

Este enunciado de la ley de Lenz no especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas. Intencionadamente queda sin concretar para cubrir una diversidad de condiciones. Algunos ejemplos aclararán este punto.

La figura 26-8 muestra una barra magnética que se mueve acercándose a una espira de resistencia R . Como el campo magnético correspondiente a la barra está dirigido hacia la derecha emergiendo de su polo norte, el movimiento del imán hacia la espira tiende a incrementar el flujo a través de la espira. (El campo magnético en la espira es más intenso cuando el imán está más próximo.) La corriente inducida en la espira produce a su vez un campo magnético propio. Esta corriente inducida posee el sentido que se muestra en la figura, de tal modo que el flujo magnético producido se opone al del imán. El campo magnético inducido tiende a *disminuir* el flujo que atraviesa la espira. Si el imán se desplazara alejándose de la espira, el flujo producido por el imán que atraviesa la espira disminuiría y la corriente inducida en ésta tendría un sentido opuesto al de la figura 26-8. En este caso, la corriente produciría un campo magnético hacia la derecha, el cual tendería a incrementar el flujo a través de la espira. Como es lógico, el desplazamiento de la espira acercándose o alejándose del imán produce el mismo efecto que el movimiento del imán. Sólo importa el movimiento relativo.

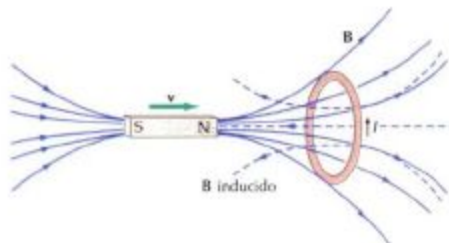


Figura 26-8 Cuando el imán en forma de barra se mueve hacia la espira, la fem inducida en ésta produce una corriente en el sentido indicado. El campo magnético debido a la corriente inducida en la espira (indicado por las líneas de puntos) produce un flujo que se opone al incremento de flujo a través de la espira debido al movimiento del imán.

La figura 26-9 muestra el momento magnético inducido de la espira de corriente cuando el imán se aproxima, del mismo modo que se indica en la figura 26-8. La espira actúa como un pequeño imán con su polo norte a la izquierda y su polo sur a la derecha. Como los polos opuestos se atraen y los polos iguales se repelen, el momento magnético inducido de la espira ejerce una fuerza sobre la barra magnética hacia la izquierda que se opone a su movimiento hacia la espira. Así, puede expresarse la ley de Lenz en función de las fuerzas en lugar de los flujos. Si la barra magnética se mueve hacia la espira, la corriente inducida debe producir un momento magnético que se oponga a este cambio.

Obsérvese que la ley de Lenz es una exigencia de la ley de conservación de la energía. Si la corriente de la espira en la figura 26-9 fuera opuesta al sentido indicado, el momento magnético inducido de la espira atraería al imán al moverse éste hacia la espira acelerándolo. Si comenzamos con el imán a gran distancia de la espira y le damos un pequeño empuje hacia ésta, la fuerza debida a la corriente inducida estaría dirigida hacia la espira, lo cual incrementaría la velocidad del imán. Este incremento provocaría un aumento de la variación del flujo

por unidad de tiempo, es decir, un incremento de la corriente inducida, y con ello, aumentaría la fuerza que actúa sobre el imán. Por tanto, la energía cinética del imán y el ritmo con que se genera el calor por efecto Joule en la espira (I^2R), se incrementarían sin la presencia de una fuente de energía. Ello violaría el principio de conservación de la energía.

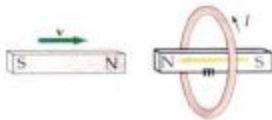


Figura 26-9 El momento magnético de la espira (indicado por el imán dibujado en su interior) debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barra imanada. Aquí, la barra se mueve hacia la espira, de modo que el momento magnético inducido repele la acción de la barra.

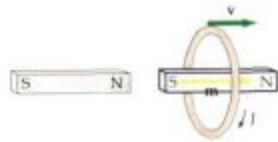


Figura 26-10 Cuando la espira se aleja de la barra magnética estacionaria, el momento magnético inducido en la misma atrae a la barra, oponiéndose de nuevo al movimiento relativo.

En la figura 26-10 el imán está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se indican también la corriente inducida y el momento magnético. En este caso el momento magnético de la espira atrae el imán, según exige la ley de Lenz, oponiéndose al movimiento de la espira.

En la figura 26-11 cuando se hace variar la corriente en el circuito 1, existe un cambio en el flujo que atraviesa el circuito 2. Supóngase que el interruptor S situado en el circuito 1 está inicialmente abierto careciendo por tanto de corriente este circuito (figura 26-11a). Cuando se cierra el interruptor (figura 26-11b), la corriente en el circuito 1, no alcanza su valor estacionario \mathcal{E}_1/R_1 instantáneamente, sino que tarda un tiempo breve para variar desde cero a este valor final. Durante este tiempo mientras la corriente está aumentando, el flujo del circuito 2 está variando y existe una corriente inducida en dicho circuito en el sentido indicado. Cuando la corriente del primer circuito alcanza su valor estacionario, el flujo deja de ser variable y no existirá ninguna corriente inducida en el circuito 2. Cuando se abra el interruptor en el circuito 1 (figura 26-11c) y la corriente disminuya hasta cero, aparecerá momentáneamente en el circuito 2 una corriente inducida en sentido opuesto. Es importante tener muy en cuenta que existe una fem inducida *sólo mientras el flujo está variando*. La fem no depende de la magnitud del flujo, sino solamente de la rapidez con que se verifica el cambio. Un flujo estacionario grande a través de un circuito no produce una fem inducida.

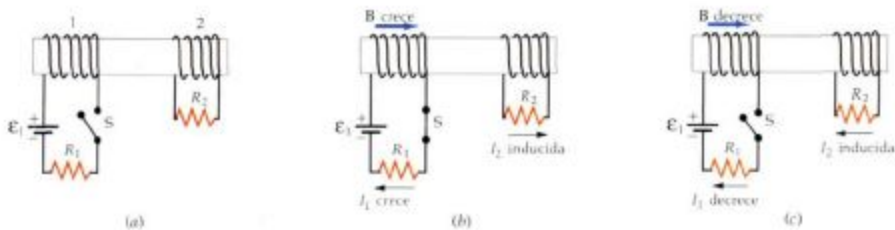


Figura 26-11 (a) Dos circuitos adyacentes. (b) En el momento de cerrar el interruptor, I_1 empieza a crecer en el sentido indicado. El flujo variable en el circuito 2 induce una corriente I_2 . El flujo debido a I_1 se opone al aumento de flujo

debido a I_1 . (c) Cuando se abre el interruptor, I_1 disminuye y B también. La corriente inducida I_2 tiende a mantener el flujo en el circuito oponiéndose al cambio.

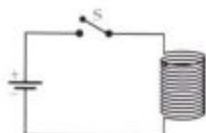


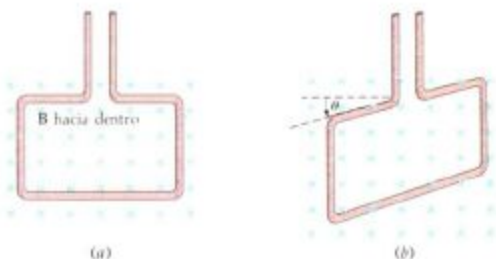
Figura 26-12 La bobina con muchas espiras de conductor origina un flujo grande para una corriente determinada en el circuito. La fem inducida en este circuito cuando la corriente varía se opone a dicha variación.

Como ejemplo siguiente consideraremos el circuito aislado sencillo que se muestra en la figura 26-12. Cuando existe una corriente en el circuito, existe un flujo magnético a través del mismo debido a su propia corriente. Cuando la corriente varía, el flujo también varía y existirá una fem inducida en el circuito. Esta fem *autoinducida* se opone a la variación de la corriente y se denomina *fuerza contraelectromotriz*. Debido a esta fem autoinducida la corriente de un circuito no puede saltar instantáneamente desde cero hasta un valor finito o desde cierto valor determinado hasta cero. El primero que observó este efecto fue Henry, cuando experimentaba con un circuito compuesto por muchas vueltas de alambre (figura 26-12), dispositivo que proporciona un flujo grande a través del circuito incluso aunque la corriente sea pequeña. Henry observó la presencia de una chispa que saltaba en el interruptor cuando intentaba abrir el circuito. Esta chispa se debe a la gran fem inducida que se presenta cuando la corriente varía rápidamente como sucede al abrir el interruptor. En este caso la fem inducida intenta mantener la corriente original. La gran fem inducida produce una gran caída de tensión a través del interruptor cuando éste se abre. El campo eléctrico entre los bornes del interruptor es suficientemente grande para arrancar electrones de las moléculas del aire, produciendo la ruptura del dieléctrico. Cuando las moléculas del dieléctrico aire están ionizadas, el aire conduce la corriente eléctrica en forma de chispa.

Cuestión

1. La figura 26-13a muestra una espira rectangular en un campo magnético uniforme perpendicular y dirigido contra el papel. Determinar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando esta gira hacia la posición indicada en la figura 26-13b.

Figura 26-13 (a) Un bucle rectangular cuyo plano es perpendicular a un campo magnético \mathbf{B} . (b) Al girar el bucle, el flujo que le atraviesa varía y se induce en él una fem.



26-4 Fem de movimiento

La figura 26-14 muestra una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia. Existe también un campo magnético \mathbf{B} uniforme dirigido hacia el papel. Como el flujo magnético a lo largo del circuito es variable (el área del circuito se incrementa mientras se desplaza la varilla), se induce una fem en el circuito. Si llamamos ℓ a la distancia que separa a los conductores que sirven de railes y x a la distancia desde el extremo izquierdo de los railes a la varilla en un instante dado, el área encerrada por el circuito es ℓx , y el flujo magnético en este instante es

$$\phi_m = BA = B\ell x$$

Cuando la barra se mueve a través de una distancia dx , el área incluida en el circuito cambia en $dA = \ell dx$ y el flujo se modifica en $d\phi_m = B\ell dx$. La variación de flujo por unidad de tiempo es

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

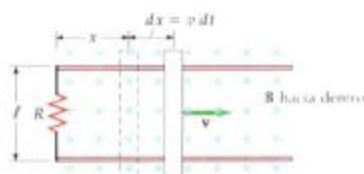


Figura 26-14 Varilla deslizante sobre raíles conductores en el interior de un campo magnético. Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el área del circuito crece y el flujo magnético que le atraviesa se incrementa. En el circuito se induce una fem de magnitud $B\ell v$ produciéndose una corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual genera un flujo saliente del papel que se opone al cambio.

en donde $v = dx/dt$ es la velocidad de la barra. Por tanto, la magnitud de la fem inducida en este circuito es

$$\left| \mathcal{E} \right| = \frac{d\Phi_m}{dt} = B\ell v$$

En este caso el sentido de la fem tiende a producir una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. El flujo producido por esta corriente inducida es saliente respecto al papel, oponiéndose al incremento de flujo provocado por el movimiento de la barra. Como la corriente inducida se dirige hacia arriba en la barra, se genera en la misma una fuerza de magnitud $I\ell B$. El sentido de esta fuerza, de acuerdo con la regla de la mano derecha, es hacia la izquierda, oponiéndose al movimiento de la barra. Si ésta se impulsa con cierta velocidad inicial v hacia la derecha y luego se deja en libertad, la fuerza generada por la corriente inducida frena la barra hasta detenerla. Para mantener la barra en movimiento, debe ejercerse una fuerza externa hacia la derecha.

La fem en este caso se denomina **fem de movimiento**. En general,

Fem de movimiento es toda fem inducida por el movimiento relativo de un campo magnético y un segmento de corriente.

Definición de fem de movimiento

La fem de movimiento se induce en una barra o alambre conductor que se mueve en un campo magnético incluso cuando el circuito no está completo y no existe corriente.

La figura 26-15 muestra un electrón en una barra conductora que se mueve a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia el papel. Como el electrón se mueve horizontalmente con la barra, actúa sobre él una fuerza magnética que posee un componente hacia abajo de magnitud qvB . Debido a esta fuerza magnética, los electrones libres de la barra se mueven hacia abajo, lo que da lugar a una carga neta negativa en el fondo y, por tanto, a una carga neta positiva en la parte superior. Los electrones continúan desplazándose hacia abajo hasta que el campo eléctrico producido por las cargas separadas ejerce una fuerza hacia arriba sobre los electrones de magnitud qE que equilibra la fuerza magnética qvB . En el equilibrio, el campo eléctrico en la barra es, por tanto,

$$E = vB$$

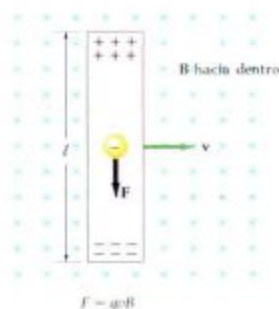


Figura 26-15 Un electrón en una barra conductora que se mueve a través de un campo magnético experimenta una fuerza magnética que tiene un componente hacia abajo. Los electrones se desplazan hacia la parte baja de la barra, dejando positiva la parte alta de la misma. La separación de cargas produce un campo eléctrico de magnitud $E = vB$. El potencial en la parte alta de la barra es mayor que en el fondo, siendo su valor $E\ell = vB\ell$.

La diferencia de potencial a través de la barra es

$$\Delta V = E\ell = vB\ell$$

Esta diferencia de potencial es igual a la magnitud de la fem inducida, es decir, la fem de movimiento:

$$\text{Fem de movimiento} \quad \left| \mathcal{E} \right| = vB\ell \quad 26-8$$

La fem de movimiento es un ejemplo de la ley de Faraday, en el cual puede entenderse el origen de la fem considerando las fuerzas conocidas que actúan sobre los electrones del circuito. La figura 26-16 muestra un electrón típico en la barra conductora moviéndose hacia la derecha dentro de un campo magnético dirigido hacia el papel. La velocidad de un electrón típico v_e forma un ángulo θ con la barra como indica la figura. Posee un componente vertical hacia abajo $v_d = v_e \cos \theta$, que es la velocidad de desplazamiento, y un componente horizontal, $v = v_e \sin \theta$ igual a la velocidad de la barra. La fuerza magnética $f_m = -e\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$ se encuentra en el plano de la figura y es perpendicular a v_e como se indica. Su magnitud es

$$f_m = ev_e B \quad 26-9$$

Si f_m fuera la única fuerza que actúa sobre el electrón, éste no podría permanecer sobre la barra que se mueve hacia la derecha. La barra ejerce una fuerza horizontal f_t sobre el electrón que equilibra el componente horizontal de f_m , es decir, $f_m \cos \theta$:

$$f_t = f_m \cos \theta \quad 26-10$$

Como la fuerza magnética f_m es perpendicular al movimiento del electrón, no realiza ningún trabajo. El trabajo realizado sobre el electrón lo verifica la fuerza f_t . Cuando el electrón se mueve por la barra hacia abajo, ésta se mueve hacia la derecha, de modo que el electrón sigue una trayectoria diagonal de longitud $S = \ell / \cos \theta$ indicada en la figura. Como el componente de f_t en la dirección del movimiento es $f_t \sin \theta$, el trabajo realizado sobre el electrón, cuando éste recorre la longitud completa de la barra es

$$W = f_t \sin \theta S = (f_m \cos \theta) \sin \theta S = f_m \sin \theta \ell$$

en donde $\ell = S \cos \theta$ es la longitud de la barra. Sustituyendo $ev_e B$ por f_m , se obtiene

$$W = ev_e B \sin \theta \ell$$

Como $v_e \sin \theta$ es la velocidad de la barra v , podemos escribir:

$$W = eBv \ell \quad 26-11$$

El trabajo por unidad de carga es la fem $B\ell v$, de acuerdo con el resultado obtenido a partir de la ley de Faraday.

Como la barra ejerce una fuerza f_t sobre cada electrón, cada uno de éstos

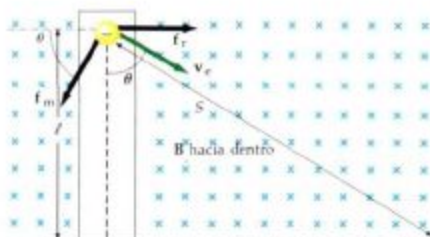


Figura 26-16 Fuerzas que actúan sobre un electrón en la barra de la figura 26-14. La velocidad del electrón v_e posee un componente horizontal v , velocidad de la barra y un componente vertical v_d , velocidad de desplazamiento a lo largo de la barra. La fuerza magnética f_m es perpendicular a v_e y no realiza trabajo. La barra ejerce una fuerza horizontal f_t sobre el electrón de magnitud $f_m \cos \theta$. Esta fuerza tiene un componente en la dirección de movimiento del electrón y por tanto verifica un trabajo. El trabajo por unidad de carga es igual a $B\ell v$.

ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la barra. Esta fuerza se ejerce hacia la izquierda en la figura 26-16. Si la barra posee un área transversal A y existen n electrones libres por unidad de volumen, el número total de electrones en la barra es $nA\ell$. La fuerza total ejercida sobre la barra es

$$F = nA\ell f_x = nA\ell j_m \cos \theta = nA\ell ev_d B \cos \theta \quad 26-12$$

Teniendo en cuenta que $v_d \cos \theta = v_d$ es la velocidad de desplazamiento de los electrones y $nAev_d = I$ es la intensidad total de corriente en la barra, podemos sustituir $nAev_d \cos \theta$ por I en la ecuación 26-12, resultando para la fuerza total ejercida por los electrones sobre la barra la expresión

$$F = I\ell B \quad 26-13$$

que coincide con la ecuación 24-4, correspondiente a la fuerza magnética ejercida sobre un segmento portador de corriente. Para que la barra se mantenga con velocidad constante v , debe ejercerse hacia la derecha una fuerza externa de magnitud $F = I\ell B$. La potencia disipada por esta fuerza es igual al producto de la fuerza por la velocidad:

$$P = Fv = I\ell Bv$$

Igualando esta potencia con la producción de calor de Joule por unidad de tiempo en la resistencia, $I^2 R$, se obtiene:

$$I\ell Bv = I^2 R$$

es decir,

$$B\ell v = IR$$

Por tanto, la fem inducida $\mathcal{E} = B\ell v$ es igual a la caída de potencial a través de la resistencia $\Delta V = IR$.

Ejercicio

Una barra de 40 cm de longitud se mueve a la velocidad de 12 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 3000 G. Su vector velocidad es perpendicular a su longitud. Determinar la fem inducida en la barra. (Respuesta: 1,44 V)

Ejemplo 26-6

En la figura 26-14, sea $B = 0,6$ T, $v = 8$ m/s, $\ell = 15$ cm y $R = 25$ Ω , y suponer que la resistencia de las barras y los railes es despreciable. Determinar (a) la fem inducida en el circuito, (b) la intensidad de corriente en el circuito, (c) la fuerza necesaria para mover la barra con velocidad constante y (d) la potencia disipada en la resistencia.

(a) La fem viene dada por la ecuación 26-8:

$$\mathcal{E} = Bv\ell = (0,6 \text{ T})(8 \text{ m/s})(0,15 \text{ m}) = 0,72 \text{ V}$$

(b) Como la resistencia total del circuito es 25 Ω , la intensidad de corriente será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0,72 \text{ V}}{25 \Omega} = 28,8 \text{ mA}$$

(c) La fuerza necesaria para mover la barra con velocidad constante es igual y opuesta a la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la barra. La magnitud de esta fuerza es

$$F = I\ell B = (0,0288 \text{ A})(0,15 \text{ m})(0,6 \text{ T}) = 2,59 \text{ mN}$$

(d) La potencia disipada en la resistencia es

$$P = I^2 R = (0,0288 \text{ A})^2 (25 \Omega) = 20,7 \text{ mW}$$

La respuesta (d) puede comprobarse calculando la potencia disipada por la fuerza determinada en (c):

$$P = Fv = (2,59 \times 10^{-3} \text{ N})(8 \text{ m/s}) = 2,07 \times 10^{-2} \text{ W} = 20,7 \text{ mW}$$

Ejemplo 26-7

En la figura 26-14, la barra posee una masa m . En el tiempo $t=0$, la barra se mueve con velocidad inicial v_0 , y se suprime la fuerza externa que actúa sobre ella. Determinar la velocidad de la barra en función del tiempo.

La corriente inducida en el circuito es \mathcal{E}/R , en donde $\mathcal{E}=B\ell v$ es la fem inducida. La magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre la barra es, por tanto,

$$F = IB\ell = \frac{\mathcal{E}}{R} B\ell \\ = \frac{B\ell v}{R} B\ell = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

Esta fuerza posee una dirección opuesta a la del movimiento. Si tomamos el sentido de la velocidad inicial como positivo, la fuerza es negativa y la segunda ley de Newton aplicada a la barra nos da

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \\ - \frac{B^2 \ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

Separando las variables e integrando resulta

$$\frac{dv}{v} = - \frac{B^2 \ell^2}{mR} dt \\ \ln v = - \frac{B^2 \ell^2}{mR} t + C$$

en donde C es una constante arbitraria de integración. Por tanto,

$$v = e^C e^{-B^2 \ell^2 / mR t} = v_0 e^{-B^2 \ell^2 / mR t}$$

siendo $v_0 = e^C$ la velocidad en el tiempo $t=0$.

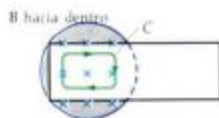


Figura 26-17 Corrientes turbillonarias o de Foucault. Si el campo magnético a través de un metal varía, se induce una fem en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal como la curva C indicada. La fem inducida produce una corriente en este circuito.

26-5 Corrientes de Foucault o turbillonarias

En los ejemplos que acabamos de estudiar las corrientes producidas por un flujo variable se establecieron en circuitos definidos. Frecuentemente un flujo variable establece unas corrientes circulantes, denominadas **corrientes de Foucault** o **turbillonarias**, en un trozo de metal como el núcleo de un transformador. (Los transformadores serán discutidos en la sección 28-6.) El calor producido por estas corrientes constituye una pérdida de potencia en el transformador.

Consideremos un bloque conductor entre las piezas polares de un electroimán como indica la figura 26-17. Si el campo magnético B entre los polos varía con el tiempo (como sucede si la corriente en los arrollamientos del imán es una corriente alterna), el flujo que atraviesa cualquier circuito cerrado del bloque será variable. Por ejemplo, el flujo que atraviesa la curva cerrada C que se ha indicado en la figura es exactamente igual al campo magnético B multiplicado por el área encerrada por dicha curva. Si B varía, variará también el flujo y existirá una fem inducida a lo largo de la curva C . Puesto que la trayectoria C es conductora, existirá una corriente determinada por el valor de la fem dividida por la resistencia de la trayectoria. En esta figura hemos indicado sólo uno de los muchos trayectos cerrados por los que circularán corrientes si varía el campo magnético situado entre las piezas polares.

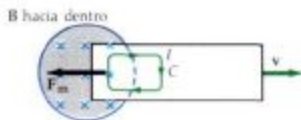


Figura 26-18 Demostración de las corrientes turbilónicas. Cuando el bloque metálico se empuja hacia la derecha, existe una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la corriente inducida que se opone al movimiento.

Puede hacerse una demostración que compruebe la existencia de corrientes de Foucault sacando una lámina de cobre o de aluminio que está situada entre los polos de un imán permanente intenso (figura 26-18). Parte del área encerrada por la curva C en esta figura está en el interior del campo magnético y otra parte es exterior al mismo. Cuando se tira de la lámina hacia la derecha, el flujo a través de esta curva disminuye (admitiendo que el flujo dirigido hacia el papel es positivo). De acuerdo con la ley de Faraday y la ley de Lenz existirá una corriente en el sentido de las agujas del reloj inducida a lo largo de esta curva. Puesto que esta corriente está dirigida hacia arriba en la región situada entre las piezas polares, el campo magnético ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda sobre la corriente, que se opone al movimiento de la lámina. Se puede apreciar esta fuerza sobre la lámina si se intenta tirar rápidamente de la misma a través de un campo magnético fuerte.

Las corrientes circulantes o corrientes de Foucault normalmente son perjudiciales debido a que el calor producido no solamente constituye una pérdida de potencia sino que hay que disiparlo. La pérdida de potencia puede reducirse aumentando la resistencia de los caminos posibles que han de seguir las corrientes de Foucault, como se ven en la figura 26-19. En este caso el bloque conductor de la figura 26-17 está en forma de láminas, es decir, formado por unas tiras pequeñas pegadas juntas. Debido a la resistencia entre las tiras, las corrientes de Foucault están confinadas esencialmente a ellas. Se han roto por lo tanto los grandes circuitos por donde pueden circular las corrientes de Foucault y se reduce en gran manera la pérdida de potencia. Si la lámina de la figura 26-19 tiene cortes en ella, como se ve en la figura 26-20, para reducir las corrientes de Foucault, será también muy reducida la fuerza que se observa. La figura 26-21 ilustra una demostración clásica de cátedra de un freno magnético. El aparato consta de una lámina de metal fija al extremo de una barra que oscila como un péndulo. Cuando las oscilaciones se verifican entre las piezas polares de un imán, la barra se amortigua rápidamente. Si el campo magnético es suficientemente intenso, el movimiento cesa súbitamente en el primer encuentro de la lámina con el campo magnético. Si la lámina tiene estrías, como indica la figura 26-21c, el amortiguamiento se reduce considerablemente.

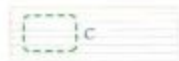


Figura 26-19 Las corrientes de Foucault en un bloque de metal pueden reducirse construyendo el bloque mediante tiras o láminas. La resistencia del trayecto indicado por C es ahora grande debido al pegamento que se utiliza entre las láminas.

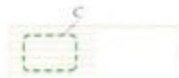


Figura 26-20 Si el bloque metálico tiene unos cortes como los indicados, las corrientes de Foucault se reducen debido a la falta de buenos caminos conductores.

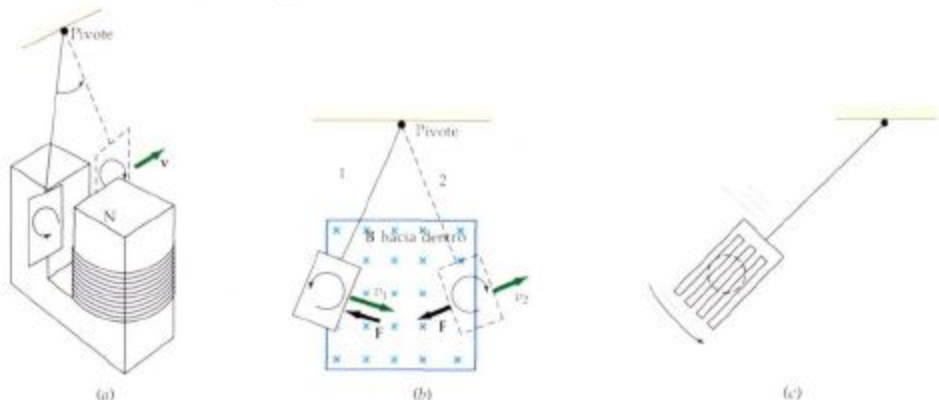


Figura 26-21 Demostración de cátedra de un freno magnético. (a) Un péndulo cuya lenteja es una lámina metálica se separa ampliamente de la vertical y se deja en libertad, oscilando entre los polos de un electroimán. (b) La lenteja es frenada considerablemente por la fuerza magnética que actúa sobre las corrientes inducidas de

Foucault cuando la lámina entra o sale del campo. Si el campo magnético es bastante intenso, la lámina se detiene entre los polos del imán. (c) Si la lámina tiene ranuras, las corrientes de Foucault se reducen grandemente y puede oscilar apenas sin freno a través del campo magnético.

Las corrientes de Foucault no siempre son perjudiciales. Se usan con frecuencia para amortiguar oscilaciones molestas. Por ejemplo, las balanzas mecánicas sensibles, utilizadas en el peso de pequeñas masas, tienden a oscilar a derecha e izquierda alrededor de la lectura de equilibrio muchas veces. Por ello, estas balanzas se diseñan usualmente con una pequeña pieza metálica que se mueve entre los polos de un imán cuando la balanza oscila. Las corrientes turbilhonarias resultantes amortiguan las oscilaciones de modo que el equilibrio se alcanza más rápidamente. Otro uso de estas corrientes es proporcionar un *frenado magnético* en vehículos de transporte rápidos. Un gran electroimán se sitúa en el vehículo sobre los raíles. Cuando pasa corriente por los arrollamientos del imán, se inducen corrientes turbilhonarias en los raíles a causa del movimiento del imán y las fuerzas magnéticas resultantes proporcionan una fuerza de arrastre sobre el vehículo que le detiene.

Cuestión

- Se deja caer un imán en forma de barra en el interior de un tubo vertical largo. Si el tubo es metálico, el imán alcanza rápidamente una velocidad límite, cosa que no ocurre si el tubo está hecho de cartón. Explíquese.

26-6 Generadores y motores

La mayor parte de la energía eléctrica utilizada actualmente se produce mediante generadores eléctricos en forma de corriente alterna (ca). Un simple **generador** de corriente alterna está formado por una espira en rotación dentro de un campo magnético uniforme como indica la figura 26-22. Los extremos de la espira están conectados a unos anillos deslizantes que giran con la espira. El contacto eléctrico con la espira se realiza mediante escobillas estacionarias de grafito en contacto con los anillos. Cuando la línea perpendicular al plano de la espira forma un ángulo θ con un campo magnético uniforme B , como se indica en la figura, el flujo magnético a través de la espira es

$$\phi_m = NBA \cos \theta \quad 26-14$$

siendo N el número de vueltas de la bobina y A el área de la misma. Cuando la bobina gira mecánicamente, el flujo a su través cambia con el tiempo y según la ley de Faraday, se inducirá en la bobina una fem. Si el ángulo inicial es δ , al cabo de cierto tiempo t el ángulo será

$$\theta = \omega t + \delta$$

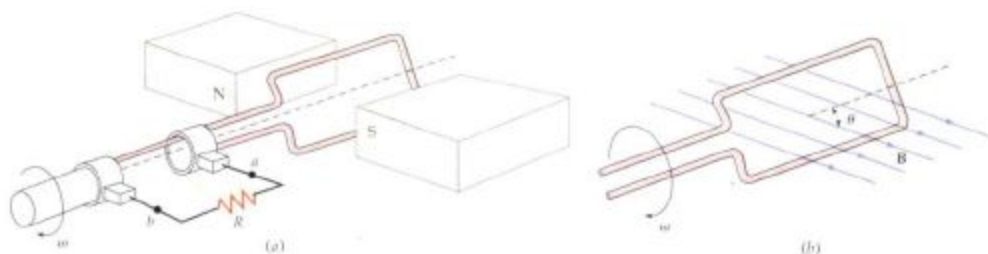
en donde ω es la frecuencia angular de rotación. Sustituyendo esta expresión de θ en la ecuación 26-14, se obtiene

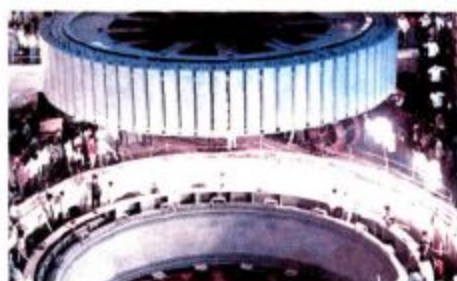
$$\phi_m = NBA \cos (\omega t + \delta) = NBA \cos (2\pi ft + \delta)$$

La fem en la bobina será, por tanto

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_m}{dt} = - NBA \frac{d}{dt} \cos (\omega t + \delta) = + NBA \omega \sin (\omega t + \delta) \quad 26-15$$

Figura 26-22 (a) Generador de ca. Una bobina girando con frecuencia angular constante ω en un campo magnético B genera una fem sinusoidal. La energía procedente de un salto de agua o de una turbina de vapor se utiliza para hacer girar la bobina y producir energía eléctrica. La fem se suministra a un circuito externo mediante las escobillas en contacto con los anillos. (b) En este instante la normal al plano de la espira forma un ángulo θ con el campo magnético y el flujo es $BA \cos \theta$.





Generador en construcción en China. La fotografía muestra la operación de montaje del motor correspondiente al turbogenerador # 1 en la central de potencia de Dahua.

Esta ecuación puede también escribirse en la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \sin(\omega t + \delta) \quad 26-16$$

en donde

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NBA\omega \quad 26-17$$

es el valor máximo de la fem. Es posible, por tanto, producir una fem sinusoidal en una bobina haciéndola girar con frecuencia constante en un campo magnético. En esta fuente de fem, la energía mecánica de la bobina rotatoria se convierte en energía eléctrica. La energía mecánica procede usualmente de un salto de agua o de una turbina de vapor. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, trabajan según el mismo principio que tiene lugar cuando una fem alterna se produce al girar una espira en un campo magnético y se diseñan de modo que la fem generada es sinusoidal.

La misma bobina en un campo magnético que se utiliza para generar una fem alterna, puede también usarse como motor de ca. En lugar de girar mecánicamente la bobina para generar una fem, se aplica una corriente alterna a la bobina procedente de otro generador de ca como muestra la figura 26-23. (En los diagramas un generador de ca se representa con el símbolo \oplus .) Ya vimos en el capítulo 24 que una espira de corriente en un campo magnético experimenta la acción de un momento que tiende a girar la espira de modo que su momento magnético apunte en la dirección de \mathbf{B} y el plano de la espira sea perpendicular a \mathbf{B} . Si la corriente suministrada a la espira en la figura 26-23 fuera continua, el momento aplicado cambiaría de sentido al pasar la espira por su posición de equilibrio, lo cual ocurre cuando su plano es vertical en la figura. La espira oscilaría entonces alrededor de su posición de equilibrio y eventualmente alcanzaría el reposo con su plano vertical. Sin embargo, si la dirección de la corriente se invierte justamente cuando la espira pasa por la posición vertical, el momento aplicado no cambia de sentido, sino que continúa haciendo que la espira gire en el mismo sentido. Cuando la espira gira en el campo magnético, se genera una fuerza contraelectromotriz que tiende a contrarrestar la fem que suministra la corriente. Cuando el motor se pone en marcha, no hay fuerza contraelectromotriz y la corriente es muy intensa, limitada sólo por la resistencia del circuito. Cuando el motor comienza a girar la fuerza contraelectromotriz se incrementa y la intensidad de corriente disminuye.

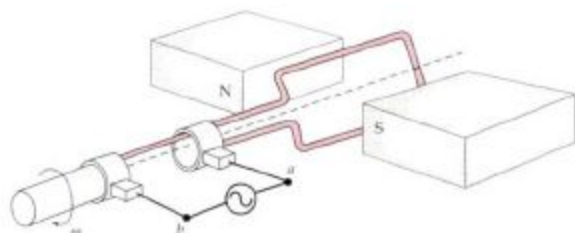


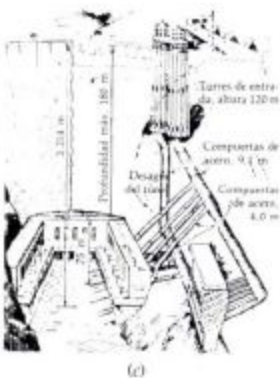
Figura 26-23 Al suministrar corriente a la bobina de la figura 26-22, la bobina se convierte en un motor. Cuando gira la bobina se genera una fuerza contraelectromotriz que limita la corriente.



(a)



(b)



(c)

(a) Vista a nivel del río de la presa de Hoover, con la vertiente de Nevada de su planta de potencia a la izquierda, y la vertiente de Arizona a la derecha. La energía mecánica del salto de agua activa las turbinas que pueden verse en (b) para la generación de electricidad. (c) Dibujo esquemático de la presa de Hoover mostrando las torres de entrada y los tubos que transportan el agua a los generadores en la parte baja.

Ejemplo 26-8

Una bobina de 250 vueltas tiene un área de 3 cm^2 . Si gira en un campo magnético de $0,4 \text{ T}$ con una frecuencia de 60 Hz , ¿cuál es su \mathcal{E}_{max} ?

Según la ecuación 26-17, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{max}} &= NBA\omega = NBA(2\pi f) = (250)(0,4 \text{ T})(3 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(2\pi)(60 \text{ Hz}) \\ &= 11,3 \text{ V}\end{aligned}$$

Ejemplo 26-9

Los arrollamientos de un motor de cc poseen una resistencia de $1,5 \Omega$. Cuando el motor se conecta a 40 V y gira a plena velocidad, la corriente que circula por los arrollamientos es de $2,0 \text{ A}$. (a) ¿Cuál es el valor de la fuerza contraelectromotriz cuando el motor gira a plena velocidad? (b) ¿Cuál es el valor de la corriente inicial en los arrollamientos al arrancar, cuando la fuerza contraelectromotriz es despreciable?

(a) La caída de potencial a través de los arrollamientos es

$$V = IR = (2,0 \text{ A})(1,5 \Omega) = 3 \text{ V}$$

Como la caída total de potencial a través del motor es 40 V , la fuerza contraelectromotriz es $40 \text{ V} - 3 \text{ V} = 37 \text{ V}$.

(b) Al poner en marcha el motor, la fuerza contraelectromotriz es despreciable. Como la caída de potencial a través del motor es todavía 40 V , la corriente será:

$$I = \frac{40 \text{ V}}{1,5 \Omega} = 26,7 \text{ A}$$

Cuestiones

- ¿La naturaleza sinusoidal de la fem producida por un generador de ca depende del tamaño o de la forma de la bobina?
- ¿Cómo podría utilizarse un generador de ca para generar una fem no sinusoidal?
- Cuando un generador distribuye energía eléctrica a un circuito, ¿de dónde procede la energía?
- A veces un motor se quema al incrementar súbitamente su carga. ¿Por qué?

26-7 Inductancia

Autoinducción

El flujo que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con las corrientes que circulan por circuitos próximos. (Admitimos que no existe en las cercanías ningún imán permanente.) Consideremos una espira por la que circula una corriente I . La corriente produce un campo magnético que podría, en principio, calcularse mediante el uso de la ley de Biot y Savart. Como el campo magnético en todo punto próximo a la espira es proporcional a I , el flujo magnético a través de la misma es también proporcional a I :

$$\phi_m = LI \quad 26-18$$

Definición de la autoinducción

en donde L es una constante llamada **autoinducción** de la espira. La autoinducción depende de la forma geométrica de la espira. La unidad SI de inductancia es el **henrio** (H) y según la ecuación 26-18 es igual a la unidad de flujo, el weber, dividido por la unidad de intensidad de corriente, el amperio:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

En principio, la autoinducción de cualquier espira o circuito puede calcularse suponiendo la existencia de una corriente I , determinando el flujo ϕ_m , y usando la ecuación $L = \phi_m / I$. En la práctica, el cálculo es muy difícil. Sin embargo, existe un caso, el de un solenoide arrollado apretadamente, cuya autoinducción puede calcularse directamente. El campo magnético en un solenoide de estas características, de longitud ℓ , por el que circula una corriente I viene dado por la ecuación 25-10:

$$B = \mu_0 n I$$

en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. Si el solenoide posee un área transversal A , el flujo a través de las N vueltas es:

$$\phi_m = NBA = n\ell BA = \mu_0 n^2 A \ell I$$

Como es lógico, el flujo es proporcional a la intensidad de corriente I . La constante de proporcionalidad es la autoinducción:

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \ell \quad 26-19$$

Autoinducción de un solenoide

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud n y al volumen $A\ell$. Así pues, lo mismo que la capacidad, la autoinducción depende sólo de factores geométricos. De acuerdo con las dimensiones de la ecuación 26-19, μ_0 puede expresarse en henrios por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Ejemplo 26-10

Determinar la autoinducción de un solenoide de longitud 10 cm, área 5 cm^2 , y 100 vueltas.

Para calcular la autoinducción en henrios mediante la ecuación 26-19 expresaremos todas las magnitudes en unidades SI. Sustituyendo $\ell = 0,1 \text{ m}$, $A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $n = N/\ell = (100 \text{ vueltas})/(0,1 \text{ m}) = 1000 \text{ vueltas/m}$ y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 A \ell = (4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(10^3 \text{ vueltas/m})^2 (5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0,1 \text{ m}) \\ &= 6,28 \times 10^{-5} \text{ H} \end{aligned}$$

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica y, por tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad 26-20$$

Así pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente.

Ejercicio

Determinar el valor de la variación con el tiempo de la intensidad de corriente en el ejemplo 26-10 para inducir una fem de 20 V. (Respuesta: $3,18 \times 10^5$ A/s)

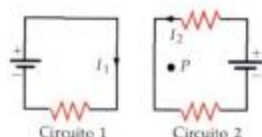


Figura 26-24 Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en el punto P se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a I_2 . El flujo a través de cualquiera de los circuitos es la suma de dos términos, uno proporcional a I_1 y el otro a I_2 .

Inductancia mutua

Cuando dos o más circuitos están próximos uno al otro, como indica la figura 26-24, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos. Sea I_1 la corriente en el circuito 1 de la izquierda en la figura 26-24 e I_2 la del circuito 2 a la derecha. El campo magnético en un punto P posee un componente debido a I_1 y otro componente debido a I_2 . Estos campos son proporcionales a las corrientes que los producen. Podemos, pues, escribir el flujo que atraviesa el circuito 2, $\phi_{\text{ext}2}$, como la suma de dos partes, una proporcional a la corriente I_1 y la otra proporcional a la corriente I_2 :

$$\phi_{\text{ext}2} = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \quad 26-21a$$

en donde L_2 es la autoinducción del circuito 2 y M_{12} es la **inductancia mutua** de los dos circuitos. La inductancia mutua depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, podemos ver que si los circuitos están bastante separados, el flujo a través del circuito 2 debido a la corriente I_1 será pequeño y la inductancia mutua también lo será. Puede escribirse una ecuación semejante a la 26-21a para el flujo que atraviesa el circuito 1:

$$\phi_{\text{ext}1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \quad 26-21b$$

en donde L_1 es la autoinducción del circuito 1.

La figura 26-25 muestra un solenoide largo y estrecho, de espiras apretadas dentro de otro solenoide de igual longitud y de espiras apretadas, pero de mayor radio. Calculemos la inducción mutua de los dos solenoides en esta situación. Sea ℓ la longitud común de ambos solenoides y supongamos que el solenoide interior tiene N_1 vueltas y radio r_1 y que el solenoide exterior tiene N_2 vueltas y radio r_2 . Calcularemos primero la inductancia mutua M_{12} suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente I_1 y determinando el flujo magnético $\phi_{\text{ext}2}$ debido a esta corriente a través del solenoide exterior. El campo magnético debido a la corriente en el solenoide interior es constante en el espacio dentro del solenoide y vale

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad 26-22$$

Definición de inductancia mutua

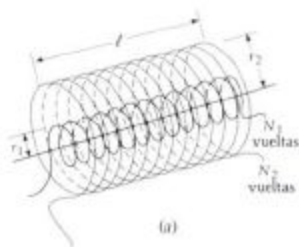


Figura 26-25 (a) Un solenoide largo y estrecho se encuentra dentro de otro más ancho de igual longitud. Una corriente en uno de los solenoides produce flujo magnético en el otro. (b) Carrete de Tesla que ilustra la geometría de los cables de la parte (a). Este dispositivo funciona como un transformador (capítulo 28). La corriente alterna de bajo voltaje del arrollamiento exterior se transforma en una corriente alterna de mayor voltaje en el arrollamiento interior. El voltaje alterno inducido en los campos variables es suficientemente grande para encender la bombilla situada encima de las bobinas.

Fuera del solenoide interior, el campo magnético es cero. El flujo que atraviesa el solenoide exterior debido a este campo magnético es, por tanto,

$$\phi_{n2} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \ell (\pi r_1^2) I_1$$

Obsérvese que el área utilizada para calcular el flujo que atraviesa el solenoide exterior no es el área de dicho solenoide, πr_2^2 , sino el área del solenoide interior πr_1^2 , ya que no hay campo magnético fuera de éste. La inductancia mutua es, por tanto,

$$M_{12} = \frac{\phi_{n2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell (\pi r_1^2) \quad 26-23$$

Calculemos ahora M_{21} determinando el flujo magnético a través del solenoide interior debido a una corriente I_2 en el solenoide exterior. Cuando éste transporta una corriente I_2 , existe un campo magnético uniforme B_2 dentro del solenoide dado por la ecuación 26-22 sin más que reemplazar I_1 por I_2 y n_1 por n_2 :

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

El flujo magnético que atraviesa el solenoide interior, es por tanto,

$$\phi_{n1} = N_1 B_2 (\pi r_1^2) = n_1 \ell B_2 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) I_2$$

El área utilizada en esta fórmula es también πr_1^2 , pues esta es la superficie transversal del solenoide interior y el campo magnético es uniforme en todos los puntos interiores al solenoide. La inductancia mutua M_{21} es, por tanto,


$$M_{21} = \frac{\phi_{n1}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \ell (\pi r_1^2) \quad 26-24$$

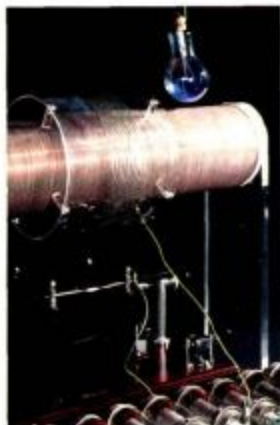
Obsérvese que las ecuaciones 26-23 y 26-24 son iguales, es decir, $M_{21} = M_{12}$. Puede demostrarse que este es un resultado general. Por tanto, prescindiremos de los subíndices de la inductancia mutua y simplemente escribiremos M .

Cuestión

7. ¿En cuánto variará la autoinducción de un solenoide si se enrolla la misma longitud de conductor en un cilindro del mismo diámetro pero de longitud doble? ¿Si se enrolla una cantidad de alambre doble sobre el mismo cilindro?

26-8 Circuitos LR

Como hemos visto, la autoinducción de un circuito impide que la corriente aumente o disminuya de modo instantáneo. Los circuitos que contienen bobinas o solenoides de muchas vueltas tienen una gran autoinducción. Cada bobina o solenoide constituye un **inductor**. El símbolo de una autoinducción o bobina es . Con frecuencia se puede despreciar la autoinducción del resto del circuito en comparación con la de un inductor de este tipo.



(b)



Varios inductores.

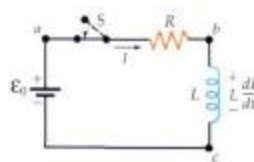


Figura 26-26 Un circuito típico LR. Inmediatamente después de cerrado el interruptor S, la corriente comienza a crecer en el circuito y una fuerza contraelectromotriz de magnitud $L \, dI/dt$ se genera en el inductor. La caída de potencial a través de la resistencia IR , más la caída de potencial a través del inductor es igual a la fem de la batería.

Un circuito que contiene bobinas o solenoides se denomina un **circuito LR**. Puesto que todos los circuitos contienen resistencias y autoinducciones, el análisis puede aplicarse en cierta extensión a todos los circuitos. Además los circuitos tienen también capacidades entre partes del mismo a potenciales diferentes. Incluiremos los efectos de la capacidad en el capítulo 28, cuando estudiemos circuitos de ca. Ahora se desprecia la capacidad con objeto de simplificar el análisis y resaltar los efectos de la inductancia.

La figura 26-26 muestra un circuito LR en el cual una inductancia L y una resistencia R se encuentran en serie con una batería de fem \mathcal{E}_0 y un interruptor S. Supondremos que la resistencia R incluye la resistencia de la bobina inductora y que la inductancia del resto del circuito es despreciable en comparación con la del inductor. El interruptor está inicialmente abierto, de modo que no existe corriente en el circuito. Justamente después de cerrar el interruptor, la corriente es todavía cero, pero está variando al ritmo dI/dt y existe una fuerza contraelectromotriz de magnitud $L \, dI/dt$ en el inductor. En el diagrama de la figura se han indicado los signos más y menos sobre el inductor para señalar la dirección de la fem cuando la corriente crece, es decir, cuando dI/dt es positiva. Poco después de cerrar el interruptor existe una corriente I en el circuito y una caída de potencial IR a través de la resistencia. Aplicando la regla de las mallas de Kirchoff a este circuito resulta

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad 26-25$$

Podemos entender muchas de las características de la corriente en este circuito a partir de la ecuación anterior sin necesidad de resolverla. Inicialmente (justo después de cerrar el interruptor) la corriente es nula y la fuerza contraelectromotriz $L \, dI/dt$ es igual a la fem de la batería \mathcal{E}_0 . Según la ecuación 26-25, la variación inicial de la intensidad de corriente respecto al tiempo es

$$\left(\frac{dI}{dt} \right)_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad 26-26$$

Al crecer la corriente, se incrementa la caída de potencial IR y la magnitud dI/dt disminuye. Al cabo de un corto tiempo, la corriente alcanza un valor positivo I y se cumple

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

En este momento la corriente es todavía creciente, pero su ritmo de crecimiento es menor que en el instante $t=0$. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero. El valor final de la corriente es, por tanto,

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad 26-27$$

La figura 26-27 muestra la variación de la corriente en este circuito en función del tiempo. Esta figura es semejante a la que representa la variación de la carga en un condensador cuando éste se carga en un circuito RC (figura 23-22).

La ecuación 26-25 tiene la misma forma que la ecuación 23-22 correspondiente a la carga de un condensador y puede resolverse de igual modo. El resultado es

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = I_f (1 - e^{-t/\tau}) \quad 26-28$$

en donde

$$\tau = \frac{L}{R} \quad 26-29$$

es la **constante de tiempo** del circuito. Cuanto mayor es la autoinducción L o menor la resistencia R , más tiempo exige el establecimiento máximo de la corriente.

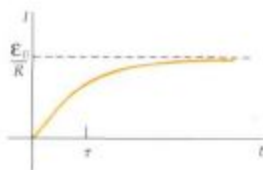


Figura 26-27 Variación de la intensidad de corriente en función del tiempo en un circuito LR. En el instante $t = \tau = L/R$, la corriente es igual al 63 % de su valor máximo \mathcal{E}_0/R .

Obsérvese que el producto de la constante de tiempo L/R y la pendiente inicial \mathcal{E}_0/L es igual a la corriente final $I_f = \mathcal{E}_0/R$. Si el valor de la pendiente inicial permaneciera constante con el tiempo, la corriente alcanzaría su valor máximo en el tiempo $t = \tau$. Sin embargo, la pendiente no es constante, sino que decrece con el tiempo. Al cabo del tiempo τ , la corriente es $0,63 I_f$.

Ejemplo 26-11

Una bobina de autoinducción $5,0 \text{ mH}$ y una resistencia de $15,0 \Omega$ se sitúa entre los terminales de una batería de 12 V de resistencia interna despreciable.

(a) ¿Cuál es la corriente final? (b) ¿Cuál es la corriente al cabo de $100 \mu\text{s}$?

(a) La corriente final es

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{12 \text{ V}}{15 \Omega} = 0,800 \text{ A}$$

(b) La constante de tiempo de este circuito es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ H}}{15 \Omega} = 333 \mu\text{s}$$

La corriente al cabo de $100 \mu\text{s}$ viene dada por la ecuación 26-28:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = (0,800 \text{ A})(1 - e^{-100/333}) = (0,800 \text{ A})(1 - 0,741) = 0,207 \text{ A}$$

La figura 26-28, muestra un dispositivo ligeramente diferente con un interruptor adicional, que nos permite eliminar la batería, y una resistencia adicional R_1 para proteger a esta última de modo que no resulte cortocircuitada cuando ambos interruptores estén momentáneamente cerrados. Si se abren los dos interruptores y cerramos el interruptor S_1 en un determinado instante, la corriente aumenta en el circuito de modo semejante al que hemos acabado de analizar excepto en que ahora la resistencia total es $R_1 + R$ y la corriente final es $\mathcal{E}_0/(R_1 + R)$. Supongamos que este interruptor ha estado cerrado durante un tiempo suficientemente largo en comparación con la constante de tiempo de modo que la corriente es aproximadamente estacionaria en su valor final, que denominaremos I_0 . Entonces se cierra el interruptor S_2 y se abre el S_1 para eliminar la batería por completo de nuestra consideración. Escogamos el instante $t=0$ cuando se cierra el interruptor S_2 . Ahora tenemos un circuito con una resistencia y una bobina solamente (malla $abcd$) y con una corriente inicial I_0 . De nuevo, para analizar este circuito hemos de aplicar la ley de Kirchhoff:

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

o sea,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I \quad 26-30$$

Obsérvese que al aplicar la regla de las mallas de Kirchhoff, hemos supuesto un sentido a la corriente I , y asignado signos más y menos al inductor en la figura 26-28 para el valor positivo dI/dt como es usual. La solución de la ecuación nos da entonces los signos algebraicos correctos de estas magnitudes, pudiendo comprobar así si nuestra hipótesis fue correcta. En este caso, el sentido de I es ya conocido a partir de las condiciones iniciales. La ecuación 26-30 nos dice que como I es positivo, dI/dt es negativo, indicando que la corriente decrece. Para un valor negativo de dI/dt , la fem inducida $-L dI/dt$ posee la dirección de la corriente y se opone a la disminución de la corriente de acuerdo con la ley de Lenz.

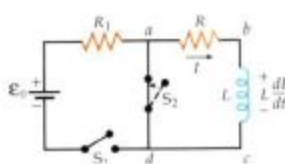


Figura 26-28 Un circuito LR con dos interruptores para que la batería pueda eliminarse del circuito. Después de que la corriente de la bobina alcanza su valor máximo con S_1 cerrado, se cierra S_2 y se abre S_1 . La corriente entonces disminuye exponencialmente con el tiempo.

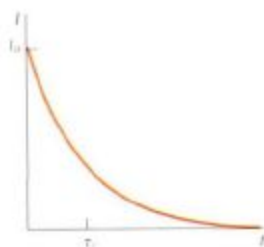


Figura 26-29 La intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 26-28. La corriente decrece exponencialmente con el tiempo.

La ecuación 26-30 posee la misma forma que la ecuación 23-16 correspondiente a la descarga de un condensador. Puede resolverse por integración directa. Omitiremos los detalles y simplemente indicamos la solución. La corriente I viene dada por

$$I = I_0 e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau} \quad 26-31$$

en donde $\tau = L/R$, es la constante de tiempo. La figura 26-29 muestra la variación de la intensidad de corriente en función del tiempo.

Ejercicio

Determinar la constante de tiempo de un circuito de resistencia 85Ω e inductancia 6 mH . (Respuesta: $70,6 \mu\text{s}$)

Ejemplo 26-12

Determinar el calor total producido en la resistencia R de la figura 26-28 cuando la corriente que circula por el inductor disminuye desde su valor inicial I_0 hasta 0.

El calor producido por unidad de tiempo es

$$p = \frac{dW}{dt} = I^2 R$$

en donde I viene dado por la ecuación 26-31. En un tiempo dt , el calor producido es

$$dW = I^2 R dt$$

La energía total disipada en forma de calor en la resistencia es, por tanto,

$$W = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-2Rt/L} R dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt$$

Para integrar esta expresión, sustituimos $x = 2Rt/L$. Por tanto,

$$dt = \frac{L}{2R} dx$$

y

$$W = I_0^2 R \frac{L}{2R} \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2$$

pues la integral vale precisamente 1. Esta energía se almacenó originalmente en el inductor. En la próxima sección veremos que, en general, la energía almacenada en un inductor que transporta la corriente I es $\frac{1}{2} LI^2$.

26-9 Energía magnética

En la sección 21-4 vimos que se necesita realizar trabajo para cargar un condensador y que éste, cuando está cargado, almacena una energía dada por la expresión

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

en donde Q es la carga depositada sobre cada placa, V es la diferencia de potencial entre las placas y C su capacidad. También vimos que esta energía puede considerarse almacenada en el campo eléctrico existente entre las placas y calculamos que en general, cuando existe un campo eléctrico E en el espacio, la densidad de energía eléctrica (o energía eléctrica por unidad de volumen) es

$$\eta = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Existe una expresión semejante para la energía de un campo magnético. Para producir una corriente en un inductor es necesario realizar trabajo. En efecto, multiplicando ambos miembros de la ecuación 26-25 por la intensidad de corriente I y reajustando resulta:

$$\mathcal{E}_J = I^2 R + LI \frac{dI}{dt} \quad 26-32$$

El término \mathcal{E}_J es la salida de potencia de la batería. El término $I^2 R$ es la potencia disipada en forma de calor en la resistencia del circuito. El término $LI \frac{dI}{dt}$ representa la energía que por unidad de tiempo incide en el inductor. Si U_m es la energía en el inductor se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

La energía total en el inductor puede determinarse integrando esta ecuación desde el tiempo $t=0$ cuando la corriente es nula hasta $t=\infty$, cuando la corriente ha alcanzado su valor final I_f :

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI \, dI = \frac{1}{2} LI_f^2$$

La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente I viene dada por

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad 26-33$$

Energía almacenada en un inductor

Este resultado está de acuerdo con el calculado en el ejemplo 26-12, según el cual el calor producido en la resistencia es $\frac{1}{2} LI^2$, cuando la intensidad de corriente en el inductor decrece de I a 0.

Ejercicio

¿Cuánta energía se almacena en el inductor del ejemplo 26-11 al alcanzar la corriente final? (Respuesta: $1,6 \times 10^{-3}$ J)

En el proceso de producir una corriente en un inductor, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina del mismo. El trabajo realizado en este proceso puede considerarse como el necesario para crear un campo magnético. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en un inductor es energía almacenada en el campo magnético creado. En el caso especial de un solenoide, el campo magnético está relacionado con la corriente I y el número de vueltas por unidad de longitud n por

$$B = \mu_0 n I$$

y la autoinducción viene expresada por la ecuación 26-19:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

en donde A es el área transversal y ℓ la longitud. Sustituyendo $B/\mu_0 n$ por I y $\mu_0 n^2 A \ell$ por L en la ecuación 26-33 resulta

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell A \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \ell A$$

La magnitud ℓA es el volumen del espacio contenido dentro del solenoide, donde se crea el campo magnético.

La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía magnética** η_m :

$$\eta_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad 26-34$$

Densidad de energía magnética

Aunque la ecuación 26-34 se ha obtenido para el caso especial del campo magnético en un solenoide, el resultado es general. Es decir, siempre que exista un campo magnético en el espacio, la energía magnética por unidad de volumen viene dada por la ecuación 26-34.

Ejemplo 26-13

En cierta región del espacio existe un campo magnético de 200 G y un campo eléctrico de $2,5 \times 10^6$ N/C. Determinar (a) la densidad de energía total y (b) la energía contenida en un cubo de lado 12 cm.

(a) La densidad de energía eléctrica es

$$\eta_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = (0,5)(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2,5 \times 10^6 \text{ N/C})^2 = 27,7 \text{ J/m}^3$$

y la densidad de energía magnética es

$$\eta_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0,02 \text{ T})^2}{2(4 \pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)} = 159 \text{ J/m}^3$$

La densidad de energía total es, por tanto,

$$\eta = \eta_e + \eta_m = 27,7 \text{ J/m}^3 + 159 \text{ J/m}^3 = 187 \text{ J/m}^3$$

(b) El volumen de un cubo de lado 12 cm es

$$V = (0,12 \text{ m})^3 = 1,73 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La energía total contenida en este volumen es, por tanto,

$$U = \eta V = (187 \text{ J/m}^3)(1,73 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 0,324 \text{ J}$$

Resumen

- En un campo magnético constante en el espacio, el flujo magnético a través de una espira es igual al producto del componente del campo magnético perpendicular al plano de la espira y al área de la misma. En general, para una bobina de N vueltas, el flujo magnético que le atraviesa es

$$\phi_m = \int NB_n \, dA$$

La unidad de flujo magnético en el sistema internacional SI es el weber:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$

- Al modificar el flujo magnético que atraviesa un circuito, se induce en éste una fem dada por la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

La fem y la corriente inducidas poseen un sentido tal que se opone al cambio que las produce. Esta es la ley de Lenz.

- La fem inducida en un alambre conductor o en una barra de longitud ℓ que se mueve con velocidad \mathbf{v} perpendicularmente a un campo magnético \mathbf{B} se denomina fem de movimiento. Su magnitud es

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\phi_m}{dt} = B\ell v$$

4. Las corrientes circulares que se generan en una masa metálica por la acción de un flujo magnético variable se denominan corrientes turbillonarias o corrientes de Foucault.
5. Una bobina que gira con frecuencia angular ω en un campo magnético genera una fem alterna dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t + \delta)$$

en donde $\mathcal{E}_{\text{máx}} = NBA\omega$ es el valor máximo de la fem.

6. El flujo magnético que atraviesa un circuito está relacionado con la corriente del circuito por

$$\phi_m = LI$$

en donde L es la autoinducción del circuito que depende de la disposición geométrica del mismo. La unidad SI de inductancia es el henrio (H):

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$$

La autoinducción de un solenoide arrollado apretadamente de longitud ℓ y área A con n vueltas por unidad de longitud viene dada por

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \ell$$

Si existe otro circuito próximo transportando la corriente I_2 , se produce un flujo a través del primer circuito

$$\phi_m = MI_2$$

en donde M es la inductancia mutua, la cual depende de la disposición geométrica de los dos circuitos.

7. Al variar la corriente en un inductor, la fem inducida en el mismo viene dada por

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

8. En un circuito LR , formado por una resistencia R , una inductancia L y una batería de fem \mathcal{E}_0 en serie, la corriente no alcanza su valor máximo I instantáneamente, sino que tarda cierto tiempo. Si la corriente es inicialmente cero, su valor al cabo de cierto tiempo t viene dado por

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

en donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito.

9. La energía almacenada en un inductor por el que circula la corriente de intensidad I es

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Esta energía puede considerarse almacenada en el campo magnético interior al inductor. En general, la densidad de energía magnética (energía por unidad de volumen) de un campo magnético B viene dada por

$$u_m = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

Las auroras

Syun - Ichi Akasofu

Instituto de Geofísica, Universidad de Alaska,
Fairbanks

Las auroras aparecen como una extraña y silenciosa luminosidad en los cielos nocturnos más septentrionales y más meridionales de la Tierra (figura 1). A menudo aparecen como un arco de débil luz blanco-verdosa, pero realmente es una cortina extensa, trémula y ondulante de bandas resplandecientes y rayos de diversos colores. La intensidad de su luz es variable. En los momentos de máximo brillo, los colores pueden ser dramáticos, pero hermosos. El borde inferior de la cortina de la aurora se localiza a una altura de unos 100 km, y el borde superior puede extenderse hasta una altura de 1000 km, por encima de la superficie de la Tierra, dentro de dos zonas de forma anular comprendidas entre 60 y 75 grados de latitud (figuras 2a, 2b), centradas sobre uno de los polos magnéticos de la Tierra. Estos cinturones de forma anular se denominan óvalos de la aurora.

Hubo un tiempo en el que se creyó que la luz de la aurora era luz solar reflejada por los cristales de hielo en el cielo. Sin embargo, en 1888, Anders Jonas Ångström demostró que la luz de la aurora difería de la luz solar (figura 3). Muchas de las longitudes de onda presentes en la luz del Sol no existen en la luz de la aurora. Un espectro análogo al de la aurora puede obtenerse aplicando un alto voltaje a los electrodos insertados en un tubo de vacío de vidrio que contiene un gas como el neón. Los electrones fluyen del electrodo negativo al positivo y al chocar con los átomos de neón, les excitan y producen la emisión de luz. De modo semejante, la aurora es el resultado de un proceso de descarga eléctrica y su luz es emitida por átomos y moléculas en la atmósfera superior (figura 4) al ser bombardeados por electrones de alta velocidad.



Figura 1 Aurora boreal.



(a)

Figura 2 (a) Aurora meridional, fotografiada por el astronauta Robert Overmyer mediante una cámara de 35 mm.



Syun-Ichi Akasofu, Director del Instituto Geofísico de la Universidad de Alaska, Fairbanks, es el autor de cientos de publicaciones sobre la aurora. Estos trabajos han merecido el reconocimiento nacional e internacional. Desde su nombramiento como Director del Instituto Geofísico, el Profesor Akasofu ha concentrado sus esfuerzos para su conversión en el centro de investigación clave del Ártico.

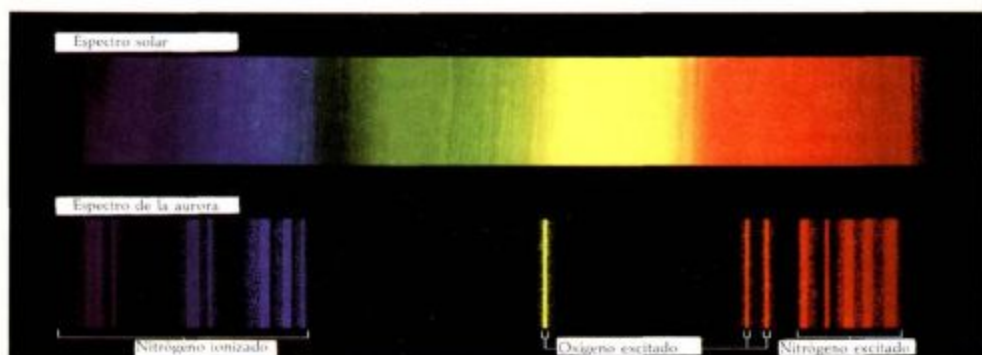
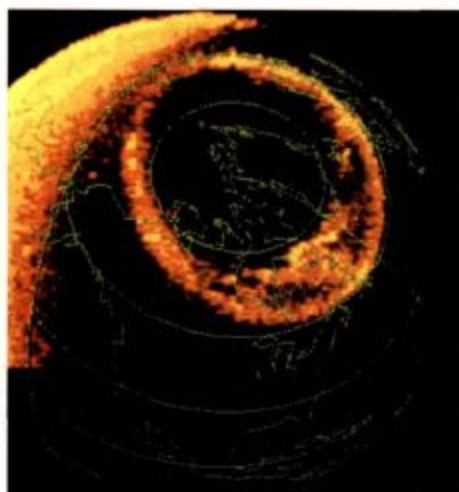


Figura 3 Comparación entre el espectro de la luz visible y el espectro de la aurora.



(b)

(b) Imagen reforzada con ordenador de la aurora septentrional tomada vía satélite a una distancia de 3 radios terrestres.

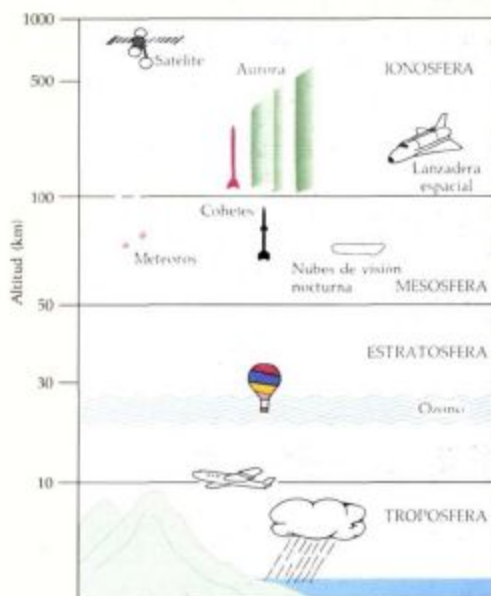


Figura 4 Representación esquemática de la atmósfera terrestre mostrando algunas características artificiales y otras naturales a diferentes altitudes. Las auroras se forman en la ionosfera o en capas superiores. La ionosfera es una capa de la atmósfera que contiene muchos electrones libres e iones que se crearon por efecto de emisiones de radiación ultravioleta solar y de rayos X.

Continúa

Al tratar de comprender el proceso que desencadena la aurora, es útil considerar una analogía con un generador eléctrico. En efecto, en un generador se produce la corriente eléctrica en un conductor cuando éste se mueve dentro de un campo magnético. La aurora se engendra de un modo semejante: una corriente de partículas cargadas procedentes del Sol (llamada «viento solar») funciona como un conductor y la propia Tierra proporciona el campo magnético (véase figura 5).

La capa exterior de la atmósfera solar, la corona, está formada por gases (especialmente hidrógeno) tan calientes que los átomos eléctricamente neutros se desdoblán en iones positivos (sobre todo protones) y electrones. El viento solar que fluye desde la corona es un plasma incandescente y tenue de estas partículas cargadas. Moviéndose a una velocidad que varía entre 300 y 1000 km/s, se propaga desde el Sol en todas direcciones hasta el límite del sistema solar. Las líneas de campo magnético se comportan con el viento solar como si fueran cuerdas elásticas. Al soplar el viento solar choca contra las líneas del campo magnético y las pone «tensas». A su paso, confina el campo magnético terrestre en una cavidad en forma de cometa que se denomina magnetosfera (figura 6). El límite exterior de esta cavidad es la magnetopausa.

A distancias de unos 10 radios terrestres de la superficie de nuestro planeta, la intensidad del campo magnético de la Tierra (30×10^{-9} G) es igual a la intensidad del campo magnético del Sol, tensado por el viento solar. Ambos campos magnéticos están interconectados con el límite de la magnetosfera en forma de cometa. Aquí, las partículas cargadas del viento solar soplan a través del campo interconectado. Este movimiento es equivalente al de un conductor eléctrico a través de un campo magnético. Observando a la Tierra desde el Sol veríamos los protones del viento solar desviados (por la fuerza $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) hacia la izquierda y los electrones desviados hacia la derecha, creando los terminales positivo y negativo del generador de la aurora (figura 7a). La magnetosfera está llena de un tenue plasma. Esto permite que la corriente fluya entre los terminales. La corriente fluye del terminal positivo, circula en espiral por las líneas del campo magnético, entra en la ionosfera (la capa eléctricamente cargada de la atmósfera), atraviesa esta capa por la región polar y sigue las líneas de campo magnético desde la ionosfera hasta el terminal negativo. Este es el circuito primario de descarga eléctrica.

En lo que se denomina «lado matutino» de la magnetosfera, la corriente fluye atravesando el borde interno del óvalo de la aurora como parte del circuito primario de descarga y alcanza el borde externo del óvalo. Como la región externa del óvalo no es muy conductora, parte de la corriente retrocede a lo largo de las líneas de campo magnético dando lugar a un circuito paralelo y secundario. Un proceso equivalente tiene lugar en el «lado vespertino» (figura 7b). Así pues, existen un par de corrientes eléctricas (hacia arriba y hacia abajo) que fluyen a lo largo de las líneas de campo magnético

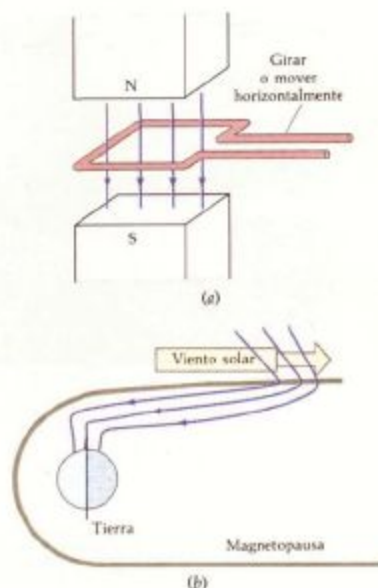


Figura 5 (a) Esquema de un generador convencional. (b) La interacción del viento solar con el campo magnético terrestre da lugar a la creación de un generador natural.

en ambos lados, matutino y vespertino, de la magnetosfera. La corriente ascendente en ambos sectores es transportada por los electrones que fluyen hacia abajo, los cuales chocan con los átomos y moléculas de la atmósfera excitándoles con la consiguiente emisión de luz. Esta es la parte del circuito de descarga que produce la luz de la aurora (exactamente como ocurre en un tubo de neón, según fue descrito anteriormente).

¿Cuál es la causa de la forma de «cortina» que presentan las auroras? Parece ser que este fenómeno está relacionado con la estructura laminar muy delgada, según la cual estos electrones fluyen a la atmósfera superior, pero el mecanismo de formación de estas delgadas láminas no está bien conocido. El límite inferior de la

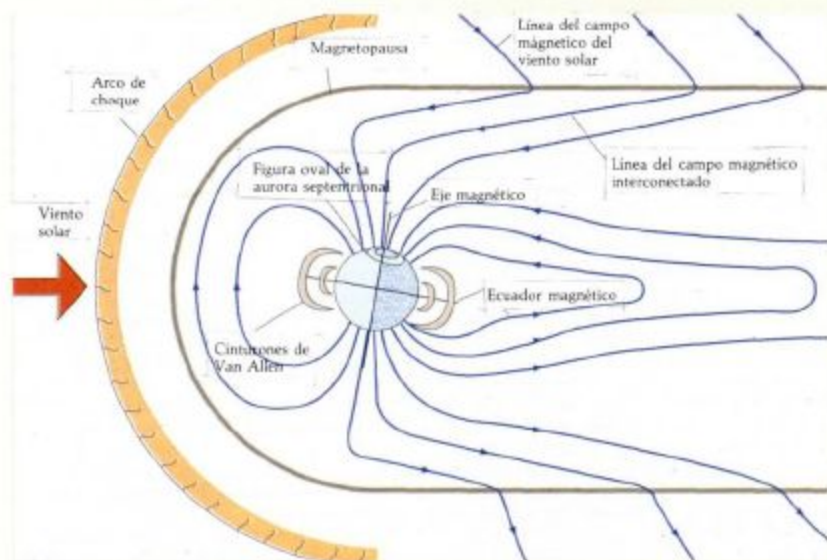
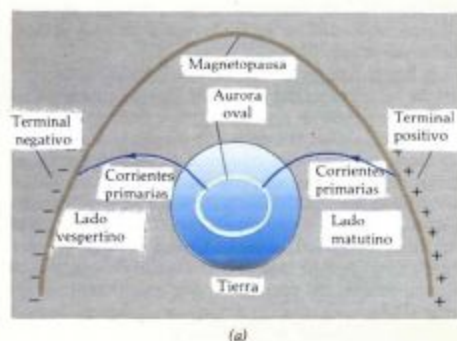


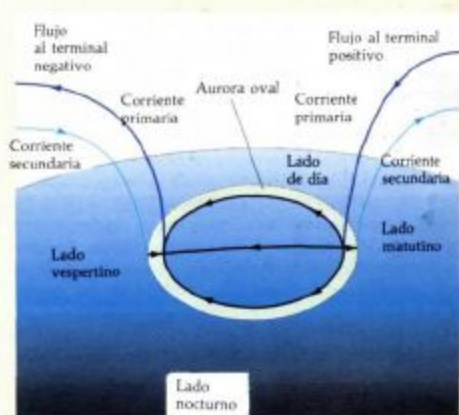
Figura 6 Magnetosfera terrestre. El viento solar confina el campo magnético terrestre a una zona en forma de cometa con nuestro planeta como núcleo. La distancia entre la Tierra y el lado hacia el Sol de la magnetosfera es de unos 10 radios

terrestres. La magnetosfera se estira en una cola muy larga (no indicada) que se extiende a más de 100 radios terrestres desde el Sol (a la derecha de esta ilustración).



(a)

Figura 7 (a) Vista desde arriba de la magnetosfera y la Tierra. En ella se observan los terminales positivo y negativo (respectivamente, los lados matutino y vespertino de la magnetopausa). (b) Circuitos de descarga eléctrica primaria y secundaria. Las corrientes que atraviesan el casquete polar y a lo largo de la aurora oval dependen de la conductividad atmosférica.



(b)

Continúa

cortina viene determinado por la profundidad de penetración de los electrones portadores de la corriente. Los choques con los átomos y moléculas de la atmósfera superior disipan gran parte de la energía de los electrones durante el tiempo de descenso hasta una altura de unos 100 km por encima de la Tierra y, por tanto, son pocos los que descienden más allá de esta cota.

Existen dos factores que explican las variaciones de color de las auroras. En primer lugar, el color producido por una descarga eléctrica varía de un gas a otro y varía con la energía de los electrones que producen la excitación. En segundo lugar, la composición química de la atmósfera difiere con la altura. Estos factores conjuntamente explican las variaciones de color de las auroras. En la ionosfera, la atmósfera contiene principalmente oxígeno atómico, producido por la acción energética de la radiación solar ultravioleta que desdobla las moléculas de O_2 . Cuando los átomos de oxígeno se excitan, se emite una luz blanco-verdosa (el color más común de las auroras). Los electrones más energéticos que penetran más profundamente en la atmósfera chocan con las moléculas neutras de nitrógeno, produciendo auroras con bandas rojo-violetas o rosáceas y bordes ondulados. Las moléculas ionizadas de nitrógeno producen una luz azul-violeta. La luz visible es sólo una pequeña porción de las emisiones de las auroras; éstas emiten también rayos X, ultravioletas y radiación infrarroja.

Para entender el movimiento observado en la mayor parte de las exhibiciones de las auroras, consideremos una analogía con la imagen producida sobre la pantalla de un tubo de rayos catódicos, por ejemplo, en un televisor. La pantalla se corresponde con la atmósfera superior. El recubrimiento de la parte posterior de la pantalla emite luz como consecuencia del choque del haz de electrones procedente del cañón electrónico; esta es la luz que se ve frontalmente en la pantalla como imagen. Del mismo modo, como ya se ha descrito, las láminas de electrones portadores de corriente excitan por choque la fluorescencia de la ionosfera. Del mismo modo que cuando el punto de impacto de un haz de electrones en un tubo de rayos catódicos cambia de posición se produce el movimiento de la imagen sobre la pantalla, igualmente el desplazamiento rápido de las láminas electrónicas de las auroras hacen desplazar, con frecuencia violentamente, las cortinas típicas de estos fenómenos atmosféricos. En ambos casos, tubos de rayos catódicos y auroras, los cambios en un campo magnético y/o en un campo eléctrico modulan el comportamiento del haz electrónico. Así, son los cambios del campo magnético, más que los movimientos atmosféricos, los que causan el movimiento en la cortina de las auroras.

Las grandes centrales generadoras de potencia producen alrededor de 1000 MW. Las auroras generan aproximadamente de 1 a 10 millones de MW (es decir, de 1 a 10 TW), equivalentes a 1000-10 000 grandes centrales de potencia. Esta potencia, engendrada por la interacción del viento solar con la magnetosfera terrestre, fluctúa a veces considerablemente, pues la intensidad del viento solar y su campo magnético varían de acuerdo con el nivel de la actividad del Sol. Una llamarada solar asociada con una erupción en la corona del Sol es causa de una «ráfaga» del viento solar que irradia rápidamente a través del espacio interplanetario y alcanza la Tierra unas 40 horas después. Cuando este viento solar «ráfagas» interacciona con la magnetosfera, la potencia engendrada puede reforzarse un millar de veces. En estos casos, los cinturones anulares de la aurora se expansionan desde las regiones polares hacia el ecuador, lo cual hace posible su visión al sur de la frontera entre los Estados Unidos y Canadá. Las auroras son mucho más brillantes después de una llamarada solar y la parte superior de la cortina se extiende a mayores altitudes, permitiendo así que la porción superior de las auroras boreales lleguen a verse en Méjico y en la Europa central.

Las corrientes reforzadas de descarga eléctrica, asociadas con el viento solar a ráfagas producen campos magnéticos intensamente fluctuantes. Cuando se registran estos campos decimos que se está desarrollando una tormenta magnética. Las corrientes eléctricas calientan la atmósfera superior originando un movimiento ascendente de la atmósfera inferior, más densa, incrementando con ello la densidad a mayores alturas. Este proceso aumenta la fricción de los satélites en órbita con la atmósfera, con lo cual se reduce su altura orbital. En efecto, se han registrado varios casos de satélites que rebajaron su órbita después de importantes tormentas magnéticas.

El hombre posee actualmente un conocimiento parcial de las auroras: del origen de los cinturones de las auroras en forma de anillo alrededor de los polos geomagnéticos; de los procesos que originan las gigantes descargas eléctricas, creadoras de las auroras; de las causas de las fluctuaciones de energía; y de las relaciones entre la actividad solar y las auroras, que se manifiestan por diversos procesos solares transitorios incluyendo las llamaradas solares. Cuando el siglo XX está a punto de concluir, subsiste el desafío de avanzar en la comprensión del proceso de descarga eléctrica, causante de este hermoso fenómeno, y al mismo tiempo poderoso generador de la naturaleza.

Sugerencias bibliográficas

Akasofu, Syun-ichi: «The Dynamic Aurora», *Scientific American*, mayo 1989, pág. 90.

Describe cómo el «viento solar» de partículas cargadas interactúa con el campo magnético terrestre produciendo auroras, por qué éstas cambian y se mueven, y de dónde procede la energía.

Kondo, Herbert: «Michael Faraday», *Scientific American*, octubre 1953, pág. 90.

Este artículo describe los experimentos de Faraday y su concepto revolucionario del campo electromagnético.

Shamos, Morris H.: «Electromagnetic Induction and Laws of Electrolysis — Michael Faraday», en *Great Experiments in*

Physics, Henry Holt and Company, New York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

Informe de Faraday sobre su descubrimiento de la inducción electromagnética con notaciones editoriales para mayor claridad y un resumen biográfico.

Shamos, Morris H.: «Lenz's Law — Heinrich Lenz», en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt and Company, New York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

Informe de Lenz sobre algunos experimentos de inducción electromagnética que justifican una regla para determinar el sentido de la corriente inducida, con notaciones editoriales y un resumen biográfico.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer los siguientes conocimientos:

1. Establecer y usar la ley de Faraday para determinar la fem inducida por un flujo magnético variable.
2. Establecer y usar la ley de Lenz para determinar el sentido de la corriente inducida a diversas aplicaciones de la ley de Faraday.
3. Ser capaz de discutir las corrientes de Foucault.
4. Comprender el funcionamiento de los generadores y motores de ca.
5. Representar un gráfico de la intensidad de corriente en función del tiempo en un circuito LR.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Inducción magnética	Ley de Lenz
Flujo magnético	Fuerza contraelectromotriz
Weber	Fem de movimiento
Ley de Faraday	Corrientes de Foucault
Bobina balística	Generador

Motor	Inductor
Autoinducción	Circuito LR
Henrio	Constante de tiempo de un circuito LR
Inductancia mutua	Densidad de energía magnética

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La fem de un circuito es proporcional al flujo magnético que atraviesa el circuito.
2. Puede existir una fem inducida en un instante cuando el flujo a través del circuito es cero.
3. La ley de Lenz está relacionada con la conservación de la energía.
4. La inductancia de un solenoide es proporcional al cambio de intensidad por unidad de tiempo que por él circula.
5. La densidad de energía magnética en un punto del espacio es proporcional al cuadrado del campo magnético en dicho punto.

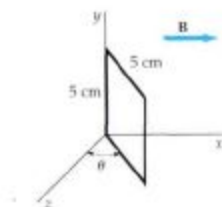
Problemas

Nivel I

26-1 Flujo magnético

1. Un campo magnético uniforme de magnitud 2000 G es paralelo al eje x . Una espira cuadrada de lado 5 cm forma un ángulo θ con el eje z como muestra la figura 26-30. Determinar el flujo magnético a través de la espira cuando (a) $\theta=0$, (b) $\theta=30^\circ$, (c) $\theta=60^\circ$, y (d) $\theta=90^\circ$.
2. Una bobina circular tiene 25 vueltas y un radio de 5 cm. Se encuentra en el ecuador donde el campo magnético terrestre es 0,7 G norte. Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando (a) su plano es horizontal, (b) su plano es vertical y su eje apunta al norte, (c) su plano es vertical y su eje apunta al este, y (d) su plano es vertical y su eje forma un ángulo de 30° con el norte.

Figura 26-30 Problema 1.



3. Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de longitud 25 cm, radio 1 cm y 400 vueltas, que transporta una corriente de 3 A.

4. Resolver el problema 3 para el caso de un solenoide de longitud 30 cm, radio 2 cm y 800 vueltas que transporta una corriente de intensidad 2 A.

5. Una bobina circular de radio 3,0 cm posee 6 vueltas. Un campo magnético $B = 5000$ G es perpendicular a la bobina. (a) Determinar el flujo magnético que atraviesa la bobina. (b) Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando esta forma un ángulo de 20° con el campo magnético.

6. Un campo magnético de 1,2 T es perpendicular a una bobina cuadrada de 14 vueltas. La longitud de cada lado de la bobina es 5 cm. (a) Determinar el flujo magnético a través de la bobina. (b) Determinar el flujo magnético para el caso en que el campo magnético forma un ángulo de 60° con la normal al plano de la bobina.

7. Una bobina circular de radio 3,0 cm tiene su plano perpendicular a un campo magnético de 400 G. (a) ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la bobina, si ésta posee 75 vueltas? (b) ¿Cuántas vueltas debe tener la bobina para que el flujo sea de 0,015 Wb?

26-2 Fem inducida y ley de Faraday

8. Se establece un campo magnético uniforme B perpendicular al plano de una espira de radio 5,0 cm, $0,4 \Omega$ de resistencia y una autoinducción despreciable. El valor de B se aumenta a un ritmo de 40 mT/s. (a) Hallar la fem inducida en la espira. (b) la corriente inducida en la espira y (c) la producción de calor Joule en la espira por unidad de tiempo.

9. Una bobina de 100 vueltas tiene un radio de 4,0 cm y una resistencia de 25Ω . ¿A qué velocidad deberá variar un campo magnético perpendicular a la misma para producir en ella una corriente de 4,0 A?

10. El flujo que atraviesa una espira viene dado por $\phi_m = (t^2 - 4t) \times 10^{-1}$ T·m², viniendo dado t en segundos. (a) Hallar la fem inducida \mathcal{E} en función del tiempo. (b) Hallar ϕ_m y \mathcal{E} para $t=0$, $t=2$ s, $t=4$ s y $t=6$ s.

11. (a) En el caso del flujo dado en el problema 10, hacer una representación de ϕ_m en función de t y de \mathcal{E} en función de t . (b) ¿En qué instante es máximo el flujo? ¿Cuál es la fem en dicho momento? (c) ¿En qué momento es cero el flujo? ¿Cuál es la fem en estos momentos?

12. Una bobina circular de 100 vueltas tiene un diámetro de 2,0 cm y una resistencia de 50Ω . El plano de la bobina es perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 1,0 T. El campo sufre una inversión de sentido repentina. (a) Hallar la carga total que pasa a través de la bobina. Si la inversión emplea un tiempo de 0,1 s, hallar (b) la corriente media que circula por dicho circuito y (c) la fem media en el mismo.

13. En el ecuador, una bobina de 1000 vueltas, 300 cm² de área de sección recta y 15Ω de resistencia se orienta de modo que su plano es perpendicular al campo magnético terrestre de 0,7 G. Si se hace girar 90° la bobina, ¿cuánta carga fluirá a su través?

14. Una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 5,0 cm se conecta a un galvanómetro balístico. La resistencia total del circuito es 20Ω . El plano de la bobina se orienta inicialmente de modo que sea perpendicular al campo magnético terrestre en un punto determinado. Cuando la bobina gira 90° , la carga que pasa a través del galvanómetro se mide y resulta ser igual a $9,4 \mu\text{C}$. Calcular el valor del campo magnético terrestre en dicho punto.

15. El campo magnético indicado en el problema 5 se reduce uniformemente a cero en 1,2 s. Determinar la fem inducida en la bobina cuando (a) el campo magnético es perpendicular a la bobina y (b) el campo magnético forma un ángulo de 20° con la normal a la bobina.

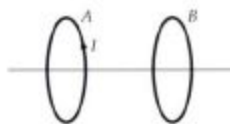
16. El campo magnético del problema 7 se reduce uniformemente a cero en 0,8 s. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina de la parte (b) de dicho problema?

17. Un solenoide de longitud 25 cm y radio 0,8 cm posee 400 vueltas y se encuentra en un campo magnético externo de 600 G que forma un ángulo de 50° con el eje del solenoide. (a) Determinar el flujo magnético a través del solenoide. (b) Determinar la magnitud de la fem inducida en el solenoide si el campo magnético externo se reduce a cero en 1,4 s.

26-3 Ley de Lenz

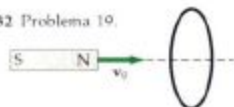
18. Las dos espiras de la figura 26-31 tienen sus planos paralelos entre sí. Cuando se mira desde A hacia B existe en A una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. Dar el sentido de la corriente en la espira B y establecer si las espiras se atraen o repelen entre sí, si la corriente en la espira A está (a) creciendo y (b) decreciendo.

Figura 26-31 Problema 18.



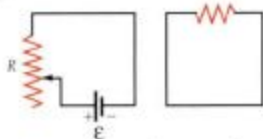
19. Un imán en forma de barra se mueve con velocidad constante a lo largo del eje de una espira como se indica en la figura 26-32. (a) Hacer un esquema cualitativo del flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indicar el tiempo t_1 en que el imán está la mitad introducido en la espira. (b) Hacer un esquema de la corriente I que hay en la espira en función del tiempo, escogiendo I positivo cuando tiene sentido contrario al de las agujas del reloj vista la espira desde la izquierda.

Figura 26-32 Problema 19.



20. Dar el sentido de la corriente inducida en el circuito de la derecha de la figura 26-33 cuando a la resistencia del circuito de la izquierda repentinamente se le hace (a) crecer y (b) disminuir.

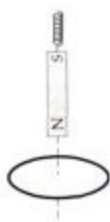
Figura 26-33 Problema 20.



21. Una barra magnética está montada en el extremo de un muelle arrollado en espiral de modo que oscila con movimiento armónico simple a lo largo del eje de una espira, como se muestra en la figura 26-34. (a) Representar gráficamente el flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indi-

car el tiempo t_1 , cuando el imán está a mitad de camino a través de la espira. (b) Representar la intensidad de corriente I en la espira en función del tiempo, eligiendo como positivo el sentido de I cuando coincide con el sentido contrario al de las agujas del reloj, visto desde arriba.

Figura 26-34 Problema 21.



26-4 Fem de movimiento

22. Una varilla de 30 cm de longitud se mueve a 8 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 500 G. Su velocidad es perpendicular a la longitud de la varilla. Hallar (a) la fuerza magnética ejercida sobre un electrón de la varilla, (b) el campo electrostático E existente en la varilla, y (c) la diferencia de potencial V entre sus extremos.

23. Hallar la velocidad de la varilla del problema 22 si la diferencia de potencial entre sus extremos es de 6 V.

24. En la figura 26-14 sea $B=0,8$ T, $v=10,0$ m/s, $\ell=20$ cm, y $R=2$ Ω . Hallar (a) la fem inducida en el circuito, (b) la corriente en el circuito y (c) la fuerza necesaria para mover la varilla con velocidad constante suponiendo un rozamiento despreciable. (d) Hallar la potencia suministrada por la fuerza hallada en la parte (c), y (e) la producción de calor I^2R por unidad de tiempo.

25. Resolver el problema 24 en el caso de $B=1,5$ T, $v=6$ m/s, $\ell=40$ cm y $R=1,2$ Ω .

26-5 Corrientes de Foucault o turbiljonarias

No se proponen problemas para esta sección.

26-6 Generadores y motores

26. Una bobina de 200 vueltas posee un área de 4 cm². Gira dentro de un campo magnético de 0,5 T. (a) ¿Cuál es la frecuencia de rotación necesaria para generar una fem máxima de 10 V? (b) Si la frecuencia de rotación de la bobina es de 60 Hz, ¿cuál es la fem máxima?

27. ¿Cuál debe ser el valor del campo magnético para que la bobina del problema 26, girando en su interior, genere una fem máxima de 10 V a 60 Hz?

28. Una bobina rectangular de 2 cm por 1,5 cm posee 300 vueltas y gira en un campo magnético de 4000 G. (a) ¿Cuál es la fem máxima generada si la bobina gira con una frecuencia de 60 Hz? (b) ¿Cuál debería ser su frecuencia de rotación para generar una fem máxima de 110 V?

29. La bobina del problema 28 gira con una frecuencia de 60 Hz en un campo magnético B . ¿Cuál debe ser el valor de B para que la fem máxima generada sea de 24 V?

26-7 Inductancia

30. Por una bobina con una autoinducción de 0,8 H circula

una corriente de 3 A, y varía a razón de 200 A/s. (a) Hallar el flujo magnético que atraviesa la bobina. (b) Hallar la fem inducida en la misma.

31. Por una bobina de autoinducción L circula una corriente I , dada por $I=I_0 \sin 2\pi ft$. Hallar el flujo ϕ_L y la fem autoinducida y representarlos gráficamente en función del tiempo.

32. Un solenoide tiene una longitud de 25 cm, un radio de 1 cm y 400 vueltas. Por él circula una corriente de 3 A. Hallar (a) B en el eje y su centro; (b) el flujo que atraviesa el solenoide admitiendo que B es uniforme; (c) la autoinducción del solenoide, y (d) la fem inducida en el solenoide cuando la corriente varía a razón de 150 A/s.

33. Dos solenoides de radios 2 cm y 5 cm son coaxiales. Cada uno de ellos tiene 25 cm de longitud y poseen respectivamente 300 y 1000 vueltas. Determinar su inductancia mutua.

26-8 Circuitos LR

34. La corriente en un circuito LR es cero en el instante $t=0$ y aumenta hasta la mitad de su valor final en 4,0 s. (a) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? (b) Si la resistencia total es 5 Ω , ¿cuál es la autoinducción?

35. Una bobina de 8,0 Ω de resistencia y una autoinducción de 4,0 H se conecta repentinamente a una diferencia de potencial constante de 100 V. Supongamos que el instante de la conexión es $t=0$ y en él la corriente es nula. Hallar la corriente I y su variación respecto al tiempo dI/dt en los instantes (a) $t=0$, (b) $t=0,1$ s, (c) $t=0,5$ s, y (d) $t=1,0$ s.

36. ¿Cuántas constantes de tiempo deben transcurrir antes de que la corriente en un circuito LR, que era inicialmente cero, alcance (a) el 90 por ciento, (b) el 99 por ciento y (c) el 99,9 por ciento de su valor final?

37. La corriente que circula por una bobina de 1 mH de autoinducción es 2,0 A en el instante $t=0$, cuando se pone en paralelo a la bobina una resistencia. La resistencia total de la bobina más la resistencia es 10,0 Ω . Hallar la corriente después de (a) 0,5 ms, y (b) 10 ms.

26-9 Energía magnética

38. En el circuito de la figura 26-26 supongamos que $\mathcal{E}_0=12,0$ V, $R=3,0$ Ω y $L=0,6$ H. El interruptor se cierra en el instante $t=0$ s. En el instante $t=0,5$ s, hallar (a) el ritmo con que la batería suministra la potencia, (b) el efecto calorífico de Joule por unidad de tiempo, y (c) la velocidad con que la energía se está almacenando en la bobina.

39. Repetir el problema 38 para los instantes $t=1$ s y $t=100$ s.

40. Se conecta una bobina cuya autoinducción es 2,0 H y su resistencia 12,0 Ω a una batería de 24 V y de resistencia interna despreciable. (a) ¿Cuál es la corriente final? (b) ¿Cuánta energía se almacena en la bobina cuando se alcanza el valor final de la corriente?

41. Hallar (a) la energía magnética, (b) la energía eléctrica y (c) la energía total en un volumen de 1,0 m³ en el que existe un campo eléctrico de 10^3 V/m y un campo magnético de 1 T.

Nivel II

42. Una bobina circular de 15 vueltas de 4 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme de 4000 G en la

dirección positiva de x . Determinar el flujo que atraviesa la bobina cuando el vector unitario normal al plano de la bobina es (a) $\hat{n} = \hat{i}$, (b) $\hat{n} = \hat{j}$, (c) $\hat{n} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$, (d) $\hat{n} = \hat{k}$ y (e) $\hat{n} = 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}$.

43. Un campo magnético uniforme \mathbf{B} es perpendicular a la base de una semiesfera de radio R . Calcular el flujo magnético que atraviesa la superficie esférica de la semiesfera.

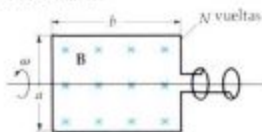
44. Una espira conductora circular elástica se expande a una velocidad constante, de modo que su radio viene dado por $R = R_0 + vt$. La espira se encuentra en una región de campo magnético constante perpendicular a la misma. ¿Cuál es la fem generada en la espira? Despreciar efectos posibles de autoinducción.

45. Un solenoide posee n vueltas por unidad de longitud, radio R_1 y transporta una corriente I . (a) Una bobina circular grande de radio $R_2 > R_1$ y N vueltas rodea el solenoide en un punto alejado de los extremos del solenoide. Determinar el flujo magnético que atraviesa la bobina. (b) Una bobina circular pequeña de radio $R_2 < R_1$ está introducida completamente dentro del solenoide, lejos de sus extremos con su eje paralelo al del solenoide. Determinar el flujo magnético a través de la bobina.

46. Demostrar que si el flujo que atraviesa cada vuelta de una bobina de N vueltas y resistencia R varía desde ϕ_{i0} hasta ϕ_{f0} de cualquier manera, la carga total que pasa por la bobina viene dada por $Q = N(\phi_{f0} - \phi_{i0})/R$.

47. La espira rectangular de un generador de corriente alterna de dimensiones a y b tiene N vueltas. Esta espira se conecta a unos anillos colectores (figura 26-35) y gira con una velocidad angular ω en el interior de un campo magnético uniforme \mathbf{B} . (a) Demostrar que la diferencia de potencial entre los dos anillos es $\mathcal{E} = N\mathbf{B}ab\omega \sin \omega t$. (b) Si $a = 1,0$ cm, $b = 2,0$ cm, $N = 1000$ y $B = 2$ T, ¿con qué frecuencia angular ω deberá hacerse girar la bobina para generar una fem cuyo máximo valor sea 110 V?

Figura 26-35 Problema 47.



48. Un motor de corriente continua, posee bobinas de resistencia $5,5 \Omega$. Cuando se conecta a una fuente de corriente continua de 120 V, consume 6 A. (a) ¿Cuál es su fuerza contraelectromotriz? (b) ¿Cuál es la corriente inicial consumida antes de que comience a girar?

49. Para limitar la corriente consumida por un motor en el arranque se dispone generalmente una resistencia en serie con el motor. La resistencia se retira cuando el motor alcanza la velocidad operativa. (a) ¿Qué resistencia debe situarse en serie con un motor de resistencia $0,75 \Omega$ que consume 8 A cuando opera a 220 V si la corriente no ha de exceder los 15 A? (b) ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz de este motor al alcanzar la velocidad operativa y se suprime la resistencia?

50. Calcular la pendiente inicial dI/dt para $t = 0$ mediante la ecuación 26-31 y demostrar que si la corriente disminuye uni-

formemente con esta pendiente, su valor sería cero al cabo de una constante de tiempo.

51. Una inductancia L y una resistencia R se conectan en serie con una batería que indica la figura 26-28. Un tiempo largo después de cerrar el interruptor, la intensidad de la corriente es de 2,5 A. Cuando la batería queda fuera del circuito al abrir el interruptor S_1 y cerrar S_2 , la corriente cae a 1,5 A en 45 ms. (a) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? (b) Si $R = 0,4 \Omega$, ¿cuánto vale L ?

52. Una bobina de inductancia 4 mH y resistencia 150Ω se conecta a través de una batería de fem 12 V y resistencia interna despreciable. (a) ¿Cuál es el incremento inicial de la corriente por unidad de tiempo? (b) ¿Cuál es el incremento por unidad de tiempo cuando la corriente alcanza la mitad de su valor final? (c) ¿Cuál es la corriente final? (d) ¿Cuánto tiempo tardará la corriente en alcanzar el 99 por ciento de su valor final?

53. Un gran electroimán posee una inductancia de 50 H y una resistencia de $8,0 \Omega$. Si se conecta a una fuente de potencia de corriente continua de 250 V, determinar el tiempo que tarda la corriente en alcanzar (a) 10 A y (b) 30 A.

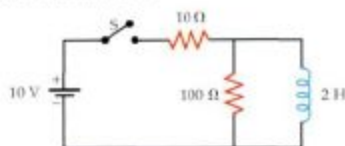
54. Cuando la corriente que circula por una bobina determinada es 5,0 A y está aumentando a razón de $10,0$ A/s, la diferencia de potencial en los extremos de la misma es 140 V. Cuando la corriente vale 5,0 A y está disminuyendo a razón de $10,0$ A/s, la diferencia de potencial es 60 V. Hallar la resistencia y la autoinducción de la bobina.

55. En una onda electromagnética plana, tal como una onda luminosa, los valores de los campos eléctrico y magnético están relacionados por $E = cB$, en donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz. Demostrar que en este caso las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.

56. Demostrar que en el caso de dos bobinas L_1 y L_2 conectadas en serie, de tal modo que ninguno de los flujos de una de ellas atraviese a la otra, la autoinducción efectiva viene dada por $L_{ef} = L_1 + L_2$.

57. Dado el circuito de la figura 26-36, suponer que el interruptor S se ha cerrado durante un largo tiempo, de modo que existen corrientes estacionarias en el circuito y que el inductor L está formado por un alambre superconductor, de modo que su resistencia puede considerarse nula. (a) Determinar la intensidad de corriente suministrada por la batería, la intensidad que circula por la resistencia de 100Ω y la intensidad que circula por el inductor. (b) Determinar el voltaje inicial entre los extremos del inductor cuando se abre el interruptor S . (c) Determinar la corriente en el inductor en función del tiempo a partir del instante de apertura del interruptor S .

Figura 26-36 Problema 57.

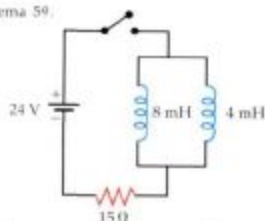


58. Demostrar que en el caso de dos bobinas L_1 y L_2 conectadas en paralelo de modo que el flujo de una de ellas no atraviese a la otra, la autoinducción efectiva viene dada por

$$1/L_{ef} = 1/L_1 + 1/L_2$$

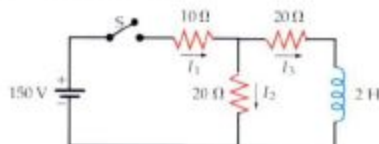
59. Determinar en el circuito de la figura 26-37, (a) la variación de la intensidad de corriente con el tiempo en cada inductor y en la resistencia en el momento justo después de cerrar el interruptor, (b) ¿Cuál es la corriente final? (Véase problema 58.)

Figura 26-37 Problema 59.



60. Determinar en el circuito de la figura 26-38 las corrientes I_1 , I_2 e I_3 (a) inmediatamente después de cerrar el interruptor S y (b) un tiempo largo después de haberlo cerrado. Después de cerrado el interruptor un largo tiempo, se abre de nuevo. Determinar los valores de las tres corrientes (c) inmediatamente después de la apertura y (d) un largo tiempo después de abrir el interruptor.

Figura 26-38 Problema 60.



61. Por un solenoide de 2000 vueltas, 4 cm^2 de área y una longitud de 30 cm, circula una corriente de 4,0 A. (a) Calcular la energía magnética almacenada mediante la expresión $\frac{1}{2}LI^2$. (b) Dividir la respuesta obtenida en la parte (a) por el volumen del solenoide para hallar la energía magnética por unidad de volumen de éste. (c) Hallar B en el solenoide. (d) Calcular la densidad de energía magnética a partir de $\eta_m = B^2/2\mu_0$ y compararla con la obtenida en la parte (b).

62. Un toroide de radio medio 25 cm y un radio de la bobina de 2 m está arrollado con un cable superconductor de 1000 m de longitud por el que circula una corriente de 400 A. (a) ¿Cuál es el número de vueltas de la bobina? (b) ¿Cuál es el campo magnético en el radio medio? (c) Suponiendo B constante en toda el área de la bobina, calcular la densidad de energía magnética y la energía total almacenada en el toroide.

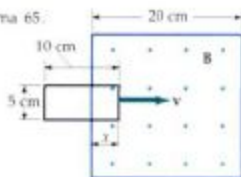
63. Un solenoide largo posee n vueltas por unidad de longitud y transporta una corriente dada por $I = I_0 \sin \omega t$. El solenoide tiene una sección transversal circular de radio R . Determinar el campo eléctrico inducido en un radio r medido desde el eje del solenoide para (a) $r < R$ y (b) $r > R$.

64. Un campo magnético uniforme de magnitud 1,2 T posee la dirección del eje z . Una barra conductora de longitud 15 cm se encuentra paralelamente al eje y y oscila en la dirección x con una elongación dada por $x = (2 \text{ cm}) \cos 120 \pi t$. ¿Cuál es la fem inducida en la barra?

65. Una espira rectangular de 10 cm por 5,0 cm y con una resistencia de 2,5 Ω se mueve por una región de un campo magnético uniforme de $B = 1,7$ T (figura 26-39) con velocidad

constante $v = 2,4$ cm/s. El extremo delantero de la espira entra en la región del campo magnético en el instante $t = 0$. (a) Hallar el flujo que atraviesa la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico del mismo. (b) Hallar la fem y la corriente inducida en la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico de las mismas. Despreciar cualquier autoinducción de la espira y ampliar los gráficos desde $t = 0$ hasta $t = 16$ s.

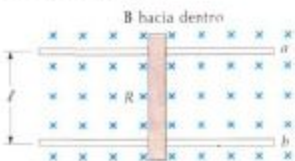
Figura 26-39 Problema 65.



66. Determinar en el ejemplo 26-7 la energía total disipada en la resistencia y mostrar que es igual a $\frac{1}{2}mv^2$.

67. En la figura 26-40, la barra posee una resistencia R y los rielles son de resistencia despreciable. Una batería de fem \mathcal{E} y resistencia interna despreciable se conecta entre los puntos a y b de tal modo que la corriente en la barra está dirigida hacia abajo. La barra se encuentra en reposo en el instante $t = 0$. (a) Determinar la fuerza que actúa sobre la barra en función de la velocidad v y escribir la segunda ley de Newton para la barra cuando su velocidad es v . (b) Demostrar que la barra alcanza una velocidad límite y determinar la expresión correspondiente. (c) ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente cuando la barra alcanza su velocidad límite?

Figura 26-40 Problemas 67 y 68.



68. La barra de la figura 26-40 posee una resistencia R y los rielles son de resistencia despreciable. Un condensador de carga Q_0 y capacidad C se conecta entre los puntos a y b de tal modo que la corriente en la barra se dirige hacia abajo. La barra está en reposo para $t = 0$. (a) Escribir la ecuación del movimiento de la barra sobre los rielles. (b) Demostrar que la velocidad límite de la barra sobre los rielles está relacionada con la carga final en el condensador.

69. Una barra conductora de masa m y resistencia R puede deslizarse libremente sin rozamiento a lo largo de los rielles paralelos ℓ e inclinada un ángulo θ con la horizontal. Existe un campo magnético B dirigido hacia arriba. (a) Demostrar la existencia de una fuerza retardatriz dirigida según la inclinación hacia arriba, dada por

$$F = (B^2 \ell^2 v \cos^2 \theta) / R$$

(b) Demostrar que la velocidad límite de la barra es

$$v_0 = (mgR \sin \theta) / (B^2 \ell^2 \cos^2 \theta)$$

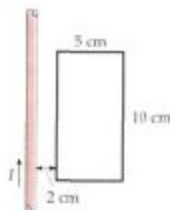
70. Un péndulo simple formado por un alambre de longitud L soporta una bola metálica de masa m . El alambre posee una masa despreciable y se mueve en el interior de un campo magnético horizontal y uniforme \vec{B} . Este péndulo ejecuta un movimiento armónico simple de amplitud angular θ_0 . ¿Cuál es la fem generada a lo largo del alambre?

71. Un alambre situado a lo largo del eje z transporta la corriente $I=20$ A en el sentido positivo de dicho eje. Una pequeña esfera conductora de radio $R=2$ cm se encuentra inicialmente en reposo sobre el eje y y a una distancia $h=45$ cm por encima del alambre. La esfera se deja caer en el instante $t=0$. (a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de la esfera en el instante $t=3$ s? Suponer que el único campo magnético es el producido por el alambre. (b) ¿Cuál es el voltaje a través de la esfera en el instante $t=3$ s?

Nivel III

72. Un alambre largo y rectilíneo transporta la corriente I . Una espira rectangular con dos lados paralelos al alambre tiene los lados a y b , siendo d la distancia entre el lado más próximo y el alambre, como indica la figura 26-41. (a) Calcular el flujo magnético que atraviesa la espira rectangular. *Indicación:* Calcular el flujo a través de una banda de área $dA = b dx$ e integrar desde $x=d$ a $x=d+a$. (b) Evaluar la respuesta para $a=5$ cm, $b=10$ cm, $d=2$ cm e $I=20$ A.

Figura 26-41 Problemas 72 y 74.

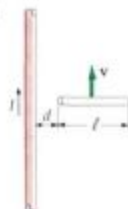


73. Una varilla de longitud ℓ es perpendicular a un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente I , según puede verse en la figura 26-42. El extremo cercano de la varilla está a una distancia d del conductor. La varilla se mueve con una velocidad v en el sentido de la corriente I . (a) Demostrar que la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla viene dada por

$$V = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{d+\ell}{d}$$

(b) Utilizar la ley de Faraday para obtener este resultado considerando el flujo que atraviesa un área rectangular $A = \ell vt$ barrida por la varilla.

Figura 26-42 Problema 73.

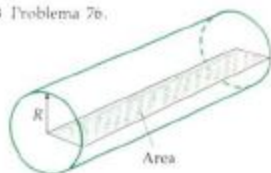


74. La espira del problema 72 se mueve alejándose del alambre con una velocidad constante v . En el instante $t=0$, el lado izquierdo de la espira se encuentra a una distancia d del alambre largo rectilíneo. (a) Calcular la fem generada en la espira determinando la fem de movimiento en cada segmento de la misma, paralelo al alambre. Explicar por qué se desprecia la fem en los segmentos perpendiculares al alambre. (b) Calcular la fem en la espira calculando primero el flujo a través de la misma en función del tiempo y después usando la expresión $\mathcal{E} = -d\phi_m/dt$; compárese la respuesta con la obtenida en la parte (a).

75. Un alambre hueco de paredes delgadas de radio a tiene su eje a lo largo del eje z y transporta la corriente I en el sentido positivo de z . Un segundo alambre idéntico al anterior con su eje a lo largo de la línea $x=d$, transporta la corriente I en el sentido negativo de z . (a) Determinar el flujo magnético por unidad de longitud que atraviesa el espacio comprendido entre los alambres en el plano xz . (b). Si los extremos de los alambres están conectados de modo que los alambres paralelos forman dos lados de una espira, determinar la autoinducción por unidad de longitud de la espira.

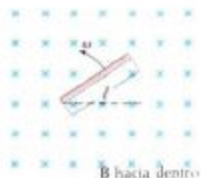
76. Un conductor largo y cilíndrico de radio R transporta una corriente I que está uniformemente distribuida en su área transversal. Determinar el flujo magnético por unidad de longitud a través del área indicada en la figura 26-43.

Figura 26-43 Problema 76.



77. Una varilla conductora de longitud ℓ gira a velocidad angular constante ω alrededor de un extremo y en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme B (figura 26-44). (a) Demostrar que la fuerza magnética sobre una carga q situada a una distancia r del eje de giro es $Bqr\omega$. (b) Demostrar que la diferencia de potencial existente entre los extremos de la varilla es $V = \frac{1}{2} B\omega\ell^2$. (c) Dibujar una línea radial cualquiera en el plano a partir del cual midamos el ángulo $\theta = \omega t$. Demostrar que el área de la región en forma de cuña entre la línea de referencia y la varilla es $A = \frac{1}{2} \ell^2 \theta$. Calcular el flujo que atraviesa esta área y demostrar que $\mathcal{E} = \frac{1}{2} B\omega\ell^2$ se deduce a partir de la ley de Faraday aplicada a dicha área.

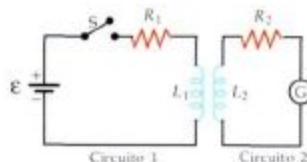
Figura 26-44 Problema 77.



78. En el circuito de la figura 26-26 sea $\mathcal{E}=12,0$ V, $R=3,0$ Ω , y $L=0,6$ H. El interruptor está cerrado en el instante $t=0$. Desde el instante $t=0$ a $t=\tau$, hallar (a) la energía total suministrada por la batería, (b) la energía total disipada en forma de calor en la resistencia y (c) la energía almacenada en la bobina. *Indicación:* Hallar la velocidad de variación en función del tiempo e integrar desde $t=0$ hasta $t=\tau=L/R$.

79. El circuito 2 de la figura 26-45, posee una resistencia total de 300 Ω . Cuando el interruptor S del circuito 1 está cerrado, a través del galvanómetro del circuito 2 fluye una carga total de 2×10^{-4} C. Después de un largo tiempo, la corriente del circuito 1 es de 5 A. ¿Cuál es la inductancia mutua entre las dos bobinas?

Figura 26-45 Problema 79.



80. Un cable coaxial se compone de dos cilindros conductores de paredes muy delgadas cuyos radios son r_1 y r_2 (figura 26-46). La corriente I circula en un sentido por el cilindro interior y en sentido contrario por el exterior. (a) Utilizar la ley de Ampère para hallar B y demostrar que $B=0$ excepto en la región comprendida entre los conductores. (b) Demostrar que la densidad de energía magnética en la región comprendida entre los cilindros es

$$w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

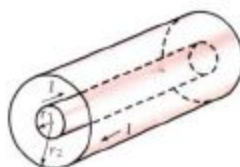
(c) Hallar la energía magnética de un elemento de volumen de la corteza cilíndrica de longitud ℓ y volumen $dV = \ell 2\pi r dr$ e integrar el resultado para demostrar que la energía magnética total en el volumen de longitud ℓ comprendido entre los cilindros es

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ell \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(d) Utilizar el resultado de la parte (c) y $U_m = \frac{1}{2} LI^2$ para demostrar que la autoinducción por unidad de longitud es

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Figura 26-46 Problemas 80 y 81.



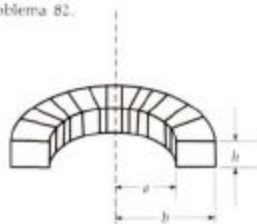
81. En la figura 26-46, calcular el flujo que atraviesa un área rectangular de lados ℓ y $r_2 - r_1$ comprendida entre los conductores. Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud puede hallarse a partir de $\phi_m = LI$ [ver parte (d) del problema 80].

82. Demostrar que la inductancia de un toroide de sección rectangular como indica la figura 26-47 viene dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln(b/a)}{2\pi}$$

en donde N es el número total de vueltas, a es el radio interior, b el radio exterior y h la altura del toroide.

Figura 26-47 Problema 82.



Capítulo 27

Magnetismo en la materia

Domínios magnéticos sobre la superficie de un cristal de Fe-3% Si—observados mediante un microscopio electrónico de barrido con análisis de polarización. Los cuatro colores indican cuatro posibles orientaciones de los dominios.



Al estudiar los campos eléctricos en la materia vimos que el campo eléctrico se ve influido por la presencia de dipolos eléctricos. En el caso de moléculas polares, que tienen un momento dipolar eléctrico permanente, los dipolos se alinean mediante la acción del campo eléctrico en la dirección del campo, mientras que en el caso de moléculas no polares se inducen dipolos eléctricos mediante el campo externo. En ambos casos, los dipolos se alinean paralelamente al campo eléctrico externo y esta alineación tiende a debilitar este campo externo.

En el magnetismo se presentan unos efectos algo semejantes pero más complicados que los mencionados. Los átomos tienen momentos magnéticos debido al movimiento de sus electrones. Además cada electrón tiene un momento magnético intrínseco asociado con su spin. El momento magnético neto de un átomo depende de la distribución de los electrones en el átomo. A diferencia de lo mencionado en el caso de los dipolos eléctricos, la alineación de los dipolos magnéticos paralelos a un campo magnético externo tiende a *aumentar* el campo. Podemos analizar esta diferencia comparando las líneas de E en el caso de un dipolo eléctrico con las líneas de B en el caso de un dipolo magnético, es decir, en el caso de una pequeña espira de corriente, como la que se ve en la figura 27-1. Bastante lejos de los dipolos las líneas de campo son idénticas. Sin embargo, entre las cargas del dipolo eléctrico, las líneas de campo se oponen a la dirección del momento dipolar, mientras que dentro de la espira de corriente, las líneas de campo magnético son paralelas al momento dipolar magnético. Así, pues, en un mate-

rial eléctricamente polarizado, los dipolos eléctricos crean un campo eléctrico *antiparalelo* a su vector momento dipolar mientras que en un material magnéticamente polarizado, los dipolos magnéticos crean un campo magnético *paralelo* a los vectores momento dipolar magnético.

Podemos clasificar los materiales en tres categorías, paramagnéticos, diamagnéticos y ferromagnéticos, de acuerdo con el comportamiento de sus moléculas en un campo magnético externo. Los materiales o sustancias paramagnéticas o ferromagnéticas tienen moléculas con momentos dipolares permanentes. En los materiales paramagnéticos estos momentos no interactúan fuertemente entre sí y están normalmente orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se alinean parcialmente en la dirección del campo, produciéndose así un incremento del mismo. Sin embargo, a temperaturas ordinarias y con campos externos normales, sólo una fracción muy pequeña de las moléculas se ven alineadas debido a que el movimiento térmico tiende a desordenar su orientación. El aumento del campo magnético total es, por consiguiente, muy pequeño. El ferromagnetismo es mucho más complicado. Debido a una fuerte interacción entre los dipolos magnéticos vecinos, puede conseguirse un alto grado de alineación incluso con campos magnéticos externos débiles, originando así un incremento muy grande del campo total. Incluso en el caso de que no exista ningún campo magnético externo, los materiales magnéticos pueden tener sus dipolos magnéticos alineados, como sucede en el caso de los imanes permanentes. El diamagnetismo se observa en materiales cuyas moléculas poseen momentos magnéticos no permanentes. Es el resultado de un momento magnético inducido de sentido opuesto al campo externo. Los dipolos inducidos debilitan así el campo magnético resultante. Este efecto se produce en todas las sustancias, pero es muy pequeño y con frecuencia resulta enmascarado por los efectos paramagnéticos o ferromagnéticos si las moléculas individuales tienen momentos dipolares magnéticos permanentes.

27-1 Imantación y susceptibilidad magnética

Al estudiar los efectos eléctricos de la materia, situábamos un material no conductor (dieléctrico) en un campo eléctrico intenso entre las placas de un condensador de placas paralelas. Así descubrimos que el campo eléctrico tiende a alinear los momentos dipolares eléctricos (permanentes o inducidos). De modo semejante, cuando un material se sitúa en un campo magnético intenso, tal como el de un solenoide, el campo magnético de éste tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos (permanentes o inducidos) dentro del material, el cual se magnetiza. Un material que experimenta este proceso se describe por su **imantación M** , que se define por el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen del material:

$$M = \frac{d\mathbf{m}}{dV} \quad 27-1$$

Mucho antes de conocerse la estructura atómica o molecular, Ampère propuso un modelo de magnetismo, en el cual la imantación de los materiales era debida a corrientes circulares microscópicas dentro del material imantado. Actualmente se sabe que estas corrientes circulares son el resultado del movimiento intrínseco de las cargas atómicas. Aunque estos movimientos son muy complicados, para el modelo de Ampère necesitamos sólo suponer que los movimientos son equivalentes a circuitos circulares cerrados. La figura 27-2 muestra las corrientes circulares atómicas en el cilindro, alineadas con sus momentos atómicos a lo largo del eje del cilindro. Si el material es homogéneo la corriente neta en cualquier punto dentro del material es cero a causa de la cancelación de las corrientes circulares vecinas. Sin embargo, como no existe cancelación en la superficie del material, el resultado de estas corrientes circulares es una corriente sobre la superfi-

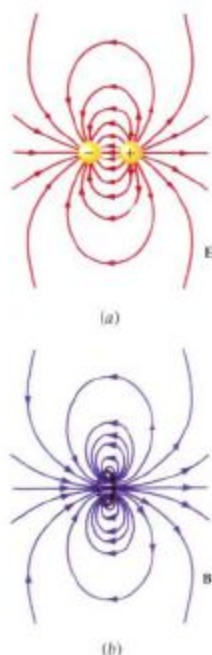


Figura 27-1 (a) Líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico. (b) Líneas de campo magnético de un dipolo magnético. Bastante lejos de los dipolos, las líneas de campo son idénticas. En la región comprendida entre las cargas en (a), el campo eléctrico se opone al momento del dipolo, mientras que dentro del anillo en (b), el campo magnético es paralelo al momento del dipolo.

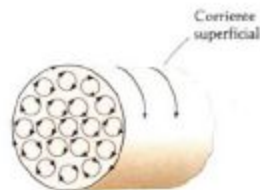


Figura 27-2 Modelo de espiras de corriente atómicas en el cual todos los dipolos atómicos son paralelos al eje del cilindro. La corriente neta en cualquier punto dentro del material es cero debido a la cancelación de los átomos vecinos. El resultado es una corriente superficial semejante a la de un solenoide.

Figura 27-3 Las corrientes en las espiras adyacentes en el interior de un material uniformemente imantado se cancelan permaneciendo sólo una corriente superficial. Esta cancelación tiene lugar en todo punto interior, cualquiera que sea la forma de las espiras.

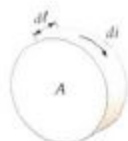
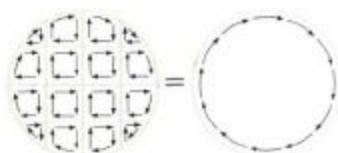


Figura 27-4 Disco elemental para el estudio de la relación entre la imantación M y la corriente superficial por unidad de longitud.

cie del material (figura 27-3). La corriente superficial o corriente amperiana, es semejante a la corriente real en los arrollamientos del solenoide.

La figura 27-4 muestra una pequeña sección en forma de disco correspondiente al cilindro. El disco tiene un área transversal A , de longitud $d\ell$ y volumen $d\gamma = A d\ell$. Sea di la corriente amperiana sobre la superficie del disco. La magnitud del momento dipolar magnético dm del disco es la misma que la de una corriente circular de área A que transporta una corriente di :

$$dm = A di$$

La imantación M del disco es el momento magnético por unidad de volumen:

$$M = \frac{dm}{d\gamma} = \frac{A di}{A d\ell} = \frac{di}{d\ell} \quad 27-2$$

Así, la magnitud del vector imantación es la corriente amperiana por unidad de longitud a lo largo de la superficie del material imantado. De este resultado se deduce que las unidades de M son amperios por metro.

Sea un cilindro de imantación uniforme M paralelo a su eje. Como hemos visto, el efecto de la imantación es el mismo que si el cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de magnitud M . Esta corriente es semejante a la transportada por un solenoide arrollado compactadamente. Para un solenoide, la corriente por unidad de longitud es nI , en donde n es el número de vueltas por unidad de longitud e I la corriente en cada vuelta. Podemos calcular el campo magnético producido por el cilindro imantado de la misma forma que se ha calculado el campo producido por un solenoide de arrollamiento compacto. Si el cilindro es de la misma forma que el solenoide y si $M = nI$, el campo magnético producido por el cilindro en cualquier punto es exactamente el mismo que el producido por el solenoide. En particular, el campo magnético B dentro de un solenoide y lejos de sus extremos, viene dado por

$$B = \mu_0 nI$$

Por tanto, el campo magnético B_m dentro de un cilindro y lejos de sus extremos, con una imantación uniforme M viene dado por

$$B_m = \mu_0 M \quad 27-3$$

Ejemplo 27-1

Una pequeña barra magnética, cilíndrica, de radio 0,5 cm y longitud 12 cm posee un momento dipolar magnético de valor $m = 1,5 \text{ A}\cdot\text{m}^2$. (a) Determinar la imantación M , supuesta uniforme en el imán. Determinar el campo magnético (b) en el centro del imán y (c) justo en la parte exterior de un extremo del imán. (d) Determinar la intensidad de polo q_m del imán.

(a) El volumen del imán es $\gamma = \pi r^2 \ell = \pi (0,005 \text{ m})^2 (0,12 \text{ m}) = 9,42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$. La imantación es el momento magnético por unidad de volumen

$$M = \frac{m}{\gamma} = \frac{1,5 \text{ A}\cdot\text{m}^2}{9,42 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 1,59 \times 10^5 \text{ A/m}$$

(b) El campo magnético dentro de un imán cilíndrico es el mismo que el existente dentro de un solenoide, reemplazando nI por M — la corriente amperiana por unidad de longitud sobre la superficie del imán. Despreciando los efectos de los extremos, el campo magnético en el centro del imán es

$$B = \mu_0 M \\ = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A})(1,59 \times 10^3 \text{ A}/\text{m}) = 0,200 \text{ T}$$

(c) En el capítulo 25 vimos que el campo magnético próximo a los extremos de un solenoide es la mitad que en el centro del mismo. Por tanto, el campo magnético cerca del extremo del cilindro es

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 M = 0,100 \text{ T}$$

(d) La intensidad de polo magnético de la barra es igual a la magnitud del momento dipolar magnético dividido por la longitud. La intensidad de polo es, por tanto

$$q_m = \frac{m}{\ell} = \frac{1,5 \text{ A}\cdot\text{m}^2}{0,12 \text{ m}} = 12,5 \text{ A}\cdot\text{m}$$

Consideremos un solenoide largo con n vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente I . Llamaremos B_{ap} al campo magnético (aplicado) debido a la corriente que circula por el solenoide. Situamos ahora un cilindro de material dentro del solenoide. El campo aplicado del solenoide imanta el material, de modo que éste adquiere una imantación M . El campo magnético resultante en un punto interior al solenoide y lejos de sus extremos debido a la corriente en el solenoide más el material imantado es

$$B = B_{ap} + \mu_0 M \quad 27-4$$

En los materiales paramagnético y ferromagnético, M posee la misma dirección y sentido que B_{ap} ; en los materiales diamagnéticos, M se opone a B_{ap} . En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos la imantación resulta proporcional al campo magnético aplicado que produce el alineamiento de los dipolos magnéticos del material. Podemos escribir

$$M = \chi_m \left(\frac{B_{ap}}{\mu_0} \right) \quad 27-5$$

en donde χ_m es un número sin dimensiones llamado **susceptibilidad magnética**. La ecuación 27-4 se convierte en

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = B_{ap} (1 + \chi_m) \quad 27-6$$

Para los materiales paramagnéticos, χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. La tabla 27-1 relaciona la susceptibilidad magnética de diversos materiales paramagnéticos y diamagnéticos. Como puede verse, en los sólidos relacionados, esta magnitud es del orden de 10^{-5} .

Las ecuaciones 27-5 y 27-6 no son muy útiles para los materiales ferromagnéticos, ya que χ_m depende de B_{ap} y del estado previo de imantación del material.

Cuestión

1. ¿Por qué algunos valores de χ_m en la tabla 27-1 son positivos y otros negativos?

Tabla 27-1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20°C

Material	χ_m
Aluminio	$2,3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,66 \times 10^{-3}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$
Oro	$-3,6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-3,2 \times 10^{-5}$
Plata	$-2,6 \times 10^{-5}$
Sodio	$-0,24 \times 10^{-3}$
Titanio	$7,06 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$6,8 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-9,9 \times 10^{-5}$
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2,3 \times 10^{-5}$
Nitrógeno (1 atm)	$-5,0 \times 10^{-5}$
Oxígeno (1 atm)	2090×10^{-7}



Figura 27-5 Partícula de carga q y masa m_q moviéndose en un círculo de radio r . El momento angular está dirigido hacia el papel y su magnitud es $m_q v r$; el momento magnético está dirigido hacia el papel (si q es positivo) y su magnitud es $\frac{1}{2} q v r$.

27-2 Momentos magnéticos atómicos

La imantación de una sustancia paramagnética o ferromagnética puede relacionarse con los momentos magnéticos permanentes de los átomos individuales de la sustancia. En general, el momento magnético de un átomo está relacionado con su momento angular. En efecto, consideremos una partícula de masa m_q y carga q moviéndose con velocidad v en un círculo de radio r como indica la figura 27-5. (Utilizaremos m_q para la masa a fin de evitar confusión con m que simboliza el momento magnético.) El momento angular de la partícula es

$$L = m_q v r \quad 27-7$$

La magnitud del momento magnético es el producto de la corriente por el área del círculo:

$$m = IA = I \pi r^2$$

En el caso de una carga moviéndose en un círculo, la intensidad de corriente es igual a la carga multiplicada por la frecuencia:

$$I = qf = \frac{q}{T}$$

en donde T es el período del movimiento. Como la velocidad multiplicada por el período es igual a la longitud de la circunferencia descrita en su movimiento, el período viene dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

La intensidad de corriente es, por tanto,

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

y el momento magnético es

$$\begin{aligned} m &= IA & 27-8 \\ &= \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $vr = L/m_q$ (ecuación 27-7) resulta para el momento magnético

$$m = \frac{q}{2m_q} L$$

Si la carga q es positiva, el momento angular y el momento magnético tienen igual sentido. Podemos por tanto escribir

Momento magnético
y momento angular

$$m = \frac{q}{2m_q} L \quad 27-9$$

La ecuación 27-9 es la relación general clásica entre el momento magnético y el momento angular. Se cumple también en la teoría cuántica del átomo para el momento angular orbital, pero no para el momento angular de spin intrínseco del electrón. Para el spin electrónico, el momento magnético es el doble que el previsto por esta ecuación. El factor extra 2 es un resultado de la teoría cuántica que no tiene analogía en la mecánica clásica.

En la teoría cuántica del átomo, el momento angular está cuantizado, es decir, sólo puede tener una determinada serie discreta de valores. El momento angular orbital debe ser un múltiplo entero de $\hbar/2\pi$, y el momento angular de spin,

un múltiplo semientero de $h/2\pi$, siendo h una constante fundamental llamada constante de Planck*, de valor

$$h = 6,67 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

La combinación $h/2\pi$ se presenta con frecuencia y se representa por \hbar (« h con barras»):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

El momento magnético de un átomo está, por tanto, también cuantizado. Es conveniente escribir la ecuación 27-9 del momento magnético en la forma

$$\mathbf{m} = \frac{q\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

Para un electrón $m_e = m_e$ y $q = -e$, de modo que el momento magnético del electrón es

$$\mathbf{m} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -m_B \frac{\mathbf{L}}{\hbar} \quad 27-10$$

en donde

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2 = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad 27-11$$

Magnetón de Bohr

se denomina un **magnetón de Bohr**. El momento magnético de un electrón debido a su momento angular de spin intrínseco equivale a 1 magnetón de Bohr. Aunque el cálculo del momento magnético de un átomo es un problema complicado en teoría cuántica, el resultado para todos los átomos, de acuerdo con la teoría y la experiencia, es que el momento magnético es del orden de unos pocos magnetones de Bohr (o cero para aquellos átomos con estructuras electrónicas corticales cerradas que poseen momento angular nulo). Véase sección 37-6 en la *Versión ampliada* para una discusión de la estructura cortical de los átomos.

Si todos los átomos o moléculas de un material poseen alineados sus momentos magnéticos, el momento magnético por unidad de volumen del material es el producto del número de moléculas por unidad de volumen n y el momento magnético m de cada molécula. En este caso límite, la **imantación de saturación** M_s es

$$M_s = nm \quad 27-12$$

El número de moléculas por unidad de volumen puede determinarse a partir de la masa molecular \mathcal{M} , la densidad del material ρ y el número de Avogadro N_A :

$$n = \frac{N_A(\text{átomos/mol})}{\mathcal{M}(\text{kg/mol})} \rho(\text{kg/m}^3)$$

Ejemplo 27-2

Determinar la imantación de saturación y el campo magnético que se produce en el hierro, suponiendo que cada átomo de este metal tiene un momento magnético de 1 magnetón de Bohr.

La densidad del hierro es $7,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, y su peso molecular es $55,8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$. El número de moléculas de hierro (átomos) por unidad de volumen es, por tanto:

$$\begin{aligned} n &= \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{55,8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} (7,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \\ &= 8,52 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3 \end{aligned}$$

* La cuantización y la constante de Planck serán discutidas en el capítulo 35.

Como el momento magnético de cada átomo es 1 magnetón de Bohr, la imantación de saturación será

$$M_s = (8,52 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3)(9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2) \\ = 7,90 \times 10^5 \text{ A/m}$$

Por tanto, el campo magnético sobre el eje de un cilindro largo de hierro resultante de esta imantación máxima es (ecuación 27-3)

$$B = \mu_0 M_s = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})(7,90 \times 10^5 \text{ A/m}) \\ = 0,993 \text{ T} \approx 1 \text{ T}$$

El campo magnético de saturación medido en el hierro recocido es aproximadamente 2,16 T, lo que indica que el momento magnético de un átomo de hierro es algo superior a 2 magnetones de Bohr. Este momento magnético es debido principalmente a los spines de dos electrones no apareados en el átomo de hierro.

Cuestiones

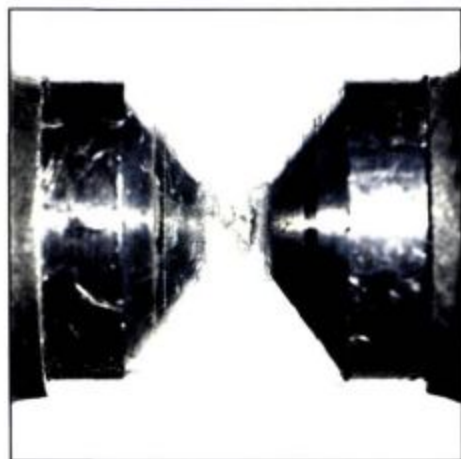
- ¿Puede una partícula tener momento angular y carecer de momento magnético?
- ¿Puede una partícula tener momento magnético y carecer de momento angular?
- Un anillo de alambre circular transporta una corriente I . ¿Existe momento angular asociado con el momento magnético de la espira? Si es así, ¿por qué no se observa?

27-3 Paramagnetismo

Los **materiales paramagnéticos** son aquellos que poseen una susceptibilidad magnética positiva muy pequeña χ_m . El paramagnetismo se presenta en sustancias cuyos átomos tienen unos momentos magnéticos permanentes que interactúan entre sí sólo muy débilmente. Cuando no existe ningún campo magnético externo, estos momentos magnéticos están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo tienden a alinearse paralelamente al campo, pero esta alineación está contrarrestada por la tendencia que tienen los momentos a orientarse aleatoriamente debido al movimiento térmico. La fracción de los momentos que se alinean con el campo depende de la intensidad de éste y de la temperatura. A temperaturas muy bajas y con campos externos intensos casi todos los momentos están alineados con el campo. En este caso la contribución al campo magnético total debida al material es muy grande, según se indica en la estimación numérica del ejemplo 27-2. Incluso con los campos magnéticos mayores que se pueden obtener en los laboratorios, la temperatura debe ser muy baja, del orden de algunos kelvins, con objeto de obtener una elevada alineación. A temperaturas más altas y con campos externos más débiles sólo una fracción pequeña de los momentos se alinean en el campo externo y la contribución de la sustancia al campo magnético total es muy pequeña. Podemos establecer esto de modo más cuantitativo comparando la energía de un momento magnético en un campo magnético externo con la energía térmica que es del orden de kT , siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.

En el capítulo 18 vimos que la energía potencial de un dipolo eléctrico de momento \mathbf{p} en un campo eléctrico \mathbf{E} viene dada por (ecuación 18-12)

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$



El oxígeno líquido, paramagnético, es atraído por el campo magnético de un imán permanente. En un campo magnético uniforme, un dipolo magnético experimenta una acción de un momento, pero no la de una fuerza neta. En un campo no uniforme un dipolo experimenta una fuerza neta que depende del gradiente del campo. En esta fotografía el oxígeno líquido se acumula en las proximidades de los bordes de la región en donde el gradiente del campo es máximo.

La energía potencial de un dipolo magnético de momento \mathbf{m} en un campo magnético externo \mathbf{B} viene dada por una ecuación semejante:

$$U = -mB \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad 27-13$$

La energía potencial cuando el momento es paralelo al campo ($\theta = 0$) es, por tanto, inferior que cuando es antiparalelo ($\theta = 180^\circ$) en la cantidad $2mB$ (figura 27-6). Para un momento magnético típico de 1 magnetón de Bohr y un campo magnético intenso de 1 T, la diferencia de energía potencial es

$$\Delta U = 2m_p B = 2(9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T})(1 \text{ T}) = 1,85 \times 10^{-23} \text{ J}$$

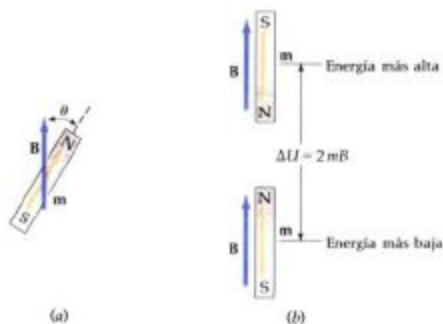


Figura 27-6 (a) Momento magnético que forma un ángulo θ con un campo magnético \mathbf{B} . (b) La energía potencial es mínima cuando el momento está alineado con el campo y máxima cuando es antiparalelo con el campo. La diferencia de energía es $2mB$.

A la temperatura normal de $T = 300 \text{ K}$, la energía térmica típica kT es

$$kT = (1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 4,14 \times 10^{-21} \text{ J}$$

la cual es unas 200 veces mayor que $2m_p B$. Así, incluso en un campo magnético intenso de 1 T, la mayor parte de los momentos magnéticos estarán aleatoriamente orientados a causa de los movimientos térmicos.

La figura 27-7 muestra un gráfico de la imantación M en función de un campo magnético externo aplicado B_{ap} a una determinada temperatura. En campos muy intensos, casi todos los momentos magnéticos están alineados con el campo y $M \approx M_s$. (Para los campos magnéticos alcanzables en un laboratorio, esto sólo puede ocurrir a temperaturas muy bajas.) Cuando $B_{ap} = 0$, $M = 0$, lo que indica que la orientación de los momentos es completamente aleatoria. En campos débiles, la imantación es aproximadamente proporcional al campo aplicado, lo que viene indicado por la línea naranja de trazos de la figura. En esta región, la imantación viene dada por

Ley de Curie

$$M = \frac{1}{3} \frac{mB_{ap}}{kT} M_s \quad 27-14$$

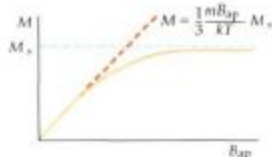


Figura 27-7 Representación gráfica de la imantación M en función del campo aplicado B_{ap} . En campos muy intensos, la imantación se aproxima al valor de saturación M_s . Este valor se alcanza sólo a muy bajas temperaturas. En campos débiles, la imantación es aproximadamente proporcional a B_{ap} , resultado conocido como ley de Curie.

Obsérvese que (mB_{ap}/kT) es el cociente entre la energía máxima de un dipolo en el campo magnético y la energía térmica característica; por tanto, es un número sin dimensiones. El hecho de que la imantación varía en razón inversa con la temperatura absoluta, fue descubierto experimentalmente por Pierre Curie y se conoce con el nombre de ley de Curie.

Ejemplo 27-3

Si $m = m_B$, ¿a qué temperatura la imantación será igual al 1 por ciento de la imantación de saturación en un campo magnético aplicado de 1 T?

Según la ley de Curie resulta

$$M = \frac{1}{3} \frac{mB_{ap}}{kT} M_s = 0,01 M_s$$

y, por tanto,

$$T = \frac{mB_{ap}}{0,03k} = \frac{(9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T})(1 \text{ T})}{(0,03)(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})} = 22,4 \text{ K}$$

Obsérvese que incluso para un campo magnético intenso de 1 T, la imantación es inferior al 1 por ciento de saturación a temperaturas por encima de 22,4 K.

Ejercicio

Si $m = m_B$, ¿qué fracción de la imantación de saturación es M a 300 K para un campo magnético externo de 15 000 G? (Respuesta: $M/M_s = 1,12 \times 10^{-3}$)



Un fragmento de magnetita (piedra imán) atrae la aguja de una brújula.

27-4 Ferromagnetismo

Son materiales ferromagnéticos aquellos que poseen valores positivos, muy grandes, de susceptibilidad magnética χ_m (medida en las condiciones que se describen posteriormente). El ferromagnetismo se presenta en el hierro puro, en el cobalto y en el níquel, en aleaciones de estos metales entre sí y con algunos otros elementos, y en pocas sustancias más (gadolinio, disprosio, y algunos compuestos). En estas sustancias un campo magnético externo pequeño puede producir un grado muy alto de alineación de los momentos dipolares magnéticos atómicos, que en algunos casos, puede persistir incluso aunque no exista campo magnetizante externo. Esto es así debido a que los momentos dipolares magnéticos de los átomos de estas sustancias ejercen fuerzas intensas sobre sus vecinos, de modo que en una pequeña región del espacio los momentos se alinean entre sí incluso en ausencia de campos externos. La región del espacio en la cual los momentos dipolares magnéticos están alineados, se denomina dominio magnético.

El tamaño de un dominio es normalmente microscópico. Dentro del dominio, todos los momentos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineación varía de un dominio a otro de modo que el momento magnético neto de un trozo macroscópico de material es cero en su estado normal. La figura 27-8 ilustra esta situación. La mecánica cuántica predice la existencia de estas fuerzas dipolares en estas sustancias que no pueden ser explicadas mediante la física clásica. A temperaturas por encima de una temperatura crítica, denominada **temperatura de Curie**, la agitación térmica es suficiente para destruir esta alineación y los materiales ferromagnéticos se transforman en paramagnéticos.

Cuando se aplica un campo magnético externo, los límites de los dominios se desplazan y al mismo tiempo la dirección de alineación dentro de un dominio puede variar de modo que exista un momento magnético neto en dirección del campo aplicado. Puesto que el grado de alineación es grande, incluso en el caso de un campo externo pequeño, el campo magnético producido en el material por los dipolos suele ser frecuentemente mucho mayor que el campo externo.

Consideremos la imantación de una barra larga de hierro en el interior de un solenoide haciendo que aumente gradualmente la corriente que circula por los arrollamientos del solenoide. Admitiremos que la barra y el solenoide son suficientemente grandes para permitirnos despreciar los efectos de los extremos. El campo magnético en el centro de la barra viene dado por la ecuación 27-4:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ap}} + \mu_0 \mathbf{M} \quad 27-15$$

en donde

$$B_{\text{ap}} = \mu_0 n I$$

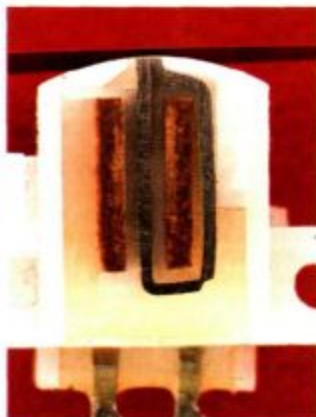
En los materiales ferromagnéticos, el campo magnético $\mu_0 M$ debido a los momentos magnéticos es con frecuencia superior al campo magnetizante en un factor de varios miles.



Figura 27-8 Ilustración esquemática de los dominios ferromagnéticos. Dentro de un dominio, los dipolos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineamiento varía de un dominio a otro, de modo que el momento magnético neto es nulo. Un pequeño campo magnético externo puede causar el ensanchamiento de aquellos dominios que se alinean paralelamente al campo, o producir la rotación de la dirección de alineamiento dentro del dominio. En cualquier caso, el resultado es un momento magnético paralelo al campo.



(a)



(b)



(c)

(a) Líneas de campo magnético sobre una cinta magnetofónica de cobalto. Las flechas indican los bits magnéticos codificados. (b) Sección transversal de una cabeza sonora de cintas magnéticas. La corriente procedente de un amplificador de audio se envía a los alambres conductores que rodean un núcleo magnético en la cabeza sonora donde produce un campo magnético. Cuando la cinta pasa por un hueco situado en el núcleo de la cabeza sonora, el campo magnético que la bordea codifica la información en la cinta. La información se recupera cuando la cinta pasa por una cabeza lectora como se muestra en sección transversal en (c). En este caso, la variación de flujo debida a la cinta magnetizada induce corrientes en los alambres que rodean el núcleo de la cabeza lectora.

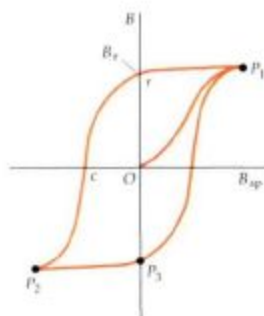


Figura 27-9 Representación gráfica de B en función del campo aplicado B_{ap} . La curva exterior se denomina curva de histéresis. El campo B_r es el campo remanente. Permanece cuando el campo aplicado retorna a cero.

La figura 27-9 muestra una representación de B en función del campo magnetizante B_{ap} . Cuando la corriente se hace crecer gradualmente desde cero, B aumenta desde cero a lo largo de la parte de la curva que empieza en el origen O y llega al punto P_1 . La tendencia hacia la horizontal de esta curva cerca del punto P_1 indica que la imantación M se está aproximando a su valor de saturación M_s , que se presenta cuando todos los dipolos atómicos están alineados. Por encima de la saturación, B crece sólo porque el campo magnetizante $B_{ap} = \mu_0 I$ crece también. Cuando B_{ap} se hace disminuir gradualmente desde el punto P_1 , no existe una disminución correspondiente de la imantación. El desplazamiento de los dominios en un material ferromagnético no es completamente reversible, y parte de la imantación permanece aún cuando B_{ap} se reduzca a cero, según se indica en la figura. Este efecto se denomina **histéresis**, del griego *hysteron*, que significa posterior, retraso, y la curva en la figura 27-9 se llama **curva de histéresis**. El valor del campo magnético en el punto r cuando B_{ap} es cero se denomina **campo remanente** B_r . En este punto la barra de hierro es un imán permanente. Si la corriente en el solenoide se invierte ahora de modo que B_{ap} tiene sentido opuesto, el campo magnético B es gradualmente llevado a cero en el punto c . La parte restante de la curva de histéresis se obtiene mediante un aumento adicional de la corriente en sentido opuesto hasta que se alcanza el punto P_2 , que corresponde a la saturación en sentido opuesto, y luego haciendo disminuir la corriente hasta cero en el punto P_3 y aumentando la corriente de nuevo en el sentido inicial.

Como la imantación M depende de la historia previa del material y puede tener un valor grande, incluso cuando el campo aplicado es nulo, su relación con éste no es simple. Sin embargo, si nos limitamos a aquella parte de la curva de imantación desde el origen al punto P_1 de la figura 27-9, M y B_{ap} son paralelos y M es cero cuando B_{ap} es cero. Podemos, por tanto, definir la susceptibilidad magnética como en la ecuación 27-5,

$$M = \chi_m (B_{ap} / \mu_0)$$

y

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = B_{ap} (1 + \chi_m) = \mu_0 n I (1 + \chi_m) = \mu n I \quad 27-16$$

en donde

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad 27-17$$

se denomina **permeabilidad** de la sustancia. (La permeabilidad se define del mismo modo en los materiales paramagnéticos y diamagnéticos, pero como χ_m es muy inferior a 1 en estos materiales, la permeabilidad μ y la permeabilidad del espacio libre μ_0 son prácticamente iguales.) La **permeabilidad relativa** K_m es un número sin dimensiones definido por la expresión

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m = \frac{B}{B_{ap}} \quad 27-18$$

Como B no varía linealmente con B_{ap} (basta ver la figura 27-9), la permeabilidad relativa no es constante. El valor máximo de K_m tiene lugar para un valor de la imantación considerablemente menor que la imantación de saturación. En la tabla 27-2 se relacionan el campo magnético de saturación $\mu_0 M_s$ y los valores máximos de K_m para algunos materiales ferromagnéticos. Obsérvese que los valores máximos de K_m son muy superiores a la unidad.

El área incluida en la curva de histéresis es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso irreversible de imantación y desimantación. Si el efecto de histéresis es pequeño, el área encerrada por el ciclo es pequeña, lo que indica que las pérdidas de energía son pequeñas y el material se denomina **magnéticamente blando** (el hierro dulce o blando es un ejemplo). La curva de histéresis en el caso de un material magnéticamente blando se indica en la figura 27-10. En este caso el campo remanente B_r es casi cero, siendo la pérdida de energía por ciclo muy pequeña. Los materiales magnéticamente blandos se utilizan como núcleos de transformador para permitir que el campo magnético B pueda variar sin incurrir en una gran pérdida de energía cuando el campo varía

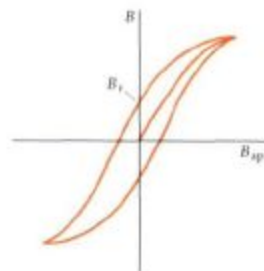


Figura 27-10 Curva de histéresis de un material magnéticamente blando. El campo remanente es muy pequeño comparado con el de un material magnéticamente duro, tal como el de la figura 27-9.

Tabla 27-2 Valores máximos de $\mu_r M$ y K_m para algunos materiales ferromagnéticos

Material	$\mu_r M_r$, T	K_m
Hierro (recocido)	2,16	5500
Hierro-silicio (96% Fe, 4% Si)	1,95	7000
Permalloy (55% Fe, 45% Ni)	1,60	25 000
Metal- μ (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0,65	100 000

muchas veces por segundo. Por otra parte, es deseable un gran campo remanente en un imán permanente. Los materiales **magnéticamente duros**, como el acero al carbono y la aleación Alnico 5, se utilizan en los imanes permanentes.

Ejemplo 27-4

Un largo solenoide con 12 vueltas por centímetro posee un núcleo de hierro recocido. Cuando la intensidad de corriente es de 0,50 A, el campo magnético dentro del núcleo de hierro es 1,36 T. Determinar (a) el campo aplicado B_{ap} , (b) la permeabilidad relativa K_m y (c) la imantación M .

(a) El campo aplicado es

$$B_{ap} = \mu_0 n I = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})(1200 \text{ vueltas/m})(0,50 \text{ A}) \\ = 7,54 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Obsérvese que el campo magnético total es 1,36 T, de tal modo que este campo magnético aplicado es una fracción depreciable del campo total.

(b) Según la ecuación 27-18, la permeabilidad relativa es

$$K_m = \frac{B}{B_{ap}} = \frac{1,36 \text{ T}}{7,54 \times 10^{-4} \text{ T}} = 1,80 \times 10^3 = 1800$$

Este valor es considerablemente menor que el máximo de K_m , aproximadamente 5500 (tabla 27-2). Con la exactitud de tres dígitos, con la cual hemos calculado K_m , la susceptibilidad χ_m es igual a la permeabilidad relativa:

$$\chi_m = K_m - 1 \approx K_m = 1800$$

(c) La imantación puede determinarse a partir de la ecuación 27-3 o de la ecuación 27-6. Utilizando la ecuación 27-6 resulta

$$\mu_r M = B - B_{ap} = 1,36 \text{ T} - 7,54 \times 10^{-4} \text{ T} \approx B = 1,36 \text{ T}$$

Por tanto,

$$M = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,36 \text{ T}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}} = 1,08 \times 10^6 \text{ A/m}$$

Cuestiones

- En una experiencia clásica de cátedra, una barra larga de hierro se dispone de tal modo que su eje está alineado con el campo magnético terrestre y en estas condiciones se golpea con un martillo. Esto convierte a la barra en un imán permanente. La barra puede desimantarse si se dispone perpendicularmente al campo magnético terrestre y se golpea de nuevo. Explicar qué es lo que ocurre en la barra.
- Un imán permanente puede perder en gran parte su imantación si se deja caer o se golpea contra un objeto. ¿Por qué?



(a)



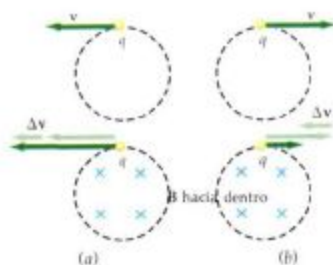
(b)

(a) Mecanismo impulsor del disco duro de un ordenador para el almacenamiento magnético de información. (b) Un diagrama de ensayo magnético sobre un disco duro, aumentado 2400 veces. Las regiones claras y oscuras corresponden a campos magnéticos de sentidos opuestos. La región uniforme alrededor del diagrama es una región del disco que ha sido borrado justo antes de la impresión.

27-5 Diamagnetismo

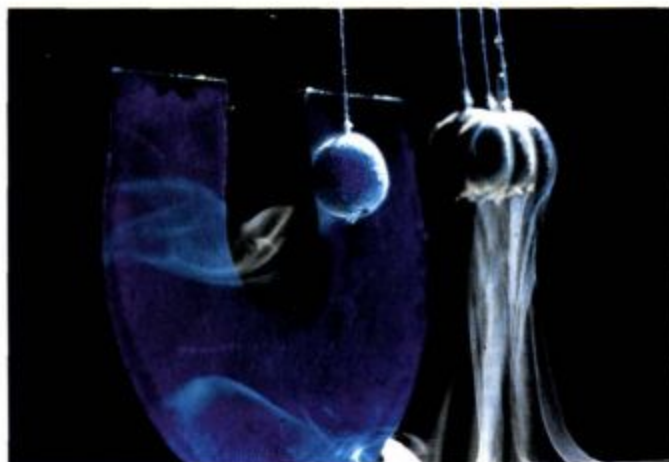
Los **materiales diamagnéticos** son aquellos que tienen valores negativos muy pequeños de susceptibilidad magnética χ_m . El diamagnetismo fue descubierto por Faraday en 1846 cuando vio que un trozo de bismuto se veía repelido por un polo cualquiera de un imán, indicando que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto al campo. Podemos comprender este efecto cualitativamente utilizando la ley de Lenz. La figura 27-11 muestra dos cargas positivas moviéndose en órbitas circulares con la misma velocidad pero en sentidos opuestos. Sus momentos magnéticos tienen sentidos opuestos y se contrarrestan entre sí. (Es más sencillo considerar cargas positivas, aunque son los electrones con carga negativa los que proporcionan los momentos magnéticos de la materia.) Consideremos ahora lo que ocurre cuando un campo externo magnético \mathbf{B} se conecta de modo que esté dirigido hacia el papel. De acuerdo con la ley de Lenz, se inducirán corrientes que se opondrán a la variación de flujo. Si admitimos que el radio de la circunferencia no varía, la carga de la izquierda se deberá acelerar para aumentar su flujo que va hacia el lector, y la carga de la derecha deberá disminuir su velocidad para hacer disminuir su flujo dirigido hacia el papel. En cada caso, la *variación* del momento magnético de las cargas estará en el sentido dirigido hacia el lector, opuesto al del campo externo aplicado. Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentidos opuestos, su suma es nula, quedando sólo los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos a la dirección del campo magnético aplicado.

Figura 27-11 (a) Carga positiva que se mueve circularmente en sentido contrario al de las agujas del reloj con un momento magnético dirigido hacia el lector. Al aplicar un campo magnético externo, dirigido hacia el papel, la velocidad de la partícula se incrementa oponiéndose a la variación de flujo. La variación de momento magnético está dirigida hacia fuera. (b) Carga positiva moviéndose en sentido horario en un círculo con su momento magnético hacia el papel. Al aplicar un campo magnético externo hacia el papel, la velocidad de la partícula disminuye para oponerse al cambio de flujo. Lo mismo que en (a) la variación del momento magnético está dirigida hacia fuera.



Aquellos átomos que poseen estructuras electrónicas de capas completas tienen un momento angular cero y por consiguiente no poseen ningún momento magnético permanente. Los materiales que tienen tales átomos —el bismuto, por ejemplo— son diamagnéticos. Como veremos posteriormente, los momentos magnéticos inducidos que causan el diamagnetismo, poseen magnitudes del orden de 10^{-5} magnetones de Bohr. Como este valor es mucho menor que el de los momentos magnéticos permanentes de los átomos de los materiales paramagnéticos o ferromagnéticos, los cuales no poseen estructuras electrónicas de capas completas, el efecto diamagnético en estos átomos viene enmascarado por el alineamiento de sus momentos magnéticos permanentes. Sin embargo, como este alineamiento decrece con la temperatura, todos los materiales son teóricamente diamagnéticos a temperaturas suficientemente altas.

Un superconductor es un material diamagnético perfecto, es decir, posee una susceptibilidad magnética igual a -1 . Cuando un superconductor se sitúa en un campo magnético externo se inducen en su superficie corrientes eléctricas, de tal modo que el campo magnético neto en el superconductor es cero. Consideremos una barra superconductora dentro de un solenoide de n vueltas por unidad de longitud. Cuando el solenoide se conecta a una fuente de fem de modo que transporta una corriente i , el campo magnético debido al solenoide es $\mu_0 n i$. Una corriente superficial de $-n i$ por unidad de longitud se induce sobre la barra super-



Un superconductor es un material diamagnético perfecto. Aquí, la masa oscilante superconductora del péndulo es repelida por el imán permanente.

conductor que compensa el campo debido al solenoide, de modo que el campo neto dentro del superconductor es nulo. Según la ecuación 27-6,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ap}} (1 + \chi_m) = 0$$

de modo que

$$\chi_m = -1$$

Estimación de los momentos magnéticos inducidos

Podemos estimar la magnitud de los momentos magnéticos inducidos en los materiales diamagnéticos relacionando la variación de velocidad de los electrones con la variación experimentada por la fuerza centrípeta debida al campo magnético externo. Se supone que el radio de la órbita permanece constante y que el cambio de velocidad es pequeño en comparación con la velocidad original. Ambas hipótesis pueden justificarse. La fuerza centrípeta original está proporcionada por la fuerza electrostática de atracción F del electrón hacia el núcleo. Igualando esta fuerza con el producto de la masa por la aceleración, resulta

$$F = \frac{m_e v^2}{r} \quad 27-19$$

en donde m_e es la masa del electrón. En presencia de un campo magnético externo \mathbf{B} , aparece una fuerza adicional $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sobre cada partícula. Para la partícula de la izquierda de la figura 27-11, esta fuerza está dirigida hacia dentro (para una partícula cargada positivamente), incrementando así la fuerza neta en esa dirección, lo cual es necesario porque la partícula acelera al poner en marcha el campo magnético. Igualmente, para la partícula de la derecha, la fuerza magnética está dirigida hacia fuera, lo que reduce la fuerza neta hacia dentro. De nuevo este es el sentido correcto, ya que la partícula de la derecha disminuye su velocidad al establecer el campo magnético.

Como el cambio experimentado por la fuerza neta hacia dentro es pequeño, podemos hacer una aproximación mediante una diferencial. Diferenciando la ecuación 27-19 resulta

$$dF = \frac{2m_e v}{r} dv = \Delta F$$

Igualando esta variación de fuerza con la fuerza magnética qvB resulta

$$qvB = \frac{2m_e v}{r} dv$$

es decir,

$$dv = \frac{qrB}{2m_e}$$

Este cambio de velocidad origina un pequeño cambio en el momento magnético de la carga. Utilizando la ecuación 27-8 tenemos para el momento magnético

$$m = \frac{1}{2} qvr$$

Por tanto,

$$\Delta m = dm = \frac{1}{2} qr dv = \frac{1}{2} qr \left(\frac{qrB}{2m_e} \right) = \frac{q^2 r^2}{4m_e} B \quad 27-20$$

Considerando que $r = 10^{-10}$ m para un radio atómico típico, $B = 1$ T para un campo magnético intenso típico, y conocidos los valores de q y m_e del electrón, se obtiene el siguiente orden de magnitud del momento magnético inducido

$$\Delta m \approx \frac{(1,60 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (10^{-10} \text{ m})^2}{4(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} (1 \text{ T}) \approx 7 \times 10^{-29} \text{ A}\cdot\text{m}^2 \sim 10^{-29} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

Comparando este resultado con el magnetón de Bohr ($m_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2 \sim 10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$) vemos que los momentos magnéticos inducidos son aproximadamente 100 000 veces menores que el momento magnético de un electrón debido a su spin intrínseco o a su movimiento orbital en un átomo. Así pues, los materiales que poseen átomos con momentos dipolares magnéticos permanentes, del orden de un magnetón de Bohr, son paramagnéticos (o ferromagnéticos). El momento magnético resultante en la dirección del campo magnético aplicado, que resulta incluso con un pequeñísimo alineamiento de estos momentos magnéticos permanentes a las temperaturas ordinarias, es mucho mayor que el momento del dipolo magnético inducido en sentido opuesto al campo magnético aplicado.

Cuestión

7. ¿Por qué es lógico que un elemento diamagnético pesado tenga una susceptibilidad superior a la de un elemento diamagnético ligero?

Resumen

1. Todos los materiales pueden clasificarse en paramagnéticos, ferromagnéticos o diamagnéticos.
2. Un material imantado se describe por su vector imantación \mathbf{M} , que se define como el momento del dipolo magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

El campo magnético debido a un cilindro imantado uniformemente es el mismo que produciría el cilindro si transportara una corriente por unidad de longitud de magnitud M sobre su superficie. Esta corriente, debida al movimiento intrínseco de las cargas atómicas en el cilindro se denomina corriente amperiana.

3. Si dentro de un solenoide de n vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente de intensidad I se dispone un cilindro alargado de material

magnético, el campo magnético resultante en un punto interior del solenoide, alejado de sus extremos, debido a la corriente que circula por el solenoide más el material imantado, es

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{sp} + \mu_0 \mathbf{M}$$

en donde el campo magnético aplicado tiene la magnitud

$$B_{sp} = \mu_0 n I$$

En los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, \mathbf{M} tiene el mismo sentido que \mathbf{B}_{sp} ; en los materiales diamagnéticos, \mathbf{M} se opone a \mathbf{B}_{sp} .

4. En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos, la imantación es proporcional al campo aplicado B_{sp} :

$$M = \chi_m (B_{sp} / \mu_0)$$

en donde χ_m se denomina susceptibilidad magnética. En los materiales paramagnéticos χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. En los materiales diamagnéticos (no superconductores), χ_m es una constante pequeña negativa independiente de la temperatura. Para los superconductores, $\chi_m = -1$. En los materiales ferromagnéticos, la imantación depende no sólo de la corriente magnetizante, sino también de la historia pasada del material.

5. El momento magnético de una partícula de carga q y masa $m q$, está relacionada con su momento angular \mathbf{L} por la expresión

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_q} \mathbf{L} = \frac{q\hbar}{2m_q} \frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

en donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

es una unidad conveniente para expresar el momento angular de los electrones y átomos y

$$h = 6,67 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

es una constante fundamental llamada constante de Planck. Los momentos magnéticos de electrones y átomos se expresan convenientemente en unidades del magnetón de Bohr m_B :

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2 = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

El momento magnético asociado con el momento angular de spin del electrón es 1 magnetón de Bohr y el momento magnético de un átomo es del orden de unos pocos magnetones de Bohr.

6. Los materiales paramagnéticos poseen momentos magnéticos atómicos permanentes con direcciones aleatorias en ausencia de un campo magnético externo. En un campo externo, algunos de estos dipolos se alinean produciendo una pequeña contribución al campo total que se suma al campo externo. El grado de alineamiento es pequeño excepto en campos muy intensos y a muy bajas temperaturas. A temperaturas ordinarias, el movimiento térmico tiende a mantener las direcciones aleatorias de los momentos magnéticos. En campos débiles, la imantación es aproximadamente proporcional al campo externo y viene dada por la ley de Curie:

$$M = \frac{1}{3} \frac{m_B^2}{kT} M_s$$

en donde M_s es la imantación de saturación que tiene lugar cuando todos los momentos dipolares magnéticos están alineados.

7. Los materiales ferromagnéticos poseen pequeñas regiones de espacio llamadas dominios magnéticos, dentro de los cuales los momentos magnéticos ató-

micos permanentes están alineados. En ausencia de un campo magnético la dirección de alineamiento en un dominio es independiente de la que existe en otros, de modo que no se produce un campo magnético neto. Al imantarse, los dominios de un material ferromagnético se alinean produciendo una contribución muy intensa al campo magnético. Esta alineación puede persistir incluso cuando se retira el campo externo, dando lugar a un magnetismo permanente.

8. Se llama curva de histéresis a la gráfica que resulta de representar el campo magnético en un material ferromagnético en función del campo magnetizante. En el cuadrante superior derecho de esta curva, \mathbf{M} y \mathbf{B}_{ap} poseen la misma dirección y para los materiales ferromagnéticos se puede definir una susceptibilidad magnética χ_m del mismo modo que se define en los materiales paramagnéticos y diamagnéticos. El campo magnético en el interior de un material ferromagnético en un solenoide que transporta la corriente de intensidad I , viene relacionado con el campo aplicado por la expresión

$$B = B_{\text{ap}} + \mu_0 M = B_{\text{ap}} (1 + \chi_m) = \mu_0 n I (1 + \chi_m) = \mu n I$$

en donde

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0$$

es la permeabilidad del material. La permeabilidad relativa K_m es un número sin dimensiones, que se define por el cociente entre la permeabilidad del material y la del espacio libre:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m = \frac{B}{B_{\text{ap}}}$$

El valor máximo de K_m es mucho mayor que la unidad para los materiales ferromagnéticos.

9. Materiales diamagnéticos son aquellos en los cuales los momentos magnéticos de todos los electrones de cada átomo se anulan, de modo que cada átomo posee un momento magnético cero en ausencia de un campo externo. Al aplicar un campo externo, se induce un pequeño momento magnético que tiende a debilitar el campo. Este efecto es independiente de la temperatura. Los superconductores son materiales diamagnéticos con susceptibilidad igual a -1 .

Sugerencias bibliográficas

Becker, Joseph J.: «Permanent Magnets», *Scientific American*, diciembre 1970, pág. 92.

Los imanes contruidos con nuevas aleaciones, descritos en este artículo, pueden ser mucho más intensos que los obtenidos a partir de metales convencionales.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Saber relacionar los tres tipos de magnetismo y discutir los orígenes, direcciones e intensidades de los efectos magnéticos en cada caso.
2. Deducir la relación que existe entre momento magnético y momento angular de una partícula cargada con movimiento circular.
3. Conocer el signo y orden de magnitud de la susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos y diamagnéticos.

4. Describir la dependencia con la temperatura de la imantación en los materiales paramagnéticos y explicar su origen.

5. Representar B en función de B_{ap} en los materiales ferromagnéticos.

- B. Definir, explicar o simplemente identificar:
- Imantación
 - Corriente amperiana
 - Susceptibilidad magnética
 - Magnetón de Bohr

Imantación de saturación
Materiales paramagnéticos
Ley de Curie
Materiales ferromagnéticos
Dominio magnético
Temperatura de Curie
Histéresis
Curva de histéresis
Campo remanente
Permeabilidad
Permeabilidad relativa
Materiales magnéticamente blandos
Materiales magnéticamente duros
Materiales diamagnéticos

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. El diamagnetismo se presenta en todos los materiales.
2. El diamagnetismo es el resultado de los momentos dipolares magnéticos inducidos.
3. El paramagnetismo es el resultado del alineamiento parcial de los momentos dipolares magnéticos permanentes.
4. La histéresis está asociada a una pérdida de energía electromagnética.
5. Los materiales magnéticamente duros pueden utilizarse como núcleos de transformadores.

Problemas

Nivel I

27-1 Imantación y susceptibilidad magnética

1. Un solenoide con arrollamiento compacto de 20 cm de largo tiene 400 vueltas por las que circula una corriente de 4 A de modo que su campo axial tiene la dirección z. Despreciando los extremos, hallar B y B_{sp} en el centro cuando (a) no existe ningún núcleo en el solenoide y (b) existe un núcleo de hierro en el solenoide con una imantación $M = 1,2 \times 10^6$ A/m.
2. ¿Cuáles de los cuatro gases relacionados en la tabla 27-1 son diamagnéticos y cuáles son paramagnéticos?
3. Si el solenoide del problema 1 tiene un núcleo de aluminio, hallar B_{sp} , M y B en el centro, despreciando los efectos de los extremos.
4. Repetir el problema 3 en el caso de un núcleo de tungsteno.
5. Un solenoide largo está arrollado alrededor de un núcleo de tungsteno y transporta una corriente. (a) Si se extrae el núcleo mientras la corriente se mantiene constante, ¿el campo magnético dentro del solenoide crece o decrece? ¿En qué porcentaje? (b) ¿La autoinducción del solenoide crece o decrece? ¿En qué porcentaje?
6. Cuando una muestra de líquido se inserta en un solenoide que transporta una corriente de intensidad constante, el campo magnético dentro del solenoide disminuye en un 0,004 por ciento. ¿Cuál es la susceptibilidad magnética del líquido?
7. Un solenoide largo que transporta una corriente de 10 A tiene 50 vueltas/cm. ¿Cuál es el campo magnético en el interior del solenoide si (a) está vacío, (b) está lleno de aluminio, y (c) está lleno de plata.

27-2 Momentos magnéticos atómicos

8. El níquel tiene una densidad de 8,7 g/cm³ y un peso molecular de 58,7 g/mol. Su imantación de saturación es $\mu_0 M_s = 0,61$ T. Calcular el momento magnético en magnetones de Bohr de un átomo de níquel.
9. Repetir el problema 8 para el cobalto, que tiene una densidad de 8,9 g/cm³, un peso molecular de 58,9 g/mol y una imantación de saturación de $\mu_0 M_s = 1,79$ T.

27-3 Paramagnetismo

10. Demostrar que la ley de Curie predice que la susceptibilidad magnética para una sustancia paramagnética viene dada por $\chi_m = m\mu_0 M_s / 3 kT$.
11. Admitir que el momento magnético de un átomo de aluminio es 1 magnetón de Bohr. La densidad del aluminio es 2,7 g/cm³ y su masa molecular es de 27 g/mol. (a) Calcular M_s y $\mu_0 M_s$ para el aluminio. (b) Utilizar el resultado del problema 10 para calcular χ_m a $T = 300$ K. (c) Explicar por qué es de esperar que este resultado sea mayor que el relacionado en la tabla 27-1.

27-4 Ferromagnetismo

12. La imantación de saturación en el caso del hierro recocido tiene lugar cuando $B_{sp} = 0,201$ T. Hallar la permeabilidad μ y la permeabilidad relativa K_m en la saturación (ver tabla 27-2).
13. En el caso del hierro recocido la permeabilidad K_m tiene un valor máximo de unos 5500 para $B_{sp} = 1,57 \times 10^{-2}$ T. Hallar M y B cuando K_m es máximo.
14. La fuerza coercitiva se define como el campo magnético aplicado necesario para anular B a lo largo de la curva de histéresis (punto c de la figura 27-9). Para un determinado imán permanente en forma de barra es $B_{sp} = 5,53 \times 10^{-2}$ T. El imán en forma de barra ha de desimantarse situándolo en el interior de un solenoide largo de 15 cm de longitud y 600 vueltas. ¿Cuál es la corriente mínima necesaria que ha de circular por el solenoide para desimantar el imán?
15. Un solenoide largo tiene 50 vueltas/cm y por él circula una corriente de 2 A. Al solenoide lo atraviesa un núcleo de hierro y se mide B resultando valer 1,72 T. (a) ¿Cuál es el valor de B_{sp} (despreciando los efectos de los extremos)? (b) ¿Cuál es el valor de M ? (c) ¿Cuál es la permeabilidad relativa K_m en este caso?

16. Cuando la corriente que circula por el solenoide del problema 15 es 0,2 A, el campo magnético medido resulta valer 1,58 T. (a) Despreciando los efectos de los extremos, ¿cuánto vale B_{sp} ? (b) ¿Cuánto vale M ? (c) ¿Cuánto vale la permeabilidad relativa K_m ?

27-5 Diamagnetismo

No se proponen problemas para esta sección.

Nivel II

17. Un solenoide largo con núcleo de hierro que posee 2000 vueltas/m transporta una corriente de 20 mA. Con esta corriente, la permeabilidad relativa del núcleo de hierro es 1200. (a) ¿Cuál es el campo magnético dentro del solenoide? (b) Cuando se extrae el núcleo de hierro, determinar la corriente necesaria para producir el mismo campo dentro del solenoide.

18. El momento dipolar magnético de un átomo de hierro vale $2,219 m_B$. (a) Si todos los átomos de una barra de hierro de longitud 20 cm y área transversal 2 cm^2 tienen alineados sus momentos dipolares, ¿cuál es el momento dipolar de la barra? (b) ¿Qué momento debe aplicarse para mantener la barra en posición perpendicular a un campo magnético de $0,25 \text{ T}$?

19. Una pequeña muestra magnética posee forma de disco. Tiene un radio de 1,4 cm, un espesor de 0,3 cm y una imantación uniforme en todo su volumen. El momento magnético de la muestra es $1,5 \times 10^{-2} \text{ A}\cdot\text{m}^2$. (a) ¿Cuál es su imantación M ? (b) Si esta imantación se debida al alineamiento de N electrones, cada uno de los cuales posee un momento magnético de $1 m_B$, ¿cuál es el valor de N ? (c) Si la imantación tiene lugar a lo largo del eje del disco, ¿cuál es la magnitud de la corriente superficial amperiana?

20. Un solenoide muy largo de longitud ℓ y sección transversal A posee n vueltas por unidad de longitud y transporta una corriente de intensidad I . En su interior hay un núcleo de hierro de permeabilidad relativa K_m . (a) Determinar la autoinducción del solenoide. (b) Utilizar la expresión $U_m = \frac{1}{2} L I^2$ para determinar la energía magnética almacenada en el solenoide en función del campo magnético B . (c) Demostrar que la densidad energética del solenoide es $\eta_m = B^2 / (2\mu_0 K_m) = B^2 / 2\mu$.

21. El momento magnético de la Tierra es aproximadamente $9 \times 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$. (a) Si la imantación del núcleo terrestre fuera $1,5 \times 10^7 \text{ A/m}$, ¿cuál sería su volumen? (b) ¿Cuál es el radio de este núcleo supuesto esférico y centrado en la Tierra?

22. En un modelo sencillo del paramagnetismo podemos considerar que cierta fracción f de las moléculas tienen sus momentos magnéticos alineados con el campo magnético externo y el resto de ellas están orientadas al azar, de modo que no contribuyen al campo magnético. (a) Utilizar este modelo de la ley de Curie para demostrar que a una temperatura T y con un campo externo B esta fracción de moléculas alineadas es $f = mB / 3kT$. (c) Calcular esta fracción para $T = 300 \text{ K}$, $B = 1 \text{ T}$, admitiendo que m es un magnetón de Bohr.

23. Se desea llenar un solenoide con una mezcla de oxígeno y nitrógeno a la temperatura ambiente y presión de 1 atmósfera, de tal modo que K_m sea exactamente igual a la unidad. Se supone que los momentos dipolares magnéticos de las moléculas del gas están todos alineados y que la susceptibilidad de un gas es proporcional a la densidad numérica de sus moléculas. ¿En qué relación deben estar las densidades numéricas de las moléculas de oxígeno y nitrógeno para que $K_m = 1$?

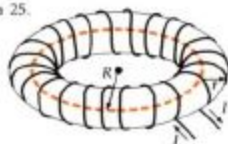
24. Un cilindro de material magnético se sitúa en el interior de un largo solenoide de n vueltas por unidad de longitud por el que circula una corriente de intensidad I . La tabla 27-3 nos ofrece el campo magnético B en función de nI . Utilizar estos valores para representar B en función de B_0 y K_m en función de nI .

Tabla 27-3 Problema 24

$nI, \text{ A/m}$	$B, \text{ T}$
0	0
50	0,04
100	0,67
150	1,00
200	1,2
500	1,4
1000	1,6
10 000	1,7

25. Un toroide de N vueltas, de radio medio R y radio de su sección transversal r , siendo $r < R$, transporta por su arrollamiento una corriente de intensidad I (figura 27-12). Cuando se rellena el toroide con cierto material, se denomina *anillo de Rowland*. Hallar B_m y B en dicho anillo. Admitir que la imantación M en todos los puntos es paralela a B_m .

Figura 27-12 Problema 25.



26. Un toroide se rellena con oxígeno líquido, cuya susceptibilidad magnética es 4×10^{-3} . El toroide posee 2000 vueltas y transporta una corriente de 15 A. Su radio medio es de 20 cm y el radio de su sección transversal, 0,8 cm. (a) ¿Cuál es la imantación M ? (b) ¿Cuál es el campo magnético B ? (c) ¿Cuál es el porcentaje en que se ha incrementado el campo B producido por el oxígeno líquido?

27. El toroide del problema 26 tiene su núcleo relleno de hierro. Cuando la corriente es de 10 A, el campo magnético en el toroide es 1,8 T. (a) ¿Cuál es la imantación M ? (b) Determinar los valores de K_m , μ y χ_m correspondientes a la muestra de hierro.

28. Un toroide de radio medio 14 cm y un área de la sección transversal de 3 cm^2 está arrollado con alambre fino a razón de 60 vueltas/cm, medidas a lo largo de su circunferencia media, transportando una corriente de intensidad 4 A. El núcleo está relleno de un material paramagnético, cuya susceptibilidad es $2,9 \times 10^{-4}$. (a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético dentro de la sustancia? (b) ¿Cuál es la magnitud de la imantación? (c) ¿Cuál sería la magnitud del campo magnético si no estuviera presente el núcleo paramagnético?

29. ¿Cuál sería el resultado del problema 28 si sustituyéramos el núcleo paramagnético por hierro dulce, cuya permeabilidad relativa es 500?

30. Dos alambres largos y rectilíneos están separados 4,0 cm e incluidos en un aislante uniforme, cuya permeabilidad relativa es $K_m = 120$. Los alambres transportan 40 A en sentidos opuestos. (a) ¿Cuál es el campo magnético en el punto medio del plano de los alambres? (b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre los alambres?

31. Una barra imantada larga y estrecha que tiene su momento magnético \mathbf{m} paralelo a su eje más largo está suspendida por el centro como la aguja de una brújula sin rozamiento. Situada en un campo magnético \mathbf{B} , la aguja se alinea con el campo. Si se desplaza un pequeño ángulo θ , demostrar que la aguja oscilará alrededor de su posición de equilibrio con la frecuencia $f = (1/2\pi)\sqrt{mB/I}$, en donde I es el momento de inercia alrededor del punto de suspensión.

32. Supongamos que la aguja del problema 31 es una barra de hierro uniformemente imantada de 8 cm de longitud y un área transversal de 3 mm². Consideremos que el momento dipolar magnético de cada átomo de hierro es 2,2 m_B y que todos ellos poseen alineados sus momentos dipolares. Calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio cuando el campo magnético es 0,5 G.

33. La aguja de una brújula magnética posee una longitud de 3 cm, un radio de 0,85 mm y una densidad de $7,96 \times 10^3$ kg/m³. Puede girar libremente en un plano horizontal, donde el componente horizontal del campo magnético terrestre es 0,6 G. Cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, la aguja efectúa un movimiento armónico simple alrededor de su punto medio con una frecuencia de 1,4 Hz. (a) ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la aguja? (b) ¿Cuál es la imantación M ? (c) ¿Cuál es la corriente amperiana en la superficie de la aguja? (Véase problema 31.)

34. Un alambre largo y rectilíneo con un radio de 1,0 mm se recubre con un material ferromagnético aislante de espesor 3,0 mm y una permeabilidad magnética relativa, $K_m = 400$. El alambre así recubierto se encuentra en el aire. El alambre en sí mismo no es magnético y transporta una corriente de 40 A. (a) Determinar el campo magnético dentro del alambre en función del radio r . (b) Determinar el campo magnético dentro del material ferromagnético en función del radio r . (c) Determinar el campo magnético fuera del material ferromagnético en función de r . (d) ¿Cuáles serán las magnitudes y direcciones de las corrientes amperianas sobre las superficies del material ferromagnético que expliquen los campos magnéticos observados?

35. En la sección 27-5 determinamos el cambio de velocidad de un electrón en un átomo para el caso en que se aplica un campo magnético al átomo. A partir de este resultado demostrar que el cambio de frecuencia angular es $\Delta\omega = eB/2m$. Esta frecuencia se denomina *frecuencia de Larmor*.

36. Una barra de hierro de longitud 1,4 m tiene un diámetro de 2 cm y una imantación uniforme de $1,72 \times 10^6$ A/m en la dirección de su eje longitudinal. La barra, estacionaria en el espacio, se desimanta súbitamente de modo que desaparece su imantación. ¿Cuál es la velocidad angular de rotación de la barra si el momento angular se conserva? (Suponer que la ecuación 27-9 se cumple, siendo m_e la masa de un electrón y $q = -e$.)

37. Una barra magnética posee un diámetro de 2 cm y un campo magnético en el centro de 0,1 T. Si el imán se rompe

por su mitad, la atracción magnética mantiene juntos los dos fragmentos. (a) Demostrar que si los fragmentos se separan una pequeña distancia dx , la energía magnética adicional es $dU_m = (B^2/2\mu_0)A dx$, en donde A es el área transversal del imán y B el campo magnético en el hueco entre ambos fragmentos, que se supone es el mismo que el existente dentro del imán. (b) Estimar la fuerza necesaria para separar los dos fragmentos calculando el trabajo necesario para separarlos una distancia dx .

Nivel III

38. Un protón posee un momento magnético \mathbf{m} paralelo a su momento angular \mathbf{L} . Se encuentra en un campo magnético uniforme \mathbf{B} que forma un ángulo θ con \mathbf{m} y \mathbf{L} . Demostrar que el vector momento magnético realiza un movimiento de precesión alrededor del campo magnético y determinar la frecuencia angular de precesión.

39. Sean dos bandas conductoras de anchura 20 m cada una de ellas y 0,3 mm de espesor. Las bandas se encuentran en planos paralelos separados por un material ferromagnético de 4,0 cm de espesor con una permeabilidad relativa $K_m = 400$. Las bandas conductoras transportan una corriente uniforme de 488 A en direcciones opuestas. Determinar en el espacio comprendido entre las bandas y lejos de sus bordes (a) B_m , (b) B y (c) la energía magnética por unidad de volumen.

40. En nuestra deducción del momento magnético inducido en el átomo, suponíamos que el radio de la órbita del electrón no variaba en presencia de un campo magnético externo. (a) Verificar que la hipótesis de radio constante está justificada demostrando que cuando se aplica \mathbf{B} existe un impulso que hace aumentar o disminuir la velocidad del electrón justo en la cantidad correcta dada por la ecuación $\Delta v = q\mathbf{r}B/2m$. (b) Utilizar la ley de Faraday para demostrar que el campo eléctrico inducido está relacionado con la variación del campo magnético por unidad de tiempo por $E = \frac{1}{2} r dB/dt$, admitiendo que r es constante. (c) Utilizar la segunda ley de Newton para demostrar que la variación de velocidad del electrón dv está relacionada con la variación de B mediante $dv = (qr/2m)dB$. Integrar para obtener Δv .

41. La ecuación 27-20 expresa el momento magnético inducido por un solo electrón en una órbita que tiene su plano perpendicular a \mathbf{B} . Si un átomo tiene Z electrones, una hipótesis simplificadora razonable es que en valor medio un tercio tienen sus planos perpendicular a \mathbf{B} . Demostrar que la susceptibilidad diamagnética obtenida a partir de la ecuación 27-20 es entonces

$$\chi_m = -\frac{nZq^2r^2}{12m_e} \mu_0$$

en donde n es el número de átomos por unidad de volumen. Utilizar $n = 6 \times 10^{28}$ átomos/m³ y $r = 5 \times 10^{-11}$ m para estimar el valor de χ_m en el caso de que $Z = 50$.

Capítulo 28

Circuitos de corriente alterna

La mayor parte de líneas de transmisión de energía eléctrica a larga distancia utilizan en la actualidad tensiones muy elevadas y corriente alterna. Históricamente, los principales inconvenientes y desventajas de la transmisión de energía mediante corriente continua de alta tensión radicaban en la dificultad y elevados gastos que suponía la conversión de la ca en cc en el extremo origen (que podría ser una central generadora de energía hidroeléctrica) y luego volver a transformarla en ca en los puntos de consumo. Debido a los recientes avances de la tecnología, se ha reavivado el interés por el empleo en las líneas de transmisión de alta tensión de corriente continua. En la ilustración puede verse una estación de conversión de cc a ca cercana a Boston (Estados Unidos), estación que se encuentra enlazada por líneas de alta tensión con corriente continua a una unidad de generación hidroeléctrica situada en James, Bay, Quebec (Canadá). Las válvulas convertidoras son elementos especiales denominados tiristores que se usan mediante conexiones Δ -Y (triángulo-estrella) a las barras de conexión que tienen salida al exterior de la central. Esta estación concreta se utiliza para convertir corriente continua en corriente alterna; pero, como otras muchas semejantes pueden funcionar en sentido inverso.



Hacia finales del siglo XIX, se planteó un cálido debate acerca de si debería utilizarse la corriente continua o alterna para suministrar energía eléctrica a los consumidores de los Estados Unidos. Thomas Edison trataba de imponer el empleo de la corriente continua mientras que Nikola Tesla y George Westinghouse apoyaban el empleo de la corriente alterna. En 1893, se escogió la corriente alterna para iluminar la Exposición Mundial de Chicago y se le proporcionó un contrato a Westinghouse para alimentar los hogares y las fábricas americanas con la corriente alterna generada en las Cataratas del Niágara.

La corriente alterna tiene la gran ventaja de que la energía eléctrica puede transportarse a largas distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con pérdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. Los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente, funcionan sobre la base de la inducción magnética. Estudiaremos los transformadores en la sección 28-6.

Más del 99 por ciento de la energía eléctrica utilizada hoy en día se produce mediante generadores eléctricos en forma de corriente alterna. En Norteamérica la potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 60 Hz, mientras que en prácticamente todo el resto del mundo la frecuencia es de 50 Hz. Hay otros aparatos, como los radios, los equipos de televisión y los hornos de

microondas que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho más altas. La corriente alterna se genera fácilmente mediante inducción magnética en los generadores de ca, como vimos en el capítulo 26. Aunque los generadores industriales son mucho más complicados que el sencillo dispositivo que estudiamos en la sección 26-6, están proyectados para producir una fem alterna. Veremos que, cuando es sinusoidal la salida de un generador, es también sinusoidal la corriente en una bobina, un condensador o una resistencia, aunque generalmente no esté en fase con la fem del generador. Cuando tanto la fem como la corriente son sinusoidales, pueden relacionarse fácilmente entre sí sus valores máximos. El estudio de las corrientes sinusoidales es importante porque incluso las corrientes que no son sinusoidales pueden analizarse en función de sus componentes sinusoidales utilizando el análisis de Fourier.

Examinaremos en primer lugar el comportamiento de la corriente alterna en resistencias, inductores o bobinas y condensadores, y en algunos circuitos sencillos que contienen estos elementos.

28-1 Corriente alterna en una resistencia

Al realizar el estudio de los circuitos de cc en el capítulo 23, señalábamos que las reglas de Kirchhoff se aplican a cualquier circuito en estado estacionario. Observábamos también que los estados estacionarios se alcanzan en los elementos del circuito casi inmediatamente después de que se introduzca una variación en la tensión o en la corriente. Puesto que el tiempo que se tarda en alcanzar el estado estacionario es mucho menor que el período de oscilación de los circuitos de ca, podemos aplicar las reglas de Kirchhoff a los circuitos de corriente alterna del mismo modo que lo hicimos con los de corriente continua.

Puede verse en la figura 28-1 un circuito simple de ca compuesto por un generador y una resistencia. En la figura, los signos más y menos indican el extremo de potencial más elevado y más bajo respectivamente de la fuente de fem, cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la misma. También se han colocado signos más y menos en la resistencia para indicar el sentido de la caída de potencial correspondiente al sentido supuesto de la corriente. Obsérvese que el punto por el que la corriente entra en la resistencia está a un potencial más alto que aquél por el que sale. La caída de tensión a través de la resistencia V_R viene dada por

$$V_R = V_+ - V_- = IR \quad 28-1$$

Si la fem suministrada por el generador es \mathcal{E} , la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito nos da

$$\mathcal{E} - V_R = 0$$

Si el generador produce una fem* dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$$

se tendrá

$$\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t - IR = 0 \quad 28-2$$

La corriente en la resistencia es

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \cos \omega t \quad 28-3$$

El máximo valor de I se presenta cuando $\cos \omega t$ tiene su valor máximo igual a 1, en cuyo caso

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \quad 28-4$$

Así podemos escribir la ecuación 28-3 como

$$I = I_{\max} \cos \omega t \quad 28-5$$

* Se vio en la sección 26-6 que la ecuación general para la fem de un generador era $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega t + \delta)$. Se tiene libertad para escoger cualquier valor de la constante de fase δ conveniente, puesto que depende simplemente de la selección del origen de tiempos. Por sencillez, escogemos $\delta = \pi/2$, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega t + \pi/2) = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$.

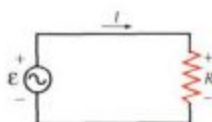


Figura 28-1 Generador de ca en serie con una resistencia R .

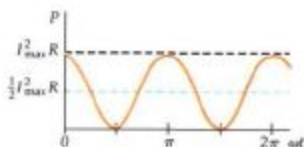


Figura 28-2 Representación gráfica de la potencia disipada en la resistencia de la figura 28-1 en función del tiempo. La potencia varía desde cero a un valor máximo $I_{\max}^2 R$. La potencia media es la mitad de la potencia máxima.

Obsérvese que la corriente que circula por la resistencia está en fase con la tensión aplicada a la misma.

La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo. Su valor instantáneo es

$$P = I^2 R = (I_{\max} \cos \omega t)^2 R = I_{\max}^2 R \cos^2 \omega t \quad 28-6$$

Puede verse en la figura 28-2 una representación de la potencia en función del tiempo. Varía, como puede verse, desde cero hasta su valor máximo $I_{\max}^2 R$. Normalmente nos interesa la potencia media a lo largo de uno o más ciclos. La energía W_T liberada durante el tiempo de un período ($t = T = 2\pi/\omega$) es

$$W_T = \int_0^T P dt = \int_0^T I_{\max}^2 R \cos^2 \omega t dt$$

Sustituyendo $\theta = \omega t$, se tiene

$$W_T = \frac{I_{\max}^2 R}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

La integral de esta expresión puede hallarse en las tablas y vale π . La potencia media liberada por la resistencia durante un período es esta energía dividida por T :

$$P_m = \frac{W_T}{T} = \frac{(\pi I_{\max}^2 R)/\omega}{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R$$

Podríamos haber obtenido también directamente este resultado a partir de la ecuación 28-6 dándose cuenta de que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ sobre uno o más períodos es $\frac{1}{2}$. Esto puede verse fácilmente a partir de la identidad $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$. La representación del $\sin^2 \omega t$ tiene el mismo aspecto que la del $\cos^2 \omega t$, pero está desplazada en 90° . Ambas tienen el mismo valor medio en uno o más períodos y, como su suma es 1, el valor medio de cada una de ellas debe ser $\frac{1}{2}$. Por tanto, la potencia media disipada en la resistencia vale

$$P_m = (I^2 R)_m = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R \quad 28-7$$

Valores eficaces

La mayoría de los amperímetros y voltímetros están diseñados para medir valores eficaces ef también llamados a veces **valores cuadráticos medios** de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. Se define el **valor eficaz** ef de una corriente I_{ef} como

Definición de corriente eficaz

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} \quad 28-8$$

El valor medio de I^2 es

$$(I^2)_m = \langle I_{\max}^2 \cos^2 \omega t \rangle_m = \frac{1}{2} I_{\max}^2$$

en donde hemos utilizado $(\cos^2 \omega t)_m = \frac{1}{2}$. Sustituyendo $\frac{1}{2} I_{\max}^2$ en lugar de $(I^2)_m$ en la ecuación 28-8, se tiene

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max} \quad 28-9$$

El valor eficaz de una magnitud cualquiera que varía sinusoidalmente es igual al valor máximo de la misma dividida por $\sqrt{2}$.

Sustituyendo $\frac{1}{2} I_{\max}^2$ por I_{ef}^2 en la ecuación 28-7, obtenemos para la potencia media disipada en la resistencia

$$P_m = I_m^2 R \quad 28-10$$

A partir de esta ecuación podemos ver que la corriente eficaz es igual a la corriente continua constante que produciría el mismo calentamiento Joule que la corriente alterna de la ecuación 28-5.

En el caso de este circuito simple de la figura 28-1, la potencia media suministrada por el generador es igual a la disipada en la resistencia:

$$P_m = (\mathcal{E})_m = [(\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t)(I_{\max} \cos \omega t)]_m = \mathcal{E}_{\max} I_{\max} (\cos^2 \omega t)_m$$

o bien

$$P_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} I_{\max}$$

Utilizando $I_m = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$, puede escribirse así

$$P_m = \mathcal{E}_m I_m \quad 28-11$$

Potencia media cedida por un generador

La corriente eficaz está relacionada con la fem eficaz de la misma forma que la corriente máxima está relacionada con la fem máxima. Puede verse esto dividiendo cada miembro de la ecuación 28-4 por $\sqrt{2}$ y utilizando $I_m = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \quad 28-12$$

Las ecuaciones 28-10, 28-11 y 28-12 tienen la misma forma que las ecuaciones correspondientes a los circuitos de corriente continua, sustituyendo en estas últimas I por I_m y \mathcal{E} por \mathcal{E}_m . Así pues, si utilizamos valores eficaces para la corriente y la fem, podemos calcular la potencia y el calor generado empleando las mismas ecuaciones obtenidas en corriente continua.

Ejercicio

Se conecta una resistencia de 12Ω a una fem sinusoidal que tiene un valor de pico de 48 V. Hallar (a) la corriente eficaz, (b) la potencia media y (c) la potencia máxima. [Respuestas: (a) 2,83 A, (b) 96 W, (c) 192 W]

La energía eléctrica que se suministra a nuestras viviendas por la compañía de electricidad tiene una frecuencia de 50 Hz y una tensión de 220 V eficaces. (En algunas instalaciones antiguas, la tensión es de 127 V solamente. Para un consumo de potencia determinado, se requiere sólo la mitad aproximadamente de corriente a 220 V que a 127 V, pero la tensión de 220 V es mucho más peligrosa que la de 127 V. Si se recibe una descarga con 220 V, las probabilidades de que sea fatal son más elevadas que si se recibiese a 127 V.) Si se conecta un calentador de 1600 W, consumirá una corriente de

$$I_m = \frac{P_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{1600 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 7,27 \text{ A}$$

La tensión en todos los enchufes se mantiene a 220 V, con independencia de la corriente que circule. Por tanto, todos los aparatos enchufados en la red están esencialmente en paralelo. De este modo, si se enchufa un tostador de 500 W en otro punto del circuito en el que está conectado el calentador, extraerá una corriente de $500 \text{ W}/220 \text{ V} = 2,27 \text{ A}$, de modo que la corriente total a través del circuito será próxima a los 10 A. La mayoría de los cableados de las casas están calculados para soportar unas corrientes máximas del orden de 15 a 20 A. Una corriente mayor que ésta sobrecalentará el cableado y habrá peligro de incendio. Por consiguiente, cada circuito está equipado con un interruptor automático del circuito (o un fusible en los edificios antiguos). En el caso de un circuito de 20 A, el interruptor se abre (o el fusible «salta») interrumpiéndose el circuito, cuando la corriente excede de 20 A. La carga de potencia máxima que soportará un



Figura 28-3 Onda en forma de diente de sierra correspondiente a la corriente del ejemplo 28-1.

circuito con un interruptor general de 20 A es

$$P_m = \mathcal{E}_m I_m = (220\text{V})(20\text{ A}) = 4,4\text{ kW}$$

Puesto que la mayoría de los edificios modernos necesitan potencias considerablemente mayores que 4,4 kW, se instalan varios circuitos separados, cada uno con su interruptor independiente y con los enchufes necesarios.

Ejemplo 28-1

Se utiliza a veces en electrónica una corriente cuya onda tiene forma de diente de sierra, como se ve en la figura 28-3. En la región $0 < t < T$, la corriente viene dada por $i = (I_0/T)t$. Hallar (a) la corriente media y (b) la corriente eficaz correspondiente a esta forma de onda.

(a) El valor medio de cualquier magnitud en un cierto intervalo T es la integral de dicha magnitud en todo ese intervalo dividido por T . La corriente media es, pues

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_0/T)t \, dt = \frac{I_0}{T^2} \frac{T^2}{2} = \frac{1}{2} I_0$$

La corriente media es la mitad de la corriente máxima, como era de esperar.

(b) La corriente al cuadrado tiene un valor medio de

$$(i^2)_m = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_0/T)^2 t^2 \, dt = \frac{I_0^2}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{1}{3} I_0^2$$

Por tanto la corriente eficaz es $I_{\text{ef}} = I_0/\sqrt{3}$.

Cuestiones

1. ¿Cuál es la corriente media que circula por la resistencia de la figura 28-1?
2. La potencia instantánea en la resistencia de la figura 28-1, ¿es alguna vez negativa?

28-2 Corriente alterna en bobinas y condensadores

El comportamiento de la corriente alterna en las bobinas y condensadores es muy diferente del que se tiene con corriente continua. Por ejemplo, cuando un condensador está en serie en un circuito de cc, la corriente se interrumpe por completo cuando el condensador está totalmente cargado. Pero si la corriente es alterna, la carga fluye continuamente entrando y saliendo alternativamente de las placas del condensador. Veremos que si la frecuencia de la corriente alterna es grande, un condensador casi no impide la circulación de la corriente. Inversamente, una bobina normalmente tiene una resistencia pequeña y, por tanto, su efecto sobre la corriente continua también lo es. Pero cuando la corriente que circula por la bobina está cambiando continuamente, se genera una fuerza contraelectromotriz que es proporcional al ritmo de variación de la corriente. Cuanto mayor es la frecuencia de la corriente que circula por una bobina, mayor será su variación por unidad de tiempo y, por tanto, mayor será la fuerza contraelectromotriz. Así, una bobina ejerce sobre la corriente alterna un efecto que es justamente el opuesto al que realiza un condensador. A frecuencias muy bajas, una bobina apenas ofrece impedimento a la corriente, pero a altas frecuencias se opone grandemente al flujo de corriente debido a dicha fuerza contraelectromotriz.

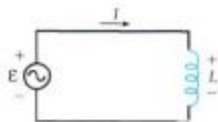


Figura 28-4 Generador de ca en serie con una bobina cuya inductancia es L .

Bobinas

En la figura 28-4 puede verse una bobina conectada a los terminales de un generador de ca. Cuando la corriente va aumentando en la bobina, se genera en ella una fem de valor $L \, di/dt$ debida al flujo variable (ecuación 26-20). Normalmente

la caída de potencial en la bobina debida a esta fem es mucho mayor que la originada por la resistencia de la misma, IR . En la figura se han colocado sobre la bobina unos signos más y menos para indicar el sentido de la caída de potencial cuando dl/dt es positivo para el sentido supuesto de la corriente. Obsérvese que para dl/dt positivo, el punto por el que entra la corriente en la bobina está a un potencial más elevado que el punto por el que sale. La caída de tensión en la bobina V_L viene dada entonces por

$$V_L = V_+ - V_- = L \frac{dl}{dt} \quad 28-13$$

Aplicando la regla de las mallas de Kirchoff a este circuito, se obtiene

$$\mathcal{E} - V_L = 0$$

en donde $V_L = L dl/dt$ es el valor de la fem de la bobina. Haciendo que la fem del generador sea igual a $\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$, se tiene

$$\mathcal{E} = L \frac{dl}{dt} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t \quad 28-14$$

Multiplicando ambos miembros por dt y dividiendo por L , tendremos

$$dl = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \cos \omega t dt \quad 28-15$$

Se obtiene el valor de la corriente I integrando ambos miembros de esta ecuación:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L} \sin \omega t + C \quad 28-16$$

en donde C es una constante de integración. La constante es el valor medio de la corriente, puesto que el valor promedio de $\sin \omega t$ en uno o más ciclos es cero. Escogiendo el componente de cc de la corriente como nulo, tendremos

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L} \sin \omega t = I_{\max} \sin \omega t \quad 28-17$$

en donde

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L} \quad 28-18$$

es el valor máximo de la corriente.

En la figura 28-5 se indican la corriente I y la caída de tensión V_L en la bobina en función del tiempo. La corriente no está en fase con la caída de tensión en la bobina, que es igual a la tensión del generador. A partir de la misma podemos ver que el valor máximo de la tensión se produce 90° o un cuarto de período antes de que se presente el correspondiente valor máximo de la corriente. Así pues, se dice que la caída de tensión en una bobina adelanta a la corriente en 90° . Podemos comprender esto físicamente. Cuando la corriente es cero, pero está creciendo, su variación por unidad de tiempo tiene su valor máximo, de modo que la fem inducida en la bobina está en su valor máximo. Un cuarto de ciclo más tarde, la corriente pasa por su máximo. En este momento, dl/dt es cero, de forma que V_L es también cero. Utilizando la identidad trigonométrica $\sin \omega t = \cos (\omega t - \pi/2)$, puede escribirse la ecuación 28-17 para la corriente como

$$I = I_{\max} \cos (\omega t - \pi/2) \quad 28-19$$

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en el caso de una bobina, puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 28-4 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 28-18, tenemos

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{X_L} \quad 28-20$$



Figura 28-5 La corriente y la tensión que circula y se aplica a la bobina de la figura 28-4 en función del tiempo. La tensión máxima aparece un cuarto de período antes de que se presente el máximo de la corriente. Así pues, se dice que la tensión adelanta a la corriente en un cuarto de período o 90° .

en donde

Reactancia inductiva

$$X_L = \omega L \quad 28-21$$

se denomina **reactancia inductiva** o inductancia. Como $I_e = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$, la corriente viene dada por

$$I_e = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{\omega L} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{X_L} \quad 28-22$$

Al igual que la resistencia, la reactancia inductiva tiene unidades de ohmio. Como puede verse en la ecuación 28-20, cuanto mayor sea la reactancia para una fem dada, menor es la corriente. A diferencia de la resistencia, la reactancia inductiva depende de la frecuencia de la corriente—cuanto mayor es la frecuencia, mayor es la reactancia.

La potencia instantánea cedida a la bobina por el generador es

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{E}I = (\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t)(I_{\max} \sin \omega t) \\ &= \mathcal{E}_{\max} I_{\max} \cos \omega t \sin \omega t \end{aligned}$$

y la potencia media correspondiente es nula. Puede verse utilizando la relación $\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$

El valor de este término oscila dos veces durante cada ciclo y es negativo la mitad del tiempo y positivo la otra mitad. Por tanto, la bobina no disipa ninguna energía. (Esto resulta cierto sólo si puede desprejiciarse la resistencia de la bobina.)

Ejemplo 28-2

Se coloca una bobina conectada a un generador de ca que tiene una fem máxima de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es 60 Hz y cuando vale 2000 Hz.

La reactancia inductiva a 60 Hz es

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) = 15,1 \Omega$$

y a 2000 Hz vale

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) = 503 \Omega$$

El valor máximo de las corrientes a estas frecuencias es

$$I_{1,\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{X_{L1}} = \frac{120 \text{ V}}{15,1 \Omega} = 7,95 \text{ A}$$

$$I_{2,\max} = \frac{120 \text{ V}}{503 \Omega} = 0,239 \text{ A}$$

Condensadores

En la figura 28-6 se muestra un condensador conectado a los terminales de un generador. Para el sentido de la corriente indicado, la corriente está relacionada con la carga por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De nuevo se han colocado los signos más y menos sobre las placas del condensador indicando que existe una carga positiva en la placa en donde entra la corriente.

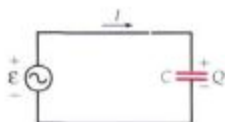


Figura 28-6 Generador de ca en serie con un condensador de capacidad C.

te y una carga negativa en la placa por donde sale la corriente. La caída de tensión en el condensador es

$$V_C = V_+ - V_- = \frac{Q}{C} \quad 28-23$$

A partir de la regla de las mallas de Kirchhoff, tenemos

$$\mathcal{E} - V_C = 0$$

o bien

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t = \frac{Q}{C}$$

Así pues,

$$Q = \mathcal{E}_{\max} C \cos \omega t$$

La corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \mathcal{E}_{\max} C \sin \omega t$$

El valor máximo de I se presenta cuando $\sin \omega t = -1$, en cuyo caso

$$I_{\max} = \omega \mathcal{E}_{\max} C \quad 28-24$$

Así, la corriente puede escribirse

$$I = -\omega \mathcal{E}_{\max} C \sin \omega t = -I_{\max} \sin \omega t$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin \omega t = -\cos(\omega t + \pi/2)$, se tiene

$$I = -\omega C \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t = I_{\max} \cos(\omega t + \pi/2) \quad 28-25$$

Como sucedía con la bobina, la corriente del condensador no está en fase con la caída de tensión en el condensador, que es igual a la tensión del generador. En la figura 28-7, se han representado la corriente I y la caída de tensión en el condensador $V_C = Q/C$ en función del tiempo. Puede verse que el valor máximo de la tensión se presenta 90° o un cuarto de periodo después de aparecer el valor máximo de la corriente. Así pues, *la caída de tensión en un condensador está retrasada respecto a la corriente en 90°* . Es fácil, de nuevo, entender esto físicamente. La máxima variación del crecimiento de la carga dQ/dt debe ocurrir cuando la carga Q sea nula y, por tanto, V_C sea cero. Al aumentar la carga en la placa del condensador, la corriente disminuye hasta que la carga es máxima (de modo que V_C es máxima) y la corriente es cero. Entonces la corriente se hace negativa cuando la carga fluye en sentido opuesto, saliendo del condensador.

Una vez más, la relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en un condensador puede escribirse en forma semejante a la ecuación 28-4 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 28-24, se tiene

$$I_{\max} = \omega C \mathcal{E}_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{1/\omega C} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{X_C}$$

y, análogamente,

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{1/\omega C} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{X_C} \quad 28-26$$

en donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad 28-27$$

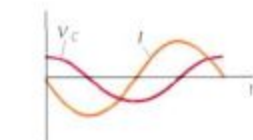
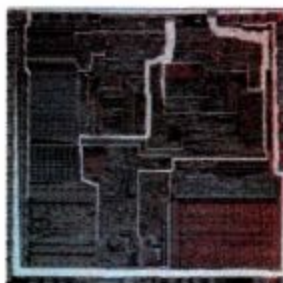


Figura 28-7 La corriente y la tensión en un condensador como el de la figura 28-6 en función del tiempo. La tensión máxima se produce un cuarto de periodo después de presentarse la corriente máxima. Así, se dice que la tensión retrasa respecto a la corriente en 90° .

Reactancia capacitiva

es la denominada **reactancia capacitiva** o capacitancia del circuito. Como la resistencia y la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva viene en unidades de ohmio, y al igual que la reactancia inductiva, depende de la frecuencia de la corriente. En este caso, cuanto mayor es la frecuencia, menor es la reactancia. Como sucede con una bobina, la potencia media que un generador de ca suministra a un condensador es cero. Esto se debe a que la fem es proporcional al $\cos \omega t$ y la corriente lo es al $\sin \omega t$, de forma que $(\cos \omega t \sin \omega t)_m = 0$. Así pues, como las bobinas, los condensadores ideales no disipan energía.

Como la carga no puede pasar a través del espacio que existe entre las placas de un condensador, puede parecer extraño que aparezca una corriente alterna de forma permanente en el circuito de la figura 28-6. Recuérdese, no obstante, que cuando un condensador descargado se conecta a los terminales de una fuente de tensión continua (como una pila), existe una corriente que disminuye exponencialmente con el tiempo hasta que las placas se cargan al mismo potencial que la pila. Consideremos un condensador inicialmente descargado aplicado a una fuente de fem, con la placa superior unida al terminal positivo. Al principio, se está introduciendo en la placa superior una carga positiva, mientras que sale la misma cantidad de la placa negativa. (Como es lógico, lo que realmente circulan son electrones en sentido opuesto al señalado.) El efecto es el mismo que si realmente fluyese carga a través del espacio situado entre las placas. Si la fuente de fem es un generador de ca, la diferencia de potencial cambia de signo cada semiperíodo, como se ve en la figura 28-7. Mantengamos constante la fem del generador pero aumentemos su frecuencia. Durante cada medio ciclo, se transfiere la misma carga $\Delta Q = 2C \mathcal{E}_{\max}$ bien hacia el condensador, o saliendo de él, pero el número de ciclos por segundo aumenta, de modo que la corriente «a través» del condensador aumenta en proporción a la frecuencia. De aquí que, cuanto mayor sea la frecuencia, menor es el impedimento que el condensador pone al flujo de cargas.



(a)



(b)

(a) El microprocesador 8086 es un circuito integrado que contiene 29 000 transistores y se utiliza fundamentalmente en computadoras personales. Gran parte del proyecto y diseño del 8086 fue dibujado a mano sobre papel, que se utilizó para hacer un montaje con recortes de láminas semejantes al celofán de color rojo como se ve en (b). En la actualidad los computadores se utilizan para dibujar diseños de microcircuitos.

Ejemplo 28-3

Un condensador de $20 \mu\text{F}$ se conecta a un generador que tiene una fem máxima de 100 V . Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es 60 Hz y cuando es 5000 Hz .

La reactancia capacitiva a 60 Hz vale

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} \\ = [2\pi(60 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})]^{-1} = 133 \Omega$$

y a 5000 Hz resulta ser

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C} \\ = [2\pi(5000 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})]^{-1} = 1,59 \Omega$$

La corriente máxima es entonces

$$I_{1,\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{X_{C1}} = \frac{100 \text{ V}}{133 \Omega} = 0,754 \text{ A}$$

y

$$I_{2,\max} = \frac{100 \text{ V}}{1,59 \Omega} = 62,8 \text{ A}$$

Los circuitos de las figuras 28-4 y 28-6 contienen sólo un generador y una bobina o un condensador. En ellos, la caída de tensión a través de la bobina o del condensador es igual a la tensión del generador. En circuitos más complicados que contienen tres o más elementos, la caída de tensión a través de cada uno de

ellos no es igual normalmente a la tensión del generador. Resulta útil, por tanto, escribir las ecuaciones 28-22 y 28-26 en función de la caída de tensión a través de la bobina y del condensador, respectivamente. Si $V_{L,ef}$ es la caída de tensión eficaz en una bobina, la corriente eficaz que pasa por ella es

$$I_{ef} = \frac{V_{L,ef}}{\omega L} = \frac{V_{L,ef}}{X_L} \quad 28-28$$

La caída de tensión en la bobina adelanta a la corriente en 90° . Análogamente, si $V_{C,ef}$ es la tensión eficaz en las placas del condensador, la corriente eficaz en el condensador viene dada por

$$I_{ef} = \frac{V_{C,ef}}{1/\omega C} = \frac{V_{C,ef}}{X_C} \quad 28-29$$

La caída de tensión en el condensador está retrasada respecto a la corriente en 90° . También pueden escribirse las ecuaciones 28-28 y 28-29 en función de las tensiones y corrientes máximas.

Cuestiones

- En un circuito constituido por un generador y una bobina, ¿existe algún momento en que la bobina absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que la bobina suministra energía al generador?
- En un circuito formado por un generador y un condensador, ¿existe algún momento en que el condensador absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que el condensador suministra energía al generador?

28-3 Fasores

En las secciones anteriores vimos que la tensión que aparece en una resistencia está en fase con la corriente, mientras que la tensión en la bobina adelanta a la corriente en 90° , y la que existe entre las placas del condensador retrasa respecto a la corriente en 90° . Estas relaciones de fase pueden representarse mediante vectores bidimensionales denominados fasores. En la figura 28-8, la tensión en una resistencia se ha representado por un vector V_R cuyo valor o módulo es $I_{max}R$ y que forma un ángulo θ con el eje x . Esta tensión está en fase con la corriente. En general, una corriente estacionaria en un circuito de ca varia con el tiempo como

$$I = I_{max} \cos \theta = I_{max} \cos (\omega t - \delta) \quad 28-30$$

siendo ω la frecuencia angular y δ cierta constante de fase. La caída de tensión en una resistencia viene dada entonces por

$$V_R = IR = I_{max}R \cos (\omega t - \delta) \quad 28-31$$

El valor instantáneo de la caída de tensión en una resistencia es así igual al componente x del vector fasor V_R , que gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω . La corriente I puede escribirse como el componente x de un fasor I que tenga la misma orientación que V_R .

Cuando se conectan juntos varios componentes en un circuito en serie, sus tensiones se suman. Cuando se conectan en paralelo, sus corrientes se suman. Sumar senos y cosenos de diferentes amplitudes y fases de forma algebraica, es complicado e incómodo. Es mucho más fácil hacerlo mediante suma de vectores.

Los fasores se emplean de la forma siguiente. Se escribe cualquier tensión o corriente como $A \cos (\omega t - \delta)$, que a su vez se considera como componente x (A_x) de un fasor A que forma un ángulo $(\omega t - \delta)$ con el eje x . En lugar de su-



Figura 28-8 La tensión aplicada a una resistencia puede representarse mediante un vector V_R denominado fasor, que tiene de módulo el valor $I_{max}R$ y que forma un ángulo $\theta = \omega t - \delta$ con el eje x . El fasor rota con una frecuencia angular ω . La tensión $V_R = IR$ es el componente x de V_R .

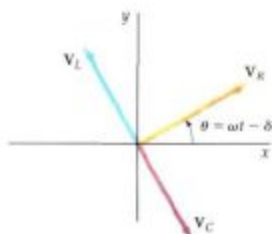


Figura 28-9 Representaciones de los fasores de las tensiones V_R , V_L y V_C . Cada vector gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω . En un instante cualquiera, la tensión aplicada a un elemento es igual al componente x del factor correspondiente y la suma de las tensiones es igual al componente x del vector suma $V_R + V_L + V_C$.

mar dos tensiones o corrientes algebraicamente como $A \cos(\omega t - \delta_1) + B \cos(\omega t - \delta_2)$, se representan estas magnitudes como fasores \mathbf{A} y \mathbf{B} y se halla la suma vectorial de los fasores $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ geoméricamente. La tensión o corriente resultante es entonces el componente x del fasor resultante. $C_x = A_x + B_x$. La representación geométrica muestra de forma conveniente las amplitudes y fases relativas de los fasores.

Consideremos un circuito que contiene una bobina L , un condensador C y una resistencia R , conectados en serie todos ellos. Por todos pasará la misma corriente, que se representa como el componente x del fasor de corriente I . La tensión en la bobina V_L se representa con un fasor V_L que tiene el valor $I_{\text{máx}}X_L$ y que adelanta al fasor de corriente I en 90° . Análogamente, la tensión en el condensador V_C se representa mediante un fasor V_C que tiene el valor $I_{\text{máx}}X_C$ y que retrasa respecto a la corriente en 90° . En la figura 28-9 pueden verse los tres fasores V_R , V_L y V_C . Según transcurre el tiempo, los tres fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω , de modo que no varían las posiciones relativas de los vectores. En un instante cualquiera, el valor instantáneo de la caída de tensión en cualquiera de estos elementos es igual al componente x del fasor correspondiente.

28-4 Circuitos LC y LCR sin generador

En esta sección estudiaremos algunos circuitos simples que contienen bobinas, condensadores y resistencias, pero no generadores. Añadiremos un generador a estos circuitos en la próxima sección. Examinemos primero un circuito sencillo con una bobina y un condensador pero sin ninguna resistencia, como se indica en la figura 28-10. Supongamos que en el condensador existe una carga inicial Q_0 y que el interruptor está abierto. Una vez cerrado el interruptor en $t=0$, la carga empieza a circular por la bobina. En la figura se han escogido los signos de Q en el condensador y el sentido de la corriente I de forma que

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Aplicando las reglas de las mallas de Kirchhoff al circuito con los signos supuestos de Q e I , se tiene

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 28-32$$

Sustituyendo I por dQ/dt en esta ecuación, obtenemos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 28-33$$

La ecuación 28-33 tiene la misma forma que la correspondiente a la aceleración de una masa situada en un muelle:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad 28-34$$

El comportamiento de un circuito LC es, por tanto, análogo al de una masa unida a un muelle, siendo L análogo a la masa m , Q análogo a la posición x y $1/C$ análogo a la constante del muelle k . Además la corriente I es también análoga a la velocidad v , puesto que $v = dx/dt$ e $I = dQ/dt$. En mecánica la masa de un objeto describe la inercia del mismo. Cuanto mayor sea la masa, más difícil será cambiar la velocidad del objeto. De forma semejante, la inductancia L puede considerarse como la inercia de un circuito de ca. Cuanto más grande es la inductancia, más difícil resulta variar la corriente I .

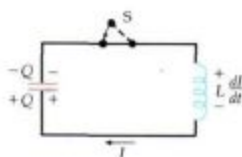


Figura 28-10 Circuito LC. Cuando se cierra el interruptor, el condensador inicialmente cargado se descarga a través de la bobina, produciendo una fuerza contraelectromotriz.

Si dividimos por L cada término de la ecuación 28-33 y reordenamos, se tiene

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \quad 28-35$$

que es análogo a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x \quad 28-36$$

en donde $\omega^2 = k/m$. En el capítulo 12, se vio que podíamos escribir la solución de la ecuación 28-36 correspondiente al movimiento armónico simple en la forma

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular, A es la amplitud y δ es la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales. Puede ponerse la ecuación 28-35 en la misma forma escribiendo ω^2 en lugar de $1/LC$. Entonces,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q \quad 28-37$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 28-38$$

La solución de la ecuación 28-38 es

$$Q = A \cos(\omega t - \delta)$$

Se halla la corriente derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

Si se escoge que las condiciones iniciales sean $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$, la constante de fase δ es nula y $A = Q_0$. Las soluciones son entonces

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad 28-39$$

y

$$I = -\omega Q_0 \sin \omega t = -I_{\max} \sin \omega t \quad 28-40$$

en donde $I_{\max} = \omega Q_0$.

En la figura 28-11 se han dibujado los gráficos de Q e I en función del tiempo. La carga oscila entre los valores $+Q_0$ y $-Q_0$ con frecuencia angular $\omega = \sqrt{1/LC}$. La corriente oscila entre $+\omega Q_0$ y $-\omega Q_0$ con la misma frecuencia pero desfaseada 90° respecto a la carga. La corriente es máxima cuando la carga es cero, y nula cuando la carga es máxima.

En nuestro estudio de las oscilaciones de una masa unida a un muelle vimos que la energía total es constante pero que oscila entre la energía cinética y la potencial. En nuestro circuito LC, también tenemos dos clases de energía, la eléctrica y la magnética. La energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$U_e = \frac{1}{2} QV_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Sustituyendo Q por $Q_0 \cos \omega t$, tenemos para la energía eléctrica

$$U_e = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t \quad 28-41$$

Esta energía eléctrica oscila entre su valor máximo $Q_0^2/2C$ y cero. La energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad 28-42$$

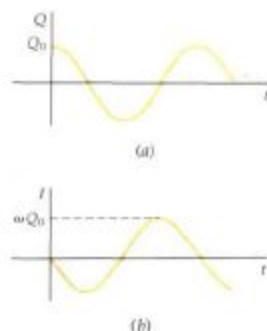


Figura 28-11 Gráficos de (a) Q en función de t y (b) I en función de t para el circuito LC de la figura 28-10.

Sustituyendo ahora el valor de la corriente dado por la ecuación 28-30, tenemos

$$U_m = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega t \quad 28-43$$

en donde hemos utilizado que $\omega^2 = 1/LC$. La energía magnética también oscila entre su valor máximo de $Q_0^2/2C$ y cero. La suma de las energías eléctrica y magnética es la energía total, que es constante en el tiempo:

$$U_{\text{total}} = U_e + U_m = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C}$$

que es la energía almacenada inicialmente en el condensador.

Ejemplo 28-4

Se carga a 20 V un condensador de 2 μF y luego se conecta una bobina de 6 μH . (a) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (b) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

(a) La frecuencia de la oscilación depende únicamente de los valores de la capacidad y de la inductancia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-7} \text{ H})(2 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 4,59 \times 10^4 \text{ Hz}$$

(b) De acuerdo con la ecuación 28-40, el valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga por

$$I_{\max} = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

La carga inicial sobre el condensador es

$$Q_0 = CV_0 = (2 \mu\text{F})(20 \text{ V}) = 40 \mu\text{C}$$

Por consiguiente,

$$I_{\max} = \frac{40 \mu\text{C}}{\sqrt{(6 \mu\text{H})(2 \mu\text{F})}} = 11,5 \text{ A}$$

Ejercicio

Se carga un condensador de 5 μF y luego se descarga a través de una bobina. ¿Cuál deberá ser la inductancia de la bobina para que la corriente oscile con una frecuencia de 8 kHz? (Respuesta: 79,2 μH)

En la figura 28-12, se incluye una resistencia en serie con el condensador y la bobina. Supongamos de nuevo que el interruptor está inicialmente abierto, que el condensador posee una carga inicial Q_0 y que cerramos el interruptor en $t=0$. Como ahora existe una caída de tensión IR en la resistencia, la regla de las mallas de Kirchhoff da

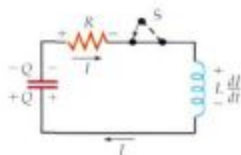


Figura 28-12 Circuito LCR.

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0 \quad 28-44a$$

o bien

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad 28-44b$$

en donde hemos puesto $l = dQ/dt$, como antes. Las ecuaciones 28-44a y b son análogas a la ecuación correspondiente al oscilador armónico amortiguado (ver ecuación 12-46):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + b \frac{dx}{dt} = 0$$

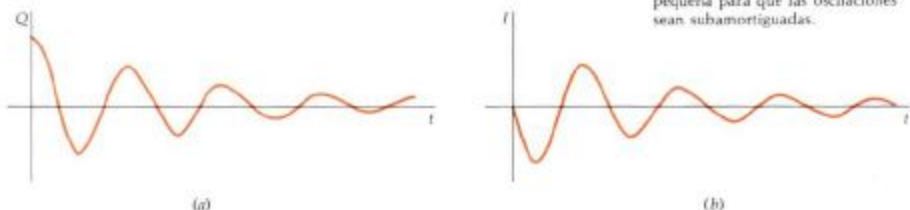
El primer término, $L dl/dt = L d^2Q/dt^2$, es análogo a la masa multiplicada por la aceleración, $m dv/dt = m d^2x/dt^2$; el segundo, Q/C , es análogo a la fuerza restauradora kx ; y el tercero, $IR = R dQ/dt$, es análogo al término de amortiguamiento, $bv = b dx/dt$. En la oscilación de una masa unida a un muelle, la constante de amortiguamiento b origina una disipación de energía mecánica en calor. En un circuito LCR, la resistencia R es análoga a la constante de amortiguamiento b y produce una disipación de energía eléctrica en calor de Joule.

Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente oscilan con una frecuencia que es muy próxima a $1/\sqrt{LC}$, pero las oscilaciones se amortiguan; es decir, los valores máximos de la carga y de la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender este hecho cualitativamente a partir de consideraciones energéticas. Si multiplicamos cada término de la ecuación 28-44a por la corriente l , se tiene

$$lL \frac{dl}{dt} + l \frac{Q}{C} + l^2 R = 0 \quad 28-45$$

El primer término de esta ecuación es el producto de la corriente por la tensión que se aplica a la bobina. Equivale al ritmo con que se introduce o se extrae la energía de la bobina; es decir, es la variación por unidad de tiempo de la energía magnética, $d(\frac{1}{2}LI^2)/dt$, que es positiva o negativa según que l y dl/dt tengan los mismos o diferentes signos. Análogamente, el segundo término es la corriente multiplicada por la tensión en el condensador. Este producto resulta ser la variación respecto al tiempo de la energía almacenada en el condensador, variación que puede ser positiva o negativa. El último término, l^2R , es el ritmo con que se disipa energía en la resistencia en forma de calor Joule y es siempre positivo. La suma de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito porque en la resistencia se está disipando continuamente energía. En la figura 28-13

Figura 28-13 Gráficos de (a) Q en función de t y (b) I en función de t para el circuito LCR de la figura 28-12 cuando R es lo suficientemente pequeña para que las oscilaciones sean subamortiguadas.



se ven los gráficos de Q en función de t y de I en función de t cuando la resistencia R es pequeña. Si se aumenta R , las oscilaciones se amortiguan cada vez más hasta que se alcanza un valor crítico de R para el que no existe ninguna oscilación. En la figura 28-14 se ve el gráfico de Q en función de t cuando el valor de R es mayor que el valor correspondiente al amortiguamiento crítico.



Figura 28-14 Gráfico de Q en función de t para el circuito LCR de la figura 28-12 cuando R es tan grande que las oscilaciones están sobreamortiguadas.

Cuestión

- Es sencillo construir circuitos LC que posean frecuencias de oscilación de millares de hertz o más, pero resulta difícil hacer circuitos LC que tengan frecuencias pequeñas. ¿Por qué?

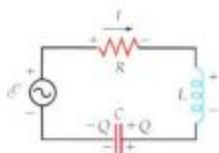


Figura 28-15 Circuito LCR serie con un generador de ca.

28-5 Circuitos LCR con un generador

Serie

Un circuito importante que reúne muchas de las características de la mayoría de los circuitos de ca es el circuito LCR con un generador, indicado en la figura 28-15. Supongamos que la fem de un generador varía con el tiempo como $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$. En este circuito, la regla de las mallas de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

Utilizando $I = dQ/dt$ y ordenando se tiene

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t \quad 28-46$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación 12-63 correspondiente a la oscilación forzada de una masa en un muelle:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

(En la ecuación 12-63, se escribió la constante de la fuerza k en función de la masa m y de la frecuencia angular natural ω_0 , utilizando $k = m\omega_0^2$. En la ecuación 28-46 podría escribirse de forma semejante la capacidad en función de L y de la frecuencia natural utilizando $1/C = L\omega_0^2$.)

En lugar de resolver la ecuación 28-46, estudiaremos cualitativamente sus soluciones como hicimos con la ecuación 12-63 en el capítulo 12. La corriente en el circuito se compone de dos partes, una corriente transitoria y una corriente estacionaria. La primera depende de las condiciones iniciales, como la fase inicial del generador y la carga inicial del condensador. La corriente estacionaria, por otra parte, es independiente de dichas condiciones iniciales. La corriente transitoria disminuye exponencialmente con el tiempo y pronto resulta despreciable en comparación con la corriente estacionaria. No tendremos en cuenta a la corriente transitoria y nos concentraremos en la estacionaria.

La corriente estacionaria que se obtiene resolviendo la ecuación 28-46, es

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta) \quad 28-47$$

en donde el ángulo de fase δ viene dado por

$$\text{tg } \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad 28-48$$

La corriente máxima es

Impedancia del circuito serie LCR

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} \quad 28-49$$

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 28-50$$

La magnitud $X_L - X_C$ se denomina **reactancia total**, mientras que Z se denomina **impedancia**. Combinando estos resultados, tendremos

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \quad 28-51$$

También puede obtenerse la ecuación 28-51 mediante un sencillo diagrama utilizando las representaciones de los fasores estudiada en la sección 28-3. En la figura 28-16 se indican los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia, la bobina y el condensador. El componente x de cada uno de estos vectores es igual a la caída de tensión instantánea en el correspondiente elemento. Como la suma de los componentes x es igual al componente x de la suma de los vectores, la suma de los componentes x es igual a la suma de las caídas de tensión en todos los elementos, que según la regla de las mallas de Kirchhoff es igual a la fem instantánea. Si representamos la fem aplicada, $\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$, como un fasor \mathcal{E} que tiene el módulo \mathcal{E}_{\max} , tendremos

$$\mathcal{E} = V_R + V_L + V_C \quad 28-52$$

En función de los módulos

$$\mathcal{E}_{\max} = |V_R + V_L + V_C| = \sqrt{V_{R,\max}^2 + (V_{L,\max} - V_{C,\max})^2}$$

Pero $V_R = I_{\max}R$, $V_L = I_{\max}X_L$, y $V_C = I_{\max}X_C$. Así pues,

$$\mathcal{E}_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{\max}Z$$

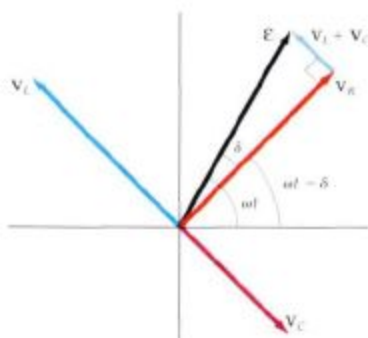


Figura 28-16 Relaciones de fase entre las tensiones de un circuito LCR serie. La tensión que se aplica a la resistencia está en fase con la corriente. La tensión que aparece en la bobina V_L adelanta a la corriente en 90° . La tensión en placas del condensador retrasa respecto a la corriente en 90° . La suma de los vectores que representan estas tensiones da un vector que forma un ángulo δ con la corriente y representa la fem aplicada. En el caso indicado en la figura, V_C es mayor que V_L y la corriente está retrasada en δ respecto a la fem.

El fasor \mathcal{E} forma un ángulo δ con V_R como se ve en la figura 28-16. A partir de ella podemos observar que

$$\tan \delta = \frac{|V_L + V_C|}{|V_R|} = \frac{I_{\max}X_L - I_{\max}X_C}{I_{\max}R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

de acuerdo con la ecuación 28-48. Como \mathcal{E} forma un ángulo ωt con el eje x , V_R forma un ángulo $\omega t - \delta$ con el eje x . Esta tensión está en fase con la corriente, que por tanto vendrá dada por

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

Esta expresión es la ecuación 28-51. La relación entre la impedancia Z y la resistencia R y la reactancia total $X_L - X_C$ puede recordarse utilizando el triángulo rectángulo indicado en la figura 28-17.

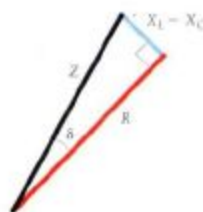


Figura 28-17 Triángulo que relaciona la reactancia capacitiva más la inductiva, a la resistencia, a la impedancia y al ángulo de fase en un circuito LCR.

Resonancia

Aunque las ecuaciones 28-50 y 28-51 parecen ser complicadas, podemos utilizarlas para aprender algunas características simples pero importantes del comportamiento del circuito de la figura 28-15. Como tanto la reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y la reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$ dependen de la frecuencia de la fem aplicada, lo mismo ocurre con la impedancia Z y con la corriente máxima I_{\max} . A frecuencias muy bajas $X_C = 1/\omega C$ es mucho mayor que $X_L = \omega L$, de modo que la impedancia es grande e I_{\max} es pequeña. El ángulo de fase δ es negativo, lo que significa que la corriente adelanta a la tensión del generador. Al ir aumentando ω , la reactancia inductiva va aumentando mientras que disminuye la reactancia capacitiva. Cuando son iguales X_L y X_C , la impedancia Z tiene su valor mínimo, igual a R , e I_{\max} tiene su valor máximo. Además el ángulo de fase δ es cero, lo que significa que la corriente está en fase con la fem aplicada. Si ω aumenta aún más, X_L resulta mayor que X_C . La impedancia aumenta y la corriente atrasa respecto a la tensión del generador.

El valor de ω que hace iguales a X_L y a X_C se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} X_L &= X_C \\ \omega L &= \frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

o sea

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 2\pi f_0$$

La frecuencia f_0 (o la frecuencia angular ω_0) recibe el nombre de frecuencia natural o **frecuencia de resonancia** del circuito. La impedancia es mínima y el valor máximo de la corriente adquiere su valor más grande cuando la frecuencia de la fem es igual a la frecuencia natural. A esta frecuencia se dice que el circuito está en **resonancia**. En la resonancia, la corriente está en fase con la tensión del generador. Esta condición de resonancia en un circuito LCR forzado es semejante a la de un oscilador armónico simple forzado.

Señalamos anteriormente que ni las bobinas ni los condensadores disipan energía. La potencia media suministrada a un circuito LCR serie es, por tanto, igual a la potencia media suministrada a la resistencia. La potencia instantánea que se suministra a la resistencia es

$$P = I^2 R = [I_{\max} \cos(\omega t - \delta)]^2 R$$

Promediando sobre uno o varios ciclos y sabiendo que $(\cos^2 \theta)_m = \frac{1}{2}$, obtenemos para la potencia media

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R$$

que es la misma que la dada en la ecuación 28-7. Como $V_R = I_{\max} R$, puede escribirse

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max} V_R$$

En la figura 28-16, puede verse que $V_R = \mathcal{E}_{\max} \cos \delta$. Así pues, puede escribirse la potencia media suministrada al circuito como

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max} \mathcal{E}_{\max} \cos \delta$$

En función de los valores eficaces, $I_{\text{ef}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$, la potencia media vale

$$P_m = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta \quad 28-53$$

La cantidad $\cos \delta$ se denomina **factor de potencia** del circuito LCR. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia vale 1.

Puede expresarse la potencia en función de la frecuencia angular ω . En el triángulo de la figura 28-17, se tiene

$$\cos \delta = \frac{R}{Z} \quad 28-54$$

Haciendo uso de este resultado y como $I_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\text{ef}}/Z$, se tiene para la potencia media

$$P_m = \mathcal{E}_{\text{ef}}^2 \frac{R}{Z^2}$$

A partir de la definición de impedancia Z , tenemos

$$\begin{aligned} Z^2 &= (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2 \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado $\omega_0^2 = 1/LC$. Utilizando esta expresión de Z^2 , obtenemos para la potencia media en función de ω :

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2 R \omega^2}{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad 28-55$$

En la figura 28-18 se indica una gráfica de la potencia media suministrada por el generador al circuito en función de la frecuencia del generador para dos valores diferentes de la resistencia R . Estas curvas, denominadas **curvas de resonancia**, son las mismas que las curvas de potencia en función de la frecuencia en el caso de un oscilador amortiguado y forzado (ver sección 12-8). La potencia media es máxima cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia de resonancia. Cuando la resistencia es pequeña, la curva de resonancia es estrecha; cuando es grande, la curva se ensancha. Puede caracterizarse una curva de resonancia por la **anchura de resonancia** Δf indicada en la figura. Esta anchura es la diferencia de frecuencias entre los dos puntos de la curva en que la potencia es la mitad de su valor máximo. Cuando la anchura es pequeña en comparación con la frecuencia de resonancia, la resonancia es aguda, es decir la curva correspondiente es estrecha.

Se definió en el capítulo 12 el factor Q para un oscilador mecánico como $Q = 2\pi E/|\Delta E|$ (ecuación 12-54), siendo E la energía total del sistema y ΔE la energía perdida en un ciclo. Vimos que $Q = 2\pi m/bT$, en donde m es la masa, b la constante de amortiguamiento y T el período. Como $\omega_0 = 2\pi/T$, el factor Q en el caso de un oscilador mecánico amortiguado y forzado viene dado por

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b} \quad 28-56$$

Puede definirse de forma semejante el **factor Q** correspondiente a un circuito LCR. Como L es análogo a la masa m y R a la constante de amortiguamiento b , el factor Q de un circuito LCR viene dado por

$$Q = \frac{2\pi E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad 28-57$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha (es decir, cuando Q es mayor que 2 o 3), el factor Q puede aproximarse por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \quad 28-58$$

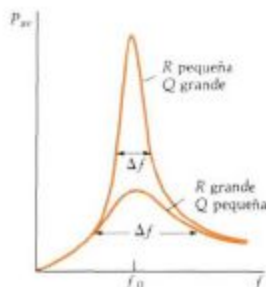


Figura 28-18 Representación gráfica de la potencia media en función de la frecuencia para un circuito LCR. La potencia es máxima cuando la frecuencia f del generador es igual a la frecuencia natural $f_0 = (1/2\pi\sqrt{LC})$ del circuito. Si la resistencia es pequeña, el factor Q es grande y la resonancia es aguda. Se mide la anchura Δf de la curva de resonancia entre aquellos puntos en que la potencia es la mitad de su valor máximo.

Factor Q para un circuito LCR

Una radio a bordo de un barco en las proximidades del año 1920. Junto a la izquierda del operador pueden verse las bobinas y las placas del condensador del circuito de sintonía.



Los circuitos resonantes se utilizan en los receptores de radio, en donde se varía la frecuencia de resonancia del circuito variando la capacidad. Se produce la resonancia cuando la frecuencia natural del circuito se iguala a una de las frecuencias de las ondas de radio recogidas por la antena. En la resonancia, aparece una corriente relativamente grande en el circuito de la antena. Si el factor Q del circuito es suficientemente alto, las corrientes debidas a las frecuencias de otras estaciones que no están en resonancia serán despreciables en comparación con la correspondiente a la frecuencia de la estación a que se ha sintonizado el circuito.

Ejemplo 28-5

Un circuito serie LCR con $L=2$ H, $C=2$ μF y $R=20$ Ω está conectado a un generador de frecuencia variable y con una fem máxima de 100 V. (a) Hallar la frecuencia de resonancia f_0 . Hallar (b) la corriente máxima $I_{\text{máx}}$, y (c) el ángulo de fase ϕ cuando la frecuencia del generador es de $f=60$ Hz.

(a) La frecuencia de resonancia es

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2\text{ H})(2 \times 10^{-6}\text{ F})}} = 79,6\text{ Hz}$$

(b) Cuando la frecuencia del generador es 60 Hz, está bastante por debajo de la frecuencia de resonancia. Las reactivancias capacitiva e inductiva a 60 Hz son

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2\pi)(60\text{ Hz})(2 \times 10^{-6}\text{ F})} = 1326\ \Omega$$

y

$$X_L = \omega L = (2\pi)(60\text{ Hz})(2\text{ H}) = 754\ \Omega$$

La reactivancia total es $X_L - X_C = 754\ \Omega - 1326\ \Omega = -572\ \Omega$. Es un valor mucho mayor que el de la resistencia, cosa que siempre ocurre cuando se está lejos de la resonancia. La impedancia total es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20\ \Omega)^2 + (-572\ \Omega)^2} = 572\ \Omega$$

puesto que $(20)^2$ es despreciable frente a $(572)^2$. La corriente máxima es, pues,

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{Z} = \frac{100\text{ V}}{572\ \Omega} = 0,175\text{ A}$$

Este valor es pequeño en comparación con I_{\max} en la resonancia, que vale $(100 \text{ V})/(20 \Omega) = 5 \text{ A}$.

(c) El ángulo de fase δ viene dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-572 \Omega}{20 \Omega} = -28,6 \\ \delta &= -88^\circ \end{aligned}$$

A partir de la ecuación 28-51 (o de la figura 28-16) podemos ver que un ángulo de fase negativo significa que la corriente adelanta a la tensión del generador.

Ejemplo 28-6

Hallar la potencia media producida por el generador del ejemplo 28-5 a 60 Hz.

Como conocemos la fem máxima y hemos calculado la corriente máxima en el ejemplo anterior, es conveniente escribir la potencia media en función de estas magnitudes. Tendremos

$$\begin{aligned} P_m &= \mathcal{E}_0 I_{\text{ef}} \cos \delta = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \delta \\ &= \frac{1}{2} (100 \text{ V})(0,175 \text{ A})[\cos(-88^\circ)] = 0,306 \text{ W} \end{aligned}$$

Como hemos señalado, esta potencia se transforma en calor Joule en la resistencia. Podríamos haber calculado también la potencia media a partir de

$$P_m = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R = \frac{1}{2} (0,175 \text{ A})^2 (20 \Omega) = 0,306 \text{ W}$$

Ejemplo 28-7

Hallar (a) el valor Q y (b) la anchura de resonancia del circuito del ejemplo 28-5.

(a) En el ejemplo 28-5, vimos que la frecuencia de resonancia era $f_0 = 79,6 \text{ Hz}$. Por consiguiente el valor Q es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(79,6 \text{ Hz})(2 \text{ H})}{20 \Omega} = 50$$

(b) La anchura de la resonancia es

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{79,6 \text{ Hz}}{50} = 1,6 \text{ Hz}$$

Resulta ser una resonancia muy aguda. La anchura es sólo 1,6 Hz en la frecuencia de resonancia de 79,6 Hz.

Ejemplo 28-8

Hallar las tensiones máximas en la resistencia, la bobina y el condensador en la resonancia en el caso del circuito del ejemplo 28-5.

En la resonancia, la impedancia es igual a la resistencia $R = 20 \Omega$. Como la fem máxima es 100 V, la corriente máxima es

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{Z} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Por tanto, la tensión máxima aplicada a la resistencia es

$$V_{R,\text{máx}} = I_{\text{máx}} R = (5 \text{ A})(20 \Omega) = 100 \text{ V}$$

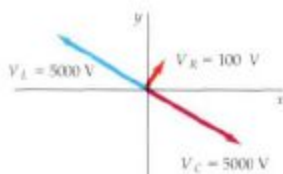


Figura 28-19 Las tensiones del ejemplo 28-8. Las tensiones que aparecen en la bobina y en el condensador de un circuito LCR serie están siempre desfasadas en 180° . En la resonancia tienen el mismo valor, de modo que su suma es cero, y así la suma de las tensiones en los tres elementos es igual a V_g . En este ejemplo, la caída máxima de tensión en la resistencia es 100 V, mientras que las tensiones máximas en la bobina y en el condensador son 5000 V.

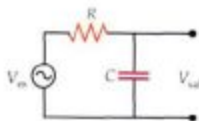


Figura 28-20 Circuito del ejemplo 28-9.

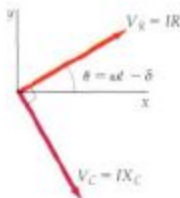


Figura 28-21 Diagrama de fasores correspondiente a las tensiones aplicadas entre sí en la resistencia y al condensador de la figura 28-20.



Figura 28-22 Gráfico del cociente entre la tensión de salida y la de entrada en función de la frecuencia ω . Este circuito recibe el nombre de **filtro pasa baja** RC , porque se transmiten con mayor amplitud las frecuencias bajas de entrada que las altas.

La frecuencia de resonancia hallada en el ejemplo 28-4 era $f_c = 79,6$ Hz. Las reactancias inductiva y capacitiva en la resonancia son

$$X_L = \omega_c L = (2\pi)(79,6 \text{ Hz})(2 \text{ H}) = 1000 \Omega$$

y

$$X_C = \frac{1}{\omega_c C} = \frac{1}{(2\pi)(79,6 \text{ Hz})(2 \times 10^{-6} \text{ F})} = 1000 \Omega$$

Ambas reactancias son iguales, como era de esperar, puesto que se hallaba la frecuencia de resonancia al igualarlas. Por ello, la tensión máxima que aparece en la bobina es

$$V_{L,\text{max}} = I_{\text{max}} X_L = (5 \text{ A})(1000 \Omega) = 5000 \text{ V}$$

y en el condensador

$$V_{C,\text{max}} = I_{\text{max}} X_C = (5 \text{ A})(1000 \Omega) = 5000 \text{ V}$$

La figura 28-19 muestra el diagrama de fasores para estas tensiones. La tensión máxima que aparece en la resistencia corresponde al valor relativamente seguro de 100 V, igual a la fem máxima del generador. Sin embargo, las tensiones máximas que aparecen aplicadas a la bobina y al condensador tienen el valor peligrosamente elevado de 5000 V. Estas tensiones están desfasadas entre sí en 180° . En la resonancia, la tensión que aparece en la bobina en un instante cualquiera es el negativo de la que aparece en el condensador, de forma que su suma es siempre nula, haciendo que la tensión en la resistencia sea siempre igual a la fem instantánea del circuito.

Ejemplo 28-9

Una resistencia R y un condensador C se encuentran en serie con un generador, que tiene una tensión dada por $V_g = V_0 \cos \omega t$, como se ve en la figura 28-20. Hallar la tensión en el condensador en función de la frecuencia ω .

Este circuito es más sencillo que los anteriores, porque carece de bobina. En la figura, hemos señalado la tensión del generador, tensión de entrada, y la que aparece en el condensador, tensión de salida. La figura 28-21 muestra los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia y en el condensador. La impedancia total del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

en donde $X_C = 1/\omega C$. La corriente eficaz es, entonces,

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{g,ef}}}{Z} = \frac{V_{\text{g,ef}}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

La tensión eficaz de salida que aparece en el condensador es

$$\begin{aligned} V_{\text{sal,ef}} &= I_{\text{ef}} X_C = \frac{X_C V_{\text{g,ef}}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \\ &= \frac{(1/\omega C) V_{\text{g,ef}}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{V_{\text{g,ef}}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} \end{aligned}$$

En la figura 28-22 se ve el cociente entre la tensión de salida y la de entrada en función de la frecuencia ω . Este circuito recibe el nombre de **filtro pasa baja** RC , porque se transmiten con mayor amplitud las frecuencias bajas de entrada que las altas.

Circuitos en paralelo

En la figura 28-23 se muestran una resistencia R , un condensador C y una bobina L conectados en paralelo a un generador de ca. La corriente total I procedente del generador se divide en tres corrientes, la I_R que pasa por la resistencia, la I_C por el condensador y la I_L por la bobina. La tensión instantánea V es la misma para los tres elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión y tiene una amplitud de V/R . Como la caída de tensión que aparece en la bobina adelanta a la corriente que circula por la bobina en 90° , esta última retrasa respecto a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_L . Análogamente, la corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_C . Estas corrientes se han representado mediante fasores en la figura 28-24. La corriente total I es el componente x del vector suma de las corrientes individuales como se ve en la figura. El valor de la corriente total es

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z} \quad 28-59$$

estando relacionada la impedancia Z con la resistencia y las reactivas capacitiva e inductiva por

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \quad 28-60$$

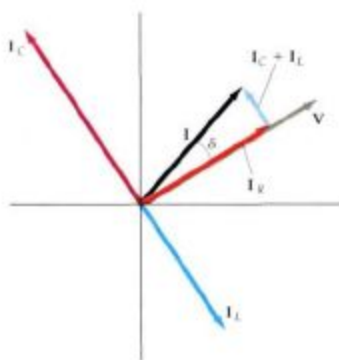


Figura 28-24 Diagrama de fasores correspondiente a la tensión y corrientes del circuito LCR paralelo de la figura 28-23. La tensión es la misma para todos los elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión. La corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° mientras que la de la bobina retrasa en 90° . La diferencia de fase ϕ entre la corriente total y la tensión depende de los valores relativos de las intensidades o corrientes, que dependen de los valores de la resistencia y de las reactivas capacitiva e inductiva.

En la resonancia, la frecuencia del generador ω es igual a la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y las reactivas inductiva y capacitiva son iguales. A partir de la ecuación 28-60, vemos entonces que $1/Z$ adquiere su valor mínimo $1/R$, de modo que la impedancia Z es máxima y la corriente total mínima. Podemos comprender este hecho observando que, en la resonancia, $X_C = X_L$ y las corrientes en la bobina y en el condensador son iguales pero con un desfase de 180° , de modo que la corriente total es precisamente sólo la corriente que pasa por la resistencia.

Cuestiones

- ¿Depende el factor de potencia de la frecuencia?
- ¿Presenta algunas desventajas un circuito de sintonía de radio que posea un factor Q extremadamente grande?
- ¿Cuál es el factor de potencia de un circuito que posee bobinas y condensadores, pero no resistencias?

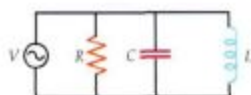


Figura 28-23 Circuito LCR paralelo. circuit.

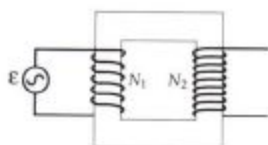


Figura 28-25 Transformador con N_1 vueltas en el primario y N_2 vueltas en el secundario.

(a) Circuito para provocar la ignición de la mezcla combustible en el motor de un automóvil. El sistema que se muestra en la foto (b) es un transformador con un arrollamiento primario de hilo grueso mientras que el secundario está construido con hilo delgado. Si tanto el conmutador de ignición como los puntos de contacto están cerrados, circula corriente a través del primario de la bobina de ignición. El eje de levas rotativo abre y cierra los puntos de contacto, originando una rápida variación en la corriente del primario de la bobina de ignición, que produce una tensión de 30 a 40 kV en el arrollamiento secundario. Esta tensión alta se distribuye mediante el contacto giratorio del «delco» a las bujías a intervalos de tiempo muy precisos, dando como resultado el salto de una chispa entre los electrodos de la bujía. Esta chispa provoca la ignición de la mezcla aire-combustible en los cilindros.



(a)

28-6 Transformadores

Un **transformador** es un dispositivo para variar las tensiones y corrientes alternas sin pérdida apreciable de potencia. Su funcionamiento se basa en el hecho de que una corriente alterna en un circuito inducirá una fem alterna en otro circuito próximo debido a la inductancia mutua entre ambos. En la figura 28-25 se indica un transformador simple compuesto por dos bobinas de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de hierro común. La bobina que se conecta a la fuente de entrada se denomina **primario** y la otra, **secundario**. Puede utilizarse cualquiera de los dos arrollamientos de un transformador para primario o secundario. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el campo magnético creado por una corriente determinada y para que se vea constreñido de forma que prácticamente todo el flujo magnético que atraviese uno de los arrollamientos atraviese el otro. El núcleo de hierro está formado por láminas para reducir las corrientes de Foucault y las pérdidas consiguientes. Existen otras pérdidas de potencia debido al calentamiento Joule de las pequeñas resistencias que forman ambos arrollamientos y a la histéresis que se presenta en el núcleo de hierro. Despreciaremos estas pérdidas y consideraremos un transformador ideal con un rendimiento del 100 por ciento, en el que toda la potencia suministrada al arrollamiento primario aparece en el secundario. Los transformadores comerciales suelen tener rendimientos comprendidos entre el 90 y el 95 por ciento.

Consideremos un transformador que tiene un generador de ca de fem \mathcal{E} conectado al primario con N_1 vueltas, mientras que el circuito del secundario, que tiene N_2 vueltas, está abierto. Debido al núcleo de hierro, existe un flujo magnético grande que atraviesa ambos arrollamientos aunque la corriente magnetizante I_m en el circuito primario sea muy pequeña. Podemos despreciar las resistencias de los arrollamientos en comparación con sus reactancias inductivas. El primario es entonces un circuito simple formado por un generador de fem alterna y una inductancia pura como el estudiado en la sección 28-2. La corriente (de magnetización) y la tensión en el primario están desfasadas entre sí en 90° y la potencia media disipada en el arrollamiento primario es cero. Si ϕ_{varia} es el flujo magnético que atraviesa una espira o vuelta del primario, la caída de tensión en él es $V_{11} = N_1 d\phi_{\text{varia}}/dt$. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito del primario se tiene entonces

$$\mathcal{E} - N_1 \frac{d\phi_{\text{varia}}}{dt} = 0$$

o sea

$$\mathcal{E} = N_1 \frac{d\phi_{\text{varia}}}{dt} \quad 28-61$$

Si se considera que no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos. Así pues, el flujo total que atraviesa el arrollamiento secundario es $N_2 \phi_{\text{varia}}$, y la tensión que aparece en dicho secundario es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\phi_{\text{varia}}}{dt} \quad 28-62$$



(b)

Comparando estas ecuaciones, podemos ver que

$$V_2 = - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E} \quad 28-63$$

Si N_2 es mayor que N_1 , la tensión en el secundario es mayor que la aplicada al primario y el transformador se designa como **transformador elevador** o de alta. Si N_2 es menor que N_1 , la tensión en el secundario es menor que en el primario y el transformador recibe el nombre de **transformador reductor** o de baja.

Consideremos a continuación lo que ocurre cuando colocamos una resistencia R denominada **resistencia de carga** conectada al secundario. Entonces aparecerá una corriente I_2 en el circuito del secundario que estará en fase con la tensión V_2 aplicada a la resistencia. Esta corriente originará un flujo adicional ϕ_{carga} a través de cada espira que es proporcional a $N_2 I_2$. Este flujo se opone al flujo original creado por la corriente magnetizante original I_m del primario. Sin embargo, la tensión que aparece en el arrollamiento primario está determinada por la fem del generador, que no se ve afectada por el circuito secundario. De acuerdo con la ecuación 28-61, el flujo total en el núcleo de hierro debe variar al ritmo original; es decir, el flujo total en el núcleo de hierro debe ser el mismo que cuando no existía la carga en el secundario. El arrollamiento primario extrae así una corriente adicional I_1 para mantener el flujo original ϕ_{carga} . El flujo que atraviesa cada espira producido por esta corriente adicional es proporcional a $N_1 I_1$. Como este flujo es igual a $-\phi_{\text{carga}}$, la corriente adicional I_1 en el primario está relacionada con la corriente I_2 en el secundario por

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2 \quad 28-64$$

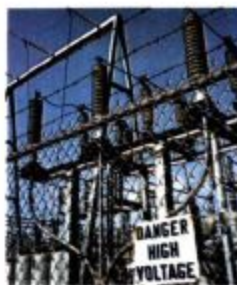
Estas corrientes están desfasadas en 180° y producen flujos que se contrarrestan. Como I_1 está en fase con V_2 , la corriente adicional I_1 está en fase con la fem aplicada. La potencia procedente del generador es $\mathcal{E}_g I_{1,\text{ef}}$ y la potencia que se extrae del secundario es $V_{2,\text{ef}} I_{2,\text{ef}}$. (La corriente magnetizante no contribuye a la potencia de entrada porque está desfasada en 90° con la tensión del generador.) Si no existiesen pérdidas,

$$\mathcal{E}_g I_{1,\text{ef}} = V_{2,\text{ef}} I_{2,\text{ef}} \quad 28-65$$

En la mayoría de los casos la corriente adicional en el primario I_1 es mucho mayor que la corriente magnetizante original I_m que se obtiene del generador cuando no hay carga. Esto puede demostrarse colocando una lámpara en serie con el primario. La lámpara brilla mucho más cuando existe una carga aplicada al secundario que cuando éste se encuentra abierto. Si puede desprejarse I_m , la ecuación 28-64 relaciona las corrientes totales que recorren los circuitos primario y secundario.



(a)



(b)

(a) Transformador cerrado para reducir la tensión hasta el valor adecuado a su distribución en las casas. (b) Subestación de potencia suburbana en donde los transformadores reducen la tensión procedente de las líneas de transmisión de alta tensión a valores más bajos.

Ejemplo 28-10

Un timbre funciona a 6 V con 0,4 A. Se conecta a un transformador cuyo primario contiene 2000 vueltas y está conectado a una ca de 120 V. (a) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario? (b) ¿Cuál es la corriente en el primario?

(a) Como la tensión de entrada es 120 V y la de salida es 6 V, puede obtenerse la relación entre las vueltas con la ecuación 28-63:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{\mathcal{E}} \\ = \frac{6 \text{ V}}{120 \text{ V}}$$

Así pues, el número de vueltas del secundario es de

$$N_2 = \frac{6}{120}(2000 \text{ vueltas}) = 100 \text{ vueltas}$$

(b) Como estamos suponiendo que el rendimiento de la transmisión de potencia es el 100 por ciento, las corrientes de entrada y de salida se relacionan entre sí por

$$V_2 I_2 = \mathcal{E} I_1$$

Por consiguiente, la corriente en el primario es

$$I_1 = \frac{V_2}{\mathcal{E}} I_2 = \frac{6}{120}(0,4 \text{ A}) = 0,02 \text{ A}$$

Uno de los usos más importantes de los transformadores es el del transporte de energía eléctrica. Para reducir hasta el mínimo posible las pérdidas que en forma de calor Joule I^2R tienen lugar en las líneas de transmisión de energía, resulta más económico emplear un alto voltaje y una baja corriente. Por otro lado, la seguridad en su empleo y otras consideraciones, como el aislamiento, hacen necesario utilizar la energía a voltajes más bajos con corrientes más altas cuando se quiere hacer funcionar motores o cualquier otro dispositivo o aparato eléctrico. Supóngase, por ejemplo, que cada persona de una ciudad con una población de 50 000 habitantes consume 1,2 kW de potencia eléctrica. (El consumo per capita de potencia en los Estados Unidos es realmente algo más elevado que esta cifra.) A 120 V, la corriente requerida por cada individuo sería

$$I = \frac{1200 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 10 \text{ A}$$

La corriente total para 50 000 personas sería entonces 500 000 A. El transporte de dicha corriente desde los generadores de una central eléctrica hasta una ciudad a muchos kilómetros de distancia requeriría conductores de tamaño enorme (en realidad, gruesos cilindros de cobre más que hilos), y la pérdida de potencia dada por I^2R sería sustancial. En lugar, pues, de transportar la potencia a 120 V, se utilizan transformadores de alta en la central para elevar el voltaje a unos valores muy elevados, tales como 600 000 V. Así se reduce la corriente necesaria a

$$I = \frac{120 \text{ V}}{600\,000 \text{ V}}(500\,000 \text{ A}) = 100 \text{ A}$$

Para reducir luego el voltaje a unos niveles más seguros durante su transporte dentro de la ciudad, se sitúan estaciones transformadoras a la entrada de la misma para bajar su valor hasta 10 000 V, por ejemplo. Luego en las proximidades de las casas se instalan nuevos transformadores que reduzcan otra vez el voltaje hasta 120 V (o 220 V) para su distribución en el interior de las mismas. Debido a esta facilidad para aumentar o disminuir el voltaje de la corriente alterna mediante transformadores, se utiliza ordinariamente este tipo de corriente y no la corriente continua.

Ejemplo 28-11

Una línea de transmisión de energía eléctrica tiene una resistencia de $0,02 \Omega/\text{km}$. Calcular la pérdida de potencia I^2R si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquella a (a) 220 V y (b) $4,4 \text{ kV}$.

(a) La resistencia total de 10 km de línea es $R = (0,02 \Omega/\text{km})(10 \text{ km}) = 0,20 \Omega$. La corriente necesaria para transmitir 200 kW a 220 V es

$$I = \frac{200\,000 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 909 \text{ A}$$

La pérdida de potencia vale entonces

$$I^2R = (909 \text{ A})^2(0,20 \Omega) = 165 \text{ kW}$$

Así pues, se desperdiciaría en pérdida alrededor del 82 por ciento de la potencia a transmitir.

(b) Si la línea de transmisión se dispone a $4,4 \text{ kV}$, la corriente es

$$I = \frac{200 \text{ kW}}{4,4 \text{ kV}} = 45,5 \text{ A}$$

Ahora la pérdida de potencia sería

$$I^2R = (45 \text{ A})^2(0,20 \Omega) = 414 \text{ W}$$

La pérdida de energía es considerablemente menor.

28-7 Rectificación y amplificación

Aunque es fácil disponer de corriente alterna, con frecuencia se necesita corriente continua para alimentar aparatos como radios portátiles o calculadoras. Estos dispositivos suelen entregarse con pilas o baterías adecuadas y con convertidores de ca-cc para ahorrar pilas cuando se tiene acceso a la ca. Estos convertidores contienen un transformador para reducir el voltaje desde 220 V al que se necesita (normalmente 9 V) y un circuito para convertir la ca en cc. El proceso de convertir la corriente alterna en corriente continua se denomina **rectificación**. El principal elemento de un circuito rectificador es el **diodo**. Los primeros diodos, desarrollados por John Fleming en 1904, eran tubos de vacío que contenían dos elementos principales, un cátodo que emite electrones y un ánodo, denominado la placa, que los recoge. La característica a destacar de un diodo es que conduce la corriente en un sentido y no en el otro. En la actualidad la mayoría de los diodos que se utilizan son dispositivos de semiconductores, que serán estudiados en el capítulo 39 de la versión ampliada de este libro. El símbolo para designar un diodo como elemento de un circuito es $\rightarrow|$. La flecha indica el sentido en que puede pasar la corriente por el diodo. (Este sentido es contrario al del movimiento de los electrones.)

En la figura 28-26 se muestra en esquema un diodo de tubo de vacío. Cuando se calienta el cátodo (mediante un elemento calefactor con circuito separado), emite electrones, lo cual es un proceso denominado **emisión termoiónica** descu-



Transformador y rectificador para convertir la corriente de 120 V ca de un enchufe de pared a 9 V cc para su empleo en conexión con una radio o una calculadora, con objeto de ahorrar pilas.

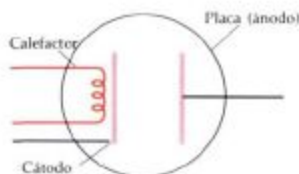
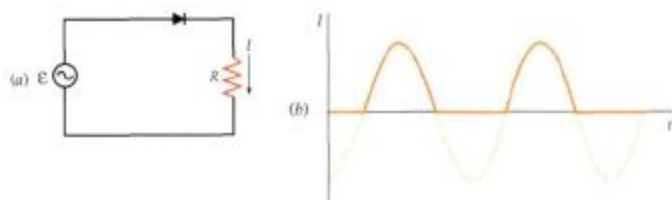


Figura 28-26 Diodo de vacío. Cuando se calienta el cátodo, emite electrones, que son arrastrados hasta la placa cuando posee un potencial más alto que el cátodo.

Figura 28-27 (a) Circuito simple compuesto por un generador de ca, un diodo y una resistencia. (b) Corriente en función del tiempo en la resistencia del circuito anterior. La corriente negativa indicada por la línea a trazos no atraviesa el diodo.



bierto por Thomas Edison en 1883. Si la placa tiene un potencial más elevado que el cátodo, atrae a los electrones y el tubo conduce una corriente, que suele denominarse **corriente de placa**. Si la placa se encuentra a un potencial inferior al del cátodo, los electrones se ven repelidos y no pasa corriente por el tubo.

En la figura 28-27a se ve un circuito simple que contiene un generador de ca, un diodo y una resistencia. La corriente que recorre la resistencia se ha indicado en la figura 28-27b. Se dice entonces que el diodo es un **rectificador de media onda** porque circula corriente por la resistencia sólo durante medio ciclo del generador de ca. En la figura 28-28 se muestra un circuito que proporciona una **rectificación de la onda completa**. En él, se han conectado dos diodos a los terminales *a* y *b* de un transformador. Las salidas de los diodos se conectan entre sí y a uno de los extremos de la resistencia. El otro extremo de la misma se conecta al punto medio *c* del transformador. Cuando el punto *a* está a un potencial superior que el punto *c*, el diodo 1 conduce la corriente I_1 a la resistencia. Medio ciclo después, el punto *b* está a un potencial más alto que el punto *c* y entonces es el diodo 2 el que conduce corriente a la resistencia, I_2 . La corriente $I_1 + I_2$ que pasa por la resistencia puede verse en la figura 28-29d. Las variaciones no deseables que presenta la salida del rectificador se suele denominar el **rizado** de la corriente.

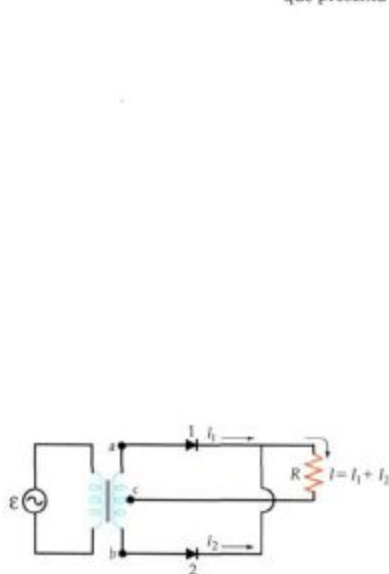


Figura 28-28 Circuito rectificador de onda completa. Cuando el potencial del punto *a* es mayor que el del punto *c*, la corriente I_1 atraviesa el diodo 1. Medio ciclo después el potencial del punto *b* es mayor que el del punto *c* y entonces la corriente I_2 pasa por el diodo 2.

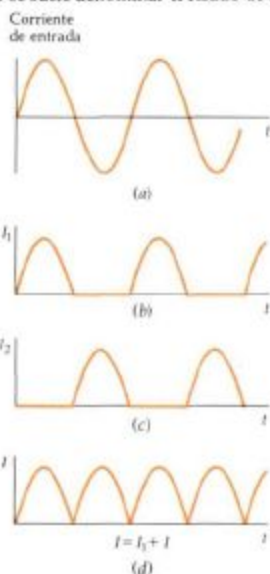


Figura 28-29 (a) Corriente de entrada al transformador en el circuito indicado en la figura 28-28. (b) Corriente I_1 que atraviesa el diodo 1. (c) Corriente I_2 que atraviesa el diodo 2. (d) Corriente total $i = I_1 + I_2$ que recorre la resistencia de la figura 28-28.

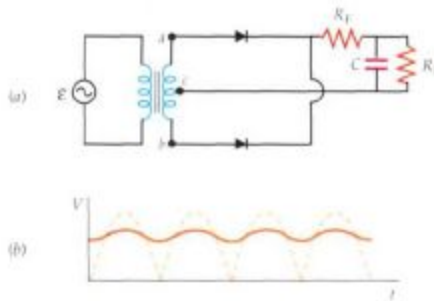


Figura 28-30 (a) El circuito rectificador de onda completa de la figura 28-28 con un filtro pasa baja para suavizar las ondulaciones o rizado de la tensión rectificadas. (b) Tensión de entrada (a trazos) y tensión de salida (a trazo lino) del filtro pasa baja.

En la figura 28-30a se ha añadido un filtro pasa baja compuesto por una resistencia R_F y condensador C entre el rectificador y la resistencia de carga R_L . (Este filtro se analizó anteriormente en el ejemplo 28-9.) Se escoge la resistencia R_F de forma que sea mucho menor que R_L para que así la caída de tensión de cc (y, por tanto, la pérdida de potencia) a través de la resistencia del filtro sea pequeña en comparación con la aplicada a la resistencia de carga. La capacidad C es grande de modo que el filtro tiene una constante de tiempo R_FC mucho mayor que el periodo existente entre los ciclos de las ondulaciones, consiguiéndose de este modo que la variación de la carga (y el potencial) del condensador debido al rizado sea muy pequeña en comparación con la que se tendría si el rizado variase lentamente. En la figura 28-30b pueden verse las formas de onda correspondientes a la entrada y salida de tensión en el filtro.

En 1907, Lee de Forest descubrió que la corriente de placa podía modificarse notablemente mediante pequeñas variaciones de la tensión de un tercer electrodo insertado entre el cátodo y el ánodo, o placa. Se indica en la figura 28-31 un diagrama del tubo de vacío llamado triodo. El tercer electrodo es una malla de hilo muy fina llamada rejilla. Igual que en el diodo, el cátodo del triodo se calienta y emite electrones que se recogen en la placa, que está a un potencial más alto (normalmente de 100 a 200 V) que el cátodo. Como la rejilla está más próxima

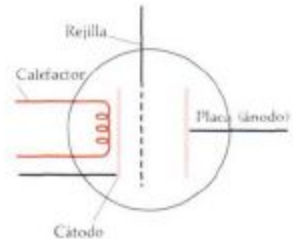
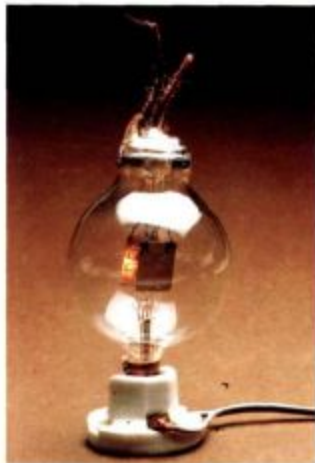
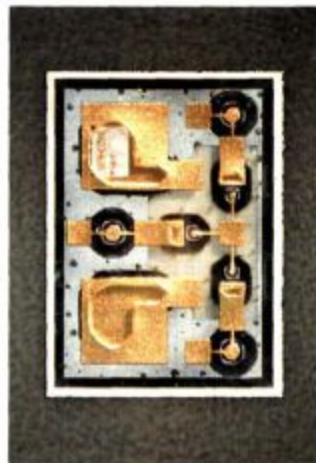


Figura 28-31 Triodo de vacío. La rejilla cercana al cátodo controla la corriente de placa. Cuando la rejilla es negativa respecto al cátodo, repele los electrones emitidos por el cátodo y disminuye la corriente de placa. Cuando la rejilla es positiva respecto al cátodo, atrae los electrones emitidos por el cátodo e incrementa la corriente de placa.



(a)

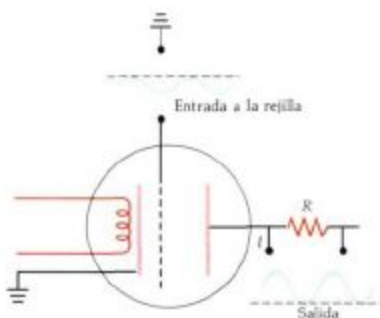


(b)

(a) Tubo triodo de vacío, inventado por Lee De Forest en 1907. A cada lado del cátodo (que se encuentra oculto para su observación en la parte central) está parcialmente visible la rejilla de control, formada por dos hilos de níquel en zigzag. Una pareja de placas de níquel que rodean a la rejilla sirven de ánodo. El tubo (sin contar su base de cerámica) tiene 9 cm de altura.

(b) Chip de silicio que contiene seis diodos PIN (elementos oscuros de forma octogonal). Los diodos PIN funcionan como una resistencia que varía de acuerdo con la tensión que se aplica a sus extremos. Se utilizan para dejar pasar, o no, señales de microondas cortocircuitando las guías de ondas que las transmiten.

Figura 28-32 Amplificación mediante un triodo. Una pequeña señal sinusoidal que se aplique a la rejilla, da como resultado una gran señal sinusoidal a través de la resistencia R .

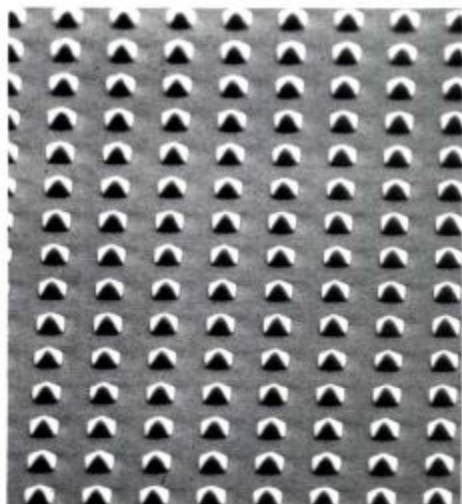


al cátodo que la placa, el potencial de la misma respecto al cátodo tiene una gran influencia sobre la corriente de placa. Cuando la rejilla está al mismo potencial que el cátodo, la corriente de placa no se ve afectada esencialmente por la rejilla. Cuando la rejilla es negativa respecto al cátodo, los electrones que éste emite se ven repelidos por la rejilla y la corriente de placa disminuye mucho. Cuando la rejilla es positiva respecto al cátodo, se ve incrementada la corriente de placa. En la figura 28-32 puede verse cómo se utiliza un triodo como **amplificador**. La señal de entrada es una pequeña tensión sinusoidal que se aplica entre la rejilla y el cátodo. La señal de salida es la tensión que aparece en la resistencia R . Esta señal es considerablemente mayor que la de entrada porque pequeñas variaciones de tensión en la rejilla producen cambios grandes en la corriente de placa. Hoy en día los triodos de vacío han sido sustituidos en su mayoría por transistores, que estudiaremos en el capítulo 38 de la versión ampliada de este libro.

Cuestión

- Explicar por qué la intensidad eficaz en un circuito rectificador de media onda es la mitad que la que aparece en un rectificador de onda completa.

Los tubos de vacío pueden construirse ahora en formas miniaturizadas conocidas como elementos de vacío microeléctricos. Este tipo de tubos, en la actualidad en fase de investigación, podrán algún día sustituir los tubos de rayos catódicos de los aparatos de televisión, haciendo que sean mucho más compactos. Esta distribución de pirámides recubiertas de tungsteno y obtenidas mediante grabado en un solo cristal de silicio, pretende sustituir al cátodo. Las pirámides tienen $3\ \mu\text{m}$ de altura y están separadas en $10\ \mu\text{m}$. En lugar de utilizar el calor, se aplica encima de las pirámides un campo eléctrico muy intenso de modo que se emiten electrones. (A campos suficientemente grandes, los electrones superan las fuerzas que los retienen en la superficie del tungsteno.) A diferencia de los transistores, estos elementos son insensibles al calor y a la radiación. Además, considerando tamaños equivalentes, los tubos de microvacío funcionan con mayor rapidez que los transistores debido a que los electrones viajan a través de ellos sin colisiones.



Resumen

1. Se define el valor eficaz de la corriente alterna, I_{ef} , como

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)_{\text{m}}}$$

Está relacionado con la corriente máxima por

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

La potencia media disipada en una resistencia que transporta una corriente sinusoidal es

$$P_{\text{m}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{max}} I_{\text{max}} = \epsilon_{\text{ef}} I_{\text{ef}} = I_{\text{ef}}^2 R$$

2. La tensión que aparece en una bobina adelanta a la corriente en 90° . La corriente eficaz o máxima está relacionada con la tensión eficaz o máxima por

$$I = \frac{V_L}{X_L}$$

en donde

$$X_L = \omega L$$

es la reactancia inductiva de la bobina. La potencia media disipada por una bobina es nula.

La tensión que aparece entre placas de un condensador retrasa a la corriente en 90° . La corriente eficaz o máxima está relacionada con la tensión eficaz o máxima por

$$I = \frac{V_C}{X_C}$$

en donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

es la reactancia capacitiva. La potencia media disipada en un condensador es nula. Como la resistencia, las reactancias inductiva y capacitiva tienen unidades de ohmio.

3. Las relaciones de fase existentes entre las tensiones aplicadas a una resistencia, a un condensador y a una bobina en un circuito de ca, pueden describirse gráficamente mediante la representación de las tensiones por vectores bidimensionales rotatorios denominados fasores. Estos fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω que es igual a la frecuencia angular de la corriente. El fasor I representa la corriente. El fasor V_R representa la tensión aplicada a una resistencia que está en fase con la corriente. El fasor V_L representa la tensión aplicada a una bobina y está adelantado respecto al de la corriente en 90° . El fasor V_C representa la tensión en placas de un condensador y está retrasado respecto al de la corriente en 90° . El componente x de cada fasor es igual al valor instantáneo de la corriente o de la correspondiente caída de tensión en cualquier momento.
4. Si se descarga un condensador a través de una bobina, la carga y la tensión del condensador oscilan con frecuencia angular

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente en la bobina oscila con la misma frecuencia, pero está desfasada

en 90° respecto a la carga. La energía oscila entre la energía eléctrica del condensador y la energía magnética de la bobina. Si el circuito tiene también resistencia, las oscilaciones son amortiguadas debido a que se disipa energía en la resistencia.

5. La corriente en un circuito *LCR* serie accionado por un generador de ca viene dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

en donde la impedancia Z es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

y se calcula el ángulo de fase δ a partir de

$$\text{tg } \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

La potencia media que entra en un circuito de esta clase depende de la frecuencia y viene dada por

$$P_m = \mathcal{E}_d I_m \cos \delta$$

en donde $\cos \delta$ recibe el nombre de factor de potencia. La potencia media tiene su valor máximo a la frecuencia de resonancia, que viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A la frecuencia de resonancia, el ángulo de fase δ es cero, el factor de potencia vale 1, las reactancias inductiva y capacitiva son iguales y la impedancia Z es igual a la resistencia R .

6. La agudeza de la resonancia se describe mediante el factor Q , que se define como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha, el factor Q puede aproximarse por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

en donde Δf es la anchura de la curva de resonancia.

7. Un transformador es un aparato para variar las tensiones y corrientes alterna sin pérdida apreciable de energía. Si un transformador tiene N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario, la tensión que aparece en el arrollamiento secundario está relacionada con la fem del generador aplicado al primario por

$$V_2 = - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}$$

Un transformador se denomina elevador o de alta, si N_2 es mayor que N_1 de modo que la tensión de salida es más alta que la tensión de entrada. Si N_2 es menor que N_1 , se llama reductor o de baja.

8. Un diodo es un dispositivo que permite el paso de la corriente sólo en un sentido. Puede utilizarse para convertir corriente alterna en corriente continua, proceso que se denomina rectificación.
9. Pequeñas variaciones de la tensión de la rejilla de un triodo producen grandes cambios en la corriente de placa, efecto que puede utilizarse para amplificar señales de ca.

Motores eléctricos

John Dentler
Academia Naval de los Estados Unidos

El desarrollo de una amplia variedad de motores eléctricos ha revolucionado nuestra sociedad. Al comienzo del siglo XX, las máquinas de la mayoría de las grandes fábricas estaban accionadas por una o dos máquinas grandes de vapor que empleaban correas y poleas para la transmisión de la energía. Los automóviles se ponían en marcha con manivelas, los refrigeradores utilizaban grandes bloques de hielo para enfriar los alimentos y las máquinas de coser se movían mediante un pedal accionado con los pies. Hoy en día, todas estas tareas las realizan los motores eléctricos.

La gran diversidad de aplicaciones que utilizan motores eléctricos requiere que existan muchos diseños diferentes de los mismos. Los motores de los relojes eléctricos deben funcionar a una velocidad precisa. Los motores de arranque de los automóviles deben proporcionar un par de arranque muy grande. Un secador de pelo portátil debe tener poco peso y funcionar con di-



John Dentler se graduó en la Academia Naval de los Estados Unidos, en 1972, con un B.S. en Física. Después de completar el Programa de Entrenamiento en Energía Nuclear de la Armada, fue destinado como Oficial de la División de Control del Reactor al portaaviones norteamericano *Nimitz*. Después pasó como

instructor y director de la Unidad de Prototipos de Energía Nuclear. Siguió tres cursos sobre Ingeniería, Armamento y Operaciones, asistió a la Escuela Naval de Postgraduados, recibiendo un título Superior en Ciencias (especializándose en electro-óptica, guerra electrónica y sistemas de radar). Destinado como instructor a la Academia Naval de los Estados Unidos, enseñó Fundamentos de Ingeniería Eléctrica para todos los grados medios y el Curso de Conversión de Energía en el Currículum Principal de Ingeniería Eléctrica. Fue nombrado Ayudante del Director del Departamento de Ingeniería Eléctrica. En la actualidad se encuentra destinado como Ingeniero de Sistemas de Energía en el Centro de Investigaciones de la Marina «David Taylor».

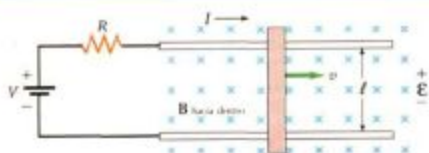


Figura 1 Motor eléctrico sencillo construido con la adición de una batería a la máquina lineal indicada en las figuras 26-14 y 26-16.

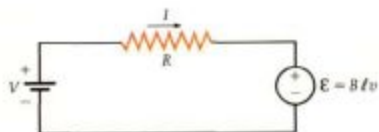


Figura 2 Circuito correspondiente al motor eléctrico lineal de la figura 1.

versas velocidades. Los técnicos proyectan los motores necesarios para las diversas aplicaciones utilizando modelos que se han deducido a partir de los principios físicos estudiados en el texto. Estos modelos son ecuaciones que predicen el comportamiento de un motor para un conjunto de especificaciones o cargas prefijadas.

El motor más sencillo del que se puede idear un modelo (o «modelar») se deriva de la máquina lineal que se presentó en la sección 26-4. La figura 1 es semejante a las figuras 24-16 y 26-16 excepto en que se ha incluido una pila de voltaje V de forma que éste tenga el mismo sentido que la fem desarrollada en la barra móvil. En general los carriles y la barra tienen resistencia e inductancia y la pila tiene resistencia interna. Por sencillez, supongamos que la inductancia es despreciable y que la resistencia total del sistema puede considerarse compuesta o equivalente a una sola resistencia R . La barra puede modelarse como una fuente ideal de fem con $\mathcal{E} = Blv$. El circuito que modela este motor lineal simple se indica en la figura 2.

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito se tiene

$$V - IR - \mathcal{E} = 0 \quad (1)$$

Sustituyendo \mathcal{E} por Blv , obtenemos

$$V - IR - Blv = 0 \quad (2)$$

Así pues, la corriente viene dada por

$$I = -\frac{Blv}{R} + \frac{V}{R} \quad (3)$$

La corriente es, pues, una función lineal de la velocidad con tal de que V , B , l y R sean constantes. Con veloci-

Continúa

dades bajas, la fem es pequeña y la corriente es positiva (sentido horario). Cuando la velocidad es alta, la fem es mayor que el voltaje de la pila V y la corriente es negativa (sentido antihorario). Si la velocidad es $V/B\ell$, la corriente es nula.

Si los carriles de la figura 1 careciesen de rozamiento y el campo magnético fuese suficientemente ancho, la barra se aceleraría hasta alcanzar una velocidad terminal $V/B\ell$, en cuyo instante la fuerza $F=IB\ell$ sería nula porque la corriente se hace cero. Si la barra se acelera hacia la derecha mediante la acción de una fuerza exterior, la corriente carga la pila como el generador carga la batería de un automóvil. Si la barra se va frenando por la acción de una fuerza externa dirigida hacia la izquierda, la corriente se ve impulsada a circular por la barra por acción de la batería o pila. Se producirá la corriente suficiente para equilibrar la fuerza opuesta aplicada y la barra se moverá con la velocidad de equilibrio que es menor que $V/B\ell$.

Un proyectista de motores se interesa en la predicción de cómo responderá un motor (modificando su velocidad) frente a la acción de una carga. En el caso de este motor lineal, la carga es una fuerza externa aplicada a la barra. La fuerza igual y opuesta que proporciona el motor a la velocidad de equilibrio es $F=IB\ell$. Puede ordenarse la ecuación 3 para mostrar que la velocidad es una función lineal de la corriente:

$$v = -\frac{R}{B\ell}I + \frac{V}{B\ell} \quad (4)$$

Sustituyendo la corriente por $F/B\ell$ se tiene

$$v = -\frac{R}{(B\ell)^2}F + \frac{V}{B\ell} \quad (5)$$

La ecuación 5 que relaciona la velocidad con la carga se denomina *característica de funcionamiento del motor*. La figura 3 muestra un gráfico de la velocidad en función de la fuerza. La línea 1 representa v en función de F para valores típicos de la tensión V de la batería o pila y del campo magnético B . La línea 2 muestra el efecto que se consigue al aumentar la tensión V . La línea 3 a su vez muestra el efecto que produce la disminución del campo magnético B . La línea 4 representa una carga típica (por ejemplo, de rozamiento) que aumenta proporcionalmente a la velocidad. Así pues, la velocidad de funcionamiento del motor indicado en la figura 1 puede controlarse modificando, o la tensión, o el campo magnético.

El motor lineal de la figura 1 no resulta práctico para la mayoría de las aplicaciones. En su lugar, es más apropiado un motor rotatorio. En la figura 4 se ve la mayor parte de las piezas de un motor eléctrico rotatorio sencillo. Aunque este motor parece ser muy diferente del lineal, el funcionamiento de ambos motores es semejante.

De la misma forma que el motor lineal, el motor ro-

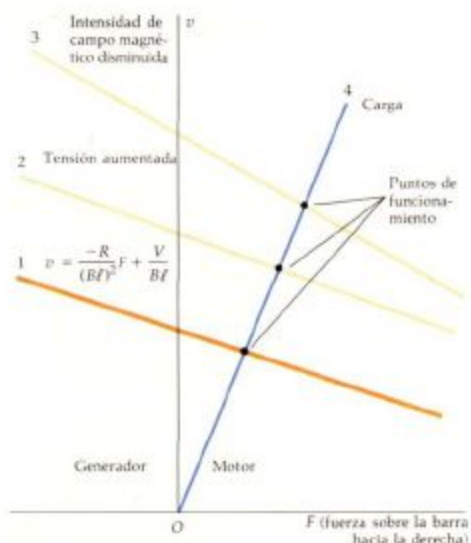


Figura 3 Gráfico de los diferentes valores de la característica de funcionamiento del motor lineal eléctrico de la figura 1 y una carga típica. La línea de carga indicada es típica en el caso de una carga de rozamiento.

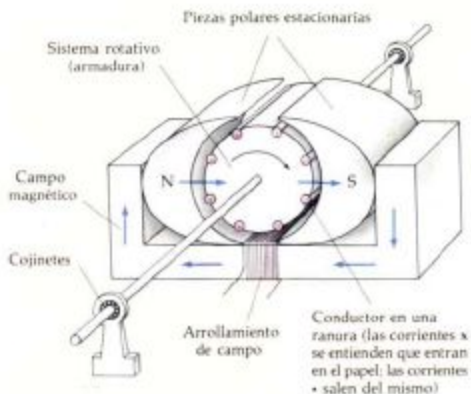


Figura 4 Motor eléctrico rotatorio simple.

tatorio tiene unos conductores por los que circula corriente que reacciona con un campo externo. El campo, denominado *campo del estator*, está creado y controlado por la bobina de conductor que se ve en la parte inferior de la figura 4. El flujo procedente de la bobina pasa a través del núcleo, creando un polo norte a la izquierda del elemento rotatorio y un polo sur a su derecha. El conjunto rotor está montado sobre dos cojinetes, uno en la parte delantera y el otro en la trasera del motor. Dicho conjunto, denominado *armadura*, está compuesto por un cilindro de hierro y ocho ranuras. Las ranuras contienen conductores que son semejantes a la barra del motor lineal. Si se hace circular la corriente a través de estos conductores en el sentido indicado (de adelante hacia atrás cerca del polo sur y en sentido contrario junto al polo norte), entonces se desarrollará un par de fuerzas neto en sentido horario que hará girar la armadura. El par que aparece en el motor rotatorio es análogo a la fuerza desarrollada en el motor lineal.

La construcción de un sistema que mantenga la dirección apropiada de la corriente en cada conductor de los que forman las espiras del rotor o armadura, es una tarea complicada. Estos dispositivos se denominan *montaje conmutador de escobillas*. En la figura 5 se indican las conexiones de dicho montaje correspondientes al motor de la figura 4. La figura 6 es una fotografía

de un conmutador de escobillas real utilizado en un motor de arranque de un automóvil. En la fotografía se ve una armadura con muchas ranuras y un conmutador con muchos segmentos. La figura 7 es una fotografía de un motor pequeño con sólo tres ranuras discretas, conteniendo cada una de ellas muchos arrollamientos y un conmutador con tres segmentos (de los que sólo dos son visibles).

El conmutador de escobillas indicado en la figura 5 se compone de cuatro segmentos que sobresalen a lo largo del eje del motor y de dos escobillas que conducen la corriente desde una fuente de alimentación a los segmentos. Cada segmento está conectado a dos conductores que se encuentran alojados dentro de las ranuras del rotor. Los conductores están conectados entre sí mediante conductores situados en la parte de atrás del rotor y a través de los segmentos del conmutador en la parte delantera del rotor. Este método de conexión da como resultado que hayan dos trayectos eléctricos en paralelo entre las escobillas; de este modo se están utilizando todos los conductores durante la totalidad del tiempo.

En el conmutador indicado en la figura 5, la corriente entra por la escobilla de la derecha. Luego sigue uno de los trayectos en paralelo a través de la armadura. Los conductores situados en las ranuras 2 y 5 llevan la corriente desde la parte delantera hacia la trasera de la armadura. Los conductores 2 y 5 están conectados a los conductores 7 y 8 mediante conexiones situadas en la parte trasera de la armadura. La corriente regresa hacia el frente a través de las ranuras 7 y 8 que se encuentran conectadas a las ranuras 3 y 4 mediante la conexión común que representan los segmentos del conmutador. La corriente vuelve de nuevo hacia la parte trasera a lo largo de las ranuras 3 y 4, volviendo una vez más adelante por las ranuras 1 y 6, de donde se extraen por las correspondientes escobillas situadas a la izquierda. Las escobillas son estacionarias y contactarán con diferentes segmentos del conmutador cuando la armadura haya girado 90 grados. Como la armadura posee unos arrollamientos simétricos, las ranuras situadas cada vez a la derecha harán circular siempre la corriente desde la parte delantera a la trasera del rotor, mientras que las situadas en la izquierda transportarán la corriente en sentido contrario, manteniendo así permanentemente el par en sentido horario.

El par total que hace girar el motor es la suma de los pares ejercidos por los conductores que hay en cada ranura. En cualquier posición existen cuatro conductores en la armadura que actúan en la parte derecha y otros cuatro en la izquierda; por consiguiente, el par es aproximadamente constante. Análogamente, la fem total desarrollada entre las escobillas es la suma de las fem engendradas en cada conductor. En todas las posiciones existen dos trayectos paralelos, compuesto cada uno de ellos por cuatro conductores. Según la sección 26-6, la fem desarrollada a lo largo de un solo elemento de conductor puede demostrarse que es

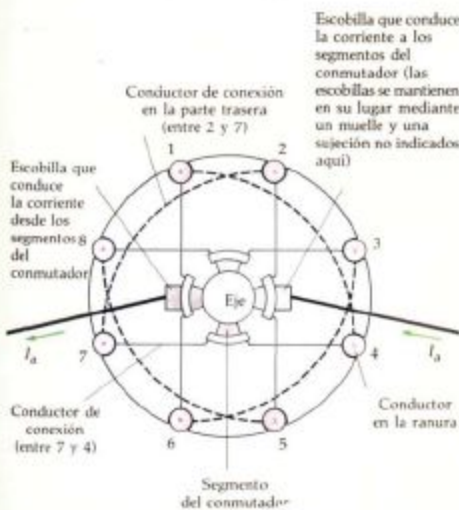


Figura 5 Sistema conmutador de escobillas para el motor de la figura 4. Un conmutador, en su significado más general, es un sistema de conexión y desconexión. El dispositivo indicado distribuye la corriente en la armadura de forma que mantenga la dirección adecuada en cada ranura para mantener el sentido del giro horario.

Continúa

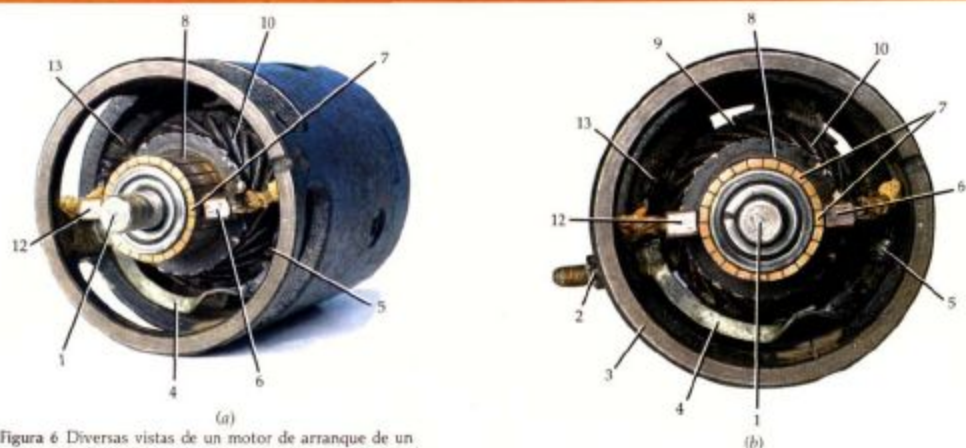


Figura 6 Diversas vistas de un motor de arranque de un automóvil. El eje (1) se soporta mediante cojinetes alojados normalmente en las tapas de la carcasa del motor (que han sido retiradas). La corriente procedente de la batería entra en el motor mediante un cable sujeto al borne (2) situado en la parte lateral del motor. El borne está aislado de la carcasa del motor (3) y se conecta a través de la carcasa a la bobina de campo por una cinta de metal (4) que pasa por debajo del eje (la longitud extra es para permitir la dilatación térmica). La cinta se bobina en la parte derecha para formar el arrollamiento correspondiente al polo derecho del estator (5). Luego se conecta esta cinta al conductor y a la escobilla de metal blando (6) de la derecha. La escobilla se mantiene presión normalmente contra el conmutador (7) mediante una mordaza con un muelle (que también ha sido retirado). La corriente se conduce a la armadura a través de uno de los 23 segmentos conmutadores (8). La armadura (figura 6d) tiene 23 ranuras (9) conteniendo cada una de ellas un par de conductores, lo que hace un total de 46 conductores (10) (uno de los conductores de cada par está próximo al eje y queda oculto mientras que el otro queda hacia el exterior y está visible). En este motor, el sistema giratorio es la armadura. Estos conductores están interconectados en la parte trasera del motor (11) formando dos trayectos paralelos, cada uno de ellos con una longitud equivalente a la suma de 23 conductores, entre las escobillas. La corriente se conduce desde un segmento del conmutador situado a la izquierda de la escobilla del mismo lado (12) y a la cinta de metal bobinada para formar la parte izquierda del polo del estator (13). La corriente se lleva a la «masa» del automóvil a través de una conexión resistente entre el arrollamiento del polo izquierdo del estator y la carcasa del motor. Esta conexión se encuentra en el interior y en el fondo del motor y no puede verse. El trayecto o camino que sigue el flujo magnético correspondiente al campo del estator va desde su parte derecha, a través de la armadura, hacia su parte izquierda y se completa con la carcasa del motor.



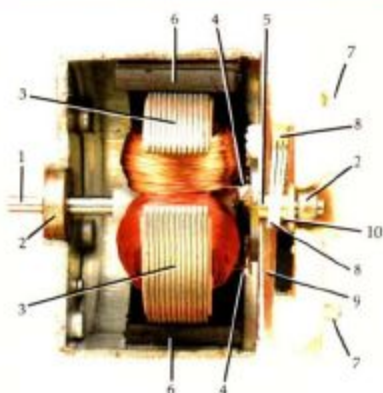


Figura 7 Motor pequeño ordinario en el que se ha cortado y retirado la mitad superior de su carcasa. El eje (1) está soportado por cojinetes (2) a la derecha y a la izquierda. La armadura está construida con 12 placas delgadas (3) de un material magnéticamente permeable, laminadas conjuntamente, formando tres ranuras y tres polos salientes. Las ranuras de esta armadura son muy grandes y contienen muchas vueltas de hilo. El conjunto de vueltas alrededor de un polo se denomina arrollamiento. Los arrollamientos están soldados juntos en sus extremos (4) y luego están conectados a los segmentos del conmutador (5). La armadura está rodeada por imanes permanentes negros (6) que crean un campo estacionario que ha de reaccionar con las corrientes y campos de la armadura. Una batería conectada a las conexiones exteriores (7) lleva la corriente a través de la escobilla superior en forma de peine (8) al segmento del conmutador de la parte superior, luego a través de los arrollamientos interconectados y finalmente de nuevo a la batería mediante el segmento conmutador de la parte inferior (9). Obsérvese cómo están separados los segmentos del conmutador (10). El funcionamiento de este motor puede considerarse de dos formas distintas. O bien la corriente que atraviesa los arrollamientos interacciona con el campo estacionario originando un par, o bien la corriente en los arrollamientos alrededor de las piezas salientes de la armadura forman polos que alternativamente repelen y atraen las piezas polares estacionarias. Un análisis cuidadoso demuestra que ambos enfoques son realmente exactamente iguales.

$$\mathcal{E} = B\ell r\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (6)$$

en donde ℓ es la longitud de la armadura (desde la parte delantera hasta la trasera) y r es el radio del rotor. La fem total en la armadura será el promedio de la desarrollada a través de los dos trayectos descritos anteriormente. Las ranuras están separadas entre sí sólo 45 grados, de forma que la variación de la fem total en la armadura cuando ésta gira será relativamente pequeña. Por consiguiente, puede descartarse de la ecuación 6 el término variable con el tiempo, sen $(\omega t + \delta)$, y la fem total puede expresarse como

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = BK\omega \quad (7)$$

siendo K la denominada constante del motor, en donde

se incluyen los valores de ℓ y de r y los resultados de sumar y promediar la fem total a través de la armadura. La validez de la ecuación 7 mejora si se añaden más ranuras y segmentos de conmutación a la armadura.

La Ecuación 7 es semejante a $\mathcal{E} = B\ell v$, sustituyendo ℓ por K y v por ω . La potencia cedida a la armadura es el producto de la fem por la corriente en la armadura I_a . En el caso de un motor rotativo, la carga es un par τ aplicado al eje y que se opone al sentido de la rotación. La potencia mecánica proporcionada a la carga es el producto del par por la velocidad angular. En el equilibrio, el par motor de este dispositivo es igual al par de la carga. Así pues,

$$P = \mathcal{E}I_a = \tau\omega \quad (8)$$

Sustituyendo ahora la fem por su valor $BK\omega$ tomado de la ecuación 7, se tiene

$$P = BK I_a \omega = \tau\omega \quad (9)$$

Aplicando la misma lógica utilizada para desarrollar el modelo del motor lineal, podemos representar la armadura por una simple fuente de tensión o voltaje con una resistencia exterior R_a . Las conexiones del arrollamiento de campo de la bobina indicada en la parte inferior de la figura 4 pueden conectarse en serie o en paralelo (shunt) con la armadura. Estos dos métodos de conexión dan origen a motores con características muy diferentes.

Conexión en paralelo o shunt

En la figura 8 se indica el circuito correspondiente a la conexión de campo en paralelo o shunt. Se incluye una resistencia variable, denominada reostato, para controlar el campo y, por consiguiente, controlar la velocidad del motor. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito se tiene

$$V - I_a R_a - BK\omega = 0 \quad (10)$$

que puede reordenarse para expresar la velocidad de rotación ω en función de la corriente en la armadura I_a :

$$\omega = -\frac{R_a}{BK} I_a + \frac{V}{BK} \quad (11)$$

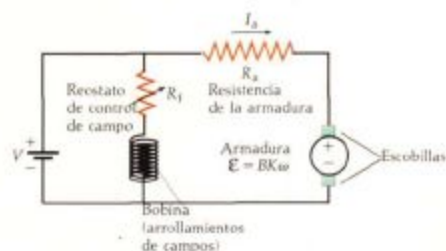


Figura 8 Circuito correspondiente a un motor shunt de cc típico.

Continúa

Si sustituimos la corriente por τ/BK según la ecuación 9, la velocidad de rotación resulta ser

$$\omega = -\frac{R_s}{(BK)^2} \tau + \frac{V}{BK} \quad (12)$$

La ecuación 12 es una ecuación lineal que relaciona la velocidad de rotación con la carga. Es análoga a la característica de funcionamiento del motor lineal. Puede controlarse la velocidad variando la tensión V , o, lo que es más corriente, variando la corriente en la bobina con el reostato.

Cuando la corriente en la armadura es elevada, su núcleo se satura, la caída de tensión debida a la inductancia de la armadura empieza a ser significativa y la relación entre el par y la velocidad deja de ser lineal. Sin embargo, cuando las cargas son normales, la ecuación 12 describe exactamente el funcionamiento del motor. La figura 9 muestra cómo afecta la saturación de la armadura a la característica de funcionamiento.

Conexión en serie

En el circuito del motor de la figura 10, la bobina se conecta en serie con la armadura, de forma que la intensidad del campo es función de la propia corriente de la

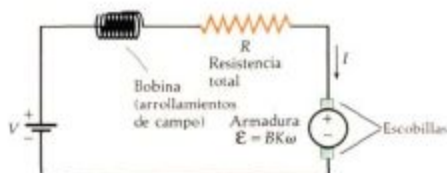


Figura 10 Circuito correspondiente a un motor serie de cc típico.

armadura. Si ésta es pequeña y el campo no se satura, puede expresarse el producto de la intensidad del campo por la constante del motor K como una función lineal de la corriente de la armadura:

$$BK = CI$$

en donde C es una cierta constante. Sustituyendo este valor de BK en las expresiones correspondientes a la fem de la armadura, a la potencia y al par, nos dan

$$E = CI\omega \quad P = CI^2\omega \quad \text{y} \quad \tau = CI^2$$

La regla de las mallas de Kirchhoff da entonces

$$V - IR - CI\omega = 0$$

en donde R representa la resistencia total de la bobina y la armadura e I representa la única corriente que circula por el circuito. Así se tiene la siguiente ecuación de la velocidad en función de la corriente:

$$\omega = \frac{V}{CI} - \frac{R}{C}$$

Sustituyendo I por $\sqrt{\tau/C}$, obtenemos la ecuación que nos da la velocidad en función del par, que es la característica de funcionamiento del motor serie:

$$\omega = \frac{V}{(C\tau)^{1/2}} - \frac{R}{C}$$

En la figura 11 puede verse la característica de funcionamiento del motor serie. Comparándolo con el del motor shunt se revelan notables diferencias. A pares pequeños, el motor serie gira muy de prisa, casi sin límite (la única carga es el rozamiento de los cojinetes y del aire que rodea al rotor) mientras que el motor shunt se regula para girar a una velocidad próxima a V/BK . Con pares elevados, la velocidad del motor shunt va disminuyendo hasta que el motor se detiene, mientras que el motor serie proporciona su mayor par cuando está parado. Por consiguiente, si se necesita poner en marcha un motor de automóvil la mejor elección es el

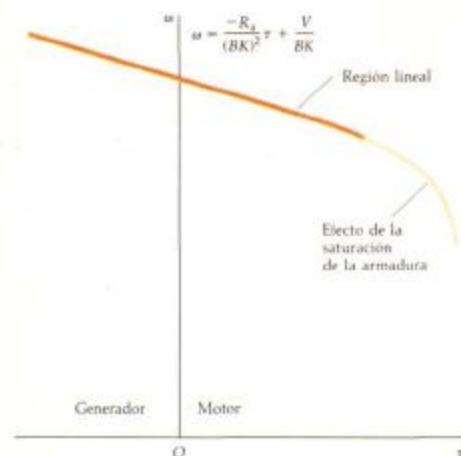


Figura 9 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la influencia de la saturación de la armadura sobre la característica de funcionamiento del motor shunt de cc típico.

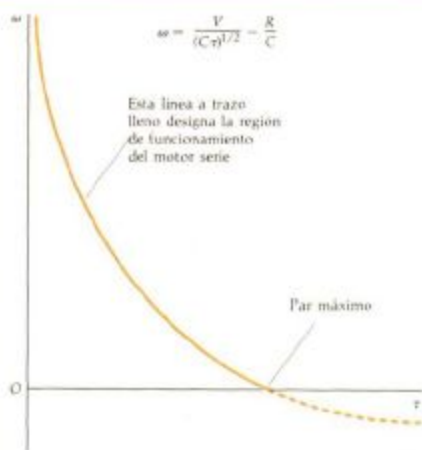


Figura 11 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la característica de funcionamiento del motor serie de cc típico.

motor serie, que proporciona el alto par requerido para el arranque cuando $\omega=0$. Por otra parte, para hacer funcionar una carga que deba ser muy sensible a la velocidad debe escogerse un motor shunt, como los que accionan los cassettes.

Los motores lineal, shunt y serie estudiados hasta aquí, funcionan todos ellos con corriente continua, mientras que las compañías suministradoras de energía eléctrica lo hacen en forma de corriente alterna. Con sólo modificaciones de menor importancia, se aplican los principios de construcción y funcionamiento de los motores de cc y también a los motores de ca.

El par de un motor serie es proporcional a I^2 y, por ello, es independiente del sentido de la corriente. Esto se debe a que es la misma corriente la que circula para crear el campo estacionario y por la armadura rotatoria. Con esta simple consideración, podría llegarse a la conclusión de que cualquier motor serie puede funcionar con corriente alterna. Sin embargo, una de las hipótesis que hicimos para simplificar el análisis del motor de cc es que podía despreciarse la inductancia, pero esto no es así cuando se acciona un motor con una fuente de ca. La inductancia produce dos efectos: (1) actúa como un estrangulamiento limitando la cantidad de corriente de ca para una tensión de entrada determinada y (2) varía las relaciones de fase entre la tensión y la corriente.

Un motor shunt de cc normalmente tiene unos arrollamientos de campo con una resistencia elevada y una armadura con una inductancia alta. Al aplicar una co-

rriente alterna a este tipo de motor se crearía una diferencia de fase entre las corrientes del campo y de la armadura que daría origen a un funcionamiento totalmente insatisfactorio.

Un motor serie, como el de arranque del motor de un coche de la figura 6, tiene un circuito magnético muy compacto con tolerancias muy pequeñas con objeto de poder desarrollar un par muy elevado con pequeñas dimensiones. Este sistema tiene una inductancia muy alta, lo que limita la corriente de ca que utiliza el motor. Un motor serie diseñado para funcionar con corriente alterna debe tener una inductancia relativamente pequeña, que se consigue limitando la cantidad de hierro utilizado en las piezas polares de la armadura. Este tipo de motor se denomina *motor universal*. Por su propia naturaleza resulta de poco peso y su empleo se ve limitado a sistemas que deban accionar cargas ligeras como las aspiradoras, las batidoras, los secadores de cabellos y las máquinas de coser. Sus características de funcionamiento son semejantes a las del motor de cc serie indicado en la figura 11. Examinando esta figura, ¿podría explicarse por qué el motor de una aspiradora se acelera cuando se bloquea el sistema de succión? (Indicación: La carga que debe mover el motor de la aspiradora es el aire que la atraviesa. Si el flujo disminuye, la carga también se reduce.)

El motor de ca más común es el motor de inducción. Este motor tiene un sistema rotatorio como el indicado en la figura 4, pero a diferencia del motor de cc, el conmutador y los hilos de interconexión se sustituyen por dos placas conductoras, que conectan todos los conductores contenidos en la ranura, una de ellas montada en la parte delantera y la otra en la trasera. Este tipo de montaje simplifica mucho la construcción del rotor. El problema aparece al pretender conseguir que gire un motor en cortocircuito. La solución consiste en hacer que el campo creado por el estator aparezca en rotación. Si el campo gira existirá una velocidad relativa entre el rotor y el campo del estator. Así se desarrolla una fem a través del rotor cortocircuitado, obligando a circular corriente por los conductores de las ranuras. El campo rotativo del estator produce un par sobre la corriente inducida en el rotor. Recuérdese que el motor lineal tendía a moverse hasta alcanzar la velocidad precisa para generar una fem que exactamente compensase la tensión de la fuente de alimentación. El motor de inducción responde del mismo modo, pero la tensión de la fuente al rotor es cero. Para mantener la fem próxima a cero, el rotor se mueve de forma que reduzca todo lo posible el movimiento relativo entre él mismo y el campo. Así pues, el rotor gira casi a la misma velocidad que la de rotación del campo del estator.

Existen muchos esquemas para crear la rotación aparente de un campo. La que se indica en la figura 12 se conoce como el *polo conformado*. El motor es idéntico al de la figura 4 con la excepción de que el rotor está cortocircuitado en sus dos caras o extremos mientras

Continúa

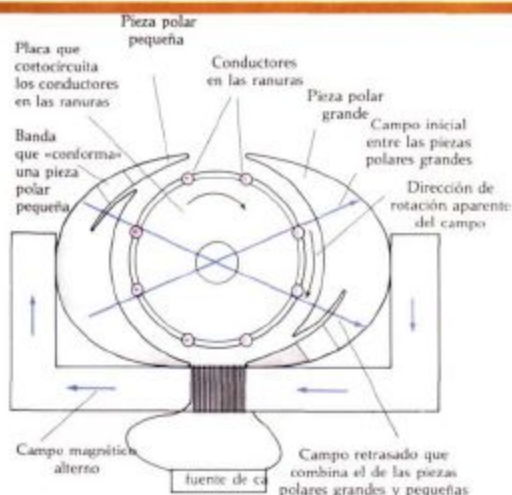


Figura 12 Motor de inducción con polos conformados.

que las piezas polares del estator poseen unos cortes, enrollándose una banda conductora alrededor de las partes más pequeñas que aparecen en los polos así cortados. Esta construcción permite que se establezca rápidamente el campo magnético entre las caras de las grandes piezas polares mientras que se retrasa entre las caras pequeñas debido a las inductancias de las bandas conductoras. El retraso de fase entre el campo que aparece entre las grandes caras polares y el campo existente entre las caras polares pequeñas, crea las características de un campo rotatorio.

En la figura 13 se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. El funcionamiento normal corresponde a una velocidad próxima a la velocidad de rotación del campo. Si el motor de la figura 12 estuviese conectado a una fuente de 60 Hz, la velocidad de rotación sería ligeramente inferior a las 60 rev/s.

Un rotor con conductores que envuelven un núcleo metálico y magnéticamente permeable reúne las características de una inductancia y una resistencia. El efecto de la inductancia dentro del rotor es proporcional a la frecuencia de las corrientes del rotor, que a su vez son proporcionales a la diferencia que existe entre la rotación del campo y la del rotor. Se presenta el par máximo indicado sobre la curva de característica de funcionamiento allí donde la diferencia entre la velocidad del rotor y la velocidad de rotación del campo sea lo suficientemente grande como para que los efectos de la inductancia del rotor hagan retrasar de modo significativo las corrientes del rotor. Las corrientes retrasadas del rotor no pueden interactuar con el campo del estator y así el motor deja de girar si se aumenta la carga.



Figura 13 Representación gráfica del par en función de la velocidad donde se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. La línea de carga indicada es típica de una bomba centrífuga.

Se utilizan los motores con polos conformados en aparatos con cargas ligeras como los ventiladores de refrigeración que se montan en los equipos eléctricos. Existen sistemas más complejos para crear la rotación del campo que se emplean en los motores de inducción para congeladores y acondicionadores de aire. Los grandes motores de inducción emplean electricidad trifásica para hacer girar el campo. Los principios y características fundamentales de funcionamiento son los mismos para todos los motores de inducción con independencia de su tamaño o del método que se utilice para crear la rotación del campo.

Sin que tenga importancia que utilicen corriente continua o alterna, todos los motores eléctricos se basan en los principios fundamentales estudiados en los capítulos 26 a 28 de este texto. En la actualidad existe una extraordinaria oportunidad para que los técnicos sepan combinar creativamente estos principios fundamentales con los avances experimentados en campos afines, como la superconductividad, y empiecen a proyectar los motores que cumplan los requisitos y necesidades que se van a necesitar en el siglo xx. Algunos de los problemas a resolver serán el desarrollo y mejora de los coches eléctricos, de los trenes y de los satélites artificiales, entre otros muchos que irán surgiendo.

Existen muchos libros de texto excelentes en ingeniería eléctrica dedicados al tema de las máquinas o motores. Dos de mis favoritos son *Electric Machines and Power Systems* por Vincent Deltoro (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985) y *Electromechanical Motion Devices* por Paul Krause y Oleg Wasynczuk (McGraw-Hill, New York, 1989).

Sugerencias bibliográficas

Coltman, John W.: «The Transformers», *Scientific American*, enero 1988, pág. 86.

Este artículo describe la controversia que tuvo lugar en el si-

glo XIX entre los partidarios de la corriente alterna y los de la corriente continua y cómo el transformador ayudó a resolver el problema. También se analizan algunos de los avances más recientes en la tecnología de los transformadores.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Poder definir la corriente eficaz y relacionarla con la corriente máxima en un circuito de ca.
2. Poder definir la reactancia capacitiva, la reactancia inductiva y la impedancia.
3. Poder dar las relaciones de fase entre la corriente y la tensión aplicada a una resistencia, a una bobina y a un condensador.
4. Dibujar un diagrama de fasores para un circuito LCR serie y a partir de él relacionar el ángulo de fase δ con la reactancia capacitiva, la reactancia inductiva y la resistencia.
5. Poder definir el factor Q y estudiar su significado.
6. Poder establecer la condición de resonancia en un circuito LCR serie con un generador y representar gráficamente la potencia en función de la frecuencia tanto para un circuito con Q bajo como con Q alto.
7. Ser capaz de describir un transformador elevador o reductor.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Valores eficaces (ef)
 Reactancia inductiva
 Reactancia capacitiva
 Fasores
 Reactancia total
 Impedancia
 Frecuencia de resonancia
 Resonancia
 Factor de potencia
 Curvas de resonancia
 Anchura de resonancia

Factor Q
 Filtro pasa baja
 Transformador
 Primario
 Secundario
 Corriente magnetizante
 Transformador elevador
 Transformador reductor
 Resistencia de carga
 Rectificación
 Diodo
 Emisión termoiónica
 Corriente de placa
 Rizado
 Triodo
 Rejilla
 Amplificador

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La corriente alterna en una resistencia no disipa ninguna potencia porque la corriente es negativa y positiva con la misma frecuencia.
2. A frecuencias muy altas, un condensador actúa como un cortocircuito.
3. Un circuito LCR con un factor Q elevado tiene una curva de resonancia estrecha.
4. En la resonancia, la impedancia de un circuito LCR es igual a la resistencia R.
5. En la resonancia, la corriente y la tensión del generador están en fase.
6. Si un transformador aumenta la corriente, debe disminuir el voltaje.

Problemas

Nivel I

28-1 Corriente alterna en una resistencia

1. Una bombilla de 100 W se conecta a un enchufe de 120 V eficaces. Calcular (a) I_{ef} (b) $I_{\text{máx}}$ y (c) la potencia máxima.
2. Una resistencia de 3 Ω se coloca en serie con un generador de 12.0 V (máximo) de 60 Hz de frecuencia. (a) ¿Cuál es la frecuencia angular de la corriente? (b) Hallar $I_{\text{máx}}$ e I_{ef} . ¿Cuál

es (c) la potencia máxima debida a la resistencia, (d) la potencia mínima y (e) la potencia media?

3. Un secador eléctrico de una lavandería de 5.0 kW eficaces se conecta a 240 V eficaces. Calcular (a) I_{ef} y (b) $I_{\text{máx}}$. (c) Calcular las mismas magnitudes para una secadora de la misma potencia que funcionara a 120 V eficaces.
4. Un interruptor de un circuito debe saltar a 15 A eficaces con una tensión de 120 V eficaces. (a) ¿Cuál es el mayor valor de $I_{\text{máx}}$ que podrá soportar el interruptor? (b) ¿Qué potencia media podrá suministrar el circuito en cuestión?

28-2 Corriente alterna en bobinas y condensadores

5. ¿Cuál es la reactancia de una bobina de 1,0 mH a (a) 60 Hz, (b) 600 Hz y (c) 6 kHz?
6. Una bobina tiene una reactancia de 100 Ω a 80 Hz. (a) ¿Cuál es su inductancia? (c) ¿Cuál es su reactancia a 160 Hz?
7. ¿A qué frecuencia será la reactancia de un condensador de 10,0 μF igual a la de una bobina de 1,0 mH?
8. Hacer un gráfico que muestre X_L en función de f para $L=3$ mH.
9. ¿Cuál es la reactancia de un condensador de 1,0 nF a (a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz?
10. Hallar la reactancia de un condensador de 10,0 μF a (a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz.
11. Hacer un esquema gráfico de X_C en función de la frecuencia f para $C=100$ μF .
12. Una fem de 10,0 V de valor máximo y una frecuencia de 20 Hz se aplica a un condensador de 20 μF . Calcular (a) $I_{\text{máx}}$ y (b) I_L .
13. ¿A qué frecuencia es la reactancia de un condensador de 10 μF (a) 1 Ω , (b) 100 Ω y (c) 0,01 Ω ?

28-3 Fasores

14. Dibujar el diagrama de fasores resultante para un circuito LCR serie cuando $V_L < V_C$. Demostrar con dicho diagrama que la fem retrasará respecto a la corriente en un ángulo de fase δ dado por

$$\tan \delta = \frac{V_C - V_L}{V_R}$$

28-4 Circuitos LC y LCR sin generador

15. Demostrar partiendo de las definiciones del henrio y el faradio que $1/\sqrt{LC}$ tiene unidades de s^{-1} .
16. ¿Cuál es el período de oscilación de un circuito LC compuesto por una bobina de 2 mH y un condensador de 20 μF ?
17. ¿Qué inductancia se necesita junto a un condensador de 80 μF para construir un circuito LC que oscile con una frecuencia de 60 Hz?
18. Un circuito LC tiene una capacidad C_1 y una bobina de inductancia L_1 . Un segundo circuito tiene $C_2 = \frac{1}{2}C_1$ y $L_2 = 2L_1$, y un tercer circuito tiene $C_3 = 2C_1$ y $L_3 = \frac{1}{2}L_1$. (a) Demostrar que los tres circuitos oscilan con la misma frecuencia. (b) ¿En qué circuito será más elevada la corriente máxima si la capacidad correspondiente se carga siempre al mismo potencial V ?
19. Se carga a 30 V un condensador de 5 μF y luego se conecta a una bobina de 10 mH. (a) ¿Cuánta energía se almacena en el circuito? (b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del circuito? (c) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?

28-5 Circuitos LCR con un generador

20. Un circuito serie LCR con $L=10$ mH, $C=2$ μF y $R=5$ Ω está conectado a un generador de 100 V de fem máxima y con una frecuencia angular variable ω . Hallar (a) la frecuencia de resonancia ω_0 y (b) el valor de I_0 en la resonancia. Cuando $\omega=8000$ rad/s, hallar (c) X_C y X_L , (d) Z e I_0 y (e) el ángulo de fase δ .
21. En el circuito del problema 20, supongamos que la frecuencia del generador es $f=\omega/2\pi=1$ kHz. Hallar (a) la frecuencia de resonancia $f_0=\omega_0/2\pi$, (b) X_C y X_L , (c) la impedancia total Z e I_0 y (d) el ángulo de fase δ .

22. Un circuito LCR serie de un receptor de radio se sintoniza mediante un condensador variable de modo que pueda resonar a frecuencias comprendidas entre 500 y 1600 kHz. Si $L=1,0$ μH , hallar el intervalo de valores de la capacidad necesarios para cubrir el margen de frecuencias señalado.

23. Las estaciones de radio de FM tienen frecuencias de ondas portadoras que se encuentran separadas por 0,20 MHz. Cuando la radio se sintoniza a una estación, tal como 100,1 MHz, la anchura de resonancia del circuito receptor deberá ser mucho menor que 0,2 MHz de forma que no se reciban las estaciones adyacentes. Si $f_0=100,1$ MHz y $\Delta f=0,05$ MHz, ¿cuál es el factor Q de este circuito?

24. (a) Hallar el factor de potencia del circuito de ejemplo 28-5 cuando $\omega=400$ rad/s. (b) ¿A qué frecuencia angular vale dicho factor 0,5?

25. Hallar (a) el factor Q y (b) la anchura de resonancia correspondiente al circuito del problema 20. (c) ¿Cuál es el factor de potencia cuando $\omega=8000$ rad/s?

26. Un generador de ca con una fem máxima de 20 V se conecta en serie con un condensador de 20 μF y una resistencia de 80 Ω . No hay ninguna inductancia en el circuito. Hallar (a) el factor de potencia, (b) la corriente eficaz y (c) la potencia media si la frecuencia angular del generador es 400 rad/s.

27. Una bobina puede considerarse como una resistencia y una inductancia en serie. Suponer que $R=100$ Ω y $L=0,4$ H. La bobina se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. Hallar el factor de potencia, (b) la corriente eficaz y (c) la potencia media suministrada.

28. Encontrar el factor de potencia y el ángulo de fase δ para el circuito del problema 20 cuando la frecuencia del generador es (a) 900 Hz, (b) 1,1 kHz, y (c) 1,3 kHz.

28-6 Transformadores

29. Un transformador tiene 400 vueltas en el primario y 8 en el secundario. (a) ¿Es un transformador elevador o reductor? (b) Si se conecta el primario a una tensión de 120 V eficaces, ¿cuál es la tensión en el secundario? (c) Si la corriente del primario es 0,1 A, ¿cuál es la corriente del secundario admitiendo que existe una corriente imantadora despreciable y que no hay ninguna pérdida de potencia?

30. El primario de un transformador reductor tiene 250 vueltas y está conectado a 120 V eficaces. El secundario suministra 20 A a 9 V. Calcular (a) la corriente en el primario y (b) el número de vueltas que posee el secundario, suponiendo un rendimiento del 100 por ciento.

31. Un transformador tiene un primario de 500 vueltas, que está conectado a 120 V eficaces. Su bobina secundaria posee tres conexiones diferentes para dar tres salidas de 2,5; 7,5 y 9 V. ¿Cuántas vueltas son necesarias para cada una de las partes de la bobina secundaria?

32. El circuito de distribución de una línea de potencia para una urbanización residencial funciona a 2000 V eficaces. Esta tensión debe reducirse a 240 V para su empleo en las viviendas. Si el arrollamiento secundario del transformador tiene 400 vueltas, ¿cuántas vueltas poseerá el primario?

28-7 Rectificación y amplificación

33. La corriente máxima de salida de un circuito rectificador de media onda es 3,5 A. (a) Hallar la corriente eficaz. (b) Hallar la corriente eficaz si el circuito es rectificador de onda completa con la misma corriente máxima.

34. Dibujar un gráfico de la corriente en función del tiempo si se incluye un filtro pasa baja como el de la figura 28-30a antes de la resistencia de carga de la figura 28-27.

Nivel II

35. En la figura 28-33 se indica la tensión V en función del tiempo t correspondiente a una «onda cuadrada». Si $V_0 = 12$ V. (a) ¿Cuál es la tensión eficaz de esta onda? (b) Si se rectifica esta onda alternativa de modo que sólo permanezcan las tensiones positivas, ¿cuál será ahora la tensión eficaz de la onda rectificada?

Figura 28-33 Problema 35.



36. Una corriente pulsante tiene un valor constante de 15 A durante los primeros 0,1 s de cada segundo y luego 0 durante los 0,9 s de cada segundo. (a) ¿Cuál es el valor eficaz de esta onda? (b) Cada pulso de corriente se genera mediante un pulso de 100 V. ¿Cuál es la potencia media que proporciona el generador de pulsos?

37. Se aplica una tensión de 100 V eficaces a un circuito RC serie. La tensión en placas del condensador es 80 V. ¿Cuál es la tensión eficaz aplicada a la resistencia?

38. Demostrar que la fórmula $P_m = I_{\text{ef}}^2 R / Z^2$ da el resultado correcto para un circuito que contenga un generador y sólo (a) una resistencia, (b) un condensador y (c) una bobina.

39. Hacer una gráfica de la impedancia Z en función de ω para (a) un circuito LR serie, (b) un circuito RC serie y (c) un circuito LCR serie.

40. La carga sobre el condensador de un circuito serie LC viene dada por $Q = (15\mu\text{C}) \cos(1250t + \pi/4)$ estando t en segundos. (a) Hallar la corriente en función del tiempo. (b) Hallar C si $L = 28$ mH. (c) Escribir las expresiones correspondientes a la energía eléctrica U_e , la energía magnética U_m y la energía total U .

41. Se conectan en serie a una tensión de ca de 60 Hz una resistencia R y una bobina de 1,4 H. La tensión en la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V. (a) ¿Cuánto vale la resistencia R ? (b) ¿Cuál es la tensión de entrada de la ca?

42. Por una resistencia R circula una corriente $I = (5,0 \text{ A}) \sin 120\pi t + (7,0 \text{ A}) \sin 240\pi t$. (a) ¿Cuál es la corriente eficaz? (b) Si la resistencia R es de 12 Ω , ¿qué potencia se disipa en la resistencia? (c) ¿Cuál es la tensión eficaz que aparece en la resistencia?

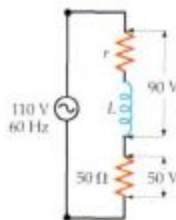
43. Una bobina tiene una resistencia en cc de 80 Ω y una impedancia de 200 Ω a una frecuencia de 1 kHz. Se puede despreciar la capacidad del arrollamiento de la bobina a esta frecuencia. ¿Cuál es la inductancia de la bobina?

44. Dos fuentes de tensión de ca se conectan en serie con una resistencia $R = 25 \Omega$. Una fuente viene dada por $V_1 =$

$(5,0 \text{ V}) \cos(\omega t - \alpha)$ y la otra por $V_2 = (5,0 \text{ V}) \cos(\omega t + \alpha)$, siendo $\alpha = \pi/6$. (a) Hallar la corriente que pasa por R utilizando la identidad trigonométrica correspondiente a la suma de dos cosenos. (b) Utilizar diagramas de fasores para hallar la corriente en R . (c) Hallar la corriente en R si $\alpha = \pi/4$ y la amplitud de V_2 se aumenta de 5,0 V a 7,0 V.

45. Dado el circuito de la figura 28-34, (a) hallar la pérdida de potencia en la bobina. (b) Hallar la resistencia r de la bobina. (c) Hallar la inductancia L .

Figura 28-34 Problema 45.



46. Una bobina de resistencia R , inductancia L y capacidad despreciable tiene un factor de potencia de 0,866 a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es el factor de potencia para una frecuencia de 240 Hz?

47. Por una bobina circula 15 A cuando se conecta a una línea de 220 V de ca y 60 Hz. Cuando se pone en serie con una resistencia de 4 Ω y se conecta la combinación a una batería de 100 V, se observa que la corriente que proporciona la batería al cabo de un tiempo largo es de 10 A. (a) ¿Cuál es la resistencia de la bobina? (b) ¿Cuál es la inductancia de la misma?

48. Se conecta una bobina a un generador de ca de 100 V y 60 Hz. A esta frecuencia la bobina tiene una impedancia de 10 Ω y una reactancia de 8 Ω . (a) ¿Cuál es la corriente en la bobina? (b) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? (c) ¿Qué capacidad en serie se requiere para que estén en fase la corriente y el voltaje? (d) ¿Cuál será entonces el voltaje medido en el condensador?

49. Se conecta en serie con un generador de ca de 60 Hz una bobina de 0,25 H y un condensador C . Se utiliza un voltímetro de ca para medir la tensión eficaz que aparece por separado en la bobina y en el condensador. La tensión eficaz que aparece en el condensador es 75 V y en la bobina 50 V. (a) Hallar la capacidad C y la corriente eficaz en el circuito. (b) ¿Cuál será la medida de la tensión eficaz medida en el conjunto condensador-bobina?

50. Demostrar que la ecuación 28-49 puede escribirse como

$$I_{\text{med}} = \frac{\omega \epsilon_{\text{max}}}{\sqrt{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2}}$$

51. (a) Demostrar que la ecuación 28-48 puede escribirse como

$$\tan \delta = L(\omega^2 - \omega_0^2) / \omega R$$

Hallar δ aproximadamente para (b) frecuencias muy bajas y (c) frecuencias muy altas.

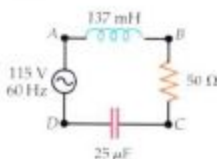
52. (a) Demostrar que en un circuito RC serie sin inductancia, el factor de potencia viene dado por

$$\cos \delta = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

(b) Hacer un gráfico que muestre el factor de potencia en función de ω .

53. En el circuito de la figura 28-35, el generador de ca produce una tensión eficaz de 115 V cuando funciona a 60 Hz. ¿Cuál es la tensión eficaz entre los puntos (a) AB, (b) BC, (c) CD, (d) AC y (e) BD?

Figura 28-35 Problema 53.



54. Un generador de ca y frecuencia variable se conecta a un circuito LCR serie con $R=1 \text{ k}\Omega$, $L=50 \text{ mH}$ y $C=2,5 \mu\text{F}$. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito? (b) ¿Cuál es el valor Q ? (c) ¿A qué frecuencias el valor de la potencia media suministrada por el generador es la mitad de su valor máximo?

55. Un circuito LCR serie se conecta a una fuente de 500 Hz. El ángulo de fase entre la tensión aplicada y la corriente se determina que vale $\delta=75^\circ$ mediante medida hecha con un osciloscopio. Si se sabe que la resistencia total es 35Ω y la inductancia vale $0,15 \text{ H}$, ¿cuál es la capacidad del circuito?

56. Un circuito LCR serie con $R=400 \Omega$, $L=0,35 \text{ H}$ y $C=5 \mu\text{F}$ se conecta a un generador de frecuencia f variable. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia f_0 ? Hallar f y f/f_0 cuando el ángulo de fase δ es (b) 60° y (c) -60° .

57. Un físico experimental desea diseñar un circuito LCR serie con un valor Q de 10 y una frecuencia de resonancia de 33 kHz . Posee una bobina de 45 mH y resistencia despreciable. ¿Qué valores podrá utilizar para la resistencia R y la capacidad C ?

58. La tensión del generador de la figura 28-36 viene dada por $V=(100 \text{ V}) \cos \omega t$. (a) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase respecto a la tensión aplicada? (b) ¿Cuál es la frecuencia angular ω a que se anula corriente del generador? (c) A esta resonancia, ¿cuál es la corriente en la bobina? ¿Cuál es la corriente en el condensador? (d) Dibujar un diagrama de fasores que muestre las relaciones generales entre la tensión aplicada, la corriente del generador, la corriente del condensador y la corriente en la bobina para el caso en que la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva.

Figura 28-36 Problema 58.



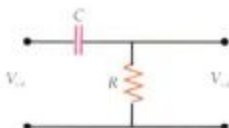
59. El circuito indicado en la figura 28-37 se denomina filtro pasa alta, porque las frecuencias de entrada elevadas se trans-

miten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas. (a) Si la tensión de entrada es $V_m = V_0 \cos \omega t$, demostrar que la tensión de salida vale

$$V_{\text{sal}} = \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2+1}}$$

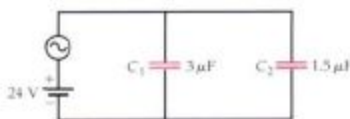
(b) A qué frecuencia angular la tensión de salida es la mitad que la de entrada? (c) Dibujar un gráfico de V_{sal}/V_0 en función de ω .

Figura 28-37 Problema 59.



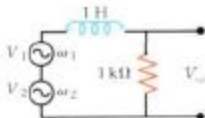
60. Un circuito se compone de dos condensadores, una batería de 24 V y una tensión de ca conectados como se indica en la figura 28-38. La tensión de ca viene dada por $(20 \text{ V}) \cos 120\pi t$ (t en segundos). (a) Hallar la carga en cada condensador en función del tiempo. Suponer que ha transcurrido un tiempo suficiente como para que los efectos transitorios hayan desaparecido prácticamente. (b) ¿Cuál es la corriente estacionaria? (c) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en los condensadores? (d) ¿Cuál es la energía mínima almacenada en los condensadores?

Figura 28-38 Problema 60.



61. Una línea de transmisión simple transporta dos señales de tensión dadas por $V_1=(10 \text{ V}) \cos 100t$ y $V_2=(10 \text{ V}) \cos 10\,000t$, estando t en segundos. Se incluyen en la línea una bobina en serie de 1 H y una resistencia en paralelo de $1 \text{ k}\Omega$, como se indica en la figura 28-39. (a) ¿Cuál es la señal de tensión observada en el terminal de salida de la línea de transmisión? (b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud de baja frecuencia y la amplitud de alta frecuencia?

Figura 28-39 Problema 61.



62. Una bobina con resistencia e inductancia se conectan a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces. La potencia media suministrada a la bobina es 60 W y la corriente eficaz es $1,5 \text{ A}$. Hallar (a) el factor de potencia, (b) la resistencia de la bobina

y (c) la inductancia de la bobina. (d) ¿Adelanta o retrasa la corriente a la tensión? ¿Cuál es el ángulo de fase δ ?

63. En un circuito LCR serie $X_C = 16 \Omega$ y $X_L = 4 \Omega$ a la misma frecuencia. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^3 \text{ rad/s}$. (a) Hallar L y C . Si $R = 5 \Omega$ y $\mathcal{E}_{\text{max}} = 26 \text{ V}$, hallar (b) el factor Q y (c) la corriente máxima.

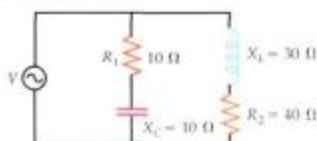
64. En un circuito LCR serie conectado a un generador de ca cuya fuerza electromotriz máxima es 200 V , la resistencia es 60Ω y la capacidad $8,0 \mu\text{F}$. La autoinducción puede variarse desde $8,0$ hasta $40,0 \text{ mH}$ mediante la inserción de un núcleo de hierro dentro del solenoide. La frecuencia angular es 2500 rad/s . Si la tensión del condensador no ha de superar los 150 V , hallar (a) la corriente máxima y (b) el margen de L que puede utilizarse con seguridad.

65. Cuando se conecta un circuito serie LCR a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces, la corriente es $I_{\text{ef}} = 11,0 \text{ A}$ y la corriente adelanta a la tensión en 45° . (a) Hallar la potencia suministrada al circuito. (b) ¿Cuál es la resistencia? (c) Si la inductancia es $L = 0,05 \text{ H}$, hallar la capacidad C . (d) ¿Qué capacidad o inductancia habría que añadir para conseguir que el factor de potencia fuera 1?

Nivel III

66. Consideremos el circuito en paralelo indicado en la figura 28-40. (a) ¿Cuál es la impedancia de cada rama? (b) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase relativa a la tensión aplicada? (c) Dar el diagrama de fasores de corriente y utilizarlo para hallar la corriente total y su fase relativa a la tensión aplicada.

Figura 28-40 Problema 66.



67. (a) Demostrar que la ecuación 28-48 puede escribirse

$$\text{tg } \delta = \frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0}$$

(b) Demostrar que cerca de la resonancia

$$\text{tg } \delta \approx \frac{2Q(\omega - \omega_0)}{\omega}$$

(c) Hacer un esquema de δ en función de x siendo $x = \omega/\omega_0$, para un circuito con un Q elevado y para otro con un Q bajo.

68. Demostrar por sustitución directa que la corriente dada por la ecuación 28-47 con I_{max} y δ dados por las ecuaciones 28-48 y 28-49 satisface a la ecuación 28-46. *Indicación:* Utilizar identidades trigonométricas para el seno y coseno de la suma de los ángulos y escribir la ecuación de la siguiente forma

$$A \text{ sen } \omega t + B \text{ cos } \omega t = 0$$

Puesto que esta ecuación debe ser válida en todo instante, $A = 0$ y $B = 0$.

69. Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz . (a) ¿Cuál es la impedancia del aparato? (b) ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato? (c) Si la corriente adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

70. Se conecta en serie un generador de ca con un condensador y una bobina en un circuito con resistencia despreciable. (a) Demostrar que la carga en el condensador obedece la ecuación

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{\text{max}} \text{ cos } \omega t$$

(b) Demostrar por sustitución directa que esta ecuación se satisface por $Q = Q_{\text{max}} \text{ cos } \omega t + \text{si}$

$$Q_{\text{max}} = - \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

(c) Demostrar que la corriente puede escribirse como $I = I_{\text{max}} \text{ cos } (\omega t - \delta)$, en donde

$$I_{\text{max}} = \frac{\omega \mathcal{E}_{\text{max}}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{|X_L - X_C|}$$

y $\delta = -90^\circ$ para $\omega < \omega_0$ y $\delta = 90^\circ$ para $\omega > \omega_0$.

71. Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad y una resistencia conocidas, un amperímetro de ca y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador de señales se varía y se mantiene constante la fem hasta que la corriente es máxima. (a) Si $C = 10 \mu\text{F}$, $\mathcal{E}_{\text{max}} = 10 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$ e I es máxima para $\omega = 5000 \text{ rad/s}$, ¿cuánto vale L ? (b) ¿Cuál es el valor de I_{max} ?

72. Una resistencia y una bobina están en paralelo aplicadas a una fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}} \text{ cos } \omega t$, como muestra la figura 28-41. Demostrar que (a) $I_R = (\mathcal{E}_{\text{max}}/R) \text{ cos } \omega t$, (b) $I_L = (\mathcal{E}_{\text{max}}/X_L) \text{ cos } (\omega t - 90^\circ)$ y (c) $I = I_R + I_L = I_{\text{max}} \text{ cos } (\omega t - \delta)$, siendo $\text{tg } \delta = R/X_L$ e $I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_L^{-2}$.

Figura 28-41 Problema 72.



73. Una resistencia y un condensador están conectados en paralelo sobre una fem sinusoidal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}} \text{ cos } \omega t$, como se ven en la figura 28-42. (a) Demostrar que la corriente en la resistencia es $I_R = (\mathcal{E}_{\text{max}}/R) \text{ cos } \omega t$. (b) Demostrar que la corriente en la rama del condensador es $I_C = (\mathcal{E}_{\text{max}}/X_C) \text{ cos } (\omega t + 90^\circ)$. (c) Demostrar que la corriente total viene dada por $I = I_R + I_C = I_{\text{max}} \text{ cos } (\omega t + \delta)$, en donde $\text{tg } \delta = R/X_C$ e $I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_C^{-2}$.

Figura 28-42 Problema 73.



74. En la figura 28-18 se muestra una representación de la potencia media P_m en función de f del generador para un circuito LCR con un generador. La potencia media P_m viene dada por la ecuación 28-55, en donde $\omega = 2\pi f$. La «anchura de resonancia entre los dos puntos en que P_m tiene un valor que es la mitad de su valor máximo» Δf es la anchura de la curva de resonancia entre los dos puntos en que P_m tiene un valor que es la mitad de su valor máximo. Demostrar que, en el caso de una resonancia muy aguda, $\Delta f \approx R/2\pi L = \Delta\omega/2\pi$ y, por tanto, que $Q \approx \omega_0/\Delta\omega \approx f_0/\Delta f$ en este caso (ecuación 28-58). *Indicación:* En la resonancia, el denominador del segundo miembro de la ecuación 28-55 es $\omega^2 R^2$. Los puntos a mitad de potencia se presentarán cuando el denominador sea aproximadamente el doble que posee cerca de la resonancia, esto es, cuando $L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega^2 R^2 \approx \omega_0^2 R^2$. Sean ω_1 y ω_2 las soluciones de esta ecuación. En el caso de una resonancia aguda, $\omega_1 \approx \omega_0$ y $\omega_2 \approx \omega_0$. Entonces, aprovechando el hecho de que $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, se tiene que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx R/L$.

75. Uno de los empleos de un transformador es el de ajuste de impedancias. Por ejemplo, la impedancia de salida de un amplificador estéreo se ajusta a la impedancia de un altavoz mediante un transformador. En la ecuación 28-65 pueden relacionarse las corrientes I_1 e I_2 con la impedancia del secundario ya que $I_2 = V_2/Z$. Utilizando las ecuaciones 28-63 y 28-64, demostrar que

$$I_1 = \frac{I_2}{(N_1/N_2)^2 Z}$$

y, por consiguiente, $Z_m = (N_1/N_2)^2 Z$.

76. Demostrar por sustitución directa que se satisface la ecuación 28-44b por

$$Q = Q_0 e^{-Rt/2L} \cos(\omega't)$$

en donde

$$\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$$

y Q_0 es la carga sobre el condensador cuando $t=0$.

77. (a) Calcular la corriente $i = dQ/dt$ a partir de la solución de la ecuación 28-44b dada en el problema 76, y demostrar que

$$i = -I_0 \left(\sin \omega't + \frac{R}{2L\omega'} \cos \omega't \right) e^{-Rt/2L}$$

en donde $I_0 = \omega' Q_0$. (b) Demostrar que esta expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned} i &= -\frac{I_0}{\cos \delta} (\cos \delta \sin \omega't + \sin \delta \cos \omega't) e^{-Rt/2L} \\ &= -\frac{I_0}{\cos \delta} \sin(\omega't + \delta) e^{-Rt/2L} \end{aligned}$$

en donde $\tan \delta = R/2L\omega'$. Cuando $R/2L\omega'$ es pequeña, $\cos \delta \approx 1$ y

$$i = I_0 \sin(\omega't + \delta) e^{-Rt/2L}$$

Capítulo 29

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas



Fotografía con exposición múltiple en donde se ve el seguimiento de la antena situada en la Wallops Station, Virginia (Estados Unidos) y un eclipse total de Sol. La radiación electromagnética con longitudes de onda de radio, al igual que las visibles, no es absorbida fácilmente por la atmósfera terrestre—haciendo que sea un medio de comunicación viable entre dos puntos distantes sobre el suelo o entre un punto situado en el suelo y otro en un avión, un satélite o una nave espacial. La posición de los objetos puede detectarse enviando un haz de radar continuo y recibiendo el haz reflejado.

Alrededor de 1860, el gran físico escocés James Clerk Maxwell dedujo que las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo —las leyes de Coulomb, Gauss, Biot y Savart, Ampère, y Faraday, que hemos estudiado en los capítulos 18 al 28— podían resumirse de una forma matemáticamente concisa conocida como ecuaciones de Maxwell. En una de aquellas leyes, la ley de Ampère, aparecía una clara inconsistencia que Maxwell fue capaz de eliminar con la invención de la corriente de desplazamiento (sección 29-1). El nuevo conjunto de ecuaciones, ya totalmente consistente, predice la posibilidad de las ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético \mathbf{E} y \mathbf{B} con sus fuentes, que son las cargas eléctricas, las corrientes y los campos variables. Estas ecuaciones juegan en el electromagnetismo clásico un papel análogo al de las leyes de Newton en la mecánica clásica. En principio, pueden resolverse todos los problemas de la electricidad y el magnetismo clásicos mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell, de la misma forma que pueden resolverse todos los problemas de la mecánica clásica utilizando las leyes de Newton. Sin embargo, las leyes de Maxwell son considerablemente más complicadas que las de Newton y su aplicación a la mayoría de los problemas exige unos conocimientos matemáticos superiores que escapan de este libro. A pesar de todo, las ecuaciones de Maxwell son de gran importancia teórica.

Maxwell demostró que estas ecuaciones podían combinarse para originar una ecuación de onda que debían satisfacer los vectores de campo eléctrico y magnético, \mathbf{E} y \mathbf{B} . Estas ondas electromagnéticas están originadas por cargas eléctricas aceleradas, por ejemplo, las cargas eléctricas alternantes presentes en una antena. Estas ondas fueron producidas por primera vez en el laboratorio por Heinrich Hertz en 1887. Maxwell mostró que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el espacio vacío debía ser

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad 29-1$$

en donde ϵ_0 , la permitividad del espacio libre, es la constante que aparece en las leyes de Coulomb y de Gauss, mientras que μ_0 , la permeabilidad del espacio libre, es la incluida en las leyes de Biot y Savart y de Ampère. Cuando se introducen en la ecuación 29-1 el valor medido de ϵ_0 y el valor definido de μ_0 , resulta que la velocidad de las ondas electromagnéticas vale aproximadamente 3×10^8 m/s, igual que la velocidad medida de la luz. Maxwell se dio cuenta de esta «coincidencia» con gran entusiasmo y supuso correctamente que la propia luz es una onda electromagnética.

En este capítulo empezaremos demostrando que la ley de Ampère, tal y como se estableció en el capítulo 25, no resulta válida para corrientes discontinuas. Veremos entonces cómo Maxwell generalizó la ley de Ampère añadiendo un término ahora conocido como corriente de desplazamiento de Maxwell. Después de establecer las ecuaciones de Maxwell y relacionarlas con las leyes de la electricidad y del magnetismo que ya hemos estudiado, demostraremos que estas ecuaciones implican que los vectores del campo eléctrico y magnético obedecen una ecuación de onda que describe unas ondas que se propagan a través del espacio libre con una velocidad $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Finalmente, ilustraremos la forma en que las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento y analizaremos el espectro electromagnético.

29-1 Corriente de desplazamiento de Maxwell

Como estudiamos en el capítulo 25, la ley de Ampère (ecuación 25-15) relaciona la integral de línea o circulación del campo magnético a lo largo de cierta curva cerrada C con la corriente que atraviesa un área cualquiera limitada por dicha curva:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I \quad \text{para cualquier curva cerrada } C \quad 29-2$$

Señalábamos entonces que esta ecuación es sólo válida para corrientes continuas. Puede verse que, en efecto, no es válida para corrientes discontinuas considerando la carga de un condensador (figura 29-1). De acuerdo con la ley de Am-

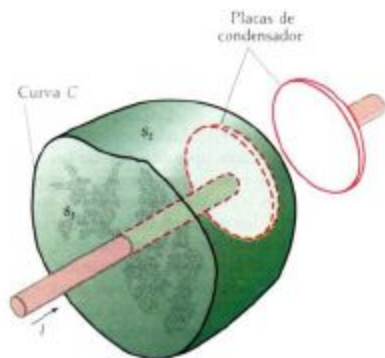


Figura 29-1 Dos superficies S_1 y S_2 limitadas por la misma curva C . La corriente I atraviesa la superficie S_1 , pero no la S_2 . La ley de Ampère, que relaciona la circulación del campo magnético \mathbf{B} a lo largo de la curva C con la corriente total que pasa a través de una superficie cualquiera limitada por C , no es válida cuando la corriente no es continua, como sucede al interrumpirse en la placa del condensador indicada aquí.

père, la circulación del campo magnético \mathbf{B} a lo largo de una curva cerrada es igual a μ_0 multiplicada por la corriente total que atraviesa cualquier superficie limitada por dicha curva. Esta superficie no es preciso que sea plana. En la figura 29-1 se indican dos superficies limitadas por la curva C . La corriente que atraviesa la superficie S_1 es I . No hay ninguna corriente que atraviese la superficie S_2 porque las cargas se detienen en la placa del condensador. Así pues, existe una cierta ambigüedad en la frase «la corriente que atraviesa un área cualquiera limitada por dicha curva». En el caso de corrientes continuas, nos encontramos siempre con la misma corriente sin que importe la superficie que escojamos.

Maxwell se dio cuenta de este fallo de la ley de Ampère y demostró que esta ley puede generalizarse para incluir todos los casos si se sustituye la corriente I en la ecuación por la suma de la corriente de conducción I más otro término I_d , denominado **corriente de desplazamiento de Maxwell**, definida como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 29-3$$

en donde ϕ_e es el flujo del campo eléctrico a través de la misma superficie limitada por la curva C . Entonces la forma generalizada de la ley de Ampère es

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 29-4$$

Podemos comprender esta generalización considerando de nuevo la figura 29-1. Denominemos corriente generalizada a la suma $I + I_d$. De acuerdo con el argumento que acabamos de dar, debe cruzar la misma corriente generalizada cualquier superficie limitada por la curva C . Por consiguiente, no puede existir ninguna corriente generalizada neta que entre o salga del volumen cerrado de la figura. Si existe una corriente verdadera neta I que entre en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento neto I_d igual que salga del mismo volumen. En dicho volumen, existe una corriente de conducción neta I que entra en el mismo aumentando la carga dentro de él:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El flujo del campo eléctrico que sale del volumen está relacionado con la carga mediante la ley de Gauss

$$\phi_{e,\text{neto}} = \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{encerrado}}$$

La velocidad o ritmo de aumento de la carga es así proporcional a la velocidad de aumento del flujo neto que sale del volumen:

$$\epsilon_0 \frac{d\phi_{e,\text{neto}}}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I_d$$

Por tanto, la corriente de conducción neta que entra en el volumen es igual a la corriente de desplazamiento neta que sale del volumen. La corriente de desplazamiento es siempre continua.

Es interesante comparar la ecuación 29-4 con la ley de Faraday (ecuación 26-6)

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad 29-5$$

en donde \mathcal{E} es la fem inducida en un circuito y ϕ_m es el flujo magnético a través del circuito. De acuerdo con la ley de Faraday, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico cuya integral de línea o circulación a lo largo de una curva, es proporcional a la velocidad o ritmo de variación del flujo magnético a través de la curva. La modificación de Maxwell de la ley de Ampère demuestra que un flujo eléctrico variable produce un campo magnético cuya circulación a lo largo de una curva es proporcional a la velocidad de variación del flujo eléctrico. Así pues, tenemos el interesante resultado recíproco de que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (ley de Faraday) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético (forma generalizada de la ley de Ampère). Obsérvese que no existe ningún análogo magnético de una corriente de conducción I .

Ejemplo 29-1

Un condensador de placas paralelas está formado por placas circulares muy cercanas de radio R . En la placa positiva está entrando carga, mientras que está saliendo de la placa negativa a un ritmo $I = dQ/dt = 2,5$ A. Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas.

Como las placas están muy próximas, el campo eléctrico entre ellas es uniforme en la dirección de la placa positiva a la negativa con un valor $E = \sigma / \epsilon_0$, siendo σ el valor de la carga por unidad de área en cualquiera de las placas. Consideremos un plano situado entre las placas y paralelo a ellas. Como E es perpendicular a las placas y, por tanto, al plano, y es uniforme entre ellas y cero fuera de las mismas, el flujo eléctrico a través del plano es

$$\phi_e = \pi R^2 E = (\pi R^2)(\sigma/\epsilon_0) = Q/\epsilon_0$$

en donde $Q = \pi R^2 \sigma$ es el valor de la carga total sobre cualquiera de las placas. La corriente de desplazamiento vale entonces

$$I_d = \epsilon_0 d\phi_e/dt = dQ/dt = 2,5$$
 A

Ejemplo 29-2

Las placas circulares del ejemplo 29-1 tienen un radio de $R = 3,0$ cm. Hallar el campo magnético en un punto entre las placas a una distancia $r = 2,0$ cm del eje de las mismas cuando la corriente que está entrando en la placa positiva vale 2,5 A.

Calculemos B a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère (ecuación 29-4). En la figura 29-2 hemos escogido un trayecto circular de radio $r = 2,0$ cm alrededor de la línea que une los centros de las placas para el cálculo de $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$. Por simetría, \mathbf{B} es tangente a esta circunferencia y tiene el mismo valor en todos los puntos de la misma. Entonces,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi r)$$

El flujo eléctrico que atraviesa la superficie limitada por esta curva es

$$\begin{aligned} \phi_e &= \pi r^2 E = (\pi r^2) \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ &= (\pi r^2) \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{r^2 Q}{R^2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado que $\sigma = Q/\pi R^2$. Como no existe ninguna corriente de conducción entre las placas del condensador, la corriente generalizada es precisamente la corriente de desplazamiento

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} \frac{dQ}{dt} = (2 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{0,02 \text{ m}}{(0,03 \text{ m})^2} (2,5 \text{ A}) = 1,11 \times 10^{-5} \text{ T}$$

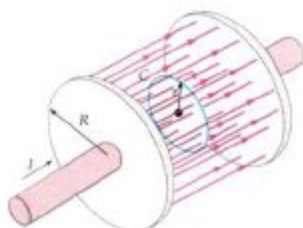


Figura 29-2 Curva C para calcular la corriente de desplazamiento en el ejemplo 29-2.

29-2 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}} \quad 29-6a$$

$$\oint_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad 29-6b$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A} \quad 29-6c$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A} \quad 29-6d$$

Ecuaciones de Maxwell

La ecuación 29-6a es la ley de Gauss; establece que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ la carga neta encerrada dentro de la misma. Como vimos en el capítulo 19, la ley de Gauss implica que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en razón inversa al cuadrado de la distancia de la carga. Esta ley describe cómo divergen las líneas de campo eléctrico de una carga positiva y convergen sobre una carga negativa. Su base experimental la constituye la ley de Coulomb.

La ecuación 29-6b, a veces denominada la ley de Gauss del magnetismo, establece que el flujo del vector de campo magnético \mathbf{B} es cero a través de cualquier superficie cerrada. Esta ecuación describe la observación experimental de que las líneas de campo magnético no divergen de ningún punto del espacio ni convergen sobre ningún otro punto; es decir, esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

La ecuación 29-6c es la ley de Faraday; afirma que la integral del campo eléctrico a lo largo de cualquier curva cerrada C (la circulación), que es la fem, es igual a la variación por unidad de tiempo (con signo negativo) del flujo magnético que atraviesa cualquier superficie S limitada por la curva. (Esta superficie no es cerrada, de manera que el flujo magnético a través de S no tiene que ser necesariamente cero.) La ley de Faraday describe cómo rodean las líneas de campo eléctrico cualquier superficie a través de la cual existe un flujo magnético variable y relaciona el vector de campo eléctrico \mathbf{E} a la variación respecto al tiempo del vector de campo magnético \mathbf{B} .

La ecuación 29-6d, que es la ley de Ampère con la modificación de Maxwell de la corriente de desplazamiento, establece que la integral de línea o circulación del campo magnético \mathbf{B} a lo largo de cualquier curva cerrada C es igual a μ_0 multiplicado por la corriente que atraviesa cualquier superficie limitada por la citada curva más el producto de $\mu_0 \epsilon_0$ por la variación respecto al tiempo del flujo eléctrico que atraviesa la superficie. Esta ley describe cómo rodean las líneas de campo magnético a una superficie a través de la cual está pasando una corriente o bien existe un flujo eléctrico variable.

29-3 Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas (Opcional)

En la sección 13-8 veíamos que las funciones de onda armónicas correspondientes a las ondas en una cuerda obedecen a una ecuación en derivadas parciales denominada **ecuación de onda**:

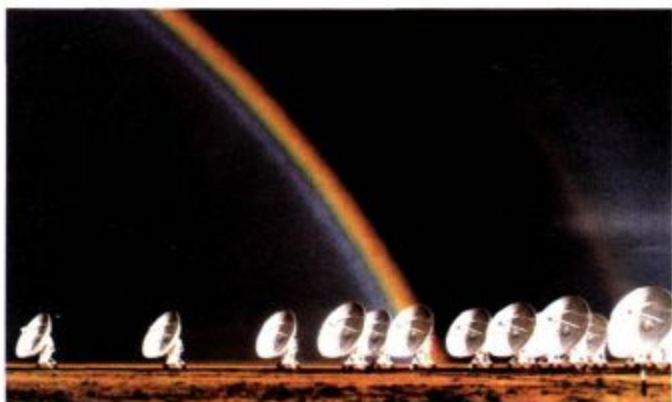
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad 29-7$$

En esta ecuación, $y(x, t)$ es la función de onda, que en el caso de las ondas en una cuerda corresponde al desplazamiento de la cuerda. Las derivadas son parciales porque la función de onda depende tanto de x como de t . La magnitud v es la velocidad de la onda, que depende del medio y de la frecuencia si el medio es dispersivo. En dicha sección vimos que la ecuación de onda, en el caso de ondas en una cuerda, puede deducirse aplicando las leyes de Newton del movimiento a una cuerda sometida a tensión y así resultaba que la velocidad de la onda es $\sqrt{F/\mu}$, siendo F la tensión y μ la densidad másica lineal. Las soluciones de esta ecuación eran funciones de onda armónicas de la forma

$$y(x, t) = y_0 \text{ sen}(kx - \omega t)$$

en donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular.

Arco iris doble sobre el radiotelescopio en Socorro, Nuevo México (Estados Unidos). El telescopio está constituido por una distribución muy grande de discos de antena. Puede determinarse la dirección de las ondas de radio procedentes de galaxias lejanas mediante la interferencia de las señales detectadas en toda la distribución de antenas.



En esta sección utilizaremos las ecuaciones de Maxwell para deducir la ecuación de onda de las ondas electromagnéticas. No consideraremos cómo se originan estas ondas a partir del movimiento de cargas sino simplemente demostraremos que las leyes de la electricidad y del magnetismo implican la existencia de una ecuación de onda que a su vez implica la existencia de campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} que se propagan por el espacio libre en el que no existen ni cargas ni corrientes con la velocidad de la luz c . Supondremos también que los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} son funciones del tiempo y una sola coordenada espacial, que tomaremos como coordenada x . Esta onda se denomina **onda plana**, porque las magnitudes del campo son constantes sobre cualquier plano perpendicular al eje x .

Para obtener la ecuación de onda que relaciona las derivadas respecto al tiempo y el espacio tanto del campo eléctrico \mathbf{E} como del campo magnético \mathbf{B} , relacionamos en primer lugar la derivada respecto al tiempo de uno de los vectores campo con la derivada respecto al espacio del otro. Hacemos esto aplicando las dos ecuaciones de Maxwell 29-6c y 29-6d a curvas del espacio adecuadamente elegidas. Primero relacionaremos la derivada espacial de E_y con la dependencia respecto al tiempo de B_z aplicando la ecuación 29-6c (que es la ley de Faraday) a la curva rectangular de lados Δx y Δy que se encuentra contenida en el plano xy , como se muestra en la figura 29-3. Suponiendo que Δx y Δy son muy pequeños, la integral curvilínea de \mathbf{E} a lo largo de esta curva vale aproximadamente

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E_y(x_2) \Delta y - E_y(x_1) \Delta y$$

En donde $E_y(x_1)$ y $E_y(x_2)$ son los valores de E_y en los puntos x_1 y x_2 , respectivamente. Las contribuciones del tipo $E_x \Delta x$ de los lados superior e inferior se anulan entre sí puesto que hemos supuesto que \mathbf{E} no depende de y (ni de z). Supo-

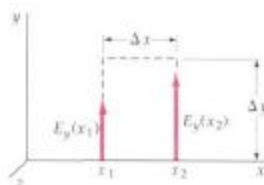


Figura 29-3 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano xy para la deducción de la ecuación 29-8.

niendo que Δx es muy pequeño, podemos sustituir la diferencia de E_x en los puntos x_1 y x_2 aproximadamente por

$$E_x(x_2) - E_x(x_1) = \Delta E = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x$$

Entonces

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

El flujo de la inducción magnética que atraviesa el área limitada por esta curva vale aproximadamente

$$\int_S \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{A} = B_z \Delta x \Delta y$$

La ley de Faraday nos da entonces

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

o sea,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad 29-8$$

La ecuación 29-8 implica que si existe un componente de campo eléctrico E_x que depende de x , debe existir un componente de inducción magnética B_z que depende del tiempo o, inversamente, si existe un campo de inducción magnética B_z que depende del tiempo, debe existir un campo eléctrico E_x que depende de x . Podemos obtener una ecuación semejante relacionando E_x con B_z aplicando la ecuación 29-6d al rectángulo de lados Δx y Δz contenido en el plano xz , como se ve en la figura 29-4. En el caso en que no existan corrientes de conducción, la ecuación 29-6d se reduce a

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E}_x \cdot d\mathbf{A}$$

Omitimos los detalles de este cálculo, que es análogo al ya realizado; el resultado es

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad 29-9$$

Podemos eliminar B_z o E_x de las ecuaciones 29-8 y 29-9 derivando cualquiera de ellas respecto a x o t . Si derivamos ambos miembros de la ecuación 29-8 respecto a x , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

o

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

en donde hemos intercambiado el orden de las derivadas respecto al tiempo y el espacio en el segundo miembro. Ahora sustituimos $\partial B_z / \partial x$ mediante la ecuación 29-9:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$$

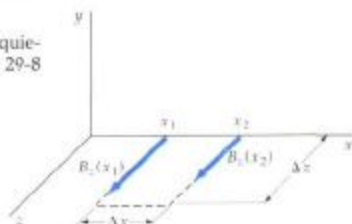


Figura 29-4 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano xy para la deducción de la ecuación 29-9.

que nos da la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad 29-10$$

Comparando esta ecuación con la 29-7, vemos que E_x obedece a una ecuación de onda para ondas con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

que es la ecuación 29-1.

Si hubiésemos escogido, por el contrario, eliminar E_x entre las ecuaciones 29-8 y 29-9 (derivando, por ejemplo, la ecuación 29-8 respecto a t) habríamos obtenido una ecuación idéntica a la 29-10 sustituyendo E_x por B_y . Así pues, hemos demostrado que tanto el campo eléctrico E_x como el magnético B_y obedecen a una ecuación de onda para las ondas que se mueven con velocidad $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, que es la velocidad de la luz.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que hemos utilizado hasta ahora, podemos demostrar fácilmente (como en el problema 29-49) que si se aplica la ecuación 29-6c (ley de Faraday) a la curva contenida en el plano xz que se ve en la figura 29-4, la variación espacial de E_x está relacionada con la variación temporal de B_y por

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad 29-11$$

Análogamente, la aplicación de la ecuación 26-6d a la curva en el plano xy de la figura 29-3 da

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad 29-12$$

Podemos utilizar estos resultados para demostrar que, en el caso de una onda que se propaga en la dirección x , también obedecen la ecuación de ondas los componentes E_z y B_z .

Hasta aquí sólo hemos considerado los componentes y y z de los campos eléctrico y magnético. Puede aplicarse el mismo tipo de análisis a una espira rectangular en el plano yz , semejante a las espiras de las figuras 29-3 y 29-4, para obtener ecuaciones análogas a las ecuaciones 29-8, 29-9, 29-11 y 29-12 en las que las derivadas respecto al tiempo de E_x y B_y son proporcionales a las derivadas respecto a y y a z de los componentes de los campos. En la onda plana considerada, las derivadas respecto a y y a z de los componentes del campo son cero, de forma que también lo son las derivadas temporales de E_x y B_y . En una onda electromagnética, estamos interesados únicamente en campos que varían con el tiempo y, por ello, podemos sustraer cualquiera de los componentes x de los campos que sean constantes en el tiempo.

Hemos demostrado que en una onda plana cualquiera que se mueve paralelamente al eje x , son nulos los componentes x de los campos, de modo que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares al eje x . También son perpendiculares entre sí y cada uno de ellos obedece a una ecuación de onda:

Ecuación de onda para E

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad 29-13a$$

Ecuación de onda para B

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad 29-13b$$

Como señalamos al estudiar las ondas armónicas, una solución particularmente importante para una ecuación de onda como la ecuación 29-10 es la función de onda armónica de la forma

$$E_z = E_{z0} \sin(kx - \omega t) \quad 29-14$$

Si sustituimos esta solución bien en la ecuación 29-8 o en la 29-9, podemos ver que el campo magnético B_z está en fase con el campo eléctrico E_z . A partir de la ecuación 29-8 se tiene

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -kE_{z0} \cos(kx - \omega t)$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos para B_z

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{k}{\omega} E_{z0} \sin(kx - \omega t) \\ &= B_{z0} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad 29-15$$

en donde

$$B_{z0} = \frac{k}{\omega} E_{z0} = \frac{E_{z0}}{c}$$

y $c = \omega/k$ es la velocidad de la onda*. Como los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con la misma frecuencia, tenemos el resultado general de que el valor del campo eléctrico es c veces el valor del campo magnético en el caso de una onda electromagnética:

$$E = cB \quad 29-16$$

Supongamos que el vector de campo eléctrico \mathbf{E} se encuentra siempre en la dirección y , como muestra, por ejemplo, la ecuación 29-14. Entonces $E_x = 0$ y, de acuerdo con la ecuación 29-11, $dB_x/dt = 0$. Así pues, si \mathbf{E} se encuentra en la dirección y , entonces la parte variable con el tiempo (que es la única que nos interesa) de \mathbf{B} se halla en la dirección z , como se ve en la figura 29-5. Una onda así se dice que está **polarizada linealmente**, porque si representamos \mathbf{E} (o \mathbf{B}) en función del tiempo en un plano perpendicular al eje x , obtenemos una línea recta.

Vemos que las ecuaciones de Maxwell implican las ecuaciones de onda 29-13a y b para los campos eléctrico y magnético; y que si E_z varía armónicamente, como en la ecuación 29-14, el campo magnético B_z está en fase con E_z y su amplitud está relacionada con la amplitud de E_z mediante la ecuación 29-16. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda, como se ve en la figura 29-5. En general, la dirección de propagación de una onda electromagnética coincide con la del producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

* Al obtener la ecuación 29-15 integrando la ecuación que le precede, aparece una constante de integración arbitraria. Hemos omitido este campo magnético constante de la ecuación 29-15 porque no juega ningún papel en el estudio que nos ocupa de las ondas electromagnéticas. Obsérvese que si se añade a la ecuación 29-14 un campo eléctrico constante cualquiera, el nuevo campo eléctrico sigue satisfaciendo a la ecuación de ondas.

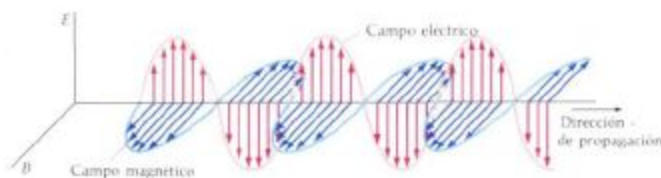
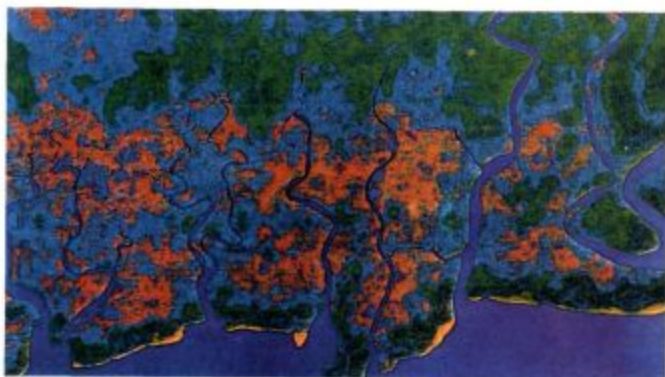


Figura 29-5 Vectores de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética polarizada plana. Los campos están en fase, perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda.

Imagen de radar de la costa sur de Nueva Guinea. Un sistema de radar funciona transmitiendo ondas de radio hacia los objetos a examinar, recibiendo el eco de las ondas que reflejan, y determinando la distancia hasta ellos a partir de la medición del intervalo de tiempo transcurrido.



Ejemplo 29-3

El vector de campo eléctrico de una onda electromagnética viene dado por $\mathbf{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{j} + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{k}$. (a) Hallar el campo magnético correspondiente. (b) Calcular $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

(a) Podemos utilizar bien la ecuación 29-11 o la 29-12 para hallar B_y . Con la ecuación 29-11, obtenemos

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [E_0 \cos(kx - \omega t)] = -kE_0 \sin(kx - \omega t)$$

Entonces, si se desprecia la constante arbitraria de integración, se tiene

$$B_y = [kE_0 \cos(kx - \omega t)](-1/\omega) = -B_0 \cos(kx - \omega t)$$

en donde $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$. Podemos hallar B_z bien a partir de la ecuación 29-8 o la 29-9. Utilizando la primera se tiene

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [E_0 \sin(kx - \omega t)] = -kE_0 \cos(kx - \omega t)$$

y

$$B_z = [-kE_0 \sin(kx - \omega t)](-1/\omega) = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

en donde de nuevo $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$. Por tanto, el campo magnético viene dado por

$$\mathbf{B}(x, t) = -B_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{j} + B_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{k}$$

Se dice que este tipo de onda electromagnética está **polarizada circularmente**. Tanto \mathbf{E} como \mathbf{B} tienen módulos constantes, como puede verse al calcular $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ o $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Por ejemplo, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E^2 x + E^2 y = E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = E_0^2$. En un punto fijo x , ambos vectores giran barriéndolo un círculo en el plano perpendicular a x con frecuencia angular ω .

(b) Calculando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, con $\theta = kx - \omega t$ para simplificar la notación, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= [E_0 \sin \theta \mathbf{j} + E_0 \cos \theta \mathbf{k}] \cdot [-B_0 \cos \theta \mathbf{j} + B_0 \sin \theta \mathbf{k}] \\ &= -E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + E_0 B_0 \sin^2 \theta \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad - E_0 B_0 \cos^2 \theta \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= -E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta + 0 - 0 + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí igual que a la dirección de propagación. Calculando $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ y haciendo uso de que $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, y $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= [E_0 \sin \theta \mathbf{j} + E_0 \cos \theta \mathbf{k}] \times [-B_0 \cos \theta \mathbf{j} + B_0 \sin \theta \mathbf{k}] \\ &= E_0 B_0 \sin^2 \theta \mathbf{j} \times \mathbf{k} + (-E_0 B_0 \cos^2 \theta \mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\ &= E_0 B_0 \sin^2 \theta \mathbf{i} + E_0 B_0 \cos^2 \theta \mathbf{i} = E_0 B_0 \mathbf{i} \end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ tiene la dirección de propagación de la onda.

29-4 Energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética

En nuestro estudio del transporte de energía por una onda de cualquier clase vimos que la intensidad de la onda (la energía media por unidad de tiempo y por unidad de área) es igual al producto de la densidad de energía media (energía por unidad de volumen) por la velocidad de la onda. La densidad de energía almacenada en el campo eléctrico es (ecuación 21-17)

$$\eta_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

y la densidad de energía almacenada en el campo magnético es (ecuación 26-34)

$$\eta_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En el caso de una onda electromagnética en el espacio libre, $E = cB$, de modo que podemos expresar la densidad de energía magnética en función del campo eléctrico:

$$\eta_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

en donde hemos utilizado $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Así pues, son iguales las densidades de energía eléctrica y magnética. La densidad de energía total η de la onda es la suma de las densidades de energía magnética y eléctrica. Haciendo uso de $E = cB$ podemos expresar la densidad de energía total de diferentes formas, que resultan ser de utilidad:

$$\eta = \eta_e + \eta_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad 29-17$$

Densidad de energía de una onda electromagnética

En la sección 14-3 vimos que la intensidad de una onda (potencia media que fluye a través de una superficie por unidad de área) es igual al producto de la densidad media de energía por la velocidad de la onda. La intensidad instantánea es la potencia instantánea que atraviesa una superficie por unidad de área y es igual al producto de la densidad instantánea de energía por la velocidad de onda. Cuando se trata de una onda electromagnética en el espacio libre, la intensidad instantánea, por tanto, es

$$I_{\text{instantánea}} = \eta c = c \epsilon_0 E^2 = c \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \quad 29-18$$

La ecuación 29-18 puede generalizarse en forma de expresión vectorial:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad 29-19$$

El vector \mathbf{S} se denomina **vector de Poynting** en honor de su descubridor Sir John Poynting. Como \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares en una onda electromagnética, el módulo de \mathbf{S} es la intensidad instantánea de la onda y su dirección es la de propagación de la misma.

En una onda plana armónica de frecuencia angular ω y número de ondas k , los campos instantáneos eléctrico y magnético vienen dados por

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{y} \quad B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

Utilizando estos resultados para sustituir en la ecuación 29-17, se obtiene para la densidad de energía instantánea

$$\eta = \frac{E\mathbf{B}}{\mu_0 c} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 c} \sin^2(kx - \omega t)$$

Cuando promediamos la función seno al cuadrado a lo largo del espacio o del tiempo, se obtiene el factor $\frac{1}{2}$. Por tanto, la densidad media de energía es

$$\eta_m = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0 c} = \frac{E_0 B_{0t}}{\mu_0 c} \quad 29-20$$

en donde hemos utilizado $E_{0t} = E_0/\sqrt{2}$ y $B_{0t} = B_0/\sqrt{2}$. La intensidad vale, pues,

$$I = \eta_m c = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0 B_{0t}}{\mu_0} = \left| \mathbf{S} \right|_m \quad 29-21$$

Intensidad de una onda electromagnética

A continuación mostraremos mediante un ejemplo sencillo que una onda electromagnética transporta cantidad de movimiento. En este ejemplo, calcularemos la cantidad de movimiento y la energía que una partícula cargada absorbe de una onda. Consideremos una onda electromagnética moviéndose a lo largo del eje x con el campo eléctrico en la dirección y y el campo magnético en la dirección z , que incide sobre una carga estacionaria situada en el eje x como se ve en la figura 29-6. Por sencillez, despreciaremos la dependencia temporal de los campos eléctrico y magnético. La partícula experimenta la acción de una fuerza $q\mathbf{E}$ en la dirección y y así se ve acelerada por el campo eléctrico. En un instante t cualquiera, la velocidad en la dirección y es

$$v_y = at = \frac{qE}{m} t$$

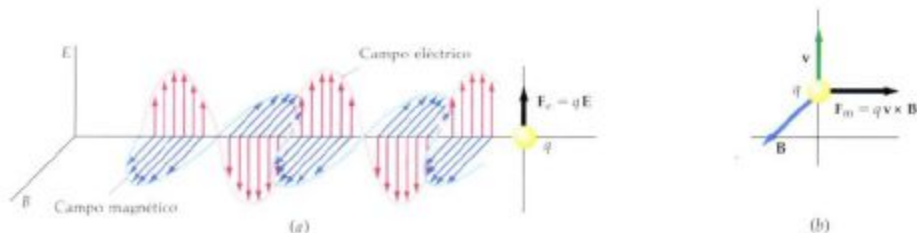
Al cabo de un tiempo corto t_1 , la carga ha adquirido una velocidad en la dirección y dada por

$$v_y = at_1 = \frac{qE}{m} t_1$$

La energía adquirida por la carga en el instante t_1 es

$$K = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} \frac{m q^2 E^2 t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_1^2 \quad 29-22$$

Figura 29-6 Onda electromagnética incidente sobre una carga puntual que está inicialmente en reposo sobre el eje x . (a) La fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ acelera la carga en dirección hacia arriba. (b) Cuando la carga ha adquirido una velocidad \mathbf{v} hacia arriba, la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ acelera la carga en la dirección de la onda.



Cuando la carga se mueve en la dirección y , experimenta la acción de una fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, que tiene el sentido positivo del eje x (eje que coincide con la dirección de propagación de la onda) cuando \mathbf{B} tiene dirección z . La fuerza magnética en un instante cualquiera t es

$$F_x = qv_y B = \frac{q^2 EB}{m} t$$

El impulso de esta fuerza es igual a la cantidad de movimiento transferida por la onda a la partícula. Igualando el impulso a la cantidad de movimiento p_x , se tiene

$$\begin{aligned} p_x &= \int_0^{t_i} F_x dt \\ &= \int_0^{t_i} \frac{q^2 EB}{m} t dt = \frac{1}{2} \frac{q^2 EB}{m} t_i^2 \end{aligned}$$

Si empleamos $B = E/c$, esta expresión se convierte en

$$p_x = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_i^2 \right) \quad 29-23$$

Comparando las ecuaciones 29-22 y 29-23, vemos que la cantidad de movimiento adquirida por la carga en la dirección de la onda es $1/c$ multiplicada por la energía. Aunque nuestro sencillo cálculo no ha sido riguroso, los resultados son correctos. En general,

El valor de la cantidad de movimiento transportada por una onda electromagnética es $1/c$ veces la energía que transporta la onda:

$$p = \frac{U}{c} \quad 29-24$$

Cantidad de movimiento y energía en una onda electromagnética

Como la intensidad de una onda es la energía por unidad de tiempo y por unidad de área, la intensidad dividida por c es la cantidad de movimiento transportada por la onda por unidad de tiempo y unidad de área. La cantidad de movimiento transportada por unidad de tiempo es una fuerza. La intensidad de onda dividida por c es, pues, una fuerza por unidad de área, que resulta ser una presión. Esta presión se denomina **presión de radiación** P_r :

$$P_r = \frac{I}{c} \quad 29-25$$

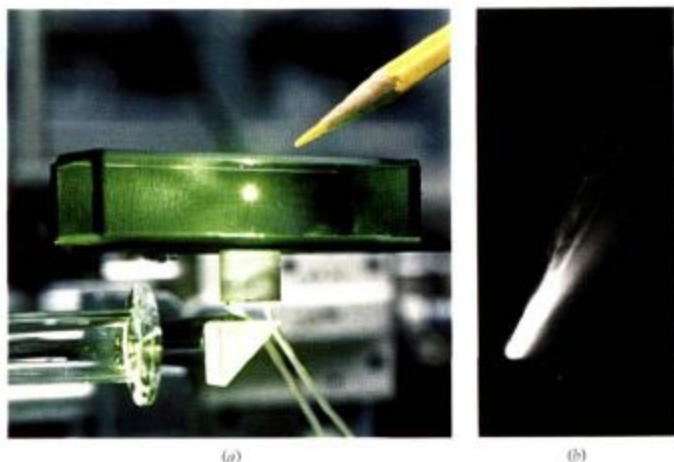
Podemos relacionar la presión de radiación con los campos eléctrico y magnético con el empleo de las ecuaciones 29-21 y 29-16:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{E_m B_m}{2\mu_0 c} = \frac{E_m B_m}{\mu_0 c} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_m^2}{2\mu_0} \quad 29-26$$

Presión de radiación

Consideremos una onda electromagnética que incide normalmente sobre una cierta superficie. Si la superficie absorbe energía U de la onda electromagnética, absorbe la cantidad de movimiento p dada por la ecuación 29-24, y la presión ejercida sobre la misma es igual a la presión de radiación. Si la onda se refleja, la cantidad de movimiento transferida es el doble de la energía incidente sobre la superficie, porque la onda transporta luego cantidad de movimiento en sentido opuesto. La presión ejercida sobre la superficie por la onda es entonces el doble de la presión de radiación.

(a) Un haz láser de 250 mW dirigido hacia arriba mantiene suspendida por su presión de radiación una esterita de vidrio transparente de $25 \mu\text{m}$ de diámetro (y visible en la foto como un destello en forma de estrella). (b) Cometa Mrkos fotografiado en agosto de 1957. La cola se ve impulsada en sentido contrario al del Sol y se encuentra dividida en dos partes por la acción de la presión solar y del viento solar, que es una corriente de partículas cargadas emitidas por el Sol. La división se produce porque las partículas más ligeras de las que componen la cola se desvían más fácilmente que las más pesadas.



Ejemplo 29-4

Una bombilla eléctrica de 100 W emite ondas electromagnéticas uniformemente en todas direcciones. Calcular la intensidad, la presión de radiación, y los campos eléctrico y magnético a una distancia de 3 m de la bombilla, suponiendo que se convierten 50 W en radiación electromagnética.

A una distancia r de la bombilla, la energía se distribuye uniformemente a lo largo de un área de $4\pi r^2$. Por tanto la intensidad es

$$I = \frac{50 \text{ W}}{4\pi r^2}$$

Para $r = 3 \text{ m}$, la intensidad es

$$I = \frac{50 \text{ W}}{4\pi(3 \text{ m})^2} = 0,442 \text{ W/m}^2$$

La presión de radiación es igual a la intensidad dividida por la velocidad de la luz:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{0,442 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1,47 \times 10^{-9} \text{ Pa}$$

Esta es una presión muy pequeña comparada con la presión atmosférica que es del orden de 10^5 Pa .

El valor máximo del campo magnético es, según la ecuación 29-26,

$$\begin{aligned} B_0 &= (2\mu_0 P_r)^{1/2} \\ &= [2(4\pi \times 10^{-7})(1,47 \times 10^{-9})]^{1/2} \\ &= 6,08 \times 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

El valor máximo del campo eléctrico es la velocidad de la luz multiplicada por B_0 :

$$E_0 = cB_0 = 18,2 \text{ V/m}$$

Los campos eléctrico y magnético son de la forma $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$ y $B = B_0 \sin(kx - \omega t)$ en donde $E_0 = 18,2 \text{ V/m}$ y $B_0 = 6,08 \times 10^{-8} \text{ T}$.

Ejemplo 29-5

Un astronauta se encuentra en el espacio exterior a una distancia de 20 m de la nave espacial portando un cañón láser de 1 kW. Si la masa total del astronauta más el traje espacial y el cañón láser es de 95 kg, ¿cuánto tardará en alcanzar la nave si el astronauta dispara el láser en sentido contrario a la posición de la misma?

La potencia del cañón láser es la energía que emite por unidad de tiempo. Si dividimos la potencia por c , obtendremos la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo del sistema debida a la cantidad de movimiento que transporta la radiación y que vale

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P}{c}$$

El astronauta debe experimentar entonces una variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo igual y opuesta a ésta. Por consiguiente, la fuerza a que se ve sometido el astronauta es

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{P}{c} = ma$$

Si la potencia del cañón láser es constante, también lo será la aceleración del astronauta, siendo su valor

$$a = \frac{P}{mc} = \frac{1000 \text{ W}}{(95 \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s}^2)} \\ = 3,51 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$$

Esta aceleración es muy pequeña. El tiempo que necesitará el astronauta para recorrer los 20 m se encuentra mediante la fórmula de la aceleración constante:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \\ t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(20 \text{ m})}{3,51 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2}} \\ = 3,38 \times 10^4 \text{ s} = 9,38 \text{ h}$$



Dave Cooke y sus colaboradores de la Universidad de Chicago utilizan un espejo de un telescopio recubierto de plata y de 40,6 cm de diámetro y un pequeño cristal de zafiro en forma de cono para concentrar la luz del Sol hasta intensidades que son 84 000 veces mayores que la recibida normalmente en la superficie terrestre. El récord mundial de 72 kW/m² supera a la propia intensidad de la luz en la superficie del Sol (63 kW/m²), haciendo que sea la máxima concentración de luz solar producida en el sistema solar. La luz se enfoca mediante el espejo hasta dar un punto de 1 cm de diámetro que luego se comprime hasta otro punto de 1 mm de diámetro mediante el concentrador de zafiro. Se escogió el zafiro por su baja absorción y su alto índice de refracción. La luz del Sol incide sobre la base del cono, se transmite a través del zafiro y sale por su punta. La forma específica del cristal hace máxima la concentración de la luz que sale por la punta, sin pretender conseguir una imagen exacta del foco de luz (como se intenta en las lentes convencionales). A pesar de su baja absorptividad, el cristal de zafiro suele calentarse por la luz solar concentrada hasta el punto de explotar.

29-5 Espectro electromagnético

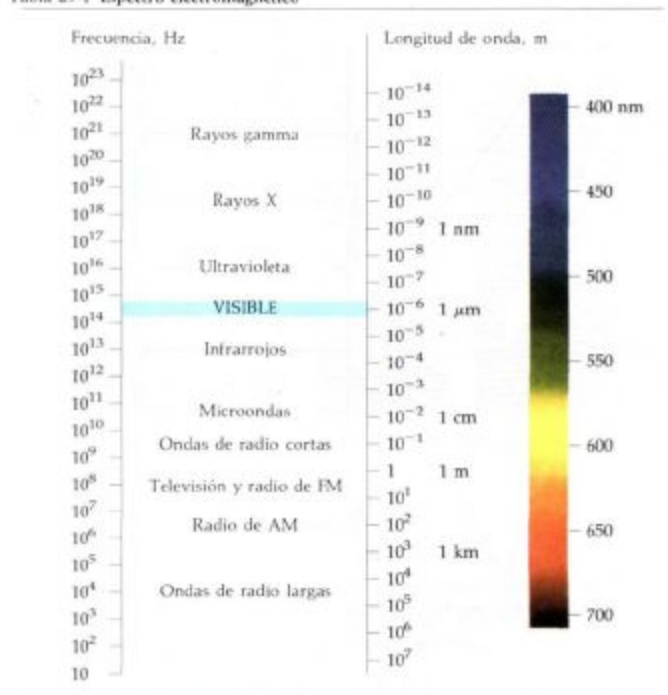
Entre las ondas electromagnéticas debemos incluir la luz, las ondas de radio, los rayos X, los rayos gamma, las microondas y otras radiaciones. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren entre sí únicamente en su longitud de onda y frecuencia, que está relacionada con la longitud de onda de modo usual:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

En la tabla 29-1 se da el **espectro electromagnético** y los nombres normalmente asociados con los diversos intervalos de longitud de onda y de frecuencia. Estos intervalos no están a veces bien definidos y frecuentemente se solapan. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 0,1 nm suelen denominarse rayos X, pero si se originan a partir de la radiactividad nuclear, se llaman rayos gamma.

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética con longitudes de onda comprendidas entre 400 y 700 nm aproximadamente, margen que se denomina **luz visible**. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más largas a la luz roja, y entre estos extremos se encuentran todos los colores del arco iris. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda ligeramente inferiores a las de la luz visible se denominan **rayos**

Tabla 29-1 Espectro electromagnético



ultravioleta, y las que poseen longitudes de onda ligeramente superiores, se conocen como **ondas infrarrojas**. La radiación térmica emitida por los cuerpos a temperaturas ordinarias está situada en la región infrarroja del espectro electromagnético. No existen límites en las longitudes de onda de la radiación electromagnética; es decir, todas las longitudes de onda (o frecuencias) son teóricamente posibles.

Las diferencias que poseen las longitudes de onda de las diversas clases de ondas electromagnéticas tienen una gran importancia. Como sabemos, el comportamiento de las ondas depende fuertemente de los valores relativos de las longitudes de onda en comparación con los tamaños de los objetos físicos o aberturas que las ondas encuentran. Como las longitudes de onda de la luz caen en el intervalo más bien estrecho de 400 a 700 nm, son mucho más pequeñas que la mayoría de los objetos, de modo que suele ser válida la aproximación de los rayos. También son importantes la longitud de onda y la frecuencia a la hora de determinar las clases de interacción que se producen entre las ondas y la materia. Los rayos X, por ejemplo, que tienen longitudes de onda muy cortas y frecuencias elevadas, penetran fácilmente muchos materiales que son opacos a ondas luminosas de menor frecuencia, que son absorbidas por dichos materiales. Las microondas tienen longitudes de onda del orden de algunos centímetros y frecuencias que son cercanas a las frecuencias de resonancia natural de las moléculas de agua que hay en los sólidos y líquidos. Por tanto, las microondas son fácil-



(a)



(b)

(a) Las antenas de televisión que se muestran aquí funcionan con radiofrecuencias. Los mensajes se transmiten codificándolos como modulaciones de frecuencia (FM) o de amplitud (AM). La misma antena puede funcionar como transmisora o receptora. Sin embargo, las antenas utilizadas para la transmisión funcionan a niveles de potencia considerablemente más altos que los utilizados para la recepción. (b) Radiotelescopio Caltech en Owens Valley, California (Estados Unidos). Las estrellas, las galaxias, los cuasares y los pulsares, son todos ellos fuentes de radioondas. En la actualidad casi la quinta parte de las fuentes de radio cósmicas son «no identificadas», es decir, no están relacionadas con ninguna fuente localizada ópticamente.

mente absorbidas por las moléculas de agua que contienen los alimentos, que es el mecanismo mediante el cual calientan los hornos de microondas.

Se producen ondas electromagnéticas cuando se aceleran las cargas eléctricas. Cuando las cargas eléctricas oscilan, radian ondas electromagnéticas cuya frecuencia es igual a la frecuencia de oscilación. Por consiguiente, la longitud de onda de las ondas emitidas queda determinada por la frecuencia de oscilación de las cargas. Las ondas de radio, que tienen frecuencias desde 550 a 1600 kHz aproximadamente para las ondas de AM y desde 88 a 108 MHz para las ondas de FM, están producidas por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en las antenas de radio. Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de 10^{14} Hz, están originadas por el movimiento de las cargas atómicas.

La figura 29-7 es un dibujo esquemático de una **antena dipolar eléctrica**, que consta de dos varillas conductoras dobladas que se alimentan mediante un generador de corriente alterna. En el instante $t=0$, indicado en la figura 29-7a, los extremos de las varillas se encuentran cargados y existe un campo eléctrico cerca de las varillas paralelo a ellas. También existe un campo magnético (no indicado) rodeando las varillas y debido a la corriente que circula por ellas. El campo magnético es perpendicular a la hoja. Estos campos se mueven alejándose de las varillas con la velocidad de la luz. Al cabo de un cuarto de período, a $t=\frac{1}{4}T$, las varillas se encuentran descargadas y el campo eléctrico en sus proximidades es

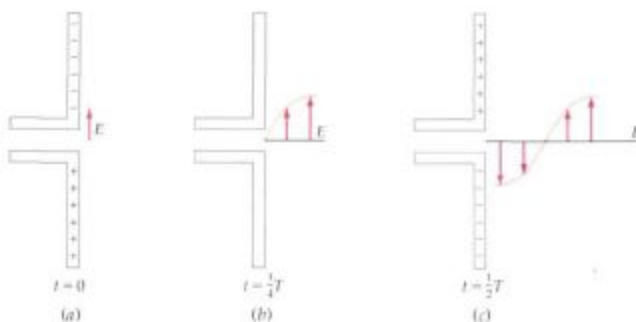


Figura 29-7 Antena dipolar eléctrica. Se le suministra corriente alterna a la antena mediante un generador (que no se muestra). El campo eléctrico debido a las cargas en la antena se propaga hacia el exterior con la velocidad de la luz. También existe un campo magnético propagándose al papel debido a la corriente que circula por la antena.

Figura 29-8 Líneas de los campos eléctrico y magnético producidas por un dipolo eléctrico oscilante.

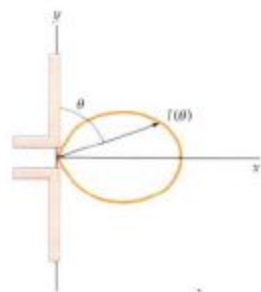
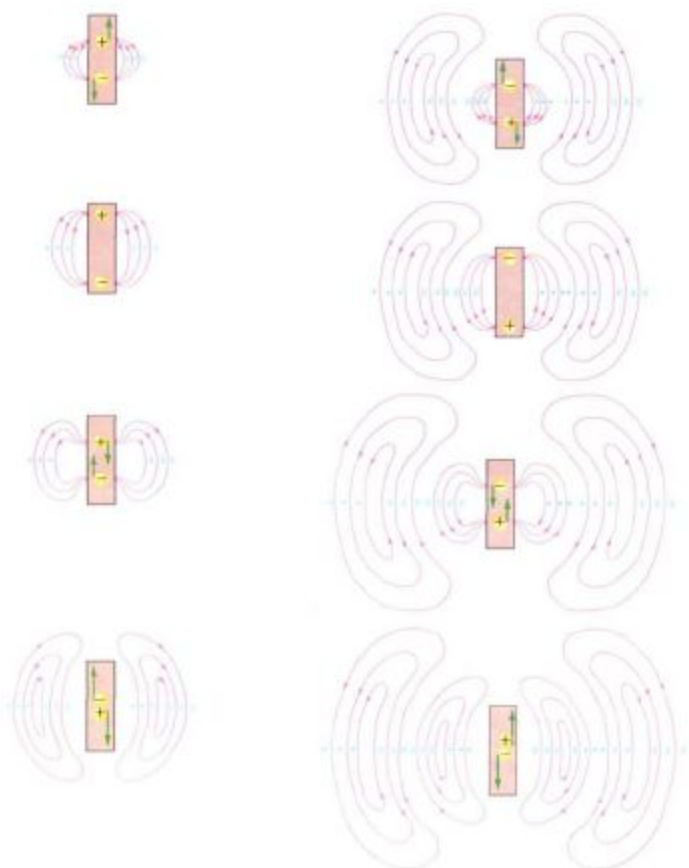


Figura 29-9 Representación polar de la intensidad de una radiación electromagnética producida por una antena dipolar eléctrica en función del ángulo. La intensidad $I(\theta)$ es proporcional a la longitud de la flecha. La intensidad es máxima perpendicularmente a la antena a $\theta = 90^\circ$ y mínima a lo largo de la misma a $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$.

nulo, como se ve en la figura 29-7b. A $t = \frac{1}{2}T$, las varillas se encuentran cargadas de nuevo, pero las cargas son opuestas a las que había en $t = 0$, como está indicado en la figura 29-7c. Los campos eléctrico y magnético a grandes distancias de esta antena transmisora son muy diferentes de los que existen cerca de la misma. Lejos de la antena, los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con un movimiento armónico simple, perpendicular el uno del otro y a la dirección de propagación de la onda. Por tanto, la onda es transversal. La figura 29-8 muestra los campos eléctrico y magnético lejos de una antena dipolar eléctrica.

La radiación procedente de una antena de dipolo como la de la figura 29-7 se denomina **radiación dipolar eléctrica**. Muchas ondas electromagnéticas presentan las características de este tipo de radiación. Una característica que resultará importante al estudiar la luz en el capítulo 30, es que la intensidad de la onda electromagnética radiada por una antena dipolar es cero a lo largo del eje de la antena y máxima en las direcciones perpendiculares al eje de la misma. Es decir, si el dipolo está en la dirección z con el centro en el origen, la intensidad es nula a lo largo del eje z y máxima en el plano xy . En la dirección de una línea que forme un ángulo θ con el eje z , como se ve en la figura 29-9, la intensidad es proporcional al $\sin^2 \theta$. Lejos de la antena, el campo eléctrico es paralelo al dipolo.

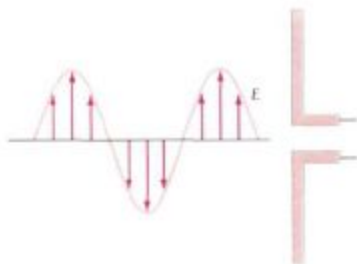


Figura 29-10 Antena dipolar eléctrica para la detección de la radiación electromagnética. El campo eléctrico alterno de la radiación produce una corriente alterna en la antena.

Las ondas electromagnéticas de frecuencias correspondientes a la radio o a la televisión, pueden detectarse mediante una antena dipolar receptora orientada de forma paralela al campo eléctrico, de modo que se induzca una corriente alterna en la antena (figura 29-10). También puede detectarse con una antena en forma de lazo o espira orientada perpendicularmente al campo magnético, de forma que el flujo magnético variable que atraviese la espira induzca una corriente en la misma (figura 29-11). Las ondas electromagnéticas de frecuencias en el margen de luz visible pueden detectarse por el ojo o mediante película fotográfica, siendo ambos sistemas sensibles al campo eléctrico.



Figura 29-11 Antena en forma de espira para detectar la radiación electromagnética. El flujo magnético alterno que atraviesa la espira debido al campo magnético de la radiación, induce una corriente alterna en la misma.

Ejemplo 29-6

Para detectar ondas electromagnéticas en las que $E_{\text{ca}} = 0,15 \text{ V/m}$, se utiliza una antena constituida por una sola espira de alambre conductor de 10 cm de radio. Hallar la fem eficaz inducida en la espira si la frecuencia de la onda es (a) 600 kHz y (b) 600 MHz .

(a) Según la ley de Faraday el valor de la fem inducida es

$$\left| \mathcal{E} \right| = -\frac{d\phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Entonces $\mathcal{E}_{\text{ca}} = \pi r^2 (dB/dt)_{\text{ca}}$. Si $B = B_0 \sin(kx - \omega t)$, $dB/dt = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t)$ y $(dB/dt)_{\text{ca}} = \omega B_0 = \omega E_{\text{ca}}/c = (2\pi f/c)E_{\text{ca}}$.

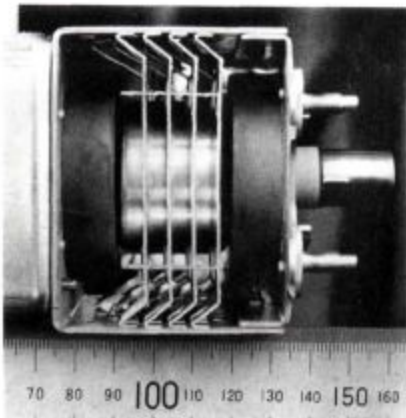
La fem eficaz inducida es entonces

$$\mathcal{E}_{\text{ca}} = \pi r^2 (2\pi f/c) E_{\text{ca}}$$

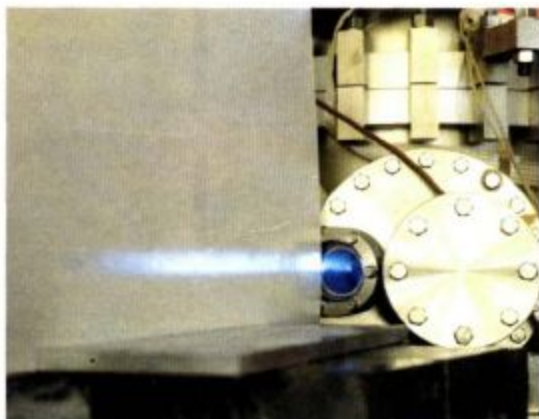
Para $f = 600 \text{ kHz}$, la fem es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ca}} &= \pi(0,1 \text{ m})^2 2\pi(6 \times 10^5 \text{ Hz})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^{-1}(0,15 \text{ V/m}) \\ &= 5,92 \times 10^{-5} \text{ V} \end{aligned}$$

(b) La fem inducida es proporcional a la frecuencia, de modo que a 600 MHz será 1000 veces mayor que a 600 kHz . Entonces $\mathcal{E}_{\text{ca}} = (10^3)(5,92 \times 10^{-5} \text{ V}) = 0,0592 \text{ V}$.



(Izquierda) Para generar los haces de radar en las antenas de seguimiento y, como en el caso indicado aquí, para hacer funcionar los hornos de microondas, se utilizan los hornos de microondas. El cilindro horizontal central es un cátodo que emite electrones al calentarse. (Las láminas delgadas unidas al cilindro central son aletas de refrigeración.) Dos imanes en forma de disco situados en cada uno de los extremos proporcionan un campo magnético axial. Los electrones emitidos son acelerados, creando campos eléctricos oscilantes que generan campos magnéticos oscilantes. El ánodo está configurado de modo que pueden mantenerse con pocas pérdidas de energía las oscilaciones electromagnéticas a las frecuencias de las microondas —es decir, el magnetron actúa como una cavidad resonante para mantener las ondas electromagnéticas que tienen longitudes de onda del orden de unos centímetros. Las microondas salen de su situación estacionaria a través del tubo de la derecha, de forma parecida a como salen las ondas sonoras de un clarinete.



(Derecha) Haz de luz visible emitida por los electrones que han sufrido aceleración en un sincrotrón. Los electrones que oscilan de forma continua en una antena de radio típica radian campos electromagnéticos sinusoidales. En un

sincrotrón, grupos de electrones se mueven siguiendo trayectorias circulares a velocidades próximas a la de la luz y emiten radiación que se encuentra muy comprimida en pulsos breves en la dirección de movimiento de los electrones.

Cuestiones

1. ¿Qué ondas tienen mayores frecuencias, las ondas de luz o los rayos X?
2. Las frecuencias de la radiación ultravioleta, ¿son mayores o menores que la de la radiación infrarroja?
3. ¿Qué tipo de ondas tienen longitudes de onda del orden de los metros?

Resumen

1. La ley de Ampère puede generalizarse para aplicarse a corrientes discontinuas si se sustituye la corriente de conducción I por $I + I_d$, en donde I_d se denomina corriente de desplazamiento de Maxwell:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

2. Las leyes de la electricidad y el magnetismo se resumen mediante las leyes de Maxwell, que son

$$\oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

Ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Ley de Gauss para el magnetismo (no existen polos magnéticos aislados)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{A}$$

Ley de Faraday

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A}$$

Ley de Ampère modificada

3. Las ecuaciones de Maxwell implican que los vectores de campo eléctrico y magnético en el espacio libre obedecen una ecuación de onda de la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

en donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

es la velocidad de la onda. El hecho de que esta velocidad sea igual a la velocidad de la luz condujo a Maxwell a suponer correctamente que la luz es una onda electromagnética.

4. En una onda electromagnética, los vectores de campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Sus módulos están relacionados por

$$E = cB$$

5. Las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento. La densidad de energía media de una onda electromagnética es

$$\eta_m = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0 c} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 c}$$

La intensidad de una onda electromagnética viene dada por

$$I = \eta_m c = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} = \left| \mathbf{S} \right|_m$$

en donde \mathbf{S} , llamado vector de Poynting, describe el transporte de la energía electromagnética:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

6. Una onda electromagnética transporta cantidad de movimiento que es igual a $1/c$ veces la energía transportada por la onda:

$$p = \frac{U}{c}$$

La intensidad de una onda electromagnética dividida por c es la cantidad de movimiento transportada por la onda por unidad de tiempo y de área, lo cual recibe el nombre de presión de radiación de la onda:

$$P_r = \frac{I}{c}$$

Si la onda incide normalmente sobre una superficie y es absorbida completamente, ejerce una presión igual a su presión de radiación.

7. Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, las ondas de radio, los rayos X, los rayos gamma, las microondas y otras. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren únicamente en la longitud de onda y en la frecuencia, que está relacionada con la longitud de onda de la forma usual:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

8. Se producen ondas electromagnéticas cuando son aceleradas las cargas eléctricas. Las cargas oscilantes en una antena de dipolo eléctrico radian ondas electromagnéticas con una intensidad que es máxima en direcciones perpendiculares a la antena y cero a lo largo de su eje. Perpendicularmente a la antena y muy lejos de ella, el campo eléctrico de la onda electromagnética es paralelo a la antena.

James Clerk Maxwell (1831-1879)

C. W. T. Everitt
Stanford University

Un día de 1877 un joven estudiante escocés llamado Donald MacAlister, que posteriormente sería un físico distinguido y un hombre de renombre, escribía a su familia desde la Universidad de Cambridge contando que acababa de comer con un profesor que era «uno de los más brillantes, y un tradicional lord escocés, tanto en sus maneras como en su lenguaje». Esta descripción de James Clerk Maxwell era exacta. Maxwell era propietario de una hacienda de 2000 acres en el suroeste de Escocia y un hombre que poseía todos los atributos de un caballero de la época victoriana: cultivado, considerado con sus arrendatarios, participante activo en los asuntos locales, y un experto nadador y jinete. Pocas personas sospecharon que este «lord escocés» que produjo tan agradable impresión a MacAlister en 1877 era también un científico cuya obra permanecería asombrosamente en vigor hasta la década de 1990; que era el físico matemático más grande que iba a existir desde Newton; que había creado la teoría electromagnética



C.W.F. (Francis) Everitt obtuvo su doctorado en 1959 en el Imperial College, de Londres, en el campo, entonces nuevo, de los estudios paleomagnéticos de la tectónica de las placas. Y decidió que, a pesar de lo mucho que le gustaba la geología, su verdadera vocación era la física. Así pues, se trasladó en 1960 a la Universidad de Pennsylvania, en

donde se dedicó a estudiar el «tercer sonido», que es una clase peculiar de onda que se propaga en películas delgadas de helio superfluido. Luego pasó a la Universidad de Stanford y con otros colegas inició una investigación en un programa de larga duración de la NASA (Gravedad Prueba B) para comprobar la teoría general de la relatividad de Einstein utilizando unos giroscopios muy precisos en órbita alrededor de la Tierra. El interés de Everitt por la historia se remonta a sus días de universidad. Ha escrito sobre la historia de la precisión en la medida; sobre la creatividad científica; sobre la relación existente entre la teoría y la experiencia en la física; sobre espectroscopia; sobre historia, ciencia y religión; sobre la dinámica de la «física de lo grande»; y sobre varios físicos, incluyendo tres libros sobre Maxwell.

de la luz y predicho la existencia de las ondas de radio; que había escrito el primer artículo importante sobre la teoría de control; así como sobre mecánica estadística, una ciencia que creó junto con Ludwig Boltzmann; que había realizado junto con su esposa una serie de brillantes experimentos sobre la visión en color y que había tomado la primera fotografía en color; y que en los dos últimos años de su vida, antes de su muerte en 1879, a la edad de 48 años, sentó las bases de una nueva materia que iba a alcanzar gran auge en el siglo XX, la dinámica de los gases enrarecidos.

La carrera de estudiante de Maxwell fue más larga de lo normal. Estuvo tres años en la Universidad de Edimburgo y otros tres años y un cuarto en Cambridge. Al contrario de lo que le ocurrió a Einstein, a Maxwell le gustaba su vida de estudiante y tuvo la fortuna de atraer la atención de algunos profesores eminentes. En Edimburgo sufrió la influencia de dos hombres antagónicos pero igualmente inteligentes y agudos. Forbes y Sir William Hamilton, el metafísico. Forbes era un experimentalista, que inventó el sismógrafo y que realizó importantes trabajos sobre la polarización de la radiación infrarroja; además, había adquirido fama como uno de los primeros alpinistas británicos. Introdujo a Maxwell en su laboratorio y con su ayuda inició los experimentos sobre visión en color que condujeron a éste a realizar su propio trabajo en la materia. Hamilton, que estaba considerado como un pedagogo genial, fue el que enseñó a Maxwell la alta visión filosófica que se desprende en muchas de las interesantes aseveraciones metafísicas que escribió en sus publicaciones.

En 1850 Maxwell partió a Cambridge. Para entonces estaba convencido de su vocación matemática. Como muchos otros estudiantes inteligentes de antes y de ahora, Maxwell trabajó duro, aunque sin pretenderlo. Su tutor particular fue William Hopkins, el fundador de la geofísica moderna y posiblemente el mejor profesor de Cambridge. Otras personas que influyeron sobre Maxwell fueron G. G. Stokes, el físico matemático que ocupaba el sitio que abandonó Newton, y William Whewell.

La teoría electromagnética de la luz de Maxwell arranca del trabajo de dos hombres, Michael Faraday y William Thomson. La invención de Faraday del motor eléctrico y sus investigaciones sobre inducción electromagnética, electroquímica, acción dieléctrica y diamagnética, y rotación magneto-óptica le convirtieron, según palabras de Maxwell, en «el núcleo de cualquier cosa eléctrica desde 1830». Sus contribuciones teóricas se basaron en sus ideas avanzadas respecto a las líneas de fuerza eléctrica y magnéticas, en particular en las relaciones geométricas que gobiernan los fenómenos electromagnéticos y en el concepto de fuerzas magnéticas que no podía ser explicado a partir de atracciones y repulsiones entre elementos de corriente sino atribuyendo a las líneas de fuerza la propiedad de acortarse y repelerse entre sí lateralmente (figura 1). Thompson quería relacionar las líneas de fuerza con las teorías y

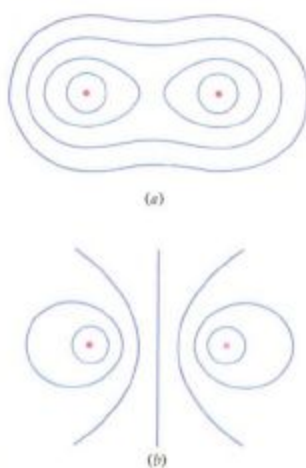


Figura 1 Explicación de Faraday de las fuerzas entre alambres conductores de corriente. Los dos diagramas muestran las líneas de fuerza que se observan cuando las corrientes fluyen por alambres paralelos. Faraday supuso que las líneas de fuerza tendían a acortarse y repelerse entre sí lateralmente. (a) Para alambres en los que las corrientes fluyeran en la misma dirección, las líneas de fuerza tendían a aproximarse. (b) En los alambres en los que la corriente fluye en sentidos opuestos, las líneas de fuerza tienden a alejarse.

existentes de electrostática y magnetoestática, inventar técnicas analíticas que resolvieran los problemas eléctricos, y dar la importancia que les correspondía a los principios energéticos en el electromagnetismo. Maxwell introdujo una serie de conceptos nuevos: la *función electrotónica* (vector potencial), la densidad energética del campo, la corriente de desplazamiento (ver ecuación 29-4), y el operador rotacional en las ecuaciones de campo; Maxwell organizó esta materia en una estructura coherente y en 1861 descubrió la trascendental equivalencia entre luz y ondas electromagnéticas.

La primera parte de la publicación de Maxwell «Las líneas de fuerza de Faraday» (1855-1856) desarrollaba una analogía, debida principalmente a Thomson, entre las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas y las líneas de corriente desplazándose en un fluido incompresible. Maxwell utilizó esta analogía para interpretar muchas de las observaciones de Faraday, e hizo uso del prólogo de esta publicación para iniciar una discusión sobre el significado de las analogías en física. Posteriormente, y siguiendo las bases sentadas por Faraday y Thomson, Maxwell extendió su estudio al

electromagnetismo. Formuló un grupo de ecuaciones que resumen las relaciones de los campos eléctrico y magnético con las cargas y corrientes que los producen (el inicio de lo que hoy en día se conoce como ecuaciones de Maxwell). (Ver sección 29-2.) Estas ecuaciones describen los fenómenos con gran precisión desde un punto de vista completamente diferente a las entonces populares teorías de acción a distancia de André-Marie Ampère y Wilhelm Weber. Resulta interesante que el teorema central de todo su trabajo fue, el que siguiendo a Maxwell, hoy en día se conoce como *teorema de Stokes*; había sido publicado por Stokes en junio de 1854 como una pregunta de examen en el Smith's Prize Examination en Cambridge, con el que Maxwell accedió a su primer grado académico.

Después de este brillante comienzo cabría haber esperado un buen número de publicaciones discutiendo estas nuevas ideas. Pero los físicos las ignoraron, y Maxwell tenía el hábito de investigar sobre varios temas a la vez, dejando transcurrir a menudo largos intervalos de tiempo entre publicaciones sucesivas sobre el mismo campo. Seis años después apareció su siguiente publicación, «Las líneas de fuerza en física», publicado en cuatro partes en 1861-1862. Durante este intervalo de tiempo Maxwell llevó a cabo brillantes contribuciones en tres campos diferentes antes de volver a centrar sus esfuerzos en el electromagnetismo: visión en color, la teoría de los anillos de Saturno y la teoría cinética de los gases. Dejó Cambridge, y se hizo profesor del Mariscal College en Aberdeen, casándose posteriormente con la hija del Rector del colegio; curiosamente a los 29 años obtuvo una pensión de retiro cuando por Acta del Parlamento se unieron las dos universidades de Aberdeen y su cátedra fue extinguida. Afortunadamente al mismo tiempo se produjo una vacante en el King's College de Londres, por lo que se trasladó allí.

En su publicación «Las líneas de fuerza física» Maxwell desarrolló su modelo de vórtices-moleculares del campo electromagnético. Para explicar el diagrama de tensiones asociado con las líneas de fuerza de Faraday, Maxwell investigó las propiedades de un medio que ocupara todo el espacio en el cual pequeños vórtices moleculares giran con sus ejes paralelos a las líneas de fuerza. Cuanto más próximas están las líneas, más rápida es la rotación de los vórtices. En un medio de este tipo las líneas de fuerza tienden a acortarse y a repelerse entre sí lateralmente, lo que explica correctamente las fuerzas entre corrientes e imanes; la pregunta es: ¿qué es lo que hace girar a los vórtices? A este respecto Maxwell concibió una idea tan ingeniosa como fantástica. Maxwell postuló que una corriente eléctrica consiste en el movimiento de diminutas partículas que se engranan como rodamientos con los vórtices, y que el medio está lleno de partículas similares entre los vórtices. En la figura 2 se muestra el esquema. Maxwell afirmaba:

Continúa

No he introducido [esta hipótesis] como un modo de conexión que exista en la naturaleza... [pero] creo que cualquier persona que comprenda [su] carácter provisional y temporal... encontrará en ella ayuda para llegar a comprender la verdadera interpretación de los fenómenos [electromagnéticos].

La pregunta importante es cómo encajar los fenómenos electrostáticos en el modelo. Maxwell consideró que el medio era elástico. De este modo las fuerzas magnéticas se explican por rotaciones en el medio, y las fuerzas eléctricas por distorsión elástica. Cualquier medio elástico es capaz de transmitir ondas. En el medio de Maxwell la velocidad de las ondas resultó estar relacionada con el cociente entre fuerzas eléctricas y magnéticas. A partir de un experimento realizado por G. Kohlrausch y W. Weber en 1856, Maxwell encontró para su asombro que la velocidad de propagación era igual a la de la luz. Con excitación manifestaba en letras cursivas «no es posible rehuir la deducción de que la luz está constituida por *ondulación transversal del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos*» (ver sección 29-3).

Una vez hecho el gran descubrimiento, Maxwell desechó rápidamente aquello que podía estorbar en su modelo. En lugar de intentar una explicación mecánica más refinada de los fenómenos, formuló un sistema de ecuaciones electromagnéticas de las que dedujo que las ondas de fuerza eléctrica y magnéticas se propagaban a través del espacio con la velocidad de la luz. Por esto, la teoría se denomina teoría *electromagnética* de la luz, en contraste con las teorías del éter mecánico que le precedieron. La teoría se hizo pública en dos artículos de 1865 y 1868, y en su forma más general en el *Treatise on Electricity and Magnetism*, publicado en 1873, un trabajo de tal magnitud que Robert Andrews Millikan, autor del famoso experimento de la gota líquida para medir la carga del electrón, lo comparó con los *Principia* de Newton considerando a ambos como los libros de máxima influencia en la historia de la física, «uno de ellos ha creado el mundo mecánico moderno y el otro el mundo eléctrico».

Igualmente profundas fueron las contribuciones de Maxwell a la física estadística y molecular. Se iniciaron con una publicación en 1859 sobre la teoría cinética de los gases, en la que Maxwell introdujo la función de distribución de velocidades y enunció el *teorema de la equipartición* (sección 16-7), que en su forma original enunciaba que las energías traslacionales y rotacionales medias de un gran número de moléculas que se encuentran colisionando, ya fuesen de la misma o de diferentes especies, eran iguales. Una conclusión sorprendente, posteriormente confirmada experimentalmente por Maxwell y su mujer, era que la viscosidad de un gas era independiente de la presión de un amplio intervalo. Otro resultado fue la estimación por Maxwell del recorrido libre medio de una molécula gaseosa, que en 1865 Loschmidt aplicó para realizar las primeras

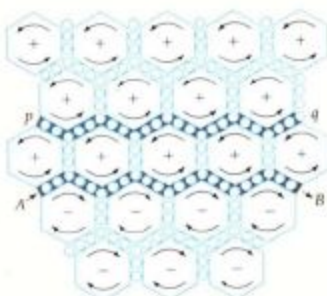


Figura 2 Modelo de vórtices de Maxwell del campo magnético. Los vórtices en rotación representan líneas de fuerza magnética. Se asemejan a pequeñas partículas que actúan como engranajes. En el espacio libre estas partículas carecen de libertad de movimiento excepto para una reacción elástica pequeña (la corriente de desplazamiento), pero son libres de moverse en un alambre conductor. Su movimiento constituye una corriente eléctrica, que a su vez pone a los vórtices en rotación, creando el campo magnético alrededor del alambre. *A* y *B* representan la corriente que atraviesa un alambre, y *p* y *q* una corriente inducida en un alambre adyacente. (Tomado de *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vol. I, fig. 2 después de pág. 448.)

estimaciones serias de los diámetros de las moléculas. Posteriormente, Maxwell desarrolló la teórica general de los fenómenos de transporte, de las que se derivan las ecuaciones de Boltzmann; creó la dinámica de gases enrarecidos; y concibió ese «ser muy pequeño PERO vivo» que se denomina diablillo de Maxwell.

El diablillo, así denominado por Kelvin, es uno de los primeros ejemplos en física de un «experimento mental». Maxwell imaginó dos cámaras de gas, *A* y *B*, separadas por una pared en donde había una puerta en forma de trampilla y que estaba guardada por un ser diminuto con una vista tan aguda que podía discernir el movimiento de las moléculas individuales. Abriendo la trampilla cuando se acercaba una molécula rápida procedente de la cámara *A* o una molécula lenta procedente de la cámara *B*, el diablillo podía redistribuir las velocidades haciendo que *B* fuese más caliente que *A* sin hacer ningún otro trabajo y, por tanto, violando el segundo principio de la termodinámica. El punto esencial que Maxwell quería demostrar era que dicho segundo principio es inherentemente una ley estadística y no dinámica.

El trabajo realizado por Maxwell y Boltzmann sobre mecánica estadística tuvo profundas implicaciones



James Clerk Maxwell (1831-1878) con su mujer, Katherine Mary, y un perro.

en la física moderna. Si sus éxitos en mecánica clásica estadística fueron brillantes, sus «fracasos» fueron de algún modo más llamativos, como el propio Maxwell observó. El teorema de la equipartición dio la respuesta

a la razón por la cual el cociente de los calores específicos de los gases estaba en desacuerdo con los resultados experimentales, mientras que algunos de los teoremas de Boltzmann «explicaban demasiado» ya que se podía aplicar tanto a las propiedades de los sólidos y líquidos como a los gases. Estos temas permanecieron rodeados de misterio y sin resolverse hasta que en 1900 surgió la hipótesis cuántica de Planck (ver sección 35-1). Escribiendo respecto a ellos en 1877, Maxwell confesaba su desconcierto y decía al respecto que «la ignorancia consciente es el preludio de cada uno de los avances reales en el conocimiento».

Maxwell era un hombre sensible, de fuertes creencias religiosas y con un fascinante y asombroso sentido del humor. Muchas de sus cartas revelan una deliciosa ironía. También poseía un discreto talento como poeta normalmente alegre, pero ocasionalmente profundo. La última estrofa de un poema dedicado a su mujer, escrito en 1867, era

Todos los poderes de la mente, toda la fuerza de la voluntad
Pueden quedarse en polvo al morir,
Pero el amor es nuestro, y así seguirá siendo
Cuando huyan la tierra y el mar.

Sugerencias bibliográficas

Campbell, L. y W. Garnett: *The Life of James Clerk Maxwell*, Johnson Reprint Co., Harcourt, Brace and Jovanovich, Nueva York, 1970 (reimpresión de la edición de Oxford de 1882).

Everitt, C.W.F.: *James Clerk Maxwell: Physicist and Natural Philosopher*, Scribner, Nueva York, 1975.

Estos libros ofrecen más detalles sobre la fascinante vida y el trabajo de Maxwell que los ofrecidos en el ensayo de este capítulo.

Mulligan, Joseph F.: «Heinrich Hertz and the Development of Physics», *Physics Today*, marzo 1989, pág. 50.

En este artículo se describe la vida y la obra de Hertz, incluyendo no sólo sus experimentos sobre electromagnetismo, sino también su descubrimiento del efecto fotoeléctrico y su trabajo con los rayos catódicos.

Shamos, Morris H.: «The Electromagnetic Field—James

Clerk Maxwell» en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt and Co., Nueva York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

En unos extractos con anotaciones de su artículo de 1865, «A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field», Maxwell analiza su concepto del campo electromagnético y presenta sus ecuaciones. Los extractos se inician con una breve biografía.

Shamos, Morris H.: «Electromagnetic Waves—Heinrich Hertz» en *Great Experiments in Physics*, Henry Holt and Co., Nueva York, 1959. Reimpreso por Dover, 1987.

Descripción de Hertz del conjunto de experimentos en los que demostró la existencia de ondas electromagnéticas de longitudes de onda mucho mayores que las de la luz. Pudo demostrar en estos experimentos sobre la reflexión, refracción y polarización, que estas ondas se comportan como la luz. En el capítulo se incluye también una breve biografía.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Ser capaz de escribir las ecuaciones de Maxwell y discutir la base experimental de cada una de ellas.
2. Ser capaz de enunciar la expresión para la velocidad de una onda electromagnética en función de las constantes fundamentales μ_0 y ϵ_0 .
3. Ser capaz de enunciar la expresión del vector de Poynting y discutir su significado.
4. Ser capaz de enunciar las relaciones entre el vector de Poynting, la intensidad de una onda electromagnética, y la presión de radiación.
5. Saber calcular la presión de radiación y los valores máximos de E y B a partir de la intensidad de una onda electromagnética.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Corriente de desplazamiento de Maxwell	Presión de radiación
Ecuaciones de Maxwell	Espectro electromagnético
Ecuación de onda	Luz visible
	Rayos ultravioleta

Onda plana	Vector de Poynting
Onda polarizada lineal	Ondas infrarrojas
Onda polarizada circularmente	Antena dipolar eléctrica
	Radiación dipolar eléctrica

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. Las ecuaciones de Maxwell se aplican sólo a campos que son constantes en el tiempo.
2. La ecuación de ondas puede deducirse a partir de las ecuaciones de Maxwell.
3. Las ondas electromagnéticas son ondas transversales.
4. En una onda electromagnética, los campos eléctrico y magnético están en fase.
5. En una onda electromagnética, los vectores de campo eléctrico y magnético E y B tienen el mismo valor.
6. En una onda electromagnética, las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.

Problemas

Nivel I

29-1 Corriente de desplazamiento de Maxwell

1. Un condensador de placas paralelas horizontales en el aire tiene las placas circulares de radio 2,3 cm separadas entre sí 1,1 mm. En la placa superior está entrando corriente al mismo tiempo que sale de la placa inferior a un ritmo de 5 A. (a) Hallar la variación por unidad de tiempo del campo eléctrico entre las placas. (b) Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas y demostrar que es igual a 5 A.

2. En una región del espacio, el campo eléctrico varía de acuerdo con

$$E = (0,05 \text{ N/C}) \sin 2000t$$

en donde t está en segundos. Hallar la corriente máxima de desplazamiento a través de un área de 1 m^2 perpendicular a E .

29-2 Ecuaciones de Maxwell

No se proponen problemas para esta sección.

29-3 Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas

3. Demostrar por sustitución directa que la función de onda

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin(kx - ct)$$

donde $c = \omega/k$, satisface la ecuación 29-10.

4. Utilizar los valores conocidos de μ_0 y ϵ_0 en unidades SI para calcular

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

y demostrar que su valor es aproximadamente igual a $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

29-4 Energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética

5. Una onda electromagnética posee una intensidad igual a 100 W/m^2 . Calcular (a) la presión de radiación P_r , (b) E_{av} , y (c) B_{av} .

6. La amplitud de una onda electromagnética es $E_0 = 400 \text{ V/m}$. Calcular (a) E_{av} , (b) B_{av} , (c) la intensidad I y (d) la presión de radiación P_r .

7. (a) Demostrar que si E viene dado en voltios por metro y B en teslas, las unidades del vector de Poynting $S = (E \times B)/\mu_0$ son vatios por metro cuadrado. (b) Demostrar que si la intensidad I viene dada en vatios por metro cuadrado, las unidades de la presión por radiación $P_r = I/c$ son newtons por metro cuadrado.

8. (a) Una onda electromagnética de 200 W/m^2 incide normalmente sobre una cartulina negra de $20 \times 30 \text{ cm}$ de lado que absorbe toda la radiación. Calcular la fuerza ejercida sobre la cartulina por la radiación. (b) Calcular la fuerza ejercida por la misma onda si la cartulina refleja la radiación que incide sobre ella.

9. Calcular la fuerza ejercida por la onda electromagnética de la cartulina reflectante del apartado (b) del problema 8 si la radiación incide con un ángulo de 30° respecto a la normal.

10. El valor eficaz del campo eléctrico de una onda electromagnética es $E_{\text{av}} = 400 \text{ V/m}$. (a) Hallar B_{av} . (b) la densidad de energía media y (c) la intensidad.

11. Demostrar que las unidades de $E = cB$ son coherentes; es decir, comprobar que cuando B está en teslas y c en metros por segundo, las unidades de cB son voltios por metro o newtons por coulombio.

12. El valor eficaz del módulo del campo magnético de una onda electromagnética es $B_{\text{ef}} = 0,245 \mu\text{T}$. Hallar (a) E_{ef} , (b) la densidad de energía media y (c) la intensidad.

29-5 Espectro electromagnético

13. Hallar la longitud de onda correspondiente a (a) una onda de radio de AM típica con una frecuencia de 1000 kHz y (b) una onda de radio de FM típica con 100 MHz.

14. ¿Cuál es la frecuencia de una microonda de 3 cm?

15. ¿Cuál es la frecuencia de unos rayos X con una longitud de onda de 0,1 nm?

Nivel II

16. En el caso del problema 1, demostrar que a una distancia r del eje de las placas, el campo magnético entre ellas viene dado por $B = (1,89 \times 10^{-7} \text{ T/m}) r$ si r es menor que el radio de las placas.

17. (a) Demostrar que en el caso de un condensador de placas paralelas, la corriente de desplazamiento viene dada por $i_d = C dV/dt$, siendo C la capacidad y V la tensión aplicada al condensador. (b) Un condensador de placas paralelas con $C = 5 \text{ nF}$ se conecta a una fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, siendo $\mathcal{E}_0 = 3 \text{ V}$ y $\omega = 500 \pi$. Hallar la corriente de desplazamiento entre las placas en función del tiempo. Despreciar las resistencias del circuito.

18. En un condensador cuyas placas tienen un área de $0,5 \text{ m}^2$, fluye una corriente de 10 A. (a) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento entre las placas? (b) ¿Cuál es dE/dt entre las placas para esta corriente? (c) ¿Cuál es la circulación de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ a lo largo de una circunferencia de 10 cm de radio que es paralela a las placas y está situada entre ellas?

19. La intensidad de radiación de un dipolo eléctrico es proporcional a $(\sin^2 \theta)/r^2$, en donde θ es el ángulo formado por el momento dipolar eléctrico y el vector de posición \mathbf{r} . Un dipolo eléctrico radiante coincide con el eje z (su momento dipolar tiene la dirección z). Sea I la intensidad de la radiación a una distancia $r = 10 \text{ m}$ y a un ángulo $\theta = 90^\circ$. Hallar la intensidad (en función de I) cuando (a) $r = 30 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$; (b) $r = 10 \text{ m}$, $\theta = 45^\circ$; y (c) $r = 20 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$.

20. (a) Para el caso descrito en el problema 19, ¿a qué ángulo es igual a I la intensidad cuando $r = 5 \text{ m}$? (b) ¿A qué distancia es igual a I la intensidad cuando $\theta = 45^\circ$?

21. Una estación típica de AM radió una onda sinusoidal isotrópica con una potencia media de 50 kW. ¿Cuáles son las amplitudes de $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ a una distancia de (a) 500 m, (b) 5 km y (c) 50 km?

22. La intensidad de la luz solar que incide sobre la parte superior de la atmósfera terrestre se denomina la constante solar y vale $1,35 \text{ kW/m}^2$. (a) Hallar E_{ef} y B_{ef} debido al Sol en dicha zona. (b) Hallar la potencia media emitida por el Sol. (c) Hallar la intensidad y la presión de radiación en la superficie del Sol.

23. En la superficie de la Tierra, existe un flujo solar medio aproximado de $0,75 \text{ kW/m}^2$. Una familia desea construir un sistema de conversión de la energía solar en potencia para su casa. Si el sistema de conversión tiene un rendimiento del 30 por ciento y la familia necesita un mínimo de 25 kW, ¿qué área efectiva deberá tener la superficie de los colectores suponiendo que son absorbentes perfectos?

24. En lugar de enviar energía eléctrica mediante una línea de

transmisión de 750 kV, 1000 A, se desea utilizar un haz de una onda electromagnética adecuada. El haz tiene una intensidad uniforme dentro de un área de su sección recta de 50 m^2 . ¿Cuáles son los valores eficaces de sus campos eléctrico y magnético?

25. Un láser para demostraciones tiene una potencia media de salida de 0,9 mW y un diámetro del haz de 1,2 mm. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el haz del láser sobre (a) una superficie negra 100 por ciento absorbente? (b) ¿Una superficie reflectora 100 por ciento reflectante?

26. Un haz láser tiene un diámetro de 1,0 mm y una potencia media de 1,5 mW. Hallar (a) la intensidad del haz, (b) E_{ef} , (c) B_{ef} , y (d) la presión de radiación.

27. Un pulso de láser tiene una energía de 20 J y un radio de haz de 2 mm. La duración del pulso es de 10 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso. (a) ¿Cuál es la longitud espacial del pulso? (b) ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo? (c) Hallar las amplitudes eléctrica y magnética del pulso de onda.

28. Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por

$$\mathbf{B}(z, t) = (10^{-8} \text{ T}) \cos(kz - \omega t) \mathbf{i}$$

(a) Hallar la frecuencia, la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda. (b) Hallar el vector de campo eléctrico $\mathbf{E}(z, t)$. (c) Dar el vector de Poynting, y hallar la intensidad de esta onda.

29. El campo eléctrico de una onda electromagnética oscila en la dirección y y el vector de Poynting viene dado por

$$S(x, t) = [100 \text{ W/m}^2] \cos^2 [10\pi x - (3 \times 10^9)t] \mathbf{i}$$

en donde x está en metros y t en segundos. (a) ¿Cuál es la dirección de propagación de la misma? (b) Hallar la longitud de onda y la frecuencia. (c) Hallar los campos eléctrico y magnético.

30. Un láser a pulsos dispara pulsos de 1000 MW y 200 ns de duración sobre un objeto pequeño de 10 mg de masa suspendido mediante una fibra muy fina de 4 cm de longitud. Si la radiación se absorbe por completo sin otros efectos, ¿cuál es el máximo ángulo de desviación de este péndulo?

31. Un hilo muy largo de 4 mm de radio se calienta a 1000 K. Su superficie es un radiador negro ideal. (a) ¿Cuál es la potencia total radiada por unidad de longitud? Hallar (b) el vector de Poynting S , (c) E_{ef} y (d) B_{ef} a una distancia de 25 cm del hilo.

32. Un cuerpo negro esférico de radio R está a una distancia de $2 \times 10^{11} \text{ m}$ del Sol. El área efectiva del cuerpo para la absorción de energía del Sol es πR^2 , pero el área para la radiación de la esfera es $4\pi R^2$. La potencia que emite el Sol es $3,83 \times 10^{26} \text{ W}$. ¿Cuál es la temperatura de la esfera?

33. (a) Si la Tierra fuese un cuerpo negro ideal con conductividad térmica infinita, ¿cuál sería su temperatura? (b) Si se reflejase el 40 por ciento de la energía incidente del Sol, ¿cuál sería entonces la temperatura de la Tierra? (Ver problema 32.)

34. Dos ondas armónicas de frecuencias angulares ω_1 y ω_2 tienen campos eléctricos dados por $\mathbf{E}_1 = E_{10} \cos(k_1 x - \omega_1 t) \mathbf{j}$ y $\mathbf{E}_2 = E_{20} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta) \mathbf{j}$. Hallar (a) el vector de Poynting instantáneo para el movimiento ondulatorio resultante y (b) el vector de Poynting medio en el tiempo. Si $E_2 = E_{20} \cos$

($k_x x + \omega t + \delta$) y hallar (c) el vector instantáneo de Poynting del movimiento ondulatorio resultante y (d) el vector de Poynting medio en el tiempo.

35. Una cartulina de 10 por 15 cm tiene una masa de 2 g y es perfectamente reflectante. Cuelga en un plano vertical y está libre para girar alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus bordes. La cartulina se ilumina uniformemente mediante una luz intensa formando un ángulo de 1° con la vertical. Hallar la intensidad de la luz.

36. Un diamante de gran valor de 0,08 kg de peso y un astronauta de 105 kg, están separados 95 m y ambos están inicialmente en reposo. El astronauta tiene un láser de 1,5 kW que puede utilizarse como un cohete de fotones para propulsarlo hacia el diamante. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 95 m utilizando la propulsión que le suministra el cohete láser?

37. Para detectar ondas electromagnéticas puede utilizarse una espira circular de hilo conductor. Supóngase que una estación de FM de 100 MHz radia 50 kW uniformemente en todas direcciones. ¿Cuál es la máxima tensión eficaz inducida en una espira de 30 cm a una distancia de 10^3 m de la estación?

38. Supóngase que tenemos una radio excelente, capaz de detectar señales tan débiles como 10^{-14} W/m². Esta radio tiene una antena formada por una bobina de 2000 vueltas arrollada sobre un núcleo de hierro de permeabilidad 200. La frecuencia que se sintoniza es de 140 KHz. (a) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético de esta onda? (b) ¿Cuál es la fem inducida en la antena? (c) ¿Cuál sería la fem inducida en un hilo de 2 m orientado en la dirección del campo eléctrico?

39. El campo eléctrico a una cierta distancia de un transmisor de radio viene dado por

$$E = (10^{-4} \text{ N/C}) \cos 10^8 t$$

en donde t está en segundos. (a) ¿Qué tensión se recibe en un hilo de 50 cm orientado a lo largo de la dirección del campo eléctrico? (b) ¿Qué tensión puede inducirse en una espira de 20 cm de radio?

40. Un condensador con placas circulares paralelas recibe una carga Q_0 . Entre las placas existe un dieléctrico no perfecto con una constante dieléctrica κ y una resistividad ρ . (a) Hallar la corriente de conducción entre las placas en función del tiempo. (b) Hallar la corriente de desplazamiento entre las placas en función del tiempo. ¿Cuál es la corriente total (conducción más desplazamiento)? (c) Hallar el campo magnético entre las placas producido por la corriente de pérdidas en función del tiempo. (d) Hallar el campo magnético entre las placas producido por la corriente de desplazamiento en función del tiempo. (e) ¿Cuál es el campo magnético total entre las placas durante la descarga del condensador?

41. El condensador con pérdidas, del problema 40, se carga de forma que la tensión entre placas viene dada por $V(t) = 10^{-2} t$. (a) Hallar la corriente de conducción en función de t . (b) Hallar la corriente de desplazamiento. (c) Hallar el tiempo necesario para que la corriente de desplazamiento sea igual a la de conducción.

42. Se rellena el espacio entre las placas de un condensador con un material de una resistividad $\rho = 10^4 \Omega \cdot \text{m}$ y constante dieléctrica $\kappa = 2,5$. Las placas son circulares y paralelas con un radio de 20 cm y 1 mm de separación. La tensión entre las placas viene dada por $V_0 \cos \omega t$, con $V_0 = 40$ V y $\omega = 120 \pi \text{ rad/s}$. (a) ¿Cuál es la densidad de la corriente de despla-

zamiento? (b) ¿Cuál es la corriente de conducción entre las placas? (c) ¿A qué frecuencia angular está desfasada 45° la corriente total respecto a la tensión aplicada?

43. Un condensador circular de área A tiene una pequeña resistencia R que conecta los centros de sus placas. Se aplica entre ellas una tensión $V_0 \sin \omega t$. (a) ¿Cuál es la corriente que permite que circule este condensador? (b) Dar el campo magnético en función de la distancia radial r de la línea central entre placas y en el interior del condensador. (c) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y la tensión aplicada?

44. Demostrar que el componente normal del campo magnético \mathbf{B} es continuo cuando se atraviesa una superficie. Para ello, aplicar la Ley de Gauss para \mathbf{B} ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$) a una superficie gaussiana en forma de caja de pastillas que tiene una cara en cada lado de la superficie.

Nivel III

Los dos problemas siguientes no tratan directamente de ondas pero ilustran el empleo del vector de Poynting para describir el flujo de energía electromagnética.

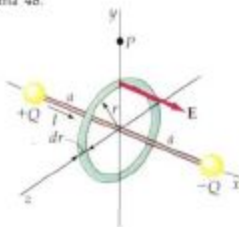
45. Por un conductor cilíndrico largo de longitud L , radio a y resistividad ρ , circula una corriente estacionaria I que está distribuida uniformemente en toda su sección recta. (a) Utilizar la ley de Ohm para relacionar el campo eléctrico E en el conductor con I , ρ y a . (b) Hallar el campo magnético B en el exterior pero justo al conductor. (c) Utilizar los resultados de las partes (a) y (b) para calcular el vector de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ en $r = a$ (superficie del conductor). ¿En qué dirección está \mathbf{S} ? (d) Hallar el flujo $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ que atraviesa la superficie del conductor desde su interior y demostrar que el ritmo de flujo de energía dentro del conductor es igual a $I^2 R$, siendo R su resistencia. (Aquí \mathbf{S} , es el componente hacia dentro de \mathbf{S} perpendicular a la superficie del conductor.)

46. Un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud transporta una corriente que aumenta lentamente con el tiempo. El solenoide tiene un radio R y la corriente en el arrollamiento tiene la forma $I(t) = at$. (a) Hallar el campo eléctrico inducido a una distancia $r < R$ del eje del solenoide. (b) Hallar el módulo y la dirección del vector de Poynting \mathbf{S} en la superficie cilíndrica $r = R$ justo en el interior del arrollamiento. (c) Calcular el flujo $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ dentro del solenoide y demostrar que es igual al ritmo de crecimiento de la energía magnética dentro del solenoide. (Aquí \mathbf{S} , es el componente hacia dentro de \mathbf{S} perpendicular a la superficie del solenoide.)

47. Partículas suficientemente pequeñas pueden verse alejadas del sistema solar por la presión de radiación del Sol. Suponer que las partículas son esféricas con radio r y densidad de 1 g/cm^3 y que absorben toda la radiación con un área eficaz de πr^2 . Están a una distancia R del Sol, que tiene una potencia de emisión de $3,83 \times 10^{26}$ W. ¿Cuál es el radio r para el cual la fuerza repulsiva de la radiación equilibre exactamente la fuerza gravitatoria de atracción del Sol?

48. En este problema se ha de demostrar que la forma generalizada de la ley Ampère (ecuación 29-4) y la ley de Biot y Savart dan el mismo resultado en los casos en que puedan utilizarse ambas. La figura 29-12 muestra dos cargas $+Q$ y $-Q$ sobre el eje x en $x = -a$ y $x = +a$, y con una corriente $I = -dQ/dt$ circulando a lo largo de la línea entre ambas. El pun-

Figura 29-12 Problema 48.



to P está sobre el eje y en $y=R$. (a) Utilizar la ecuación 25-12, obtenida a partir de la ley de Biot y Savart, para demostrar que el módulo de B en el punto P es

$$B = \frac{\mu_0 J a}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

(b) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr en el plano yz con su centro en el origen. Demostrar que el flujo del campo eléctrico que atraviesa este anillo es

$$E_r dA = (Q/\epsilon_0) a (r^2 + a^2)^{-3/2} r dr$$

(c) Utilizar el resultado de (b) para hallar el flujo total ϕ_e que atraviesa un área circular de radio R . Demostrar que

$$\epsilon_0 \phi_e = Q(1 - a/\sqrt{a^2 + R^2})$$

(d) Hallar la corriente de desplazamiento I_d y demostrar que

$$I + I_d = I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

(e) Entonces demostrar que la ecuación 29-4 da el mismo resultado para B que el encontrado en la parte (a).

49. (a) Utilizando razonamientos semejantes a los que se dan en el texto, demostrar que en el caso de una onda plana, en la que E y B son independientes de y y z ,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

(b) Demostrar que E_x y B_z también satisfacen la ecuación de ondas.

50. Algunos escritores de ciencia ficción han utilizado velas solares para propulsar naves interestelares. Imaginemos una vela gigante montada sobre una nave y sometida a la presión de la radiación solar. (a) Demostrar que la aceleración de la nave viene dada por

$$a = \frac{P_s A}{4\pi r^2 c m}$$

en donde P_s es la potencia emitida por el Sol y que es igual a 3.8×10^{26} W, A es el área de la superficie de la vela, m la masa total de la nave, r la distancia del Sol y c la velocidad de la luz. (b) Demostrar que la velocidad de la nave a una distancia r del Sol se calcula mediante

$$v^2 = v_0^2 + \left(\frac{P_s A}{2\pi m c} \right) \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

en donde v_0 es la velocidad inicial en la r_0 . (c) Comparar las aceleraciones relativas debidas a la presión de radiación y a la fuerza gravitatoria. Utilizar valores razonables para A y m . ¿Funcionará un sistema así?

51. En las tiendas de artículos de novedad se vende un aparato denominado radiómetro, indicado en la figura 29-13, en cuyo interior una especie de hélice bien equilibrada gira rápidamente. En cada brazo de la hélice se encuentra sujeta una laminilla, una de cuyas caras es blanca y la otra negra. Supongamos que la masa de cada laminilla es de 2 g, que el área colectora de luz de la misma vale 1 cm^2 y que cada brazo de la hélice tiene una longitud de 2 cm. (a) Si una bombilla de 100 W produce 50 W de energía electromagnética y la bombilla está a 50 cm del radiómetro, hallar la máxima aceleración angular de la hélice. (Estimar el momento de inercia de la hélice suponiendo que toda la masa de cada laminilla está situada en el extremo de los brazos). (b) ¿Cuánto tardará la hélice en acelerar a 10 rev/min si parte del reposo y se encuentra sometida a la aceleración angular máxima en todo instante? (c) ¿Puede justificar la presión de radiación el rápido movimiento del radiómetro? (El radiómetro realmente gira en sentido opuesto al que sería de esperar si la fuerza se debiese a la presión de radiación. La razón consiste en que el aire cercano a la cara negra está más caliente que el próximo a la cara blanca, de modo que las moléculas de aire que chocan contra la cara negra tienen más energía que las que inciden sobre la cara blanca.)

Figura 29-13 Radiómetro. Ver problema 51.





Parte

5

Óptica



Mediante luz polarizada se revelan los esquemas o diagramas de tensiones que aparecen alrededor de una grieta en una lámina de plástico transparente. La tensión es perpendicular a la grieta. Desde el extremo inferior de la grieta grande se han propagado otras dos más pequeñas, originando así otros esquemas adicionales de tensiones. Se aprecian unos defectos circulares más pequeños que circundan el extremo superior de la grieta mayor.

Capítulo 30

Luz

Fotografía de un arco iris primario brillante y del secundario más débil en una cortina de lluvia en el Lago Michigan. El arco primario se formó mediante los rayos de luz que entran en las gotas esféricas de agua y que se reflejan internamente una sola vez antes de salir de la misma. El arco secundario es el resultado de los rayos que experimentan dos reflexiones internas antes de emerger de la gota.



La luz ha estado intrigando a la humanidad durante siglos. Las teorías más antiguas consideraban a la luz como algo que era *emitido por* el ojo. Posteriormente se comprendió que la luz debía proceder de los objetos que se veían y que entraba en el ojo produciendo la sensación de la visión. La cuestión de si la luz está compuesta por un haz de partículas o si es un cierto tipo de movimiento ondulatorio ha sido una de las más interesantes en la historia de la ciencia. Entre los proponentes y defensores de la **teoría corpuscular de la luz** el más influyente fue sin duda Newton. Utilizando esta teoría pudo explicar las leyes de la reflexión y de la refracción. Sin embargo, su deducción de la ley de la refracción dependía de la hipótesis de que la luz se mueve con más rapidez en el agua o en el vidrio que en el aire, hipótesis que posteriormente se demostró que era falsa. Los principales proponentes de la **teoría ondulatoria de la luz** fueron Christian Huygens y Robert Hooke. Utilizando su propia teoría de la propagación de las ondas, Huygens fue capaz de explicar la reflexión y la refracción suponiendo que la luz viaja más lentamente en el vidrio o el agua que en el aire. Newton se dio cuenta de las ventajas de la teoría ondulatoria de la luz, particularmente porque explicaba los colores formados por las películas delgadas, que había estudiado a fondo. No obstante, rechazó la teoría ondulatoria debido a la aparente propagación rectilínea de la luz. En su época no se había observado aún la difracción, desviación del haz luminoso que le permite rodear obstáculos. Debido a la gran reputación y autoridad de Newton, sus seguidores se adherieron estrictamente a su rechazo

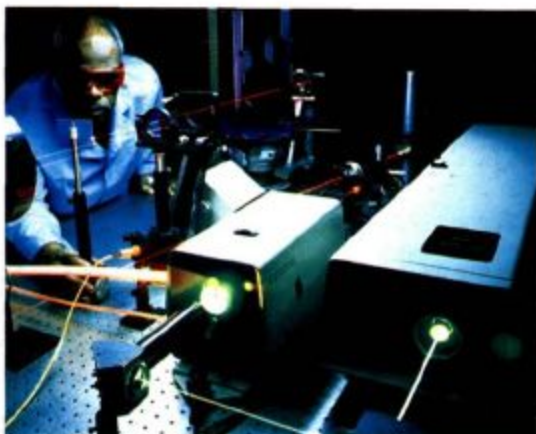
de la teoría ondulatoria de la luz. Incluso después de disponer de pruebas de la difracción de la luz, los seguidores de Newton intentaron explicarla basándose en un proceso de dispersión de los corpúsculos luminosos en los bordes de las rendijas.

La teoría corpuscular de la luz de Newton fue aceptada durante más de un siglo. Luego, en 1801, Thomas Young revitalizó la teoría ondulatoria de la luz. Fue uno de los primeros en introducir la idea de interferencia como un fenómeno ondulatorio que se presenta tanto en la luz como en el sonido. Sus observaciones de las interferencias obtenidas con la luz fueron una clara demostración de su naturaleza ondulatoria. Sin embargo, el trabajo de Young no fue conocido por la comunidad científica durante más de diez años. Quizás el mayor avance en lo que se refiere a la aceptación general de la teoría ondulatoria de la luz, se debió al físico francés Augustin Fresnel (1782-1827), que realizó extensos experimentos sobre interferencia y difracción y desarrolló la teoría ondulatoria sobre una sana base matemática. Demostró, por ejemplo, que la observada propagación rectilínea de la luz es un resultado de las longitudes de onda tan cortas de la luz visible. En 1850, Jean Foucault midió la velocidad de la luz en el agua y comprobó que es menor que en el aire, acabando así con la teoría corpuscular de la luz de Newton. En 1860, James Clerk Maxwell publicó su teoría matemática del electromagnetismo, que predecía la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con una velocidad calculada mediante las leyes de la electricidad y el magnetismo y que resultaba valer 3×10^8 m/s, el mismo valor que el de la velocidad de la luz. La teoría de Maxwell fue confirmada en 1887 por Hertz, quien utilizó un circuito eléctrico sintonizado para generar las ondas y otro circuito semejante para detectarlas. En la segunda mitad del siglo XIX, Kirchhoff y otros científicos aplicaron las leyes de Maxwell para explicar la interferencia y difracción de la luz y de otras ondas electromagnéticas y apoyar los métodos empíricos de Huygens de construcción de ondas sobre una base matemática firme.

Aunque la teoría ondulatoria es generalmente correcta cuando describe la propagación de la luz (y de otras ondas electromagnéticas), falla a la hora de explicar otras propiedades de la luz, especialmente la interacción de la luz con la materia. Hertz, en un famoso experimento de 1887 que confirmó la teoría ondulatoria de Maxwell, también descubrió el efecto fotoeléctrico, que será estudiado con detalle en el capítulo 35. Este efecto sólo puede explicarse mediante un modelo de partículas para la luz, como Einstein demostró sólo unos pocos años después. Así se volvió a introducir un modelo corpuscular de la luz. Las partículas de luz se denominan **fotones** y la energía E de un fotón está relacionada con la frecuencia f de la onda luminosa asociada por la famosa relación de Einstein $E = hf$, en donde h es una constante llamada la *constante de Planck*. No se logró una comprensión completa de la naturaleza dual de la luz hasta la década de los 20, cuando los experimentos realizados por C.J. Davisson y L. Germer y por G.P. Thompson demostraron que los electrones (y otras «partículas») también tenían una naturaleza dual y que presentan las propiedades de interferencia y difracción además de sus bien conocidas propiedades de partículas. (Estudiaremos la naturaleza doble de la luz y de los electrones en el capítulo 35.)

El desarrollo de la teoría cuántica de los átomos y de las moléculas por Rutherford, Bohr, Schrödinger y otros científicos de este siglo condujo a un mejor entendimiento de la emisión y absorción de la luz por la materia. Ahora se sabe que la luz emitida o absorbida por los átomos es el resultado de los cambios de energía de los electrones exteriores de los átomos. Debido a que estas variaciones de energía están cuantizadas en lugar de ser continuas, los fotones emitidos tienen energías discretas que originan ondas luminosas con un conjunto discreto de frecuencias y longitudes de onda semejante al conjunto de frecuencias y longitudes de onda que se observan en las ondas sonoras estacionarias. Observada a través de un espectroscopio con una abertura en forma de rendija estrecha, la luz emitida por un átomo aparece como un conjunto discreto de líneas o rayas de diferentes colores o longitudes de onda, siendo característico de cada elemento el espaciado e intensidad de dichas líneas.

Los desarrollos tecnológicos que han tenido lugar en la segunda mitad de este siglo han conducido a un renovado interés sobre la óptica tanto teórica como aplicada. La consecución de ordenadores de alta velocidad ha permitido unas grandes mejoras en el proyecto de sistemas ópticos complejos. Las fibras ópticas



(a)

(a) Desde que fue inventado en 1960, el láser ha encontrado multitud de aplicaciones. (b) Un láser de dióxido de carbono emplea exactamente dos minutos en cortar una hoja de sierra de acero. (c) El lector de etiquetas de los supermercados es ahora algo común. (d) Se utiliza un láser de helio-neón montado sobre una camioneta para medir el espacio libre que posee un túnel. (e) En la cirugía ocular se emplea, como se ve aquí, un haz láser de colorante líquido transmitido por una fibra óptica.



(b)

están sustituyendo rápidamente a los conductores eléctricos para la transmisión de datos. El láser, inventado en 1960, ha llevado al descubrimiento de un cierto número de nuevos efectos ópticos. Hoy en día, los láseres se utilizan para leer las etiquetas en los supermercados, para realizar operaciones quirúrgicas en los hospitales, para imprimir revistas y para leer discos compactos en los sistemas de audio ordinarios. La técnica de reconstrucción de frentes de onda conocida como holografía, desarrollada a finales de los 40, se utiliza ahora en ensayos no destructivos y para el almacenamiento de datos.

En este capítulo empezaremos examinando algunos de los primeros sistemas de medida de la velocidad de la luz. Luego estudiaremos los fenómenos básicos de la reflexión, la refracción, la dispersión y la polarización. Todos ellos pueden comprenderse adecuadamente utilizando rayos para describir la propagación rectilínea de la luz y desentendiéndose de los efectos producidos por la interferencia y la difracción. Como vimos en el capítulo 14, la aproximación de los rayos es válida para la propagación de cualquier movimiento ondulatorio si la longitud de onda es pequeña en comparación con las aberturas u obstáculos que la onda encuentra en su camino. Ésta suele ser la situación en óptica porque las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas dentro del margen de 400 nm aproximadamente ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) correspondiente a la luz violeta hasta unos 700 nm para la luz roja.

30-1 Velocidad de la luz

El primer esfuerzo para medir la velocidad de propagación de la luz fue hecho por Galileo. Se situó en la cima de una colina mientras que otro observador se colocaba en la cima de otra, distante aproximadamente 1 km, teniendo los dos una linterna y un obturador para ocultar la luz. Galileo propuso medir el tiempo que tarda la luz en recorrer dos veces la distancia entre los experimentadores. *A* debería descubrir su linterna y cuando *B* viese la luz debería descubrir la suya. El tiempo transcurrido a partir del momento en que *A* destapase su linterna y el momento en que éste veía la luz procedente de *B* debería ser el tiempo que la luz tardaba en recorrer ida y vuelta el espacio entre los experimentadores. Aunque este método es correcto en principio, la velocidad de la luz es tan grande que el intervalo de tiempo a medir es mucho menor que las fluctuaciones de la respuesta humana y Galileo fue incapaz de obtener un valor razonable de la velocidad de la luz.



La primera indicación del verdadero valor de la velocidad de la luz procedió de observaciones astronómicas basadas en la medida del período de Io, una de las lunas de Júpiter. Este período se determina midiendo el tiempo entre dos eclipses de la misma (es decir, cuando la luna Io desaparece detrás de Júpiter). El período de eclipses es aproximadamente 42,5 h, pero cuando se hacen medidas en el momento en que la Tierra se está alejando de Júpiter, como ocurre en el trayecto *ABC* de la figura 30-1, se tienen unas medidas de tiempo mayores para este período que cuando las medidas se hacen en las posiciones en que la Tierra se está moviendo hacia Júpiter, a lo largo del trayecto *CDA* de la figura. Como estas medidas difieren sólo aproximadamente en 15 s del valor medio, estas discrepancias eran a su vez difíciles de medir con exactitud. En 1675 el astrónomo Ole Römer atribuyó estas discrepancias al hecho de que la velocidad de la luz no es infinita. Durante las 42,5 h que transcurren entre dos eclipses de la luna de Júpiter, varía la distancia entre la Tierra y Júpiter, haciendo que el trayecto que ha de seguir la luz sea más largo o más corto. Römer ideó el siguiente método para medir el efecto acumulativo de estas discrepancias. Despreciaba el movimiento de Júpiter (es mucho menor que el de la Tierra). Cuando la Tierra está en el punto más próximo *A*, se mide el período de Io. Se calcula entonces el tiempo en que debe producirse un eclipse medio año después, es decir, cuando la Tierra está en el punto *C*. El tiempo en que se observa el eclipse es aproximadamente 16,6 minutos después del previsto. Este es el tiempo que emplea la luz en recorrer una distancia igual al diámetro de la órbita terrestre.

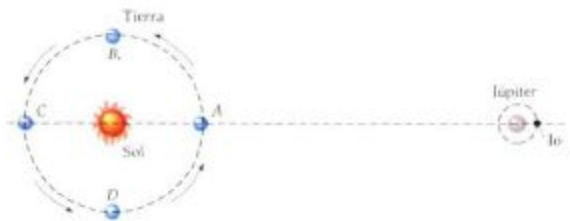


Figura 30-1 Método de Römer para medir la velocidad de la luz. El tiempo que transcurre entre dos eclipses sucesivos de la luna Io de Júpiter parece mayor cuando la Tierra se está moviendo según la trayectoria *ABC*, que si sigue la trayectoria *CDA*. La diferencia se debe al tiempo que emplea la luz en recorrer la distancia en que se ha trasladado la Tierra a lo largo de la línea de visión directa durante un período de Io. (La distancia recorrida por Júpiter en un año terrestre es despreciable.)

Ejemplo 30-1

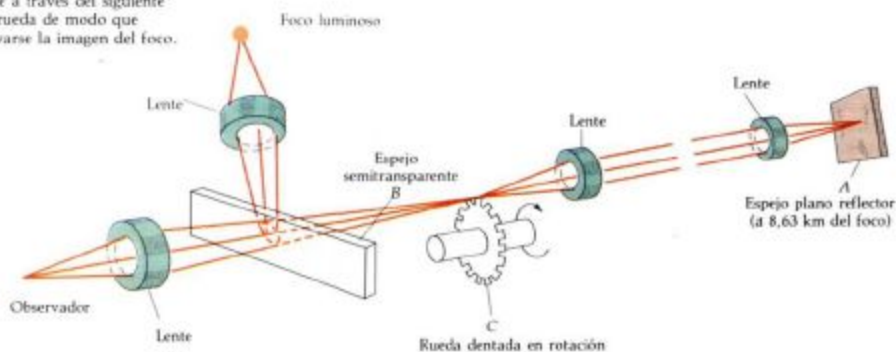
El diámetro de la órbita terrestre es $3,00 \times 10^{11}$ m. Si la luz tarda 16,6 min en recorrer esta distancia, ¿cuál es la velocidad de la luz?

El número de segundos en 16,6 min es $(16,6 \text{ min}) \times (60 \text{ s/min}) = 996$ s. Así pues, la velocidad media de la luz es

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3,00 \times 10^{11} \text{ m}}{996 \text{ s}} = 3,01 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Römer obtuvo un valor considerablemente menor para c porque consideró que Δt valía 22 min.

Figura 30-2 Método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. La luz procedente de un foco se refleja en el espejo B y se transmite por el hueco que existe entre los dientes de la rueda dentada hasta el espejo A. La velocidad de la luz se determina midiendo la velocidad angular de la rueda que permite que la luz reflejada pase a través del siguiente hueco de la rueda de modo que pueda observarse la imagen del foco.



El método de Fizeau fue mejorado por Foucault, quien reemplazó la rueda dentada por un espejo rotativo de ocho caras, como se indica en la figura 30-3. La luz incide sobre una cara del espejo y, luego de reflejarse en un espejo fijo alejado, cae sobre otra cara en donde se refleja entonces hacia un telescopio de observación. (El dispositivo experimental real fue algo más complicado de lo que muestra el simple diagrama de la figura 30-3.) Cuando el espejo gira un octavo de vuelta (o $n/8$ vueltas, siendo n un número entero) otra de las caras del espejo se encontrará en posición correcta para que la luz reflejada entre en el telescopio. Alrededor de 1850, Foucault midió la velocidad de la luz en aire y en agua y demostró que es inferior en el caso del agua. Utilizando esencialmente el mismo método, el físico americano A.A. Michelson realizó mediciones precisas de la velocidad de la luz desde 1880 hasta 1930.

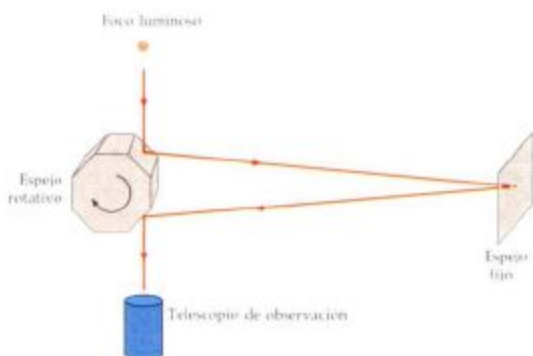


Figura 30-3 Esquema simplificado del método de Foucault para medir la velocidad de la luz. Esencialmente, se ha sustituido la rueda dentada en rotación de Fizeau por un espejo octogonal en rotación. Cuando el espejo da un octavo de vuelta durante el tiempo que la luz emplea para ir y volver al espejo fijo, la siguiente cara del espejo está en la posición adecuada para reflejar la luz hacia el telescopio de observación.

En otro método de determinación de la velocidad de la luz interviene la medición de la constante eléctrica ϵ_0 para determinar c a partir de

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Puede obtenerse la constante ϵ_0 midiendo la capacidad de un condensador de placas paralelas. Se define la constante μ_0 en función de la definición del amperio, que, a su vez, determina el valor del culombio.

Los diversos métodos que hemos considerado para la medida de la velocidad de la luz concuerdan todos satisfactoriamente. Se define en la actualidad que la velocidad de la luz es exactamente

$$c = 299\,792\,457 \text{ m/s}$$

y entonces se define en función de esta velocidad la unidad estándar de longitud, el metro. Una medición de la velocidad de la luz equivale ahora, por tanto, a una medición del tamaño del metro, que es la distancia que recorre la luz en $(1/299\,792\,457)$ s. El valor de 3×10^8 m/s para la velocidad de la luz es suficientemente exacto para la mayor parte de las aplicaciones. La velocidad de las ondas de radio y de todas las demás ondas electromagnéticas (en el vacío) es la misma que la velocidad de la luz.

Ejemplo 30-2

En el experimento de Fizeau, la rueda tenía 720 dientes y se observaba la luz cuando la rueda giraba a 25,2 revoluciones por segundo. Si la distancia entre la rueda y el espejo distante era de 8,63 km, ¿cuál fue el valor que obtuvo Fizeau para la velocidad de la luz?

La distancia total recorrida por la luz desde el hueco de la rueda al espejo y vuelta, era $2 \times 8,63 \text{ km} = 17,3 \text{ km}$. La luz reflejada pasaba por el hueco siguiente de la rueda, de forma que la rueda había girado $1/720$ revoluciones. Como la rueda daba 25,3 revoluciones por segundo, el tiempo empleado en girar $1/720$ revoluciones era

$$\Delta t = \frac{1 \text{ s}}{25,3 \text{ rev}} \left(\frac{1}{720} \text{ rev} \right) = 5,49 \times 10^{-5} \text{ s}$$

El valor de la velocidad de la luz obtenido con este experimento es entonces

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{17,3 \times 10^3 \text{ m}}{5,49 \times 10^{-5} \text{ s}} = 3,15 \times 10^8 \text{ m/s}$$

que es cerca de un 5 por ciento demasiado alto.

Ejemplo 30-3

Los viajeros espaciales que llegaron a la Luna utilizaban ondas electromagnéticas para comunicarse con el centro de control espacial en la Tierra. ¿Cuál es el retardo de tiempo para que su señal alcance la Tierra a una distancia de $3,84 \times 10^8$ m?

Utilizando el valor de 3×10^8 m/s como velocidad de la luz y de otras ondas electromagnéticas se encuentra que el tiempo que tarda la señal en recorrer la distancia Luna-Tierra es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{3,84 \times 10^8 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1,28 \text{ s}$$

El retardo de tiempo es, pues, de 1,28 s cada vez.

Ejemplo 30-4

El Sol está a $1,50 \times 10^{11}$ m de la Tierra. ¿Cuánto tarda la luz solar en llegar a la Tierra?

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{1,50 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 500 \text{ s} = 8,33 \text{ min}$$

(a) Un pulso de luz de 10 ps procedente de un láser de vidrio dopado con neodimio está pasando a través de una célula de agua calibrada en milímetros. La longitud del pulso es del orden de 2,2 mm. (b) Ecos luminosos de la explosión de una supernova que se produjo hace 170 000 años. La luz directa de la explosión fue vista por primera vez en la Tierra en febrero de 1987. La luz reflejada en las nubes de polvo cercanas a la explosión llegaron a la Tierra meses o años después. La comparación entre las placas fotográficas expuestas en 1987 y 1989 muestran los anillos exteriores que se observan como resultado de la reflexión en las nubes de polvo.

Las distancias grandes suelen darse en función del tiempo que tarda la luz en recorrer las mismas. Por ejemplo, la distancia al Sol es de 8,33 minutos-luz, que se escribe como 8,33 c-min. Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año. Es fácil encontrar un factor de conversión entre años-luz y metros. El número de segundos en un año es

$$1 \text{ a} = 1 \text{ a} \times \frac{365,24 \text{ d}}{1 \text{ a}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$$

El número de metros a que equivale un año-luz es, pues,

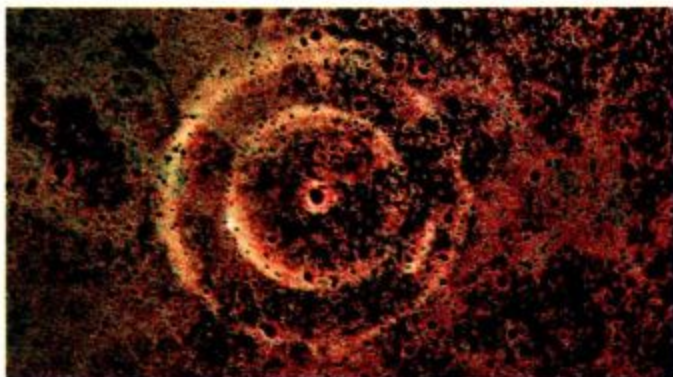
$$1 \text{ c-año} = (2,998 \times 10^8 \text{ m/s})(3,156 \times 10^7 \text{ s}) = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$$

Cuestión

1. Estimar el tiempo que emplea la luz para hacer el viaje de ida y vuelta en el experimento de Galileo para determinar la velocidad de la luz.



(a)



(b)

30-2 Propagación de la luz: Principio de Huygens

En la figura 30-4 puede verse una porción de un frente de onda esférico que procede de un foco puntual. El frente de onda es el lugar geométrico de los puntos con fase constante. Si en el instante t el radio del frente de onda es r , su radio en el instante $t + \Delta t$ es $r + c \Delta t$, siendo c la velocidad de la onda. Sin embargo, si una parte de la onda se ve bloqueada por un cierto obstáculo, o si la onda pasa a través de distintos medios, como en la figura 30-5, es mucho más difícil la determinación del nuevo frente de onda en el instante $t + \Delta t$.

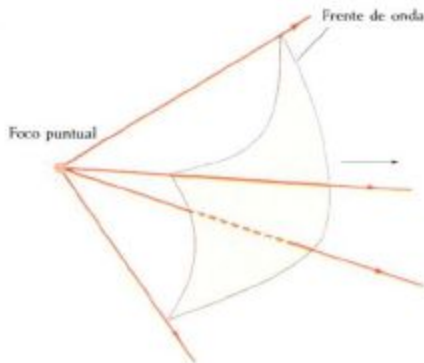


Figura 30-4 Frente de onda esférico procedente de un foco puntual.

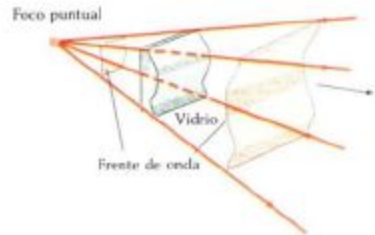


Figura 30-5 Frente de onda procedente de un foco puntual antes y después de atravesar una pieza de vidrio de forma irregular.

La propagación de una onda cualquiera a través del espacio puede describirse utilizando un método geométrico descubierto por Christian Huygens en 1678 y que ahora se conoce como **principio de Huygens** o **construcción de Huygens**:

Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de ondas elementales secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.

La figura 30-6 muestra la aplicación del principio de Huygens a la propagación de una onda plana y de una onda esférica. Como es natural, si todos los puntos de un frente de onda fuesen realmente un foco puntual, habrían también ondas moviéndose hacia atrás. Huygens no tuvo en cuenta estas ondas en retroceso.

El principio de Huygens fue posteriormente modificado por Fresnel, de modo que se calculaba el nuevo frente de onda a partir del frente de onda primitivo mediante la superposición de las ondas elementales considerando sus amplitudes y fases relativas. Aún más tarde Kirchhoff demostró que el principio de Huygens-Fresnel era una consecuencia de la ecuación de ondas, situándolo así sobre una base matemática firme. Kirchhoff demostró que la intensidad de las ondas elementales depende del ángulo y que es nula en sentido hacia atrás.

En este capítulo utilizaremos el principio de Huygens para deducir las leyes de la reflexión y refracción. En el capítulo 33, aplicaremos el principio de Huygens con la modificación de Fresnel para calcular el esquema de difracción de una sola rendija.



Figura 30-6 Construcción de Huygens para la propagación hacia la derecha de (a) una onda plana y (b) una onda esférica o circular de partida.

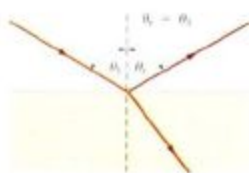


Figura 30-7 El ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_i .

Ley de la reflexión

$$\theta_r = \theta_i \quad 30-1$$

Este resultado se conoce como **ley de la reflexión** y es válida para cualquier tipo de onda. La figura 30-8 ilustra la ley de la reflexión en el caso de rayos de luz y de frentes de ondas de ultrasonidos.

La fracción de energía luminosa reflejada en un límite como la superficie aire-vidrio depende de una forma complicada del ángulo de incidencia, de la orientación del vector de campo eléctrico asociado con la onda y de la velocidad relativa de la luz en el primer medio (aire) y en el segundo (vidrio). La velocidad de la luz en un medio como el vidrio, el agua, o el aire, se caracteriza mediante el **índice de refracción** n , que se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad en el medio v :

Índice de refracción

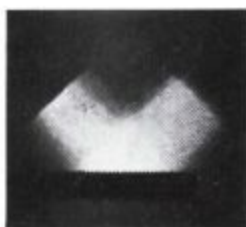
$$n = \frac{c}{v} \quad 30-2$$

En el caso especial de incidencia normal ($\theta_i = \theta_r = 0^\circ$), puede demostrarse que la intensidad reflejada vale

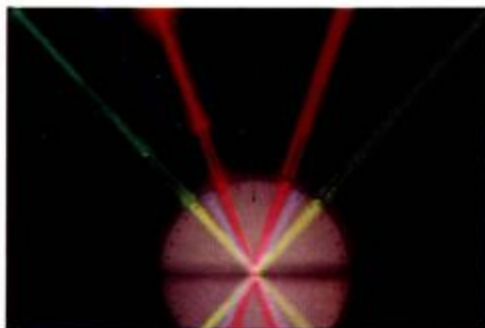
$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0 \quad 30-3$$

en donde I_0 es la intensidad incidente y n_1 y n_2 los índices de refracción de los dos medios. En el caso de una reflexión típica en una superficie aire-vidrio en

Figura 30-8 (a) Ondas planas de ultrasonidos en agua que se reflejan sobre una placa de acero. (b) Rayos de luz reflejándose en una superficie aire-vidrio en donde se aprecia la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión.



(a)



(b)

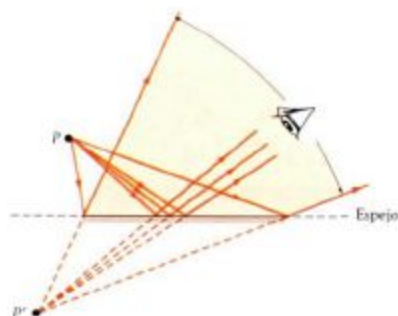


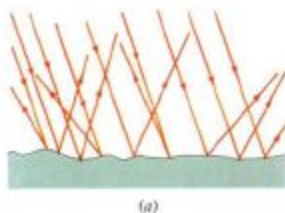
Figura 30-9 Los rayos procedentes de un foco P reflejados por un espejo y que llegan al ojo parecen proceder del punto imagen P' detrás del espejo. La imagen puede verse cuando el ojo está en un punto cualquiera de la región sombreada.

la que $n_1=1$ y $n_2=1.5$, la ecuación 30-3 nos da $I=I_0/25$. Es decir, sólo alrededor del 4 por ciento de la energía se refleja; el resto se transmite.

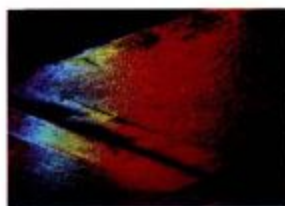
La figura 30-9 muestra un haz estrecho de rayos luminosos procedentes de un foco puntual P que se reflejan en una superficie plana. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' que se encuentra detrás de la superficie. El punto P' se denomina **imagen** del punto P . Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que divergirían de una fuente en P' como si no hubiese ninguna superficie presente. (Estudiaremos la formación de imágenes mediante superficies reflectoras y refractoras en el capítulo siguiente.) La reflexión en una superficie suave y lisa se denomina **reflexión especular**. Difiere de la **reflexión difusa**, que se ilustra en la figura 30-10. En este último caso, puesto que la superficie es rugosa, los rayos entran en el ojo procedentes de muchos puntos de reflexión en la superficie, de modo que no existe una imagen. La reflexión de la luz en la página de este libro es una reflexión difusa. A veces se utilizan vidrios ligeramente esmerilados para cubrir marcos, de forma que se obtenga una reflexión difusa y se elimine, por tanto, los reflejos y brillos de la luz utilizada para iluminar los cuadros. La reflexión difusa de la carretera es la que nos permite verla cuando se conduce de noche, porque parte de la luz de los faros se refleja difusamente en la superficie de la carretera y vuelve hacia nosotros.

El mecanismo físico de la reflexión de la luz puede comprenderse en función de la absorción y reradiación de la luz por los átomos del medio reflector. Cuando la luz que se transmite por el aire incide sobre una superficie de vidrio, los átomos de éste absorben la luz y la reradian con la misma frecuencia en todas direcciones. Las ondas radiadas hacia atrás por los átomos de vidrio interfieren constructivamente en un ángulo igual al de incidencia produciendo así la onda reflejada.

La ley de la reflexión puede deducirse mediante el principio de Huygens. La figura 30-11 muestra un frente de ondas plano AA' incidiendo sobre un espejo en el punto A . El ángulo θ_i entre el rayo perpendicular a este frente de onda y la normal al espejo se denomina ángulo de incidencia. Como puede verse en la



(a)



(b)

Figura 30-10 (a) Reflexión difusa en una superficie rugosa. (b) Fotografía de la reflexión difusa de luces de colores en una acera.

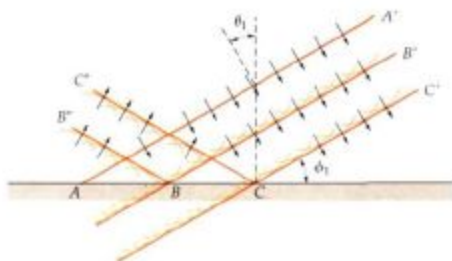
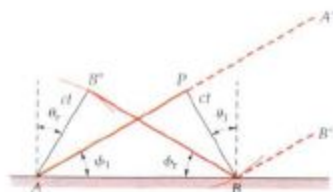


Figura 30-11 Onda plana reflejada en un espejo plano. El ángulo θ_i entre el rayo incidente y la normal al espejo es el ángulo de incidencia. Es igual al ángulo θ_r que forma el frente de onda incidente con el espejo.

Figura 30-12 Geometría de la construcción de Huygens para el cálculo de la ley de la reflexión. El frente de onda AP incide inicialmente en el espejo en el punto A . Después de un tiempo t , la onda secundaria de Huygens procedente de P incide en el espejo en el punto B y la de A alcanza el punto B' .



figura, el ángulo de incidencia θ_i es igual al ángulo ϕ_1 entre el frente de onda incidente y el espejo. De acuerdo con el principio de Huygens, cada punto de un frente de ondas puede considerarse como un punto de una fuente de ondas elementales secundarias. La posición del frente de onda al cabo de un tiempo t se encuentra construyendo las ondas elementales de radio ct con centros en el frente de onda AA' . Las ondas elementales que no inciden en el espejo forman la parte BB' del nuevo frente de onda. Los frentes de ondas que inciden en el espejo se reflejan y forman la parte BB'' del nuevo frente de onda. Mediante una construcción semejante, se obtiene el frente de onda $C''C''$ a partir de las ondas elementales de Huygens que se originan en el frente de onda $B''B''$. La figura 30-12 es una parte aumentada de la figura 30-11 en la que se ve parte del frente de onda original AP que incide sobre el espejo en el tiempo t . En este tiempo la onda elemental procedente del punto P alcanza al espejo en el punto B y la onda elemental procedente del punto A lo alcanza en el punto B' . El frente de onda reflejado BB'' forma un ángulo ϕ_2 con el espejo que es igual al ángulo de reflexión θ_r entre el rayo reflejado y la normal al espejo. Los triángulos ABP y BAB'' , son ambos triángulos rectángulos con la hipotenusa común AB y los catetos iguales $AB'' = BP = ct$. De aquí que estos triángulos sean semejantes y que los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 sean iguales, lo cual implica que el ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_i , que es exactamente la ley de la reflexión.

Cuestión

- Si sobre la carretera existe una capa fina de agua, ¿cómo afecta esto a la luz que se ve reflejada en la carretera procedente de nuestros propios faros? ¿Cómo afecta a la luz que se refleja procedente de los faros de un coche que viene de frente?



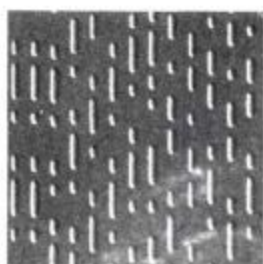
(a)



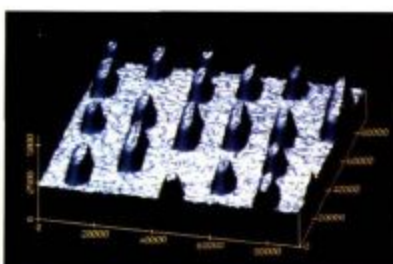
(b)



(c)



(d)



(e)

La reflexión de la luz láser se utiliza para leer discos compactos. (a) En un lector de discos compactos, el láser está a menos de 2 mm de distancia del fondo del disco cuando está girando. (b) Cabezal láser utilizado para leer un disco compacto. (c) Un disco compacto tiene un diámetro de 12 cm y un espesor de 1,2 mm. (d) La información en un disco compacto se almacena digitalmente en estos trazos que tienen

una profundidad de $0,12 \mu\text{m}$, una anchura de $0,6 \mu\text{m}$ y de $0,9$ a $3,3 \mu\text{m}$ de longitud. Los bordes del comienzo y final de cada trazo representan un 1 binario, mientras que las zonas intermedias representan un 0 binarios. (e) Estampa para producir los trazos que se indican en (d).

30-4 Refracción

Cuando un haz de luz incide sobre una superficie límite de separación entre dos medios, tal como una superficie aire-vidrio, parte de la energía luminosa se refleja y parte entra en el segundo medio. El cambio de dirección del rayo transmitido se denomina **refracción**.

La onda transmitida es el resultado de la interferencia entre la onda incidente y la onda producida por la absorción y reradiación de la energía de la luz por los átomos del medio. En el caso de que la luz entre en el vidrio procedente del aire, existe un retraso de fase entre la onda reradiada y la onda incidente. Por tanto, existe también un retraso de fase entre la onda resultante y la onda incidente. Este retraso de fase significa que la posición de una cresta de onda de la onda transmitida está retardada respecto a la posición de las crestas de onda de la onda incidente en el medio. Por consiguiente, en un tiempo determinado, no llega tan lejos dentro del medio como si fuese la onda incidente original; es decir, la velocidad de la onda transmitida es menor que la de la onda incidente. El índice de refracción, que es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la que posee en el medio, es por consiguiente mayor que 1. Por ejemplo, la velocidad de la luz en el vidrio es del orden de los dos tercios de la velocidad de la luz en el vacío. El índice de refracción de los vidrios, por tanto, es aproximadamente $n = c/v = 3/2$.

Como la frecuencia de la luz en el segundo medio es la misma que la de la luz incidente —los átomos absorben y reradian la luz con la misma frecuencia—, pero la velocidad de la luz es diferente, la longitud de onda de la luz transmitida es distinta de la que posee la luz incidente. Si la longitud de onda en el vacío es λ , la longitud de onda λ' en un medio de índice de refracción n es

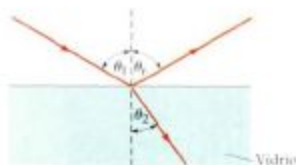
$$\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{c/n}{f} = \frac{\lambda}{n} \quad 30-4$$

Ejercicio

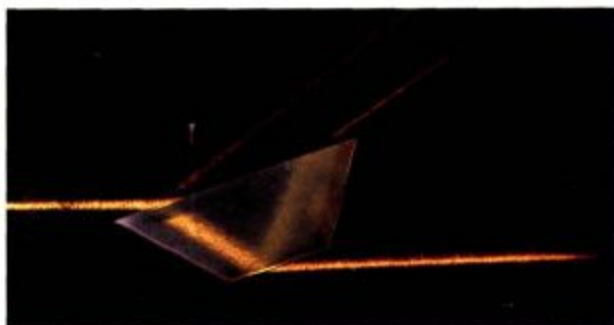
La luz del sodio tiene una longitud de onda de 589 nm en el vacío. Hallar la longitud de onda de la luz de sodio (a) en agua, con $n = 1,33$ y (b) en vidrio, con $n = 1,50$. [Respuestas: (a) 443 nm, (b) 393 nm]

La figura 30-13 muestra la luz incidiendo sobre una superficie plana aire-vidrio. El rayo que entra en el vidrio se denomina rayo refractado y el ángulo θ_2 se denomina ángulo de refracción. El ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia θ_1 , como se ve en la figura; es decir, el rayo refractado se desvía acercándose hacia la normal. Si, por otra parte, el haz de luz se origina

Figura 30-13 (a) Rayos incidente, reflejado y refractado en el caso de luz que incide sobre una superficie aire-vidrio. El ángulo de refracción θ_2 es menor que el de incidencia θ_1 . (b) Reflexión y refracción de una haz de luz que incide sobre una placa de vidrio. El haz refractado se refleja parcialmente y se refracta parcialmente en la superficie inferior vidrio-aire.



(a)



(b)

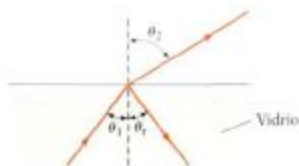


Figura 30-14 Refracción de un medio denso a otro menos denso. En este caso, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. El rayo de luz se desvía alejándose de la normal.

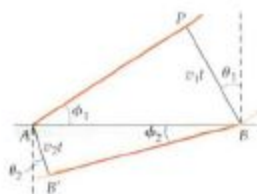


Figura 30-15 Aplicación del principio de Huygens a la refracción de ondas planas en la superficie que separa un medio, en el que la velocidad de la onda es v_1 , de otro en el que la velocidad es v_2 , inferior a v_1 . El ángulo de refracción en este caso es menor que el de incidencia.

en el vidrio y se refracta al pasar al aire, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia y el rayo refractado se desvía alejándose de la normal, como se ve en la figura 30-14. Podemos relacionar el ángulo de refracción con los índices de refracción de los dos medios n_1 y n_2 y con el ángulo de incidencia θ_1 , utilizando el principio de Huygens. En la figura 30-15 se ve una onda plana incidente sobre una superficie aire-vidrio. Apliquemos la construcción de Huygens para hallar el frente de onda de la onda transmitida. El segmento AP indica una porción del frente de onda en el medio 1 que incide sobre la superficie de vidrio con un ángulo de incidencia θ_1 . En el instante t la onda elemental procedente de P recorre la distancia $v_1 t$ y alcanza el punto B sobre la línea AB que separa ambos medios, mientras que la onda elemental procedente del punto A recorre una distancia menor $v_2 t$ dentro del segundo medio. El nuevo frente de onda BB' no es paralelo al frente de onda original AP porque son diferentes las velocidades v_1 y v_2 . Del triángulo APB ,

$$\text{sen } \phi_1 = \frac{v_1 t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_1 t}{\text{sen } \phi_1} = \frac{v_1 t}{\text{sen } \theta_1}$$

en donde hemos hecho uso de que el ángulo ϕ_1 es igual al de incidencia θ_1 . Análogamente, según el triángulo ABB' ,

$$\text{sen } \phi_2 = \frac{v_2 t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_2 t}{\text{sen } \phi_2} = \frac{v_2 t}{\text{sen } \theta_2}$$

en donde $\theta_2 = \phi_2$ es el ángulo de refracción. Igualando los dos valores obtenidos para AB , se tiene

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2} \quad 30-5$$

Sustituyendo $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$ en esta ecuación y multiplicando por c , se llega a

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad 30-6$$

Ley de Snell de la refracción

Este resultado fue descubierto experimentalmente en 1621 por Willebrod Snell, un científico holandés, y se conoce como *ley de Snell* o *ley de la refracción*. Algunos años después fue descubierta independientemente por René Descartes. La ecuación 30-6 es válida para la refracción de cualquier clase de onda que incide sobre la superficie límite de separación entre dos medios. La figura 30-16 muestra la refracción de ondas planas en el agua en un límite en el que la velocidad de la onda varía debido a que cambia la profundidad del agua.



Figura 30-16 Refracción de ondas planas en agua en un límite o frontera en el que varía la velocidad de la onda debido a que cambia la profundidad del agua. Obsérvese que también se produce reflexión en el límite.

Ejemplo 30-5

Luz que se mueve en el aire entra en agua con un ángulo de incidencia de 45° . Si el índice de refracción del agua es 1,33, ¿cuál es el ángulo de refracción?

Tomando $n=1$ para el aire, se obtiene a partir de la ecuación 30-6

$$\begin{aligned} (1,00) \operatorname{sen} 45^\circ &= (1,33) \operatorname{sen} \theta_2 \\ \operatorname{sen} \theta_2 &= \frac{(1,00) \operatorname{sen} 45^\circ}{1,33} = \frac{(1,00)(0,707)}{1,33} = 0,53 \end{aligned}$$

El ángulo cuyo seno es 0,53 es 32° .

En la figura 30-17 se ve una fuente puntual en vidrio con rayos incidiendo sobre la superficie vidrio-aire a diferentes ángulos. Todos los rayos se desvían alejándose de la normal. Al ir aumentando el ángulo de incidencia, crece el ángulo de refracción hasta que se alcanza un ángulo de incidencia crítico θ_c para el cual el ángulo de refracción es 90° . En el caso de ángulos de incidencia mayores que este ángulo crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. Este fenómeno se denomina **reflexión total interna**. Puede hallarse el ángulo crítico en función de los índices de refracción de los dos medios despejando en la ecuación 30-6 el $\operatorname{sen} \theta_2$ y haciendo θ_2 igual a 90° :

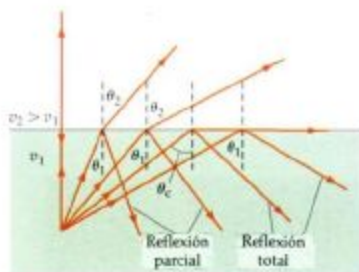
$$\operatorname{sen} \theta_1 = (n_2/n_1) \operatorname{sen} \theta_2$$

Poniendo $\theta_2 = 90^\circ$, obtenemos

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

30-7 *Ángulo crítico para la reflexión total interna*

Obsérvese que sólo se presenta la reflexión total interna cuando la luz se encuentra originalmente en el medio con mayor índice de refracción. Matemáticamente, si n_2 es mayor que n_1 , no puede verificarse la ecuación 30-7 porque no existe ningún ángulo real cuyo seno sea mayor que 1.



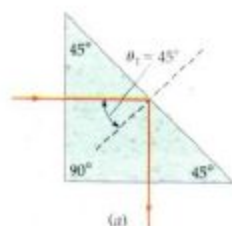
(a)



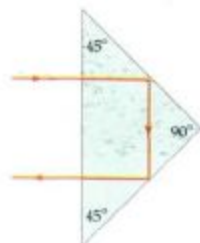
(b)

Figura 30-17 (a) Reflexión total interna. En el caso de la refracción del vidrio o del agua al aire, el rayo refractado se aleja de la normal. Cuando se hace aumentar el ángulo de incidencia, crece el ángulo de refracción hasta que, para un cierto ángulo crítico de incidencia θ_c , el ángulo de refracción

es 90° . Con ángulos de incidencia mayores que el crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. (b) Fotografía de la refracción y de la reflexión interna total en una superficie agua-aire.



(a)



(b)

Figura 30-18 (a) La luz que entra por uno de los catetos de un prisma rectangular isósceles se refleja totalmente dentro del prisma y emerge a través del otro cateto en dirección que forma un ángulo de 90° con la luz incidente. (b) La luz que entra por la hipotenusa del prisma se refleja totalmente dos veces y emerge en la misma dirección pero con sentido opuesto a la luz incidente.



(a)

Figura 30-19 (a) Un tubo de luz. La luz en el interior del tubo incide sobre las paredes siempre con un ángulo mayor que el crítico, de modo que no escapa ninguna luz por refracción de

Ejemplo 30-6

Un vidrio concreto tiene un índice de refracción $n = 1,50$. ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna de luz que sale de este vidrio y entra en el aire, que tiene $n = 1,00$?

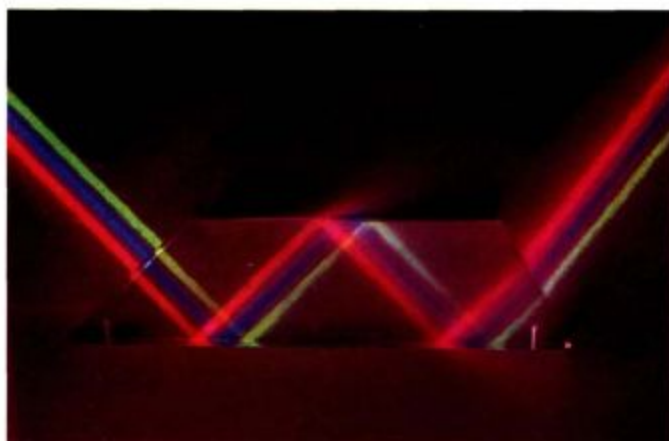
Con la ecuación 30-7, se obtiene para el ángulo crítico

$$\text{sen } \theta_c = \frac{1,00}{1,50} = 0,667$$

El ángulo cuyo seno es 0,667 es 42° .

La figura 30-18a muestra luz incidiendo normalmente sobre uno de los catetos de un prisma de vidrio de 45° - 45° - 90° . Si el índice de refracción del prisma vale 1,5, el ángulo crítico correspondiente a la reflexión total interna es 42° , como vimos en el ejemplo 30-6. Como el ángulo de incidencia del rayo sobre la superficie vidrio-aire es 45° , la luz se reflejará totalmente y saldrá perpendicularmente a la otra cara del prisma, como está indicado. En la figura 30-18b, la luz incide perpendicularmente a la hipotenusa del mismo tipo de prisma y se refleja totalmente dos veces, de modo que emerge a 180° respecto a su dirección inicial. Los prismas se utilizan para variar la dirección de los rayos luminosos. En los llamados prismáticos se utilizan cuatro prismas para enderezar la imagen que las lentes del sistema óptico dan invertidas. El diamante tiene un índice de refracción muy alto ($n = 2,4$), de modo que casi toda la luz que entra en un diamante se ve reflejada finalmente hacia fuera, dando origen a sus característicos destellos.

Una aplicación interesante de la reflexión total interna es la transmisión de un haz de luz a lo largo de una fibra de vidrio transparente, delgada y larga (figura 30-19). Si el haz empieza aproximadamente paralelo al eje de la fibra, chocará contra las paredes de la misma con ángulos mayores que el ángulo crítico (si las partes curvas de la fibra no son demasiado agudas) y no se perderá energía luminosa a través de las paredes de la fibra.



(b)

dicho tubo. (b) Estos haces de láser se reflejan totalmente tres veces en las partes laterales de la barra de vidrio antes de salir por el extremo.



(a)



(b)

Para obtener imágenes puede utilizarse un manojo o haz de este tipo de fibras, como se muestra en la figura 30-20. La óptica de las fibras tiene muchas aplicaciones en medicina y en comunicaciones. En medicina, se utilizan haces muy finos de fibras como sondas para examinar diversos órganos internos sin necesidad de intervención quirúrgica. En comunicaciones, el ritmo o velocidad con que puede transmitirse información está relacionado con la frecuencia de la señal. Un sistema de transmisión que utilice luz de frecuencias del orden de 10^{14} Hz puede transmitir información a un ritmo mucho mayor que si se utilizase ondas de radio, que tienen frecuencias del orden de 10^8 Hz. En sistemas de telecomunicación, una sola fibra de vidrio del tamaño de un cabello humano puede ahora transmitir información audio o video equivalente a 25 000 voces hablando simultáneamente.

(a) Luz que sale por un manojo de fibras de vidrio. (b) En esta demostración realizada en el Laboratorio de Investigación Naval de los Estados Unidos, una combinación de focos láser generan diversos colores que excitan elementos sensores en fibras adyacentes, lo que lleva a una separación de la información como se indica por la separación de los colores.

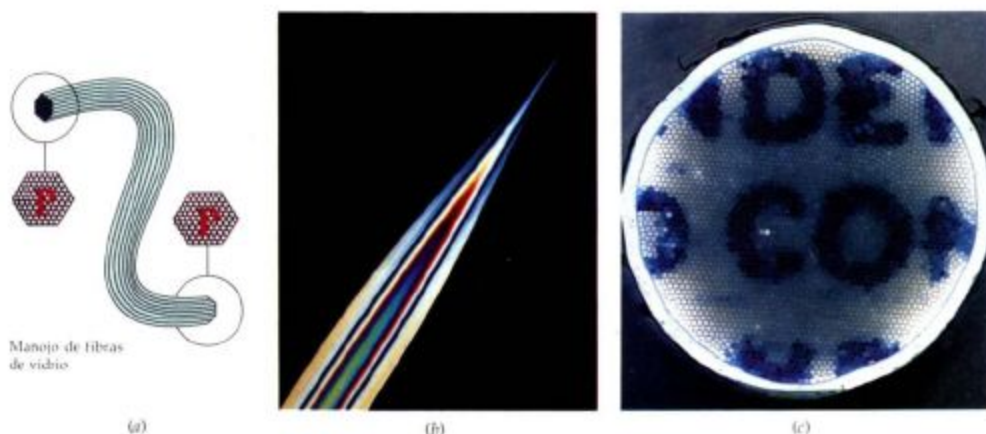
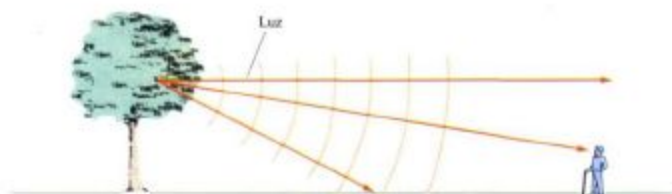


Figura 30-20 (a) La luz procedente de un objeto se transporta por un manojo de fibras de vidrio para formar una imagen del objeto en el otro extremo de las fibras o tubo de fibras. (b) La punta de un elemento previo de una guía de luz se reblandece mediante el calor y se estira hasta formar una

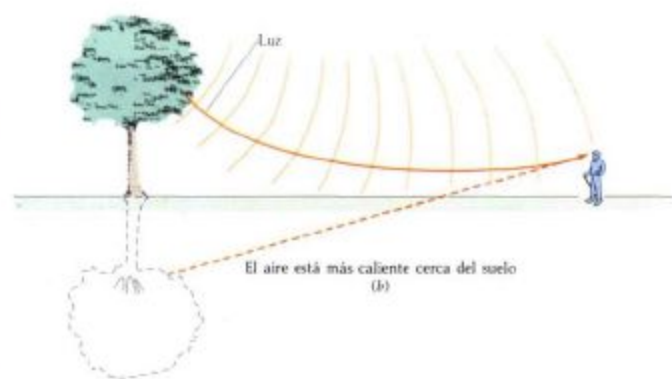
fibra muy fina y larga. Los colores en el elemento previo indican una estructura en capas de diferentes composiciones, que queda retenida en la fibra. (c) Imagen transmitida a través de un manojo o haz de fibras.

Cuando el índice de refracción de un medio cambia gradualmente, la refracción es continua, de forma que la luz se va curvando gradualmente. Un ejemplo interesante de este caso es la formación de un espejismo. En un día muy caluroso, es frecuente que se tenga una capa de aire muy caliente cerca del suelo. Este aire está más caliente y, por tanto, resulta menos denso que el aire que tiene encima. La velocidad de la luz es ligeramente mayor en esta capa menos densa, de manera que el haz de luz que pasa de la capa más fría a la más caliente se curva. La figura 30-21a muestra la luz procedente de un árbol cuando todo el aire está a la misma temperatura. Los frentes de onda son esféricos y los rayos son rectos. En la figura 30-21b, el aire próximo al suelo está más caliente y en él la velocidad del aire es mayor. Las partes del frente de onda cercanas al suelo se mueven con mayor rapidez y adelantan a las partes que están más altas, originándose así un frente de onda no esférico que causa la curvatura de los rayos. Así, el rayo que inicialmente se dibujaba incidiendo sobre el suelo se curva hacia arriba. Como resultado, el observador ve una imagen del árbol y piensa que la luz se ha refleja-

Figura 30-21 Un espejismo. (a) Cuando el aire está a temperatura uniforme, los frentes de onda de la luz procedente del árbol son esféricos. (b) Cuando el aire cerca del suelo está más caliente, los frentes de onda dejan de ser esféricos y la luz proveniente del árbol se refracta de forma continua dando un trayecto curvo. Como se ve en una imagen del árbol, el observador puede pensar que existe una masa reflectora de agua delante del árbol. (c) Fotografía de reflexiones aparentes de motocicletas y coches sobre una carretera muy caliente.



Aire a temperatura uniforme
(a)



El aire está más caliente cerca del suelo
(b)



(c)

do en el suelo. A veces se atribuye esta reflexión a la existencia de una capa de agua cerca del árbol. Cuando se conduce en un día muy caluroso, es posible observar aparentes zonas mojadas en la carretera que desaparecen cuando se les da alcance. Estas se deben a la refracción de la luz en una capa de aire muy caliente cerca del pavimento.

Tabla 30-1 Índices de refracción para la luz amarilla del sodio ($\lambda = 589 \text{ nm}$)

Sustancia	Índice de refracción	Sustancia	Índice de refracción
Sólidos		Líquidos a 20°C	
Hielo (H_2O)	1,309	Alcohol metílico (CH_3OH)	1,329
Fluorita (CaF_2)	1,434	Agua (H_2O)	1,333
Sal de roca (NaCl)	1,544	Alcohol etílico ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$)	1,36
Cuarzo (SiO_2)	1,544	Tetracloruro de carbono (CCl_4)	1,460
Zircón ($\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2$)	1,923	Trementina	1,472
Diamante (C)	2,417	Glicerina	1,473
Vidrios (valores típicos)		Benceno	1,501
Crown	1,52	Disulfuro de carbono (CS_2)	1,628
Flint ligero	1,58		
Flint medio	1,62		
Flint denso	1,66		

Dispersión

En la tabla 30-1 se han relacionado los índices de refracción para la luz de sodio de 589 nm de longitud de onda correspondientes a diversos materiales transparentes. El índice de refracción de una sustancia tiene una ligera dependencia con la longitud de onda, y en la figura 30-22 se muestra para varias sustancias. Podemos ver que los índices de refracción para esas sustancias disminuyen ligeramente cuando aumenta la longitud de onda. Esta dependencia del índice de refracción con la longitud de onda (y, por tanto, con la frecuencia) se denomina **dispersión**. Cuando un haz de luz blanca incide formando un cierto ángulo con la superficie de un prisma de vidrio, el ángulo de refracción correspondiente a las longitudes de onda más cortas hacia el extremo violeta del espectro visible es ligeramente mayor que el correspondiente a longitudes de onda más largas hacia el extremo rojo del espectro. Por consiguiente, la luz de longitud de onda más corta se desvía más que la luz de longitudes de onda más largas. Así pues, el haz de luz blanca se esparce o dispersa en sus colores o longitudes de onda componentes (figura 30-23).

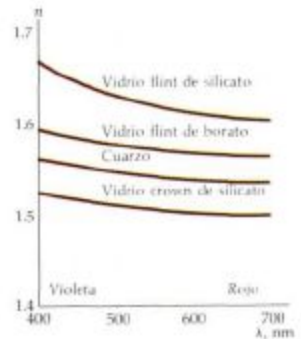
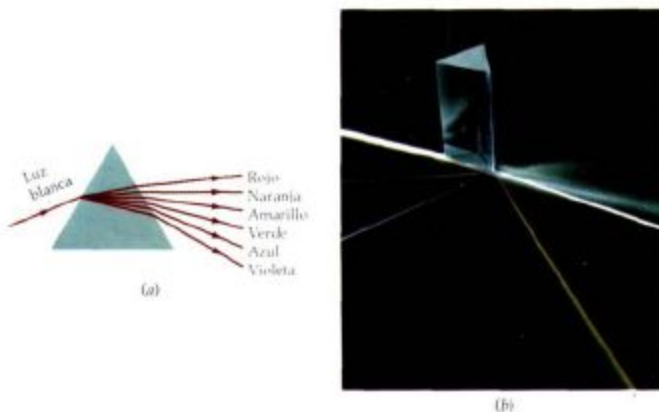


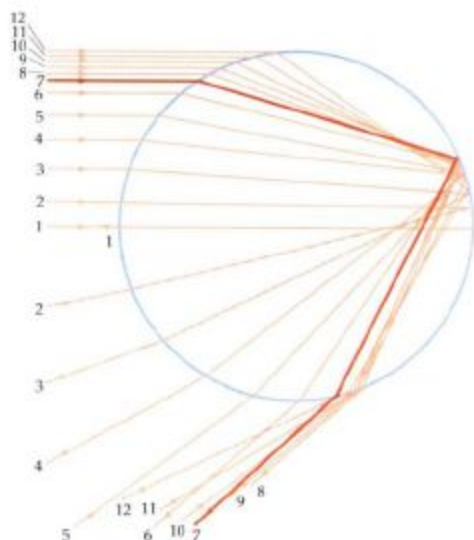
Figura 30-22 Gráfica que da el índice de refracción de diversos materiales en función de la longitud de onda.

Figura 30-23 (a) Un haz de luz blanca incidente sobre un prisma de vidrio se dispersa en sus colores componentes. El índice de refracción disminuye cuando aumenta la longitud de onda de modo que las longitudes de onda más largas se desvían más (rojo) que las de longitudes de onda más cortas (azul). (b) Fotografía de la dispersión de la luz mediante un prisma de vidrio.

Arco iris

La formación de un arco iris es un ejemplo familiar de la dispersión de la luz solar por refracción en gotas de agua. La figura 30-24 es un diagrama dibujado originalmente por Descartes en el que se muestran rayos solares paralelos que entran en una gota de agua esférica. En primer lugar, los rayos se refractan cuando entran en la gota. Luego se reflejan en la superficie posterior agua-aire y finalmente se refractan de nuevo cuando salen de la gota. El rayo 1 entra en la gota a lo largo de un diámetro (con un ángulo de incidencia nulo) y se refleja hacia delante siguiendo su trayectoria previa. El rayo 2 entra ligeramente por encima del diámetro anterior y emerge por debajo del mismo formando un ángulo pequeño con él. Los rayos que entran cada vez más alejados del diámetro emergen formando

Figura 30-24 Construcción de Descartes de los rayos paralelos de luz que entran en una gota de agua esférica. Los rayos se refractan en la primera superficie, se reflejan en la superficie posterior y se refractan otra vez cuando salen de la gota. El ángulo formado entre el rayo emergente y el diámetro aumenta cuando consideramos rayos cada vez más alejados del diámetro hasta el rayo número 7, que emerge formando el ángulo máximo. La concentración de rayos que salen con ángulos aproximadamente iguales al máximo dan origen al arco iris.



ángulos cada vez mayores hasta el rayo 7, dibujado con trazo grueso. Los rayos que entran por encima del rayo 7 emergen formando ángulos cada vez menores con el diámetro. En el diagrama puede verse un grupo de rayos concentrados que emergen con ángulos próximos al máximo. Esta concentración de rayos cerca del ángulo máximo da origen al arco iris. Mediante construcción geométrica (utilizando la ley de la refracción), Descartes demostró que el ángulo máximo vale aproximadamente 42° . Por consiguiente, para observar un arco iris debemos mirar las gotas de agua con un ángulo de 42° respecto a la línea que las une con el Sol, como se ve en la figura 30-25. Por tanto, el radio angular del arco iris es de 42° .

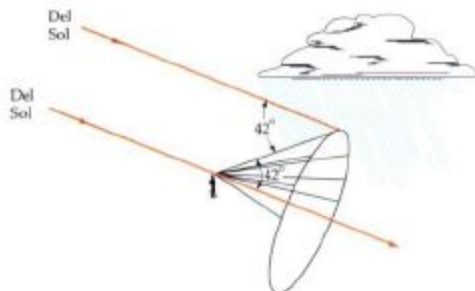
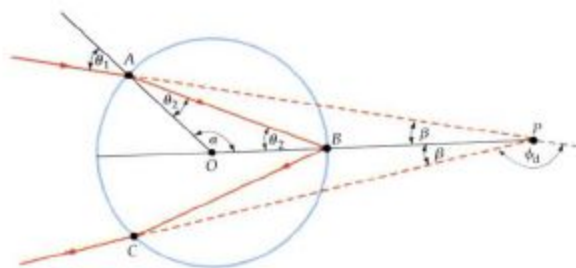


Figura 30-25 Un arco iris se observa formando un ángulo de 42° con la línea que procede del Sol, según predice la construcción de Descartes de la figura 30-24.



Podemos calcular el radio angular del arco iris mediante las leyes de la reflexión y de la refracción. La figura 30-26 muestra un rayo de luz que incide sobre una gotita de agua esférica en el punto A. El ángulo de refracción θ_2 está relacionado con el ángulo de incidencia θ_1 mediante la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \sin \theta_1 = n_{\text{agua}} \sin \theta_2 \quad 30-8$$

El rayo refractado incide sobre la parte posterior de la gotita en el punto B. Forma un ángulo θ_2 con la línea radial OB y se refleja con el mismo ángulo. El rayo se refracta de nuevo en el punto C, por donde sale de la gotita. El punto P es el de intersección del rayo incidente con el rayo emergente. Al ángulo ϕ_d se le llama ángulo de desviación del rayo. Está relacionado con el ángulo β por

$$\phi_d + 2\beta = \pi \quad 30-9$$

El ángulo 2β es el radio angular del arco iris. Deseamos relacionar el ángulo de desviación ϕ_d con el ángulo de incidencia θ_1 . Según el triángulo AOB , se tiene

$$2\theta_2 + \alpha = \pi \quad 30-10$$

Análogamente, a partir del triángulo AOP , tendremos

$$\theta_1 + \beta + \alpha = \pi \quad 30-11$$

Eliminando α entre las ecuaciones 30-10 y 30-11 y despejando β , se obtiene

$$\beta = \pi - \theta_1 - \alpha = \pi - \theta_1 - (\pi - 2\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_1$$

Sustituyendo este valor de β en la ecuación 30-9, se tiene para el ángulo de desviación

$$\phi_d = \pi - 2\beta = \pi - 4\theta_2 + 2\theta_1 \quad 30-12$$

La ecuación 30-12 puede combinarse con la ley de Snell (ecuación 30-8) para eliminar θ_2 y dar el ángulo de desviación ϕ_d en función del de incidencia θ_1 :

$$\phi_d = \pi + 2\theta_1 - 4 \arcsen \left(\frac{n_{\text{aire}} \sin \theta_1}{n_{\text{agua}}} \right) \quad 30-13$$

(El arcoseno de una cantidad es el ángulo cuyo seno es dicha cantidad, así $\arcsen x$ es el ángulo cuyo seno es x). En la figura 30-27 se muestra un gráfico de ϕ_d en función de θ_1 . El ángulo de desviación ϕ_d tiene su valor mínimo cuando $\theta_1 = 60^\circ$. Para este ángulo de incidencia, el ángulo de desviación de $\phi_d = 138^\circ$. Este ángulo es el de **mínima desviación**. Para ángulos incidentes que son ligeramente mayores o menores que 60° , el ángulo de desviación es aproximadamente el mismo. Por consiguiente, la luz reflejada por la gotita de agua se concentrará cerca del ángulo de desviación mínima. El radio angular del arco iris es, pues,

$$2\beta = \pi - \phi_d = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$$

Figura 30-26 Rayo de luz que incide sobre una gota de agua esférica. El rayo se refracta en el punto A, se refleja en el punto B y se refracta de nuevo en el punto C, en donde sale de la gota. La línea del rayo incidente corta a la del rayo emergente en el punto P. El ángulo ϕ_d se denomina ángulo de desviación del rayo.

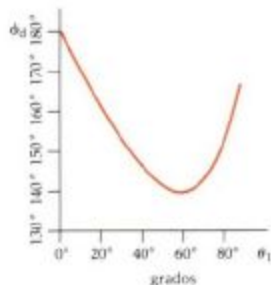


Figura 30-27 Representación gráfica del ángulo de desviación ϕ_d en función del ángulo de incidencia θ_1 . El ángulo de desviación tiene su valor mínimo de 138° cuando el ángulo de incidencia vale 60° . Como $d\phi_d/d\theta_1 = 0$ en la desviación mínima, la desviación de los rayos con ángulos de incidencia ligeramente menores o mayores que 60° , será aproximadamente la misma.



(a)



(b)

(a) Este halo de 22° alrededor del Sol es el resultado de la reflexión y refracción de los cristales de hielo hexagonales que están orientados al azar en la atmósfera. (b) Cuando los cristales de hielo no están orientados al azar sino que están cayendo con sus bases planas horizontales únicamente se ven las partes del halo que corresponden a cada lado del Sol.

La separación de los colores en el arco iris es el resultado de que el índice de refracción del agua depende ligeramente de la longitud de onda de la luz. El ángulo de desviación mínima y el radio angular del arco dependerán, pues, ligeramente de la longitud de onda de la luz. El arco iris observado está constituido por los rayos de luz procedentes de muchas gotitas diferentes de agua, como se ve en la figura 30-28. El color que se ve para cada radio angular concreto corresponde a la longitud de onda de la luz que tenga un ángulo de mínima desviación que permita a la luz alcanzar el ojo viniendo desde las gotitas con este radio angular. Por ejemplo, puesto que n_{agua} es menor para la luz roja que para la luz azul, el arcsen de la ecuación 30-13 es mayor para la luz roja que para la luz azul. Entonces ϕ_s es menor para la luz roja que para la luz azul y β es mayor para la luz roja que para la luz azul. En consecuencia, la parte roja del arco iris está situada con un radio angular ligeramente mayor que la parte azul del mismo.

Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie que separa el agua y el aire, parte de la luz se refleja y parte se refracta. Se obtiene un arco iris secundario a partir de los rayos de luz que se reflejan dos veces dentro de una gotita (figura 30-29). El arco secundario tiene un radio angular de 51° y su secuencia de colores es la inversa de la que tiene el arco primario; es decir, el violeta está en la parte exterior en el arco secundario. Puesto que la fracción de luz reflejada en la superficie agua-aire es pequeña, el arco secundario es considerablemente más débil que el primario.

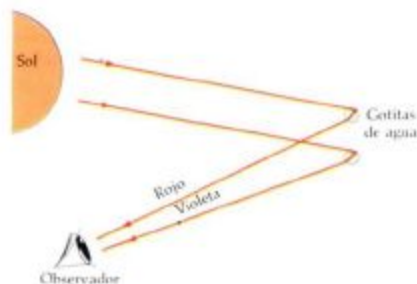


Figura 30-28 El arco iris es el resultado de la luz que procede de muchas gotitas de agua diferentes.

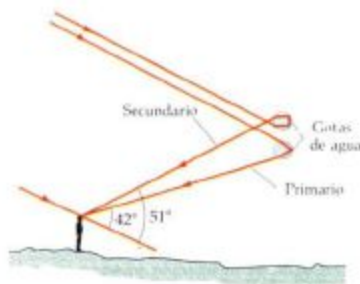


Figura 30-29 El arco iris secundario es el resultado de los rayos luminosos que se reflejan dos veces dentro de una gota de agua.

30-5 Principio de Fermat

Hemos visto que la propagación de la luz y de otras ondas puede describirse mediante el principio de Huygens. También puede describirse la propagación de la luz utilizando el **principio de Fermat** enunciado en primer lugar en el siglo XVII por el matemático francés Pierre de Fermat:

El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo.

Este enunciado de Fermat no cubre todos los casos. El tiempo que tarda en recorrer el camino que sigue la luz no siempre es mínimo. A veces es un máximo. Una formulación más completa y general del principio de Fermat es

El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria.

Si se expresa el tiempo t en función de un cierto parámetro x , el trayecto que seguirá la luz será tal que $dt/dx=0$; esto es, t es o un mínimo o un máximo, o un punto de inflexión en la curva que representa a t en función de x . La característica importante en un trayecto estacionario es que el tiempo empleado en recorrer trayectos próximos será aproximadamente igual al que tarda en recorrer la verdadera trayectoria.

En esta sección utilizaremos el principio de Fermat para deducir de otra forma las leyes de la reflexión y de la refracción.

Reflexión

En la figura 30-30 suponemos que la luz sale del punto A , incide sobre la superficie plana, que podemos considerar que es un espejo, y viaja hasta el punto B . Queremos hallar la trayectoria seguida por la luz. El problema para la aplicación del principio de Fermat a la reflexión puede plantearse del modo siguiente: En la figura 30-30, ¿en qué punto P debe incidir la luz sobre el espejo de forma que el recorrido entre los puntos A y B se realice en el tiempo más pequeño posible? Como en este problema la luz se está moviendo siempre dentro del mismo medio, el tiempo será mínimo cuando la distancia sea mínima. En la figura 30-30, la distancia APB es la misma que la distancia $A'PB$; en donde A' es la imagen del foco A . El punto A' está sobre la perpendicular al espejo trazada desde A y está equidistante del espejo y detrás del mismo. Evidentemente, si variamos el punto P , la distancia $A'PB$ es mínima cuando los puntos A' , P y B están en línea recta. A partir de la figura se ve fácilmente que esto ocurre cuando el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Refracción

La deducción de la ley de Snell de la refracción utilizando el principio de Fermat es más complicada que la correspondiente a la ley de la reflexión. En la figura 30-31 se ven los trayectos posibles para que la luz se propague desde el punto A en el aire hasta el punto B en el vidrio. El punto P_1 está sobre la recta que une A y B , pero este trayecto no corresponde al menor tiempo de recorrido porque la luz se mueve con menor velocidad en el vidrio. Si nos desplazamos ligeramente a la derecha de P_1 , la longitud del trayecto total es mayor, pero la distancia recorrida en el medio donde la velocidad es más baja es inferior a la que se recorrería en el trayecto que pasaba por P_1 . A partir de la figura no resulta fácil identificar cuál de los trayectos posibles es el de tiempo mínimo, pero no resulta sorprendente que un trayecto que esté ligeramente a la derecha del camino

Principio de Fermat

Principio de Fermat: forma general

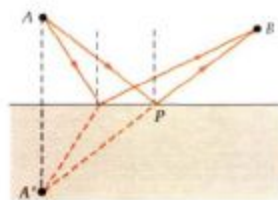


Figura 30-30 Construcción geométrica para la deducción de la ley de la reflexión a partir del principio de Fermat. El tiempo que tarda la luz en ir del punto A al punto B es un mínimo cuando la luz incide en la superficie en el punto P .

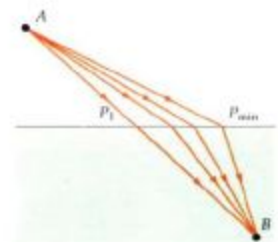


Figura 30-31 Construcción geométrica para la obtención de la ley de Snell de la refracción mediante el principio de Fermat. El punto P_{min} es el punto en que debe incidir la luz sobre el vidrio para que el tiempo de propagación desde A hasta B sea mínimo.

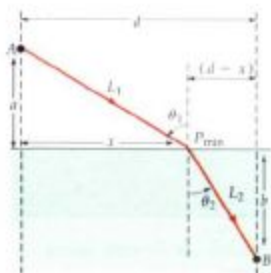


Figura 30-32 Construcción geométrica para calcular el tiempo mínimo en la obtención de la ley de Snell a partir del principio de Fermat.

rectilíneo emplee menos tiempo, porque el tiempo que se gana al recorrer una distancia más corta en el vidrio compensa sobradamente el tiempo perdido al recorrer una distancia mayor en el aire. Cuando desplazamos el punto de intersección de la posible trayectoria a la derecha del punto P_1 , disminuye el tiempo total empleado de ir de A a B hasta que se alcanza un mínimo en el punto P_{\min} . Más allá de este punto, el tiempo ahorrado en recorrer una distancia más corta en el vidrio ya no compensa el tiempo mayor que se necesita emplear en la distancia mayor a seguir en el aire.

La figura 30-32 indica la geometría que sirve para encontrar el trayecto de mínimo tiempo. Si la distancia recorrida en el medio 1 (con índice de refracción n_1) es L_1 y la recorrida en el medio 2 (con índice de refracción n_2) es L_2 , el tiempo que tarda la luz en recorrer el trayecto total AB es

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_1}{c/n_1} + \frac{L_2}{c/n_2} = \frac{n_1 L_1}{c} + \frac{n_2 L_2}{c} \quad 30-14$$

Queremos hallar el punto P_{\min} para el cual el tiempo es mínimo. Para ello expresaremos el tiempo en función de un solo parámetro que indique la posición de dicho punto P_{\min} . En función de la distancia x en la figura 30-32, se tiene

$$L_1^2 = a^2 + x^2 \quad \text{y} \quad L_2^2 = b^2 + (d - x)^2 \quad 30-15$$

Puede verse la curva del tiempo t en función de x en la figura 30-33. En el valor de x en el que el tiempo es mínimo, la pendiente de esta curva es cero:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Derivando cada término de la ecuación 30-14 con respecto a x , obtendremos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left(n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx} \right)$$

Poniendo $dt/dx = 0$, resulta

$$n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx} = 0 \quad 30-16$$

Se pueden calcular estas derivadas con las ecuaciones 30-15. Se tiene

$$2L_1 \frac{dL_1}{dx} = 2x$$

o bien

$$\frac{dL_1}{dx} = \frac{x}{L_1}$$

Pero x/L_1 es precisamente el $\text{sen } \theta_1$, siendo θ_1 el ángulo de incidencia. Por tanto,

$$\frac{dL_1}{dx} = \text{sen } \theta_1$$

Análogamente,

$$2L_2 \frac{dL_2}{dx} = 2(d - x)(-1)$$

o bien

$$\frac{dL_2}{dx} = -\frac{d - x}{L_2} = -\text{sen } \theta_2$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. De aquí que la ecuación 30-16 sea

$$n_1 \text{sen } \theta_1 + n_2 (-\text{sen } \theta_2) = 0$$

o sea

$$n_1 \text{sen } \theta_1 = n_2 \text{sen } \theta_2$$

que es la ley de Snell.

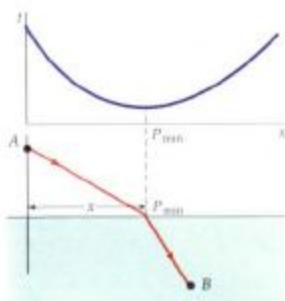


Figura 30-33 Representación gráfica del tiempo que emplea la luz para ir desde A hasta B en función de x , longitud medida a lo largo de la superficie refractante. El tiempo es un mínimo en el punto en que los ángulos de incidencia y de refracción obedecen la ley de Snell.

30-6 Polarización

En toda onda transversal, la vibración es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, en ondas que se mueven a lo largo de una cuerda, los elementos de la misma se mueven en un plano perpendicular a la cuerda. De forma semejante, en una onda luminosa que se mueve en la dirección z , el campo eléctrico es perpendicular a esta dirección. (El campo magnético de una onda de luz es también perpendicular a la dirección z .) Si la vibración de una onda transversal se mantiene paralela a una línea fija en el espacio, se dice que la onda está **polarizada linealmente**. Podemos visualizar la polarización con mayor facilidad considerando las ondas mecánicas en una cuerda. Si uno de los extremos se mueve hacia arriba y hacia abajo, las ondas resultantes en la cuerda están polarizadas linealmente, de forma que cada elemento de la misma vibra en dirección vertical. Análogamente, si el extremo se mueve ahora según una línea horizontal (perpendicular a la cuerda), los desplazamientos de la cuerda están polarizados linealmente en dirección horizontal. Si el extremo de la cuerda se mueve con velocidad constante describiendo una circunferencia, la onda resultante se dice que está **polarizada circularmente**. En este caso los elementos de la cuerda se mueven describiendo circunferencias. Pueden producirse ondas no polarizadas moviendo el extremo de la cuerda vertical y horizontalmente de una forma aleatoria. En este caso, si la propia cuerda está en la dirección z , las vibraciones tendrán tanto componentes x como componentes y que variarán aleatoriamente.

La mayoría de las ondas producidas por una sola fuente están polarizadas. Por ejemplo, las ondas en una cuerda producidas por la vibración regular de uno de sus extremos o las ondas electromagnéticas generadas por un solo átomo o por una sola antena, están polarizadas. Las ondas producidas por muchas fuentes normalmente no están polarizadas. Una fuente luminosa típica, por ejemplo, contiene millones de átomos que actúan independientemente. El campo eléctrico correspondiente a dicha onda puede resolverse en componentes x e y que varían aleatoriamente debido a que no existe correlación entre los átomos individuales que producen la luz.

Existen cuatro fenómenos que producen luz polarizada a partir de luz no polarizada: (1) absorción, (2) dispersión o «scattering», (3) reflexión y (4) birrefringencia (también denominado doble refracción).

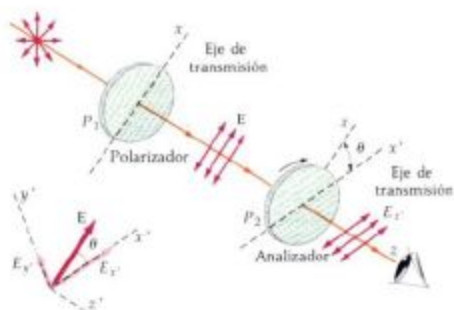
Polarización por absorción

Algunos cristales de los que se encuentran en la naturaleza, si se cortan de forma apropiada, absorben y transmiten la luz de forma diferente dependiendo de la polarización de la luz. Estos cristales pueden utilizarse para obtener luz polarizada linealmente. En 1938, E. H. Land inventó una película polarizadora simple y comercial denominada Polaroid. Este producto contiene moléculas de hidrocarburos de cadena larga que resultan alineadas cuando la lámina en que se obtienen se estira en una dirección durante el proceso de fabricación. Cuando la lámina se sumerge en una disolución que contiene yodo, las cadenas se hacen conductoras a las frecuencias ópticas. Cuando sobre ellas incide luz con su vector campo eléctrico paralelo a las cadenas, se establecen corrientes eléctricas a lo largo de las cadenas y la energía luminosa es absorbida. Si el campo eléctrico es perpendicular a las cadenas, se transmite la luz. La dirección perpendicular a las cadenas se denomina **eje de transmisión**. Para simplificar supondremos que cuando el campo eléctrico es paralelo al eje de transmisión se transmite la totalidad de la luz, mientras que toda ella resulta absorbida si es perpendicular al eje de transmisión.

Consideremos un haz de luz no polarizada que se propaga en la dirección z y que incide sobre una película polarizadora con su eje de transmisión en la dirección y . En valor promedio, la mitad de la luz incidente tendrá su campo eléctrico en la dirección y y la mitad en la dirección x . Así pues, se transmitirá la mitad de la intensidad y la luz transmitida estará polarizada linealmente con su campo eléctrico en la dirección y .

Supongamos que tenemos una segunda película polarizadora cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con el de la primera como se ve en la figura

Figura 30-34 Dos películas o láminas polarizadoras con sus ejes de transmisión que forman un ángulo θ entre sí. Únicamente se transmite a través de la segunda lámina el componente $E \cos \theta$. Si la intensidad entre las láminas es I_0 , la transmitida por ambas láminas es $I_0 \cos^2 \theta$.



30-34. Si el campo eléctrico existente entre ambas películas es E , su componente a lo largo de la dirección del eje de transmisión de la segunda película es $E \cos \theta$. Como la intensidad de la luz es proporcional a E^2 , la intensidad de la luz transmitida por ambas películas vendrá dada por

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad 30-17$$

en donde I_0 es la intensidad sobre la segunda película y que es, naturalmente, la mitad de la intensidad incidente sobre la primera película. Cuando se sitúan sucesivamente a lo largo de un haz de luz dos elementos polarizadores como se acaba de describir, el primero de ellos se denomina el **polarizador** y el segundo el **analizador**. Si el polarizador y el analizador están cruzados, es decir, si sus ejes son mutuamente perpendiculares, no pasará nada de luz a su través. La ecuación 30-17 se conoce como **ley de Malus** en honor de su descubridor E. L. Malus (1775-1812). Se aplica a todo sistema de dos polarizadores cuyos ejes de transmisión forman un ángulo θ entre sí.

Puede mostrarse la polarización de las ondas electromagnéticas con microondas, que tienen longitud de onda del orden del centímetro. En un generador de microondas típico, las ondas polarizadas son radiadas por una antena dipolar. En la figura 30-35, la antena dipolar es vertical, de modo que el vector del campo eléctrico E de las ondas radiadas es vertical. Puede confeccionarse un sistema absorbente con una rejilla de alambres o hilos rectilíneos paralelos. Cuando éstos son verticales, como en la figura 30-35a, el campo eléctrico paralelo a los alambres crea corrientes en ellos y la energía resulta absorbida. Cuando los alambres están horizontales y, por tanto, perpendiculares a E , como en la figura 30-35b, no aparecen corrientes y las ondas se transmiten. El eje de transmisión de la rejilla de alambre es, pues, perpendicular a los alambres.



(a)



(b)

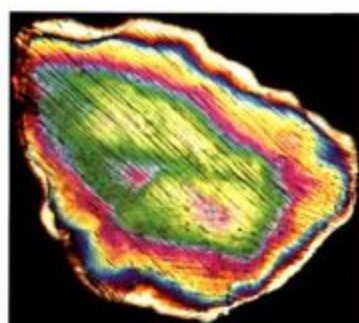
Figura 30-35 Demostración de la polarización de microondas. El campo eléctrico de las microondas es vertical, paralelo a la antena dipolar vertical. (a) Cuando los hilos metálicos del sistema absorbente son verticales, se establecen corrientes eléctricas en ellos y se absorbe energía, como se indica con la baja lectura del detector. (b) Cuando los hilos están horizontales, no se crean corrientes y se transmiten las microondas, como indica la lectura elevada del detector. El eje de transmisión correspondiente a la rejilla de alambre es perpendicular a los hilos.

Ejemplo 30-7

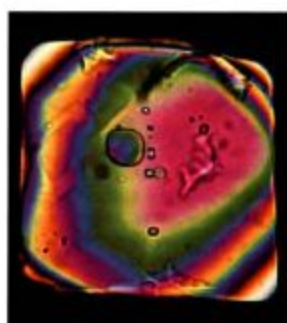
Luz no polarizada de intensidad $3,0 \text{ W/m}^2$ está incidiendo sobre dos películas polarizadoras cuyos ejes forman entre sí un ángulo de 60° . ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida por ambas películas?

La intensidad de la luz que se transmite por la primera película es la mitad de la luz incidente, o sea $1,5 \text{ W/m}^2$. Llamando I_0 a esta intensidad, la transmitida por la segunda película es

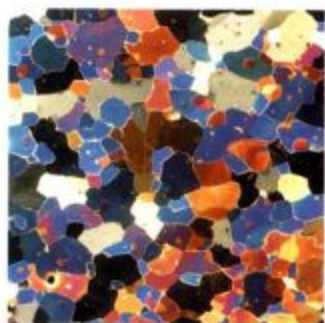
$$\begin{aligned} I &= I_0 \cos^2 \theta = (1,5 \text{ W/m}^2) \cos^2 60^\circ \\ &= (1,5 \text{ W/m}^2)(0,500)^2 \\ &= 0,375 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

Cuando los ejes de transmisión de dos películas polarizadoras son perpendiculares, se dice que ambos están cruzados y no se transmite luz a su través. Sin embargo, muchos materiales son birrefringentes (página 1001) o se vuelven así bajo tensión. Estos materiales rotan o giran la dirección de polarización de la luz de modo que la luz de una longitud de onda particular se transmite a través de ambos polarizadores. Cuando se observa un material birrefringente situado entre polarizadores cruzados, se revela cierta información acerca de su estructura interna. (a) Corte fino de un grano de cuarzo que ha sufrido un fuerte golpe procedente del cráter creado por un meteorito. (b) Grano de cuarzo típico de los que se encuentran en rocas volcánicas silíceas. No se ven las líneas originadas por choques. (c) Cortes delgados del núcleo de hielo procedente del manto de hielo antártico en donde se revela la existencia de burbujas de CO_2 atrapadas que aparecen de color ámbar. Esta muestra se tomó a una profundidad de 194 metros correspondiente a aire atrapado hace 1600 años, mientras que en (d) se tomó a una profundidad de sólo 56 metros correspondiente a aire atrapado hace 450 años. Las medidas en el núcleo de hielo han sustituido la técnica menos fiable de analizar el carbono que aparece en los anillos de los árboles para comparar los niveles actuales de CO_2 atmosférico con los del pasado reciente. (e) Robert Mark de la Escuela de Arquitectura de Princeton examina los esquemas de tensiones que aparecen en un modelo de plástico de la estructura de la nave de la Catedral de Chartres.

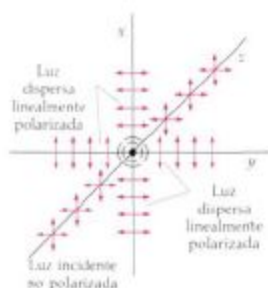


Figura 30-36 Polarización por dispersión. La luz no polarizada que se propaga en la dirección z incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. La luz dispersada en la dirección x está polarizada en la dirección y , mientras que la dispersada en la dirección z está polarizada en la dirección x .

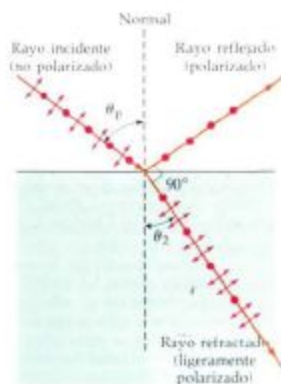


Figura 30-37 Polarización por reflexión. La onda incidente está no polarizada y tiene componentes del campo eléctrico paralelos al plano de incidencia (flechas) y componentes perpendiculares al mismo (puntos). Si la incidencia se realiza con el ángulo de polarización, la onda reflejada está completamente polarizada con su campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

Polarización por dispersión o «scattering»

El fenómeno de absorción y reradiación se denomina **dispersión** o «scattering». Puede comprobarse la existencia de la dispersión si se hace pasar un haz de luz a través de un recipiente con agua a la que se ha añadido una pequeña cantidad de leche en polvo. Las partículas de leche absorben la luz y la vuelven a radiar, haciendo visible el haz de luz. De forma análoga, pueden hacerse visibles los haces de láser introduciendo partículas de tiza o de humo en el aire para que dispersen la luz. Un ejemplo familiar de la dispersión de la luz lo origina el hecho de que las moléculas del aire tienden a formar masas más agrupadas (debido a las fluctuaciones aleatorias de la densidad del aire), que tienden a dispersar más las longitudes de onda cortas que las largas, dando así al cielo su color azul.

Podemos comprender la polarización por la dispersión si consideramos a una molécula absorbente como una antena dipolar eléctrica que radia ondas con una intensidad máxima en la dirección perpendicular a la antena y con intensidad cero en la dirección de la propia antena. La figura 30-36 muestra un haz de luz inicialmente no polarizada que se mueve a lo largo del eje z y que incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. El campo eléctrico del haz de luz tiene componentes en las dos direcciones x y y perpendiculares a la dirección de movimiento del haz de luz. Estos campos provocan oscilaciones del centro de dispersión en ambas direcciones x e y , pero no aparece ninguna oscilación en la dirección z . La oscilación del centro de dispersión en la dirección x produce luz a lo largo del eje y pero no a lo largo del eje x , que coincide con la línea de la oscilación. Así pues, la luz radiada a lo largo del eje y está polarizada en la dirección x . Análogamente, la luz radiada a lo largo del eje x está polarizada en la dirección y . Esto puede verse fácilmente examinando la luz dispersada mirándola a través de un trozo de película polarizadora.

Polarización por reflexión

Cuando la luz no polarizada se refleja en una superficie plana entre dos medios transparentes, por ejemplo la que separa el aire y el vidrio o el aire y el agua, la luz reflejada está parcialmente polarizada. El grado de polarización depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de ambos medios. Cuando el ángulo de incidencia es tal que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí, la luz reflejada está completamente polarizada. Este resultado fue descubierto experimentalmente por Sir David Brewster en 1812.

La figura 30-37 muestra la luz incidente con el ángulo de polarización θ_p para el cual la luz reflejada está completamente polarizada. El campo eléctrico de la luz incidente puede descomponerse en dos componentes, uno paralelo y el otro perpendicular al plano de incidencia. La luz reflejada está completamente polarizada con su vector del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. Podemos establecer una relación entre el ángulo de polarización θ_p y los índices de refracción de los medios utilizando la ley de Snell. Si n_1 es el índice de refracción del primer medio y n_2 el del segundo medio, tenemos

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_2$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. A partir de la figura 30-37 vemos que la suma del ángulo de reflexión y del ángulo de refracción es 90° . Como el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, tenemos

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_p$$

Entonces

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_p &= n_2 \sin (90^\circ - \theta_p) \\ &= n_2 \cos \theta_p \end{aligned}$$

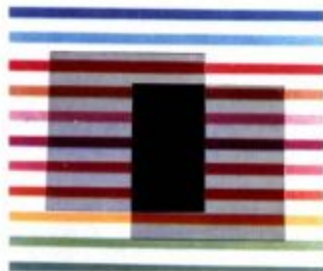
o sea

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{n_2}{n_1}$$

30-18

La ecuación 30-18 se conoce como **Ley de Brewster**. Aunque la luz reflejada está completamente polarizada cuando el ángulo de incidencia es θ_p , la luz transmitida está sólo parcialmente polarizada, debido a que sólo se refleja una pequeña fracción de la luz incidente. Si la propia luz incidente está polarizada con su vector campo eléctrico E contenido en el plano de incidencia, no existe ninguna luz reflejada cuando el ángulo de incidencia es θ_p . Podemos comprender el resultado cualitativamente a partir de la figura 30-38. Si consideramos las moléculas del segundo medio de modo que estén oscilando en la dirección del campo eléctrico del rayo refractado, no pueden radiar energía a lo largo de la dirección de oscilación que sería la dirección del rayo reflejado.

Debido a la polarización de la luz reflejada, los cristales de gafas de sol hechos de material polarizante pueden ser muy eficaces para eliminar los deslumbramientos. Si la luz se refleja en una superficie horizontal, tal como un lago o la nieve en el suelo, el plano de incidencia será vertical y el vector del campo eléctrico de la luz reflejada será predominantemente horizontal. Los cristales de gafas de sol con sus ejes de transmisión vertical reducirán entonces el deslumbramiento por absorber gran parte de la luz reflejada. Si se tiene gafas de sol polarizadas, se podrá observar este fenómeno mirando a través de ellas a dicha luz reflejada y luego haciendo girar las gafas un ángulo de 90° , de modo que se verá cómo se transmite mucha más cantidad de luz.



(a)



(b)

Polarización por birrefringencia

La **birrefringencia**, o **doble refracción**, es un fenómeno complicado que se presenta en la calcita y otros cristales no cúbicos y en algunos plásticos sometidos a tensión como el celofán. En la mayoría de los materiales, la velocidad de la luz es la misma en todas direcciones. Estos materiales son **isótropos**. Debido a su estructura atómica, los materiales birrefringentes son **anisótropos**. La velocidad de la luz depende de su dirección de propagación a través del material. Cuando un rayo de luz está incidiendo sobre estos materiales, puede separarse en dos rayos denominados **rayo ordinario** y **rayo extraordinario**. Estos rayos están polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares y se propagan con diferentes velocidades. Dependiendo de la orientación relativa del material y de la luz incidente, los rayos pueden propagarse también en direcciones diferentes.

Existe una dirección particular en un material birrefringente en que ambos rayos se propagan con la misma velocidad. Esta dirección se denomina **eje óptico** del material. (Este eje óptico es realmente una **dirección** y no sólo una recta en el material.) Cuando la luz se propaga a lo largo del eje óptico no ocurre nada inusual. Sin embargo, cuando la luz está incidiendo en ángulo con respecto al

Ley de Brewster

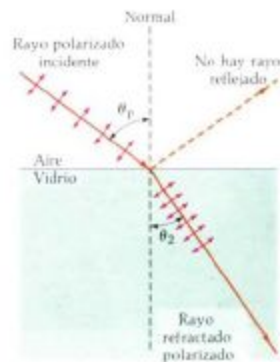
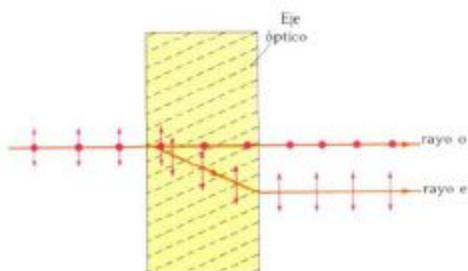


Figura 30-38 Luz polarizada incidiendo con el ángulo de polarización. Cuando la luz está polarizada de forma que E está en el plano de incidencia no hay rayo reflejado.

(a) Los polarizadores cruzados bloquean toda la luz. (b) En un sistema de presentación o «display» de cristal líquido, el cristal se sitúa entre los polarizadores cruzados. La luz incidente sobre el cristal se transmite porque el cristal gira la dirección de polarización de la luz en 90° . La luz se refleja de nuevo mediante un espejo situado detrás del cristal y se ve un fondo uniforme. Cuando se aplica una tensión a través de un pequeño segmento del cristal, la polarización no se gira, de modo que no se transmite la luz y el segmento aparece negro.

Figura 30-39 Un haz estrecho de luz que incide sobre un cristal birrefringente como la calcita se divide en dos haces, denominado rayo ordinario (rayo o) y rayo extraordinario (rayo e) con polarizaciones mutuamente perpendiculares. Si se hace girar el cristal, el rayo extraordinario gira en el espacio.



eje óptico como se ve en la figura 30-39, los rayos se propagan en distintas direcciones y emergen separados en el espacio. Si se hace girar al material, el rayo extraordinario (el rayo e en la figura) gira en el espacio.

Si la luz está incidiendo sobre una placa birrefringente de modo que sea perpendicular a su cara cristalina y perpendicular al eje óptico, los dos rayos se propagan en la misma dirección pero con velocidades diferentes. El número de longitudes de onda de los dos rayos contenidas en la placa es diferente porque las longitudes de onda ($\lambda = v/f$) de ambos difieren entre sí. Los rayos emergen con una diferencia de fase que depende del espesor de la placa y de la longitud de onda de la luz incidente. En una **lámina de cuarto de onda**, el espesor es tal que existe una diferencia de fase de 90° entre las ondas de una longitud de onda determinada cuando emergen, mientras que en las **láminas de media onda**, al emerger los rayos poseen una diferencia de fase de 180° .

Supongamos que la luz incidente está polarizada linealmente de forma que el vector campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, como se indica en la figura 30-40. Los rayos ordinario y extraordinario parten en fase y tienen amplitudes iguales. En el caso de una lámina de cuarto de onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 90° , de modo que el campo eléctrico resultante tiene componentes $E_x = E_0 \sin \omega t$ y $E_y = E_0 \sin (\omega t + 90^\circ) = E_0 \cos \omega t$. Por tanto, el vector campo eléctrico rota barriendo un círculo y la onda está polarizada circularmente.

Con una lámina de media onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 180° , de modo que el campo eléctrico resultante está polarizado linealmente con componentes $E_x = E_0 \sin \omega t$ y $E_y = E_0 \sin (\omega t + 180^\circ) = -E_0 \sin \omega t$. El efecto neto es que la dirección de polarización de la onda ha girado en 90° respecto a la de la luz incidente, como se ve en la figura 30-41.

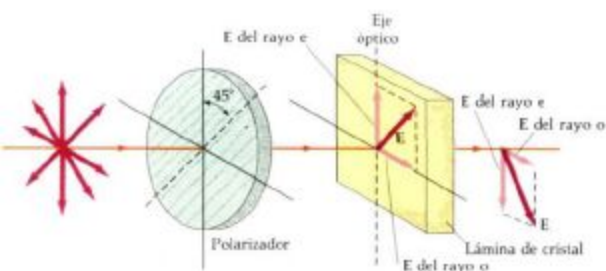


Figura 30-40 Luz polarizada que emerge de un polarizador y que incide sobre un cristal birrefringente de tal forma que el vector de campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, que es perpendicular al haz luminoso. Los rayos ordinario y extraordinario se mueven en la misma dirección pero con diferentes velocidades.

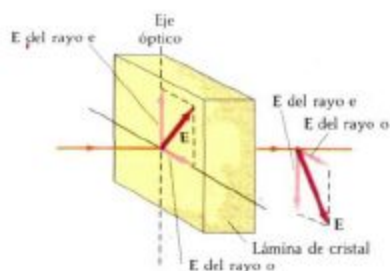


Figura 30-41 Cuando el cristal birrefringente de la figura 30-40 es una lámina de media onda, la luz emergente tiene girada su dirección de polarización.

Pueden observarse interesantes y bellos diagramas, como los de la página 999, colocando materiales birrefringentes, como el celofán o un trozo de plástico sometido a tensión, entre dos láminas polarizadoras que tengan sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí (Polaroids cruzados). Ordinariamente, no se transmite nada de luz a través de láminas polarizadoras cruzadas porque la dirección de polarización de la luz que transmite la primera lámina es perpendicular al eje de la segunda. Sin embargo, si colocamos un material birrefringente entre los Polaroids cruzados, el material actúa como una lámina media onda para la luz de un determinado color, dependiendo del espesor del material. La dirección de polarización resulta girada y cierta cantidad de luz atraviesa ambas láminas. Cuando se someten a tensiones, resultan birrefringentes diversos vidrios y plásticos. Así puede observarse el diagrama de tensiones cuando se coloca el material entre láminas polarizadoras cruzadas.

Resumen

1. Cuando la luz incide sobre la superficie de separación de dos medios que poseen velocidades de la luz diferentes, parte de la energía luminosa se transmite y parte se refleja. El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\theta_r = \theta_i$$

El ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de los dos medios y viene dado por la ley de Snell de la refracción:

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

en donde el índice n de refracción de un medio es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la que posee en el medio v :

$$n = \frac{c}{v}$$

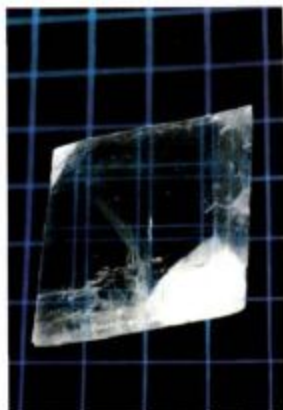
2. Cuando la luz que se está propagando en un medio con un índice de refracción n_2 incide sobre el límite de un segundo medio con menor índice de refracción $n_2 < n_1$, la luz se refleja totalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico θ_c dado por

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

3. La velocidad de la luz en un medio y , por tanto, el índice de refracción del mismo depende de la longitud de onda de la luz, fenómeno conocido como dispersión. Por causa de la dispersión, un haz de luz blanca que incide sobre un prisma de refracción se dispersa en sus colores componentes. Análogamente, la reflexión y la refracción de la luz solar en las gotas de agua producen los arco iris.
4. Cuando dos polarizadores tienen sus ejes de transmisión formando un ángulo θ , la intensidad transmitida por el segundo polarizador se reduce en un factor $\cos^2 \theta$, resultado conocido como ley de Malus. Si la intensidad de la luz entre los polarizadores es I_0 , la intensidad transmitida por el segundo polarizador es

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

5. Los cuatro fenómenos que permiten obtener luz polarizada a partir de un haz de luz no polarizada son (1) absorción, (2) dispersión o «scattering», (3) reflexión y (4) birrefringencia.



Se obtiene una doble imagen del grabado en cruz mediante este cristal birrefringente de carbonato de calcio.

Más allá del Arco Iris (visible)*

Robert Greenler
University of Wisconsin, Milwaukee (Estados Unidos)

A veces la ciencia es una actividad muy personal. Desde que yo era un niño, me sentía excitado por la belleza y grandiosidad del arco iris. Esta era mi reacción mucho tiempo antes de que adquiriese las herramientas del científico con las cuales puedo comprender el origen de este maravilloso arco de color.

Mi interés profesional durante los treinta últimos años, en los que he empleado una considerable cantidad de energía, ha consistido en mi intento de comprender la estructura de las moléculas que resultan adheridas (adsorbidas) a la superficie de un material sólido. Resulta importante comprender este fenómeno por su aplicación a diversas clases de temas como el funcionamiento de un catalizador, las propiedades eléctricas de circuitos integrados pequeños, la separación de minerales y los procesos que tienen lugar dentro de un reactor de fusión.

Puede parecer que este interés no tiene nada que ver con el arco iris, pero no es así. Yo pude desarrollar una

* Este ensayo está adaptado de un artículo que apareció en *Optic News*, publicado por la «Optical Society of America», en noviembre de 1988.



Robert Greenler ha sido profesor de Física en la Universidad de Wisconsin-Milwaukee (Estados Unidos) desde 1962, en donde ha intervenido en el desarrollo del Laboratorio para Estudio de Superficies de Milwaukee. Su interés por la investigación incluye el estudio de la estructura de las moléculas

adsorbidas en superficies sólidas, efectos ópticos en el firmamento y la comprensión de los colores iridiscentes que se ven en muchos organismos vivos.

La persecución de arco iris (y otros temas de interés científico) le llevó a la Universidad de East Anglia en Norwich, Inglaterra; al Instituto Fritz Haber en Berlín, Alemania; al Instituto Tecnológico MARA en Shah Alam, Malasia; y a la estación de Investigación Antártica de los Estados Unidos en el Polo Sur.

Fue Presidente de la Optical Society of America en 1987 y en 1988 recibió el Premio Millikan Lecture de la American Association of Physics Teachers por «sus notables y creativas contribuciones a la enseñanza de la física».

técnica para deducir la estructura de las moléculas adsorbidas sobre una superficie metálica utilizando la radiación infrarroja. Así pues, cierta comprensión de la naturaleza de la radiación infrarroja es una de las herramientas que utilizo para mis intereses científicos.

Estas dos rutas diferentes de mi experiencia personal se unieron un día en que estaba sentado en mi despacho totalmente distraído en lugar de realizar la tarea que tenía prevista. La pregunta que me vino a la mente fue: ¿Me sorprendería si hubiese un arco iris infrarrojo en el cielo?

¿Cómo intentar resolver esta cuestión? Este es el proceso que seguí. Para que exista un arco iris infrarrojo, deben cumplirse ciertas condiciones. *En primer lugar*, la fuente luminosa debe emitir radiación infrarroja (el Sol emite luz en todo el espectro de radiación electromagnética, desde los rayos X a las ondas de radio; ver sección 29-5). *En segundo lugar*, la radiación infrarroja debe pasar a través de la atmósfera terrestre (el vapor de agua y el dióxido de carbono de la atmósfera absorben algunas de las longitudes de onda en la zona infrarroja, como se vio en el ensayo sobre el calentamiento global, pero otras pasan sin dificultad). El arco iris está originado por los rayos de luz que entran en una gotita de agua y se reflejan internamente antes de emerger de la misma (ver figura 30-26 y sección 30-4). Para que exista un arco iris infrarrojo, *el tercer requisito* es que los rayos infrarrojos deberán tener que pasar a través de la gota de agua. Esto constituye una seria consideración. Sólo porque una gotita de agua resulta transparente a la luz visible no podemos suponer que lo sea a la «luz» infrarroja; realmente, el agua líquida absorbe un amplio margen de longitudes de onda infrarrojas. Sin embargo, la transmitancia medida del agua muestra que las gotas de agua deberán ser bastante transparentes desde la región visible hasta una longitud de onda en el infrarrojo de 1300 nm, aproximadamente. *Finalmente*, después de salir de una gota de lluvia, los rayos infrarrojos que han sobrevivido a todas estas pérdidas deben pasar de nuevo a través del aire hasta el ojo (para el que pasa inadvertido) del posible observador.

La búsqueda

Esta línea de razonamiento produjo un inicio de respuesta a la cuestión que señalaba la especulación. Sí, debe existir un arco iris infrarrojo en el cielo y debe encontrarse en una banda justamente en el exterior del rojo del arco iris visible.

Decidí intentar hacer una fotografía de este arco invisible utilizando una película que fuese sensible a una parte del espectro infrarrojo. En la figura 1 se da la curva de sensibilidad de la misma. En la figura se ha señalado también la curva de sensibilidad del ojo humano, como un modo de definir los límites de la región espectral visible (que se extiende desde unos 400 nm en el extremo del violeta a 700 nm en el extremo del rojo). Obsérvese que la película infrarroja tiene una sensibilidad que se extiende más allá, hasta unos 930 nm.

El problema a la hora de utilizar esta película para registrar una escena en infrarrojos consiste en que la película no es sólo sensible al infrarrojo, sino que lo es en toda la región visible (de hecho es *muy* sensible a la luz azul). Si examinamos una imagen en blanco y negro obtenida con dicha película, no tendríamos forma de saber qué partes de la imagen eran resultado de la exposición al infrarrojo y qué partes correspondían a una exposición a la radiación visible. Se resolvió este problema utilizando un filtro que tenía el aspecto de una lámina opaca de plástico negro. El material es opaco a la luz visible y transmite únicamente longitudes de onda superiores a unos 800 nm. Como puede verse en la figura 1, esta combinación de película y filtro permite el registro de aquellas longitudes de onda comprendidas únicamente en una banda de 800 a 930 nm aproximadamente, suficientemente alejada de la región espectral visible.

La captura

Todo aquel que ha intentado fotografiar un arco iris sabe que normalmente aparecen cuando no se tiene a mano la cámara y desaparecen cuando se ha encontrado ya. Entonces decidí localizar primeramente un sujeto menos escurridizo —el de un arco iris producido en un aspersor de agua que se podía hacer funcionar a voluntad en mi jardín. En la figura 2 se muestra uno de los primeros resultados fotográficos. Agité hacia un lado y otro una manguera ordinaria con muchos agujeros que actuaba de aspersor delante de un tablero apoyado en la parte superior de una escalera. Y en la lluvia así conseguida: Allí estaba el arco iris! También puede verse el arco iris secundario más débil fuera del arco primario más brillante. Este arco secundario corresponde al que se ve ordinariamente con luz visible y se obtiene como resultado de los rayos que entran en una gota de agua y sufren dos reflexiones internas antes de salir de la gota (ver figura 30-29).

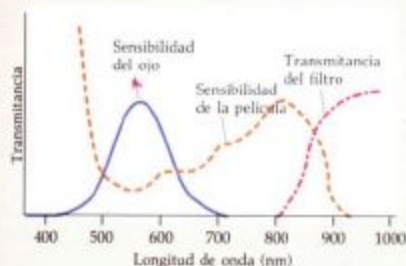


Figura 1 La película infrarroja (película infrarroja Eastman Kodak IR 135) tiene una sensibilidad que se extiende a través del espectro visible y se introduce en la región del espectro infrarrojo próximo. El filtro (filtro transmisor de infrarrojos Eastman Kodak 87C) es opaco a la luz visible pero transmite en el infrarrojo para longitudes de onda mayores de 800 nm. La combinación de película y filtro registra imágenes con longitudes de onda comprendidas entre 800 nm y 930 nm, margen bastante alejado del espectro visible.



Figura 2 Arco iris infrarrojo fotografiado en una lluvia de agua producida con una manguera de jardín perforada. En el exterior (a la izquierda de) del arco primario se ve un arco secundario más débil. Las franjas que se ven dentro (a la derecha de) del arco primario están producidas por efectos de interferencias. En la fotografía original es visible una franja infrecuente de interferencia en el exterior del arco secundario, pero puede que resulte difícil de localizar en la reproducción.

Existe otra característica interesante en esta fotografía infrarroja: inmediatamente *dentro* (en la parte derecha de) del arco primario brillante existe otra banda brillante —o quizás dos bandas. Estas franjas, que a veces se ven dentro de un arco visible, se denominan arcos supernumerarios y son el resultado de la interferencia de las ondas luminosas (ver capítulo 33).

Una inspección detallada del negativo de la figura 2 revela otra característica, que es difícil de reproducir en una figura impresa. Existe una franja muy débil, precisamente en el *exterior* del arco secundario. En teoría, un proceso semejante al que produce los arcos supernumerarios debería producir un conjunto análogo de franjas fuera del secundario. Nunca había visto ninguna de estas franjas asociadas con un arco iris ni con una fotografía de un arco iris, pero son visibles en el original de esta fotografía. Son visibles también cuando se proyecta la diapositiva sobre una pantalla. En el primer intento se consiguió una excitante recolección de efectos nuevos.

Otros efectos en las fotos infrarrojas

Es interesante considerar algunas otras características de estas fotografías infrarrojas. Si la única radiación que produjo estas imágenes fotográficas es la radiación infrarroja invisible, ¿es sorprendente o no que podamos ver la escalera, los árboles y la hierba? No deberíamos sorprendernos por ello. Estos objetos absorben ciertas longitudes de onda y reflejan o dispersan otras. Los objetos que absorben el infrarrojo aparecen oscuros en las fotos y los que lo dispersan fuertemente aparecen brillantes. Para que podamos dejar claro lo que muestran estas fotos, es necesario comprender la diferencia entre la radiación reflejada (o dispersada) y la radiación emitida.

Normalmente cuando se examinan los objetos que aparecen en un paisaje, se les ve únicamente por la luz que dispersan. Sin embargo, si la temperatura de un objeto es suficientemente alta, emite luz (ver el estudio de la radiación en la sección 16-3). Si está muy caliente —puede llamársele «al rojo blanco»— emite un amplio espectro de longitudes de onda con el pico de la curva de emisión en el espectro visible. Si el objeto se enfría un poco, el pico de la curva de emisión se desplaza hacia las longitudes de onda más largas. El resultado es que se está emitiendo más luz roja que luz azul, y la descripción apropiada para esta temperatura es «rojo cereza». A temperaturas aún más bajas se ve un brillo rojo oscuro. En este punto el pico de la curva de emisión está en el infrarrojo con una pequeña cantidad de emisión en el extremo rojo del espectro visible. A temperaturas ligeramente inferiores, el objeto aparece oscuro; el pico de emisión se ha desplazado aún más hacia el infrarrojo, de modo que no puede verse radiación visible. Si el objeto se enfría hasta que sólo resulta templado al tacto, su pico de emisión está bien dentro del infrarrojo —quizás a 10 000 nm— y no emite casi nada en el visible o en la región infrarroja cercana a la que resultan sensibles las películas fotográficas.

Sin embargo, si se pudiese obtener una fotografía con radiación de 10 000 nm, los objetos ligeramente más calientes que su entorno se verían brillantes —estarían luciendo con una radiación emitida infrarroja. Existen procedimientos para obtener estas fotografías; se utilizan para mostrar fuentes de calor locales en las viviendas o para señalar puntos relativamente calientes en un cuerpo humano (termogramas) que pueden indi-

car la situación de algún tejido enfermo. Estas fotografías suelen designarse normalmente como fotografías infrarrojas, pero son muy diferentes de las fotografías que se realizan con películas sensibles al infrarrojo. Esta película es sensible sólo al infrarrojo cercano, pero las «fotografías térmicas» son el resultado de la radiación emitida en el infrarrojo lejano. De modo que las fotografías infrarrojas mostradas aquí indican únicamente la radiación infrarroja procedente del Sol y que es dispersada por las hojas o por la escalera, o transformada por las esferas que son las gotas de lluvia en un arco iris visible.

Otra característica interesante de las fotografías es la oscuridad del cielo despejado que forma su fondo. Vemos luz en el firmamento claro y limpio alejado del Sol debido a la dispersión de las moléculas de los gases que componen el aire. Estas pequeñas partículas dispersoras (mucho menores que la longitud de onda de la luz) dispersan las ondas más cortas con más efectividad que las longitudes más largas. Así pues, se dispersa más la luz azul que la roja, dando al cielo su característico color azul. Este mismo efecto, que hace que el cielo resulte más oscuro con luz roja que con luz azul, hace que sea aún más oscuro con la luz infrarroja detectada por estas fotografías infrarrojas.

Después de tomar las fotografías iniciales, hechas con la manguera agujereada, esperaba capturar el propio arco iris natural infrarrojo. Tardé cuatro años antes de que viese un arco iris cuando tenía a mano mi cámara, la película infrarroja, el filtro, y suficiente tiempo como para montarlo todo y conseguir las fotografías indicadas en las figuras 3 y 4.



Figura 3 Arco iris infrarrojo natural. Esta fotografía muestra que las nubes son más brillantes en el interior del arco que en el exterior, característica que es común en los arco iris visibles.



Figura 4 Una fotografía de un arco iris natural invisible, mostrando el arco primario, el secundario y una serie de franjas de interferencia (arcos supernumerarios) dentro del primario.

Respuesta pública

He recibido una interesante colección de cartas en respuesta a una breve nota publicada en la que describía el arco iris infrarrojo. Algunas procedían de gente que tenía un «interés científico» en el tema; otras de amigos, cuyos lazos de amistad se había aflojado por la distancia y el tiempo, y que me decían: «Nos alegra ver que sigues sobre este tema». Otras cartas representaban intereses muy concretos, como la de un psicólogo que estudiaba la ceguera a los colores, preguntándose si dicha dificultad podría ser la razón por la cual un sujeto

llamado Greenler estaba interesado en la luz invisible —o una persona de la televisión belga que deseaba fotografías de un arco iris infrarrojo para un programa que estaba produciendo, insistiendo en que debían ser *en color*. Pero la mayoría de las cartas procedían de gente que compartían conmigo la fascinación por poder «ver» por vez primera este arco, cuya indetectada presencia en el cielo era anterior a cualquier conciencia humana sobre nuestro planeta.

Sugerencias bibliográficas

Boyle, W.S.: «Light-Wave Communications», *Scientific American*, agosto 1977, pág. 40.

En este artículo se estudia la física y la tecnología de un sistema telefónico que transmite señales mediante pulsos de luz transportados a lo largo de fibras ópticas.

Greenler, Robert: *Rainbows, Halos and Glories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

En este libro el autor del ensayo de este capítulo [«Más allá del Arco Iris (Visible)»] estudia los arco iris además de los efectos de la reflexión y de la refracción debidos a los cristales de hielo atmosféricos y también la refracción a través de una atmósfera no uniforme.

Katzir, Abraham: «Optical Fibers in Medicine», *Scientific American*, mayo 1989, pág. 120.

Las fibras ópticas pueden transportar la luz hacia el interior y el exterior del cuerpo humano con el fin de conseguir un diagnóstico (por ejemplo, sobre la circulación de la sangre) y para realizar tratamientos (cirugía con láser). En este artículo se examinan los instrumentos que en la actualidad se utilizan y los que puede que se desarrollen en el futuro.

Können, G.P.: *Polarized Light in Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Este libro poco corriente es como una guía de campo para la observación de la polarización de la luz desde diversos objetos, entre los que se incluyen el cielo, las nubes, el arco iris, las plantas, las láminas de hielo, los insectos y los minerales.

Incluye muchas láminas con fotografías y diagramas en color.

«Light» número especial de *Scientific American*, setiembre 1968.

Muestra cómo interacciona la luz con la materia tanto viva como inanimada, cómo se forman las imágenes, la visión y la luz láser entre otros varios temas.

Sobel, Michael I: *Light*, University of Chicago Press, Chicago, 1987.

Este libro presenta la luz como un concepto central de las ciencias naturales, en el que se enlazan los estudios no matemáticos de los rayos X y de las ondas de radio; la radiación cósmica de fondo, las comunicaciones por fibras ópticas, los pigmentos del ojo sensibles a la luz, y muchos más.

Walker, Jearl: «The Amateur Scientist: Studying Polarized Light with Quarter-Wave and Half-Wave Plates of One's Own Making», *Scientific American*, diciembre 1977, pág. 172.

Walker, Jearl: «The Amateur Scientist: More about Polarizers and How to Use Them, Particularly for Studying Polarized Sky Light», *Scientific American*, enero 1978, pág. 132.

Estos dos artículos resultan instructivos aunque no se tenga intención de repetir los experimentos.

Wehner, Rüdiger: «Polarized-Light Navigation by Insects», *Scientific American*, julio 1976, pág. 106.

En este artículo se describe cómo las hormigas y las abejas pueden utilizar la polarización natural de la luz celeste como ayuda para su orientación.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Establecer el principio de Huygens y utilizarlo para deducir la ley de la reflexión y la ley de Snell de la refracción.
2. Enunciar el principio de Fermat y utilizarlo para determinar la ley de la reflexión y la ley de Snell de la refracción.

3. Deducir una expresión que relacione el ángulo crítico correspondiente a la reflexión total interna con el índice de refracción de una sustancia.

4. Describir cómo se forma un arco iris y explicar cualitativamente porqué se ve el arco primario con un radio angular de 42° .

- Relacionar los cuatro procedimientos de producir luz polarizada a partir de luz no polarizada.
- Establecer la ley de Malus y utilizarla en problemas en los que intervenga la transmisión de la luz a través de un polarizador.
- Deducir la ley de Brewster utilizando la ley de Snell y el hecho de que cuando se tiene el ángulo de polarización, los rayos reflejado y refractado son perpendiculares.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Teoría corpuscular de la luz	Circularmente polarizada
Teoría ondulatoria de la luz	Eje de transmisión
Fotones	Polarizador
Principio de Huygens	Analizador
Construcción de Huygens	Ley de Malus
Reflexión	Dispersión o «scattering»
Ángulo de incidencia	Ley de Brewster
Plano de incidencia	Reflexión especular
Ley de reflexión	Reflexión difusa
Índice de refracción	Refracción
Imagen	Ley de Snell de la refracción

Reflexión total interna	Doble refracción
Dispersión	Materiales isotropos
Ángulo de mínima desviación	Materiales anisotropos
Principio de Fermat	Eje óptico
Polarización	Placa o lámina cuarto de onda
Linealmente polarizada	Placa o lámina de media onda
Birrefringencia	

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es, si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

- La luz y las ondas de radio se propagan con la misma velocidad a través del vacío.
- La mayor parte de la luz que incide normalmente sobre una superficie aire-vidrio se refleja.
- El ángulo de refracción de la luz es siempre menor que el ángulo de incidencia.
- El índice de refracción del agua es el mismo para todas las longitudes de onda en el espectro visible.
- Las ondas longitudinales no pueden polarizarse.

Problemas

Nivel I

30-1 Velocidad de la luz

- La galaxia espiral de la constelación de Andrómeda está aproximadamente a 2×10^6 km de la Tierra. ¿Cuántos años luz nos separan de Andrómeda?
- En un cohete enviado a Marte para tomar fotografías, la cámara se dispara mediante ondas de radio las cuales (como todas las ondas electromagnéticas) se mueven con velocidad de la luz. ¿Cuál es el retraso de tiempo entre la señal emitida y recibida de la Tierra a Marte? (Considerar que la distancia a Marte es de $9,7 \times 10^6$ m.)
- La distancia entre un punto situado en la superficie de la Tierra y otro en la superficie de la Luna se mide enviando un haz de luz láser a un reflector situado en la superficie lunar y midiendo el tiempo que emplea la luz en su viaje de ida y vuelta. La incertidumbre en la distancia medida Δx está relacionada con la incertidumbre en el tiempo Δt por $\Delta x = c \Delta t$. Si los intervalos de tiempo pueden medirse hasta un $\pm 1,0$ ns, hallar la incertidumbre de la distancia en metros.

30-2 Propagación de la luz: principio de Huygens

No se proponen problemas para esta sección.

30-3 Reflexión

- Calcular la fracción de energía luminosa reflejada en una superficie aire-agua para incidencia normal. ($n = 1,33$ para el agua.)
- La luz incide normalmente sobre una lámina de vidrio de índice de refracción $n = 1,5$. Se produce reflexión en ambas superficies de la lámina. ¿Qué porcentaje aproximado de energía de la luz incidente es transmitida por la lámina?

30-4 Refracción

- El índice de refracción del agua es 1,33. Calcular el ángulo de refracción de un haz de luz que incide desde el aire sobre la superficie del agua con un ángulo de (a) 20° , (b) 30° , (c) 45° , y (d) 60° respecto a la normal, y dibujar estos rayos sobre un diagrama.
- Repetir el problema 6 para un haz de luz que incide desde el agua sobre una superficie agua-aire.
- ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna de la luz cuando se desplaza desde el agua ($n = 1,33$) que es incidente sobre una superficie agua-aire?
- Calcular la velocidad de la luz en el agua ($n = 1,33$) y en el vidrio ($n = 1,5$).
- Un haz de luz roja monocromática de 700 nm de longitud de onda en el aire se mueve en el agua. (a) ¿Cuál es la longitud de onda en el agua? (b) ¿Un nadador bajo el agua observará el mismo color o un color diferente para esta luz?
- Una loseta de vidrio con un índice de refracción de 1,5 se sumerge en agua con un índice de refracción de 1,33. La luz dentro del agua incide sobre el vidrio. Hallar el ángulo de refracción si el ángulo de incidencia es (a) 60° , (b) 45° y (c) 30° .
- Repetir el problema 11 en el caso de un haz de luz inicialmente en el vidrio y que incide sobre la superficie vidrio-agua con los mismos ángulos.
- Una superficie de vidrio tiene depositada encima una capa de agua ($n_{\text{agua}} = 1,50$, $n_{\text{vidrio}} = 1,33$). Luz procedente del vidrio incide sobre la superficie vidrio-agua. Hallar el ángulo crítico para la reflexión total interna.
- El índice de refracción correspondiente al vidrio flint de silicato es 1,66 para luz de 400 nm de longitud de onda y 1,61

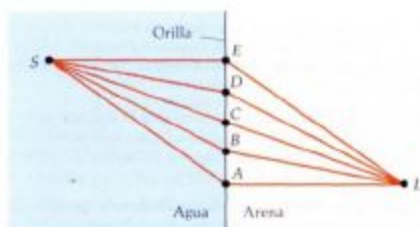
para luz de 700 nm. Hallar los ángulos de refracción para luz de estas longitudes de onda que incide sobre el vidrio con un ángulo de 45° .

30-5 Principio de Fermat

15. Un alumno de física que juega al billar desea lanzar su bola de modo que choque contra el borde de la mesa y luego choque contra una bola determinada. Escoge varios puntos sobre la banda y para cada uno de ellos mide la distancia desde dicho punto hasta la bola que ha de lanzar y a la que ha de chocar. Pretende hallar un punto para el cual la suma de estas distancias sea mínima. (a) ¿Podrá con este método hacer chocar su bola contra la escogida? (b) ¿Cómo se relaciona este método con el principio de Fermat?

16. Un nadador situado en el punto S de la figura 30-42 sufre un calambre mientras se encuentra bañando próximo a la orilla de un lago en calma y pide socorro. Un socorrista situado en el punto I oye esta llamada. El socorrista puede correr a 9 m/s y nadar a 3 m/s . Ha estudiado física y sabe elegir la trayectoria según la cual tardará menos tiempo en alcanzar al nadador. ¿Cuál de las trayectorias que se muestran en la figura 30-42 elige?

Figura 30-42. Problema 16.



30-6 Polarización

17. Dos láminas de polaroides tienen sus direcciones de transmisión cruzadas de modo que no pasa luz a su través. Se inserta una tercera lámina entre las dos de modo que su dirección de transmisión forma un ángulo θ con la primera. Se hace incidir luz no polarizada de intensidad I_0 sobre la primera lámina. Hallar la intensidad transmitida a través de las tres si (a) $\theta = 45^\circ$; (b) $\theta = 30^\circ$.

18. El ángulo de polarización para una determinada sustancia es 60° . (a) ¿Cuál es el ángulo de refracción de la luz que incide con este ángulo? (b) ¿Cuál es el índice de refracción de esta sustancia?

19. El ángulo crítico para la reflexión total interna de una sustancia es 45° . ¿Cuál es su ángulo de polarización?

20. ¿Cuál es el ángulo de polarización para (a) agua con $n=1.33$ y (b) vidrio con $n=1.5$?

Nivel II

21. Una fuente puntual de luz está 5 cm por encima de una superficie plana reflectora (como un espejo). Dibujar un rayo desde la fuente que incida en la superficie con un ángulo de incidencia de 45° y dos rayos más que incidan sobre la superficie con ángulos ligeramente menores que 45° y dibujar el rayo reflejado por cada uno de ellos. Los rayos reflejados parecen diverger de un punto denominado imagen de la fuente luminosa. Dibujar líneas a trazos extendiendo los rayos refle-

jados hacia atrás hasta que se encuentren en un punto detrás de la superficie para localizar el punto imagen.

22. Una moneda de plata está en el fondo de una piscina de 4 m de profundidad. Un haz de luz reflejado en la moneda emerge de la piscina formando un ángulo de 20° respecto a la superficie del agua y entra en el ojo de un observador. Dibujar un rayo desde la moneda hasta el ojo del observador. Extender dicho rayo, que va desde la superficie agua-aire al ojo, hacia atrás hasta que corte a la línea vertical dibujada desde la moneda. ¿Cuál es la profundidad aparente de la piscina para este observador?

23. Dos alumnos acadaudados deciden mejorar el experimento de Galileo para medir la velocidad de la luz. Uno de ellos va a Londres y llama al otro en Nueva York por teléfono. Las señales telefónicas se transmiten mediante la reflexión de ondas electromagnéticas en un satélite que está a 37.9 Mm por encima de la superficie de la Tierra. Si se desprecia la distancia entre Londres y Nueva York, la distancia recorrida es el doble de esta distancia. Un alumno da una palmada y cuando el otro oye el sonido bate a su vez las palmas. El primer alumno mide el tiempo entre su palmada y el momento de oír la segunda. Calcular el tiempo transcurrido, despreciando los tiempos de respuesta de los alumnos. ¿Puede tener éxito este experimento? ¿Qué mejoras para la medida del tiempo podrían sugerirse? (Los retrasos temporales en los circuitos electrónicos que son mayores que los debidos al tiempo que tarda la luz en ir y volver al satélite hacen que este experimento no sea factible.)

24. En el intento de Galileo de determinar la velocidad de la luz, su asistente y él se colocaron en las cimas de sendas colinas separadas del orden de 3 km. Galileo hacía destellar una luz y recibía un destello de respuesta de su ayudante. (a) Si su ayudante tenía una reacción instantánea, ¿qué diferencia de tiempo necesitaría Galileo para medir, para que fuese práctico este experimento? (b) ¿Cómo se compara este tiempo con el de reacción humana, que es del orden de 0.2 s?

25. Un foco luminoso está situado a 5 m por debajo de la superficie de un gran estanque de agua. Hallar el área de la mayor circunferencia en la superficie del estanque a través de cuyo círculo puede emerger directamente luz del foco.

26. Un nadador en el fondo de una piscina de 3 m de profundidad mira hacia arriba y distingue un círculo de luz. Si el índice de refracción del agua de la piscina es 1.33, hallar el radio del círculo.

27. Demostrar que cuando se hace girar un espejo un ángulo θ , el haz de luz reflejado gira en 2θ .

28. Está ocurriendo luz en dirección perpendicular a la cara mayor de un prisma cuyo corte es un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuál es la velocidad de la luz en este prisma si apenas llega a producirse en él la reflexión interna total?

29. Demostrar que la intensidad transmitida a través de una placa de vidrio con un índice de refracción n para luz con incidencia normal vale aproximadamente

$$I_t = I_i \left[\frac{4n}{(n+1)^2} \right]^2$$

30. Un rayo de luz comienza en el punto $x = -2 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$, incide sobre un espejo en el plano yz en un cierto punto x y se refleja pasando por el punto $x = 2 \text{ m}$, $y = 6 \text{ m}$. (a) Hallar el valor de x que hace que sea mínima la distancia total recorrida por el rayo. (b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia sobre el plano reflector? ¿Cuál es el ángulo de reflexión?

31. La luz atraviesa simétricamente un prisma que tiene un ángulo en el vértice de α , como se indica en la figura 30-43. (a) Demostrar que el ángulo de desviación δ viene dado por

$$\sin \frac{\alpha + \delta}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}$$

(b) Si el índice de refracción para la luz roja es 1,48 y para la luz violeta es 1,52, ¿cuál es la separación angular de la luz visible en el caso de un prisma con un ángulo en el vértice de 60° ?

32. Un haz de luz incide sobre una superficie plana de vidrio flint de silicato con un ángulo de incidencia de 45° . El índice de refracción del vidrio varía con la longitud de onda, como se indica en el gráfico de la figura 30-22. ¿En cuánto es menor el ángulo de refracción de la luz violeta de longitud de onda de 400 nm respecto a la luz roja de 700 nm?

33. Repetir el problema 32 para el cuarzo.

34. Utilizar la figura 30-22 para calcular los ángulos críticos para la reflexión total interna correspondiente a luz inicialmente en vidrio flint de silicato que incide sobre una superficie vidrio-aire si la luz es (a) violeta de 400 nm y (b) roja de 700 nm.

35. (a) En el caso de un rayo de luz en el interior de un medio transparente que tiene una interfase plana con el vacío, demostrar que el ángulo de polarización y el ángulo crítico para la reflexión total interna satisfacen la expresión $\tan \theta_p = \sin \theta_c$. (b) ¿Qué ángulo es el mayor?

36. Está incidiendo luz desde el aire sobre una sustancia transparente con un ángulo de $58,0^\circ$ respecto a la normal. Se observa que los rayos reflejado y refractado son mutuamente perpendiculares. (a) ¿Cuál es el índice de refracción de la sustancia transparente? (b) ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna en esta sustancia?

37. Dos láminas polarizadoras tienen cruzados sus ejes de transmisión y se inserta una tercera lámina de modo que su eje de transmisión forme un ángulo θ con el de la primera lámina, como en el problema 17. Demostrar que la intensidad transmitida a través de las tres láminas es máxima cuando $\theta = 45^\circ$.

38. Si la lámina polarizadora intermedia del problema 37 está girando con una velocidad angular ω alrededor de un eje paralelo al haz luminoso, hallar la intensidad luminosa transmitida a través de las tres láminas en función del tiempo. Suponer que $t = 0$ en el instante $t = 0$.

39. Tenemos una pila de $N+1$ láminas polarizadoras en la que cada lámina está girada en un ángulo de $\pi/2N$ rad respecto a la precedente. Una luz polarizada plana linealmente de

intensidad I_0 está incidiendo sobre la pila normalmente. La luz incidente está polarizada a lo largo del eje de transmisión de la primera lámina y, por consiguiente normal al eje de transmisión de la última. (a) ¿Cuál es la intensidad transmitida a través de la pila? (b) Si son tres las láminas ($N=2$), ¿cuál es la intensidad transmitida? (c) En el caso de 101 láminas, ¿cuál es la intensidad transmitida? (d) ¿Cuál es la dirección de polarización del haz en cada caso?

40. Un foco puntual de luz está situado en el fondo de un depósito de acero y sobre él se coloca una cartulina circular opaca de radio 6,0 cm. Se añade con mucho cuidado un fluido transparente al depósito de forma que la cartulina flota en su superficie con su centro situado directamente encima del foco. Un observador situado por encima de la superficie no ve ninguna luz hasta que el fluido tiene una profundidad de 5 cm. ¿Cuál es el índice de refracción de dicho fluido?

41. Un rayo de luz en un vidrio flint denso con un índice de refracción 1,655 está incidiendo sobre la cara exterior del mismo. Se condensa en ella un líquido desconocido. La reflexión total interna sobre la superficie vidrio-líquido se produce cuando el ángulo de incidencia en la superficie vidrio-líquido es $53,7^\circ$. (a) ¿Cuál es el índice de refracción del líquido desconocido? (b) Si se elimina el líquido, ¿cuál es el ángulo de incidencia para la reflexión total interna? (c) Para el ángulo de incidencia encontrado en la parte (b), ¿cuál es el ángulo de refracción del rayo dentro de la película de líquido? ¿Emergerá un rayo a través de la película de líquido hacia el aire que está encima? Suponer que el vidrio y el líquido tienen superficies perfectamente planas.

42. Dado que el índice de refracción para la luz roja en agua es 1,3318 y para la luz azul es 1,3435, hallar la separación angular de estos colores en el arco iris primario. (Utilizar la ecuación dada en el problema 51.)

43. En la figura 30-44, la luz está inicialmente en un medio (como el aire) de índice de refracción n_1 . Incide con un ángulo θ_1 sobre la superficie de separación de un líquido (como el agua) de índice de refracción n_2 . La luz pasa a través de la capa de agua y entra en vidrio de índice de refracción n_3 . Si el ángulo de refracción en el vidrio es θ_3 , demostrar que $n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3$. Es decir, demostrar que puede desprejiciarse el segundo medio cuando hay que hallar el ángulo de refracción en el tercer medio.

44. Un rayo de luz cae sobre un bloque de vidrio rectangular ($n=1,5$) que está casi completamente sumergido en agua ($n=1,33$), como se ve en la figura 30-45. (a) Hallar el ángulo θ para el que se produce exactamente la reflexión interna en el punto P . (b) ¿Se verificará la reflexión interna total en el punto P para el valor de θ hallado en la parte (a) si se elimina el agua? Explicarlo.

Figura 30-43 Problema 31.

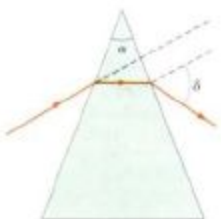
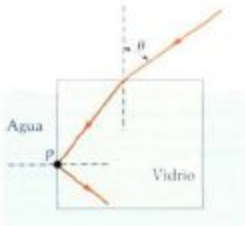


Figura 30-44 Problema 43.



Figura 30-45 Problema 44.



45. Una luz de longitud de onda λ en el aire incide sobre una lámina de calcita de modo que los rayos ordinario y extraordinario viajan en la misma dirección como se ve en la figura 30-46. Demostrar que la diferencia de fases entre estos rayos después de atravesar un espesor t es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)t$$

46. (a) Utilizar el resultado obtenido en el problema 29 para calcular la relación entre la intensidad transmitida y la intensidad incidente sobre N láminas de vidrio paralelas si la luz incide normalmente a la superficie de las láminas. (b) Calcular esta relación para tres láminas de vidrio en las que $n = 1,5$. (c) Tomando $n = 1,5$, ¿cuántas láminas de vidrio serán necesarias para reducir en un 10 por ciento la intensidad de la radiación incidente?

47. Sobre una lámina de material transparente incide luz con un ángulo θ_i , como se ve en la figura 30-47. La lámina o losla tiene un espesor t y un índice de refracción n . Demostrar que

$$n = \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } [\arctg(d/t)]}$$

siendo d la distancia indicada en la figura y $\arctg(d/t)$ es el ángulo cuya tangente es d/t .

48. Supóngase que la lluvia cae verticalmente desde una nube estacionaria situada a 10 000 m por encima de un confuso corredor de maratón que marcha en círculo con velocidad constante de 4 m/s. La lluvia tiene una velocidad terminal de 9 m/s. (a) ¿Cuál es el ángulo que parece formar la lluvia con la vertical desde el punto de vista del corredor? (b) ¿Cuál es el movimiento aparente de la nube observado por el corredor? (c) Una estrella situada en el eje de la órbita terrestre parece tener una órbita circular de diámetro angular de 41,2 segundos de arco. ¿Cómo se relaciona este ángulo con la velocidad de la Tierra en su órbita y con la velocidad de los fotones que vienen desde esta estrella distante? (d) ¿Cuál es la velocidad de la luz utilizando este método?

49. Este problema es una analogía de la refracción. Una banda de música está marchando sobre un campo de fútbol con una velocidad constante v_1 . Aproximadamente hacia la mitad del campo la banda llega a una sección de terreno embarrado que tiene un límite claramente distinguible que forma un ángulo de 30° con la línea correspondiente a las 50 yardas, según se ve en la figura 30-48. En el barro, los elementos de la banda se mueven con velocidad $v_2 = \frac{1}{2} v_1$. Hacer un diagrama de cómo se desvía cada línea de personas que componen la banda cuando llegan a encontrarse con la sección embarrada del campo de modo que finalmente la banda llega a marchar en una dirección diferente. Indicar la dirección original mediante un rayo y la dirección final por otro segundo rayo, y hallar los ángulos entre estos rayos y la línea perpendicular a la límite entre el terreno normal y el embarrado. ¿Se desvía la dirección del movimiento hacia la perpendicular a la línea límite, o se aleja de la misma?

Figura 30-46 Problema 45.

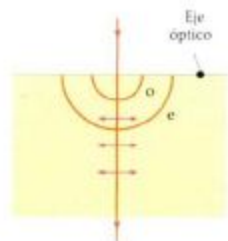
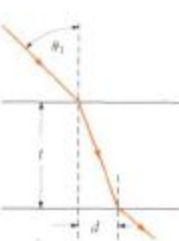


Figura 30-47 Problema 47.



Nivel III

50. Está incidiendo luz normalmente sobre una cara de un prisma de vidrio cuyo índice de refracción es n (figura 30-49). La luz se refleja totalmente en el lado recto. (a) ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener n ? (b) Cuando se sumerge este prisma en un líquido cuyo índice de refracción es 1,15, sigue existiendo todavía reflexión total, pero en el agua, cuyo índice es 1,33, deja de existir. Utilizar esta información para limitar los valores de n .

51. La ecuación 30-13 nos da la relación existente entre el ángulo de desviación ϕ_s de un rayo de luz incidente sobre una gota esférica de agua en función del ángulo de incidencia θ_i y del índice de refracción del agua. (a) Suponer que $n_{\text{ext}} = 1$ y derivar ϕ_s respecto a θ_i . [Indicación: Si $y = \arcsen x$, $dy/dx = (1-x^2)^{-1/2}$.] (b) Hacer $d\phi_s/d\theta_i = 0$ y demostrar que el ángulo de incidencia $\theta_{\text{máx}}$ correspondiente a la desviación mínima viene dado por

$$\cos \theta_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

y hallar $\theta_{\text{máx}}$ para el agua, cuyo índice de refracción vale 1,33.

52. Investigar el efecto sobre el ángulo crítico de una delgada capa de agua sobre una superficie de vidrio para los rayos que se originan en el vidrio. Tómese $n = 1,33$ para el agua y $n = 1,5$ para el vidrio. (a) ¿Cuál es el ángulo crítico de la reflexión total interna en la superficie vidrio-agua? (b) ¿Son posibles rayos incidentes de ángulo mayor que θ_c para la refracción vidrio-aire, de modo que los rayos de luz abandonen el vidrio y el agua y pasen al aire?

53. Un haz láser incide sobre una placa de vidrio de 3 cm de espesor. El vidrio tiene un índice de refracción de 1,5 y el ángulo de incidencia es 40° . Las superficies superior e inferior del vidrio son paralelas y ambas producen haces reflejados de casi la misma intensidad. ¿Cuál es la distancia perpendicular d entre los dos haces reflejados adyacentes?

54. (a) Demostrar que un rayo luminoso transmitido a través de una lámina de vidrio emerge paralelo al rayo incidente pero desplazado respecto a él. (b) En el caso de un ángulo incidente de 60° , índice de refracción del vidrio $n = 1,5$ y espesor de la lámina 10 cm, hallar el desplazamiento medido perpendicularmente desde el rayo incidente.

55. Un foco puntual isotrópico se coloca debajo de la superficie de un gran estanque lleno de líquido que tiene un índice de refracción n . ¿Qué fracción de energía luminosa abandona directamente la superficie?

Figura 30-48 Problema 49.

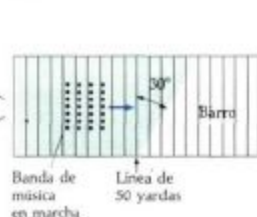
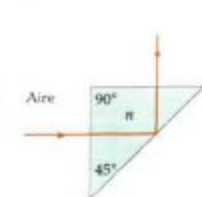


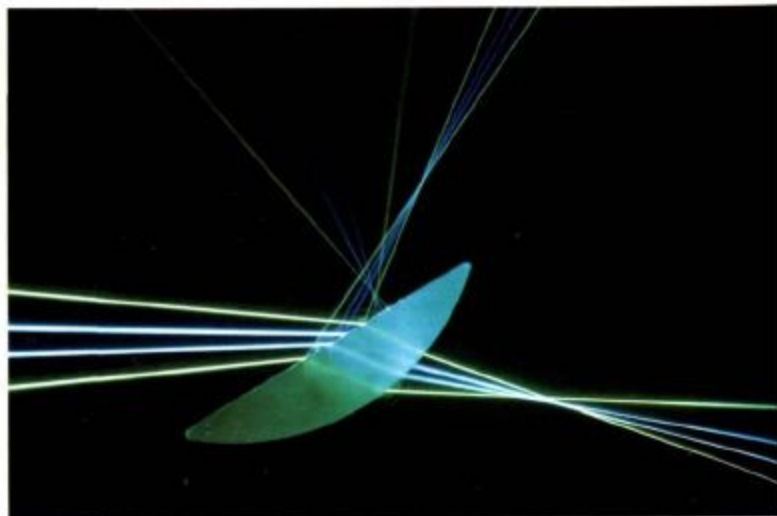
Figura 30-49 Problema 50.



Capítulo 31

Óptica Geométrica

El enfoque de rayos por reflexión y refracción se demuestra mediante estos haces de láser que inciden sobre una lente de vidrio.



La longitud de onda de la luz suele ser muy pequeña en comparación con el tamaño de los obstáculos o aberturas que se encuentran a su paso y pueden despreciarse en general los efectos de la difracción. El estudio de estos casos, en los cuales es válida la aproximación de los rayos y en los que se propaga la luz en línea recta, se conoce como **óptica geométrica**. En este capítulo, aplicaremos las leyes de la reflexión y de la refracción para estudiar la formación de imágenes por espejos y lentes.

31-1 Espejos planos

La figura 31-1 muestra un haz estrecho de rayos luminosos que proceden de una fuente puntual P y se refleja en un espejo plano. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás del plano del espejo. El punto P' se denomina la **imagen** del objeto P . Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que procedieran de una fuente situada en P' sin que hubiese espejo. La imagen se denomina **imagen virtual** debido a que la luz no procede realmente de la imagen. La imagen P' está en la línea que pasa por el objeto P y es perpendicular al plano del espejo, a una distancia detrás de dicho plano igual a la distancia a que el objeto está del mis-



Figura 31-1 Imagen formada por un espejo plano. Los rayos procedentes del punto P que inciden sobre el espejo y entran en el ojo parecen proceder del punto imagen P' , detrás del espejo. El ojo puede ver la imagen siempre que se encuentre en la región sombreada.

mo, como muestra la figura. (La figura 31-1 fue producida por construcción geométrica utilizando la ley de reflexión.) La imagen puede verse siempre que el ojo esté en cualquier lugar de la región indicada, de modo que una línea trazada desde la imagen del ojo pasa cortando el espejo. En la figura se observa que el objeto no necesita estar directamente delante del espejo. Una imagen puede verse siempre que el objeto no esté detrás del plano del espejo.

La imagen que se ve si se mantiene la palma de la mano derecha frente a un espejo plano es la indicada en la figura 31-2. La imagen es del mismo tamaño que el objeto, pero no es la misma que observaría otra persona frente a uno ni la que nosotros mismos veríamos si mirásemos la palma de nuestra mano derecha. La imagen de una mano derecha que da un espejo es una mano izquierda. Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una inversión en profundidad; es decir, la mano se transforma de una mano derecha a otra izquierda porque el espejo ha invertido la palma y el dorso de la mano. En la figura 31-3 se aclara también esta inversión en profundidad, mostrándonos una persona tumbada en el suelo y con sus pies en contacto con un espejo plano. Se indica cuál es la imagen de un sistema de coordenadas rectangular que tiene sus ejes x e y paralelos al plano del espejo en la figura 31-4. Las imágenes de las flechas situadas a lo largo de los ejes x e y son paralelas a las flechas objeto. Pero la imagen de la flecha a lo largo del eje z tiene sentido opuesto a la flecha objeto correspondiente. El espejo transforma un sistema coordenado «a derechas» o «dextrorsum» en el que $i \times j = k$, en donde los vectores unitarios i , j y k están dirigidos respectivamente, a lo largo de los ejes x , y y z , en un sistema coordenado «a izquierdas» o «sinextrorsum» para el que $i \times j = -k$.



Figura 31-2 La imagen de una mano derecha en un espejo plano es una mano izquierda. Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una inversión en la profundidad.

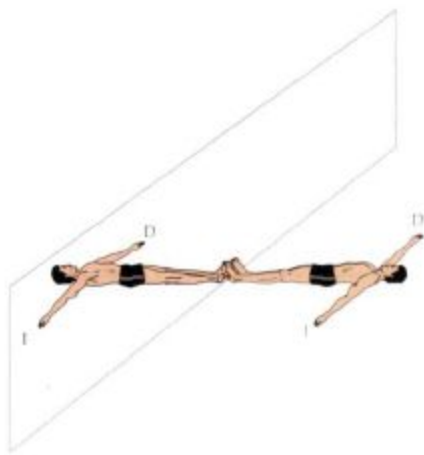


Figura 31-3 Una persona tendida en el suelo con sus pies en contacto con un espejo. La imagen está invertida en su dimensión de profundidad.

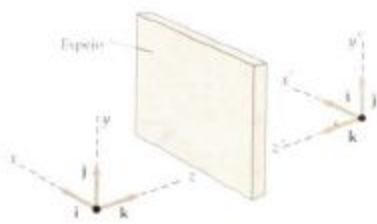


Figura 31-4 Imagen de un sistema de coordenadas rectangulares dada por un espejo plano. Las flechas a lo largo de los ejes x e y , que son paralelos al plano del espejo, tienen los mismos sentidos en la imagen que en el objeto. El sentido de la flecha a lo largo del eje z está invertido en la imagen. La imagen del sistema de coordenadas original, que es «a derechas» de forma que $i \times j = k$, resulta «a izquierdas» de modo que $i \times j = -k$.

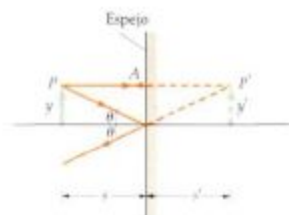


Figura 31-5 Diagrama de rayos para situar la imagen de una flecha dada por un espejo plano.

En la figura 31-5 se muestra una flecha de altura y que se mantiene paralela a un espejo plano y a una distancia s del mismo. Podemos dibujar y localizar la imagen de la punta de la flecha (y de cualquier otro punto de la misma) dibujando dos rayos. Uno de ellos se dibuja perpendicularmente al espejo. Incide en el espejo en el punto A y se refleja hacia atrás sobre sí mismo. El otro rayo incide en el espejo formando un ángulo θ con la normal al espejo. Se refleja formando un ángulo θ igual con el eje x . La prolongación de estos dos rayos hacia atrás, detrás del espejo, sitúa la imagen de la punta de la flecha, como se indica con las líneas a trazos de la figura. Podemos ver en ella que la imagen está a la misma distancia detrás del espejo como el objeto está delante de él, y que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

En la figura 31-6 se ilustra la formación de imágenes múltiples mediante dos espejos planos que forman un ángulo cualquiera entre sí. Es frecuente ver este fenómeno en las tiendas de ropa, que disponen de sistemas con dos o tres espejos adyacentes orientables. La luz reflejada en el espejo 1 llega al espejo 2 como si procediese del punto imagen P'_1 . La imagen P'_1 se denomina objeto para el espejo 2, y su imagen en éste es, a su vez, un punto $P''_{1,2}$. Se formará esta imagen siempre que el punto imagen P'_1 esté delante del plano del espejo 2. La imagen

Figura 31-6 Imágenes formadas por dos espejos planos. P'_1 es la imagen del objeto P en el espejo 1, y $P''_{1,2}$ es la imagen en el espejo 2. El punto $P''_{1,2}$ es la imagen en el espejo 2 vista cuando los rayos procedentes del espejo se reflejan primero en el espejo 1 y luego en el espejo 2. La imagen $P''_{1,2}$ no da ninguna imagen en el espejo 1 porque se encuentra detrás de él.

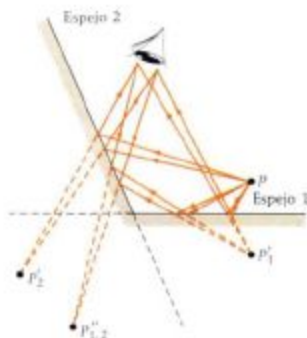
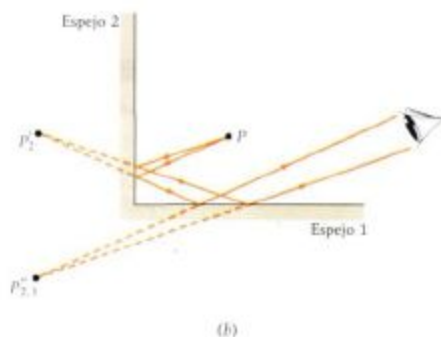
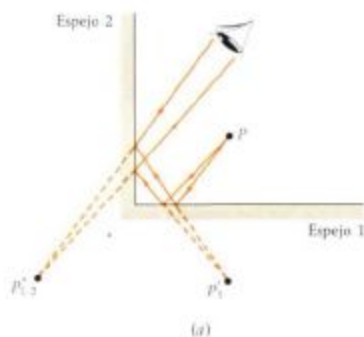


Figura 31-7 Dos espejos planos mutuamente perpendiculares. (a) Rayos que inciden primero en el espejo 1 y luego en el espejo 2. La imagen P'_1 en el espejo 2 es $P''_{1,2}$. (b) Rayos que inciden primero en el espejo 2 y luego en el espejo 1. La imagen de P'_2 en el espejo 1 es $P'''_{2,1}$, que coincide con $P''_{1,2}$ en el caso de espejos perpendiculares.

que aparece en el punto $P''_{1,2}$ se debe a los rayos procedentes del objeto que se reflejan directamente en el espejo 2. Como $P''_{1,2}$ está detrás del plano del espejo 1, no puede servir de punto objeto para formar otra imagen en el espejo 1. El número de imágenes múltiples que se forman con dos espejos depende del ángulo entre ellos y de la posición del objeto.

En la figura 31-7 se muestran dos espejos mutuamente perpendiculares. En la figura 31-7a se ven los rayos que procedentes del objeto P , después de incidir primero en el espejo 1 y luego en el 2, acaban llegando al ojo. En este caso, el punto imagen $P''_{1,2}$ es el mismo que el que forman los rayos que inciden primero



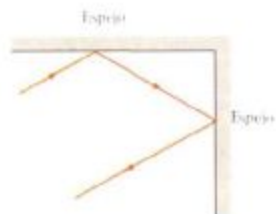


Figura 31-8 Un rayo que incide sobre uno de los espejos planos perpendiculares se refleja en el segundo espejo en sentido opuesto al original, cualquiera que sea el ángulo de incidencia.

en el espejo 2 y luego en el 1, como puede verse en la figura 31-7b. Si se permanece de pie delante de dos espejos verticales perpendiculares entre sí, como en un rincón de una sala, la imagen que uno mismo ve es la misma que la observada por otra persona cualquiera que está frente a nosotros porque la inversión en profundidad ocurre dos veces, una en cada espejo. La figura 31-8 ilustra el hecho de que un rayo horizontal reflejado en dos espejos verticales perpendiculares invierte exactamente su sentido con independencia del ángulo que el rayo forme con los espejos. Si se colocasen tres espejos perpendiculares entre sí como las caras de la esquina interior de una caja, todo rayo incidente en uno cualquiera de los espejos procedente de cualquier dirección, invierte exactamente su sentido. Se colocó en la Luna un conjunto de espejos de este tipo (realmente un conjunto de prismas reflectores) mirando hacia la Tierra. Un haz láser enviado desde la Tierra dirigido a los espejos se reflejaría retornando al mismo lugar de la Tierra. Se ha utilizado un haz de este tipo para medir la distancia a los espejos con una precisión de unos centímetros, midiendo el tiempo que emplea la luz en llegar hasta los espejos y regresar de nuevo.

Cuestiones

1. ¿Puede fotografiarse una imagen virtual?
2. Supóngase que se pinta cada uno de los ejes de un sistema coordenado como el de la figura 31-4 con un color diferente. Se toma una fotografía del sistema coordenado y otra de su imagen en un espejo plano. ¿Es posible afirmar que una de las fotografías es la de una imagen en un espejo en lugar de ser las dos fotografías las de un sistema real de coordenadas tomadas desde ángulos diferentes?



Este estanque actúa como un espejo plano produciendo una imagen virtual del Taj Mahal.

31-2 Espejos esféricos

La figura 31-9 muestra un haz de rayos que procede de un punto P situado en el eje de un espejo esférico cóncavo y que después de reflejarse en el mismo convergen en el punto P' . Los rayos entonces divergen desde este punto como si hubiese un objeto en el mismo. Esta imagen se denomina **imagen real**, debido a que la luz realmente emana del punto imagen. Puede verse por un ojo cualquiera situado a la izquierda de la imagen y que mire hacia el espejo. Podría observarse también sobre una pantalla visora de vidrio o una película fotográfica colocada en el punto imagen. Una imagen virtual, como la que se forma en un espejo plano, no puede ser observada en una pantalla situada en el punto imagen puesto

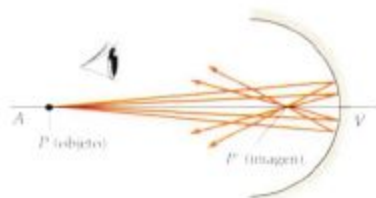


Figura 31-9 Los rayos procedentes de un punto objeto P situado sobre el eje AV de un espejo esférico cóncavo forma una imagen en P' . La imagen es nítida si los rayos inciden sobre el espejo cerca del eje.

que allí no existe luz. A pesar de esta diferencia entre imagen real y virtual, los rayos luminosos que divergen de una imagen real y los que parecen diverger de una imagen virtual son idénticos, de modo que el ojo no hace ninguna diferencia entre ellos cuando observa una imagen real o una virtual.

En la figura 31-10 vemos que sólo los rayos que inciden en el espejo en puntos próximos al eje AV se reflejan pasando por el punto imagen. Estos rayos se denominan **rayos paraxiales**. Debido a que otros **rayos no-paraxiales** convergen en puntos diferentes próximos al punto imagen, la imagen aparece borrosa, efecto denominado **aberración esférica**. La imagen puede hacerse más nítida reduciendo el tamaño del espejo de modo que no incidan en él rayos que no sean paraxiales. Aunque la imagen es entonces más nítida, se reduce su brillo debido a que se refleja menos intensidad luminosa.

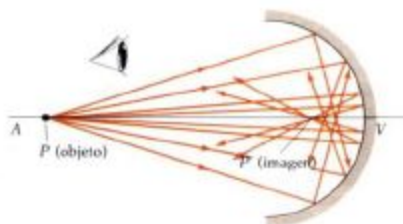


Figura 31-10 Aberración esférica, los rayos no-paraxiales que inciden sobre el espejo en puntos alejados del eje AV no se reflejan pasando por el punto imagen P' . Estos rayos forman una imagen borrosa.

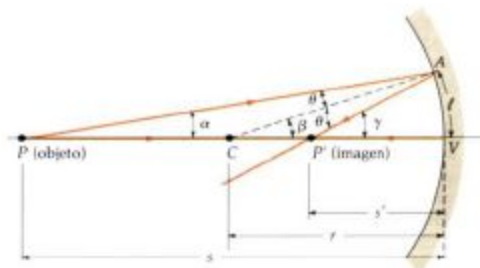


Figura 31-11 Construcción geométrica para calcular la distancia imagen s' a partir de la distancia objeto s y del radio de curvatura r .

La distancia imagen desde el vértice V del espejo a P' puede relacionarse con la distancia objeto desde el vértice V al punto P y con el radio de curvatura del espejo utilizando conceptos de geometría elemental. La figura 31-11 muestra un rayo que procede de un punto objeto P se refleja en el espejo y pasa por el punto imagen P' . El punto C es el centro de curvatura del espejo. Los rayos incidente y reflejado forman ángulos iguales con la línea radial CA , que es perpendicular a la superficie del espejo. Sean s y s' las distancias objeto e imagen, y r el radio de curvatura del espejo. El ángulo β es un ángulo exterior al triángulo PAC y, por tanto, es igual a $\alpha + \theta$:

$$\beta = \alpha + \theta \quad 31-1$$

Análogamente, a partir del triángulo PAP' ,

$$\gamma = \alpha + 2\theta \quad 31-2$$

Eliminando θ entre estas ecuaciones se tiene

$$2\theta = \gamma - \alpha = 2\beta - 2\alpha$$

o bien

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad 31-3$$

Utilizando las aproximaciones de los ángulos pequeños $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$, se tiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad 31-4$$

La deducción de esta ecuación supone que los ángulos que forman con el eje los rayos incidente y reflejado son pequeños. Esto es equivalente a suponer que los rayos son paraxiales.

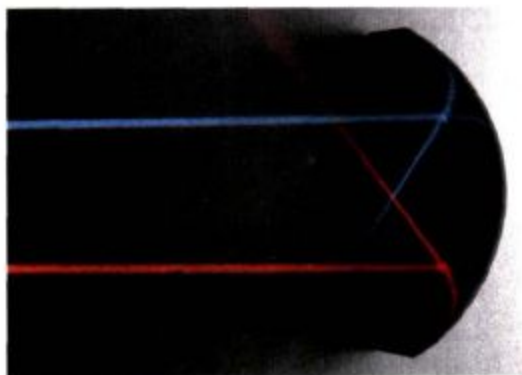
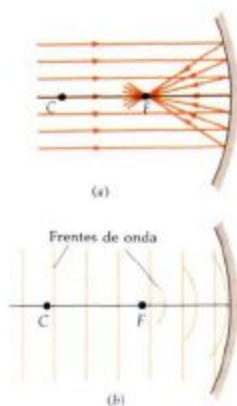
Cuando la distancia objeto es grande en comparación con el radio de curvatura del espejo, el término $1/s$ de la ecuación 31-4 es mucho menor que $2/r$ y puede despreciarse. Para $s = \infty$, la distancia imagen es $s' = \frac{1}{2}r$ y recibe el nombre de **distancia o longitud focal f** del espejo.

$$f = \frac{1}{2}r$$

31-5 *Distancia focal del espejo*

La ecuación del espejo puede escribirse en función de f como

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

31-6 *Ecuación del espejo*

(c)

El punto focal F (punto imagen) es el punto en donde resultan enfocados todos los rayos paralelos al eje del espejo, como se ilustra en la figura 31-12a. (Una vez más sólo los rayos paraxiales se enfocan en un solo punto.)

Cuando un objeto está muy lejos del espejo, los frentes de onda son aproximadamente planos, como se ve en la figura 31-12b, y los rayos son paralelos. En la figura 31-12b, obsérvese cómo los bordes del frente de onda inciden en la superficie del espejo cóncavo antes que la porción central cercana al eje, dando como resultado un frente de onda esférico después de la reflexión. La figura 31-13 muestra los frentes de onda y los rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre un espejo convexo. En este caso, incide en primer lugar la parte central del frente de onda y las ondas reflejadas parece que proceden del punto focal detrás del espejo.

Figura 31-12 (a) Rayos paralelos que inciden sobre un espejo cóncavo y se reflejan pasando por el punto focal F situado a una distancia $r/2$. (b) Los frentes de onda incidentes son planos; después de la reflexión se convierten en ondas esféricas que convergen en el punto focal. (c) Fotografía de los rayos paralelos enfocados por un espejo cóncavo.

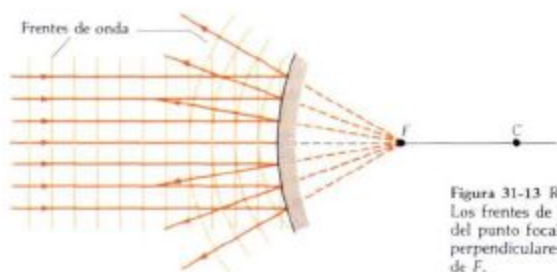


Figura 31-13 Reflexión de ondas planas en un espejo convexo. Los frentes de onda reflejados son esféricos como si emanasen del punto focal F detrás del espejo. Los rayos son perpendiculares a los frentes de onda y parece que divergen de F .

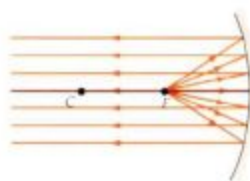


Figura 31-14 Ilustración de la reversibilidad. Los rayos que divergen de un foco puntual situado en el punto focal de un espejo cóncavo se reflejan en el espejo como rayos paralelos. Los rayos son los mismos que los de la figura 31-12a pero en sentido opuesto.

En la figura 31-14 se han dibujado los rayos que, procedentes de una fuente puntual situada en el punto focal, inciden sobre un espejo cóncavo y se reflejan paralelamente al eje. Así se ilustra una propiedad de las ondas denominada **reversibilidad**. Si invertimos el sentido de un rayo reflejado, la ley de la reflexión asegura que el rayo reflejado coincidirá con el rayo incidente original, pero tendrá sentido opuesto. (La reversibilidad se cumple también con los rayos refractados, que se estudiarán en secciones posteriores.) Así pues, si tenemos una imagen real de un objeto que se ha formado mediante una superficie reflectante (o refractante), podemos colocar un objeto en el punto imagen y se formará una nueva imagen en la posición del objeto original.

Ejemplo 31-1

Un objeto está situado a 12 cm de un espejo cóncavo, cuyo radio de curvatura es 6 cm. Hallar la distancia focal del espejo y la distancia a que se encuentra la imagen.

Según la ecuación 31-5, la distancia focal vale

$$f = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}(6 \text{ cm}) = 3 \text{ cm}$$

La ecuación 31-6 nos da entonces

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{12 \text{ cm}} = \frac{1}{3 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{4}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{12 \text{ cm}} = \frac{3}{12 \text{ cm}}$$

$$s' = 4 \text{ cm}$$

Diagramas de rayos para los espejos

Un método que resulta útil a la hora de situar imágenes consiste en la construcción de un **diagrama de rayos**. Este método se aclara en la figura 31-15, en donde el objeto es una figura humana perpendicular al eje a una distancia s del espejo. Mediante una selección juiciosa de los rayos que parten desde la cabeza, podemos localizar rápidamente la imagen. Existen cuatro **rayos principales** que son convenientes para su utilización en el diagrama:

1. El **rayo paralelo** al eje. Este rayo se refleja pasando por el punto focal.
2. El **rayo focal**, que pasa por el punto focal. Este rayo se refleja paralelamente al eje.
3. El **rayo radial**, que pasa por el centro de curvatura. Este rayo incide sobre el espejo perpendicularmente a su superficie y, por ello, se refleja coincidiendo consigo mismo.
4. El **rayo central**, que pasa por el vértice del espejo. Se refleja formando con el eje el mismo ángulo.

En la figura 31-15 se han indicado los tres primeros rayos principales. La intersección de dos rayos cualesquiera sitúa el punto imagen de la cabeza. Puede utilizarse el tercer rayo como comprobación.

En dicha figura puede verse que la imagen está invertida y que no tiene el mismo tamaño que el objeto. El cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto se define como la **amplificación lateral** de la imagen. En la figura 31-16 se ha dibujado el rayo central desde la parte superior del objeto hasta el centro del espejo. Este rayo forma un ángulo θ con el eje. El rayo reflejado que pasa por la parte superior de la imagen forma el mismo ángulo con el eje. Comparando el triángulo formado por el rayo incidente, el eje y el objeto, con el triángulo formado por el rayo reflejado, el eje y la imagen, muestra que la amplificación

Rayos principales correspondientes a un espejo

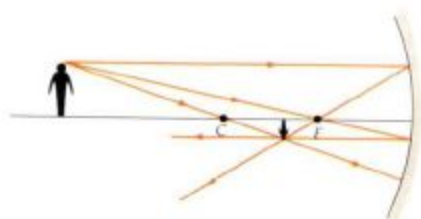


Figura 31-15 Diagrama de rayos para la localización de la imagen mediante una construcción geométrica.

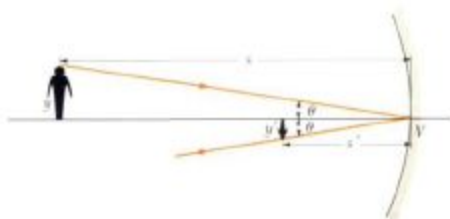


Figura 31-16 Construcción geométrica para hallar la ampliación de un espejo esférico cóncavo.

lateral y'/y es igual al cociente de la distancia s'/s . Los diagramas de rayos son más sencillos de dibujar si se sustituye el espejo por una línea recta que se prolonga todo lo necesario para interceptar los rayos, como se indica en la figura 31-17.

Cuando el objeto está entre el espejo y su punto focal, los rayos reflejados en el espejo no convergen sino que parecen divergir desde un punto situado detrás del espejo, como se ilustra en la figura 31-18. En este caso la imagen es virtual y derecha. («Derecha» quiere decir que no está invertida respecto al objeto.) En este caso concreto, s es menor que $\frac{1}{2}r$, de modo que la distancia imagen s' calculada con la ecuación 31-4 resulta ser negativa. Podemos aplicar las ecuaciones 31-4, 31-5 y 31-6 a este caso y a los espejos convexos si adoptamos un convenio de signos conveniente. Con independencia de que el espejo sea convexo o cóncavo, sólo pueden formarse imágenes reales delante del espejo, es decir, en el mismo lado del espejo que el objeto. Se forman imágenes virtuales detrás del espejo, en donde no existen rayos luminosos reales. Nuestro convenio de signos es el siguiente:

- s + si el objeto está delante del espejo (objeto real)
- si el objeto está detrás del espejo (objeto virtual)*
- s' + si la imagen está delante del espejo (imagen real)
- si la imagen está detrás del espejo (imagen virtual)
- r, f + si el centro de curvatura está delante del espejo (espejo cóncavo)
- si el centro de curvatura está detrás del espejo (espejo convexo)

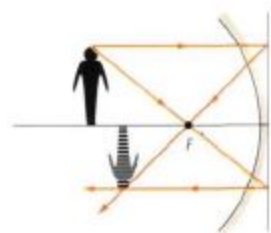


Figura 31-17 Los diagramas de rayos son más fáciles de construir si se sustituye la superficie curva por una superficie plana.

Convenio de signos
para la reflexión

* El lector puede asombrarse de cómo un objeto puede estar detrás de un espejo. Esto ocurre cuando existe una lente delante del espejo y los rayos que van a la imagen que forma la lente son interceptados por el espejo. Entonces la imagen de esta lente nunca llega a formarse, pero la distancia a la imagen sin formar, detrás del espejo, se considera como la distancia objeto para el espejo y en este caso el objeto se denomina virtual. Consideraremos algunos ejemplos de esto en la sección 31-4 cuando estudiemos las lentes.



Figura 31-18 Imagen virtual formada por un espejo cóncavo. La imagen está situada en la intersección del rayo radial, que se refleja en sentido inverso sobre sí mismo, y del rayo focal, que se refleja paralelo al eje. Estos dos rayos parece que divergen de un punto situado detrás del espejo y se localizan prolongándolos. Podría dibujarse un tercer rayo (no indicado) que, saliendo del objeto, fuese paralelo al eje. Se reflejaría pasando por el punto focal y su prolongación cortaría a los otros dos rayos en el punto imagen.

Con este convenio de signos pueden utilizarse las ecuaciones 31-4, 31-5 y 31-6 en todos los casos y con cualquier tipo de espejo. La amplificación lateral de la imagen viene dada entonces por

Amplificación lateral

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

31-7



(a)



(b)

Reflexión en (a) un espejo cóncavo y (b) un espejo convexo.

Una amplificación negativa, que se obtiene cuando tanto s como s' son positivos, indica que la imagen es invertida.

Ejercicio

Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 4 cm. (a) ¿Cuál es el radio de curvatura? (b) Hallar la distancia de la imagen si el objeto se encuentra a 2 cm del espejo. Dibujar un diagrama de rayos en este caso. La imagen, ¿es derecha o invertida? [Respuestas: (a) 8 cm; (b) $s' = -4$ cm, derecha]

En el caso de espejos planos, que estudiamos en la sección anterior, el radio de curvatura es infinito. La distancia focal dada por la ecuación 31-5 es entonces también infinita. La ecuación 31-6 da, pues, $s' = -s$, lo que indica que la imagen está detrás del espejo y a una distancia igual a la del objeto. La amplificación 31-7 da ahora $+1$, lo que indica que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

Aunque las ecuaciones precedentes combinadas con nuestro convenio de signos son relativamente sencillas de utilizar, es frecuente que sólo se necesite saber si una imagen es real o virtual, si es derecha o invertida, y su posición y amplificación aproximadas. Este conocimiento es normalmente más sencillo de obtener con la simple construcción de rayos. Sin embargo, es siempre una buena idea utilizar ambos métodos, gráfico y algebraico, para situar una imagen de forma que uno de los métodos sirva de comprobación del otro.

Espejos convexos

En la figura 31-19 se muestra un diagrama de rayos para un objeto situado delante de un espejo convexo. El rayo central que se dirige hacia el centro de curvatura C es perpendicular al espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo paralelo al eje se refleja como si procediese del punto focal F detrás del espejo. El rayo focal (no indicado) se dibujaría hacia el punto focal y se reflejaría paralelo al eje. Podemos ver en la figura que la imagen está detrás del espejo y, por tanto, es virtual. Además es derecha y menor que el objeto.

Figura 31-19 Diagrama de rayos correspondiente a un espejo convexo. El rayo paralelo se refleja como si viniese del punto focal situado detrás del espejo y el rayo radial se refleja en sentido inverso sobre sí mismo. Estos rayos parecen diverger de un punto situado detrás del espejo. Podría haber un tercer rayo (no indicado) dirigido hacia el punto focal. Se reflejaría paralelamente al eje y su prolongación cortaría a los otros dos rayos en el punto imagen.



Ejemplo 31-2

Un objeto de 2 cm de alto está a 10 cm de un espejo convexo cuyo radio de curvatura es 10 cm. Situar la imagen y hallar su altura.

Como el centro de curvatura de un espejo convexo está detrás del mismo, el radio y la distancia focal son negativos:

$$f = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}(-10 \text{ cm}) = -5 \text{ cm}$$

Utilizando la ecuación 31-6 para hallar la distancia imagen, se obtiene

$$\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{5 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{10 \text{ cm}} = -\frac{3}{10 \text{ cm}}$$

$$s' = -3,33 \text{ cm}$$

La distancia imagen es negativa, lo que indica que es virtual y se encuentra detrás del espejo. La ampliación es

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-3,33 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = +0,333$$

Así pues, la imagen es derecha y su tamaño es un tercio de las dimensiones del objeto. Como la altura de éste es de 2 cm, la altura de la imagen vale 2/3 cm. El diagrama de rayos para este ejemplo es semejante al de la figura 31-19.

Ejercicio

Hallar la distancia imagen y la ampliación correspondiente a un objeto a 5 cm del espejo del ejemplo 31-2. Dibujar un diagrama de rayos. (Respuestas: $s' = -2,5 \text{ cm}$, $m = +0,5$)

Cuestiones

- ¿En qué condiciones producirá un espejo cóncavo una imagen derecha? ¿Una imagen virtual? ¿Una imagen menor que el objeto? ¿Mayor que el objeto?
- Contestar a la cuestión 3 en el caso en que el espejo sea convexo.
- Es corriente que se utilicen espejos convexos como espejos retrovisores en coches y camiones con objeto de proporcionar un mayor ángulo de visión. Bajo los espejos se indica: «Atención, los objetos están más cerca de lo que parecen». Sin embargo, de acuerdo con un diagrama de rayos, como el de la figura 31-19, la distancia imagen para objetos alejados es mucho menor que la distancia objeto. ¿Por qué, entonces, parecen más alejados?

(a) Espejo convexo apoyado sobre un papel que posee unas tiras espaciadas de forma regular y paralelas. Obsérvese el gran número de líneas que se ven en la imagen en un pequeño espacio y la reducción del tamaño y la distorsión de su forma.
(b) Se utilizan los espejos convexos para controlar la seguridad de un almacén.



(a)



(b)

31-3 Imágenes formadas por refracción

La formación de una imagen por refracción en una superficie esférica que separa dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 se ilustra en la figura 31-20. En esta figura n_2 es mayor que n_1 , de modo que las ondas se mueven más lentamente en el segundo medio. De nuevo, sólo los rayos paraxiales convergen en un punto. Aplicando la ley de Snell de la refracción puede deducirse una ecuación que relaciona la distancia imagen a la distancia objeto, al radio de curvatura y a los índices de refracción, si se utilizan las aproximaciones de los ángulos pequeños. Se indican las relaciones geométricas en la figura 31-21. Los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados entre sí por la ley de Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

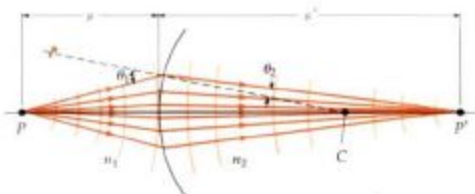


Figura 31-20 Imagen formada por refracción en una superficie esférica que separa dos medios diferentes. En esta figura las ondas se mueven más lentamente en el segundo medio.

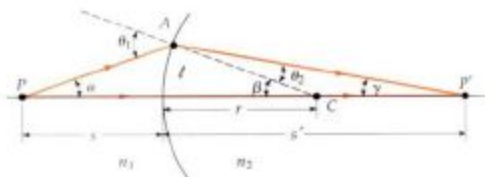


Figura 31-21 Construcción geométrica para relacionar la posición de la imagen con la posición del objeto en la refracción producida por una superficie esférica simple. Se aplica la ley de Snell al rayo incidente en el punto A y se utiliza la aproximación de ángulos pequeños.

Utilizando la aproximación para ángulos pequeños $\sin \theta = \theta$, se tiene

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad 31-8$$

A partir del triángulo ACP , se tiene

$$\beta = \theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma \quad 31-9$$

Podemos obtener otra relación para θ_1 a partir del triángulo PAC :

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad 31-10$$

Eliminando θ_1 entre las ecuaciones 31-9 y 31-10, tendremos

$$n_1 \alpha + n_1 \beta + n_2 \gamma = n_2 \beta$$

o bien

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta \quad 31-11$$

Utilizando las aproximaciones $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$, se obtiene

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad 31-12$$

En la refracción, las imágenes reales se obtienen detrás de la superficie, que recibe el nombre de lado de transmisión, mientras que las imágenes virtuales se presentan en el lado de incidencia delante de la superficie. El convenio de signos que utilizamos para la refracción es semejante al empleado en la reflexión:

- s + (objeto real) para los objetos delante de la superficie (lado de incidencia)
- (objeto virtual) para los objetos detrás de la superficie (lado de transmisión)
- s' + (imagen real) para las imágenes detrás de la superficie (lado de transmisión)
- (imagen virtual) para las imágenes delante de la superficie (lado de incidencia)
- r, f + si el centro de curvatura está en el lado de transmisión
- si el centro de curvatura está en el lado de incidencia

Si comparamos este convenio de signos con el de la reflexión, vemos que s' es positivo y la imagen es real cuando la imagen está en el lado de la superficie recorrida por el rayo reflejado o refractado. En el caso de la reflexión este lado está delante del espejo, mientras que para la refracción, está detrás de la superficie refractante. Análogamente, r y f son positivos cuando el centro de curvatura está en el lado recorrido por la luz reflejada o refractada.

Podemos obtener una expresión que nos dé la amplificación de una imagen formada por una superficie refractante considerando la figura 31-22, que muestra la trayectoria de un rayo que sale de la parte superior del objeto y termina en la parte superior de la imagen. El rayo se desvía hacia la normal cuando cruza la superficie, de modo que θ_2 es menor que θ_1 . Estos ángulos están relacionados por la ley de Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Los tamaños del objeto y de la imagen se relacionan con los ángulos según

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{y}{s} \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= -\frac{y'}{s'} \end{aligned}$$

en donde aparece el signo menos debido a que y' es negativo. Como sólo estamos considerando rayos paraxiales — que forman ángulos pequeños, el seno de los ángulos es aproximadamente igual a su tangente. Con esta aproximación la ley de Snell se transforma en

$$n_1 \frac{y}{s} = n_2 \frac{-y'}{s'}$$

La amplificación es, por tanto,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad 31-13$$

Ejemplo 31-3

Dentro de una pecera esférica de radio 15 cm llena de agua con índice de refracción 1,33, se encuentra un pez. El pez mira a través de la pecera y ve un gato sentado sobre la mesa con su nariz a 10 cm de la pecera. ¿En dónde está la imagen de la nariz del gato y cuál es su amplificación? Despreciar la influencia de la delgada pared de vidrio de la pecera.

La distancia objeto entre el gato y la pecera es de 10 cm. Los índices de refracción son $n_1 = 1$ y $n_2 = 1,33$. El radio de curvatura es 15 cm. La ecuación 31-12 se escribe entonces

$$\frac{1,00}{10 \text{ cm}} + \frac{1,33}{s'} = \frac{1,33 - 1,00}{15 \text{ cm}}$$

Despejando s' se tiene

$$s' = -17,1 \text{ cm}$$

Esta distancia negativa significa que la imagen es virtual y está delante de la

Convenio de signos para la refracción

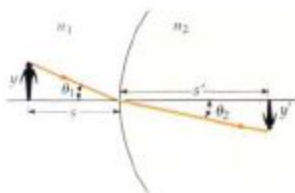
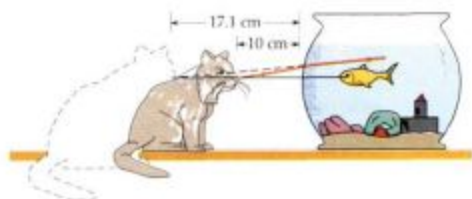


Figura 31-22 Construcción geométrica para hallar la amplificación lateral de una imagen formada por refracción en una superficie esférica simple.

Figura 31-23 Pez mirando a un gato (ejemplo 31-3). Debido a la refracción en la superficie esférica, el gato parece estar más lejos y ser ligeramente mayor.



superficie refractora, en el mismo lado que el objeto, como se ve en la figura 31-23. La amplificación de la imagen es

$$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = -\frac{-17,1 \text{ cm}}{1,33(10 \text{ cm})} = 1,29$$

Así pues, el gato parece estar más alejado y ser ligeramente mayor.

Podemos utilizar la ecuación 31-12 para hallar la **profundidad aparente** de un objeto bajo el agua cuando se mira directamente desde encima de él. En este caso, la superficie es plana, de modo que el radio de curvatura es infinito. Las distancias del objeto y de la imagen se relacionan mediante

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = 0$$

en donde n_1 es el índice de refracción del primer medio (agua) y n_2 es el del segundo medio (aire). Por tanto, la profundidad aparente es

$$s' = -\frac{n_2 s}{n_1} \quad 31-14$$

El signo negativo indica que la imagen es virtual y en el mismo lado de la superficie refractora que el objeto, como se muestra con el diagrama de rayos de la figura 31-24. La amplificación es

$$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = +1$$

Como $n_2 = 1$ en el caso del aire, vemos que según la ecuación 31-14 la profundidad aparente es igual a la profundidad real dividida por el índice de refracción del agua.

Ejemplo 31-4

Hallar la profundidad aparente de un pez que se encuentra quieto a 1 m por debajo de la superficie del agua que tiene un índice de refracción de $n = 4/3$.

Utilizando $n_1 = 4/3$ y $n_2 = 1$ en la ecuación 31-14, se obtiene

$$s' = -\frac{1}{(4/3)}(1 \text{ m}) = -\frac{3}{4}(1 \text{ m}) = -0,75 \text{ m}$$

La profundidad aparente es tres cuartos de la profundidad real, de modo que el pez parece estar a sólo 75 cm de la superficie. Obsérvese que este resultado es válido únicamente cuando el objeto se observa directamente por encima de él, de modo que los rayos sean paraxiales.

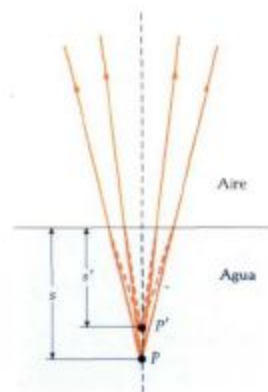


Figura 31-24 Diagrama de rayos correspondiente a la imagen de un objeto que se encuentra dentro del agua, visto directamente desde arriba. La profundidad de la imagen es menor que la del objeto. La profundidad aparente es igual a la profundidad real dividida por el índice de refracción del agua.

Cuestiones

- Si se observa un pez bajo el agua desde un punto que no está directamente encima de él, su profundidad aparente ¿será mayor o menor que tres cuartos de su profundidad real? (Dibujar rayos desde el pez hasta el ojo con ángulos grandes para ayudar a encontrar la respuesta de esta ecuación.)

7. Un buceador sumergido observa a un pájaro en una ramita sobre el agua. El pájaro, según el buceador, ¿parece estar más lejos o más cerca de la superficie del agua de lo que realmente está?

31-4 Lentes delgadas

La aplicación más importante de la ecuación 31-12 consiste en hallar la posición de la imagen formada por una lente. Para ello hay que considerar la refracción de cada superficie por separado con objeto de deducir una ecuación que relacione la distancia imagen con la distancia objeto, el radio de curvatura de cada superficie de la lente y el índice de refracción de la misma.

Consideraremos una lente muy delgada, de índice de refracción n rodeada de aire. Sean r_1 y r_2 los radios de curvatura de cada una de las superficies de la lente. Si un objeto está a una distancia s de la primera superficie (y, por tanto, de la lente), puede encontrarse la distancia s'_1 de la imagen debida a la refracción en la primera superficie utilizando la ecuación 31-12:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad 31-15$$

Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda superficie. En la figura 31-25 se muestra el caso en que la distancia imagen s'_1 para la primera superficie es negativa, indicando que sería una imagen virtual a la izquierda de la superficie. Los rayos dentro del vidrio, refractados por la primera superficie, divergen como si procediesen del punto imagen P'_1 . Estos inciden sobre la segunda superficie formando los mismos ángulos que si se encontrara un objeto en este punto imagen. Por consiguiente, la imagen dada por la primera superficie se convierte en objeto para la segunda superficie. Como la lente es de grosor despreciable, la distancia objeto es de valor igual a s'_1 , pero como las distancias objeto delante de la superficie son positivas, mientras que las distancias imagen son negativas allí, la distancia objeto para la segunda superficie es $s_2 = -s'_1$. (Si s'_1 fuese positivo, los rayos convergerían al incidir sobre la segunda superficie. El objeto para la segunda superficie estaría entonces a la derecha de la superficie y sería, pues, un objeto virtual. De nuevo, $s_2 = -s'_1$.) Escribamos a continuación la ecuación 31-12 para la segunda superficie con $n_1 = n$, $n_2 = 1$ y $s = -s'_1$. La distancia imagen para la segunda superficie es la distancia imagen final s' para la lente.

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \quad 31-16$$

Podemos eliminar la distancia imagen correspondiente a la primera superficie s'_1 sumando las ecuaciones 31-15 y 31-16. Se obtiene así

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad 31-17$$

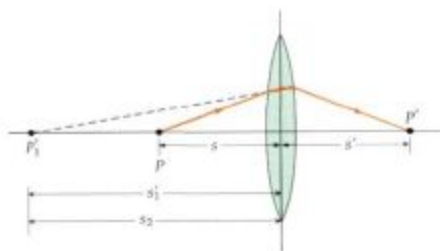


Figura 31-25 La refracción se produce en las dos superficies de la lente. En la figura, la refracción en la primera superficie origina una imagen virtual en P'_1 . Los rayos chocan contra la segunda superficie como si procedieran de P'_1 . Como las distancias imagen son negativas cuando la imagen está en el lado de incidencia de la superficie, mientras que las distancias objeto son positivas cuando los objetos están en dicho lado, $s_2 = -s'_1$ es la distancia que hay que considerar para el objeto correspondiente a la segunda superficie de la lente.



Debido a la refracción, la profundidad aparente de la porción sumergida de la paja es menor que la profundidad real. En consecuencia, la paja parece estar doblada. También se ve una imagen reflejada de la paja.

La ecuación 31-17 da la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s y de las propiedades de la lente delgada (r_1 , r_2 y su índice de refracción n). Como en el caso de los espejos, la distancia focal de una lente delgada se define como la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita. Haciendo s igual a infinito y escribiendo f en lugar de la distancia imagen s' , se tiene

Fórmula del constructor de lentes

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad 31-18$$

La ecuación 31-18 se denomina **ecuación del constructor de lentes**; nos da la distancia focal de una lente delgada en función de sus propiedades. Sustituyendo el segundo miembro de la ecuación 31-17 por $1/f$ se tiene

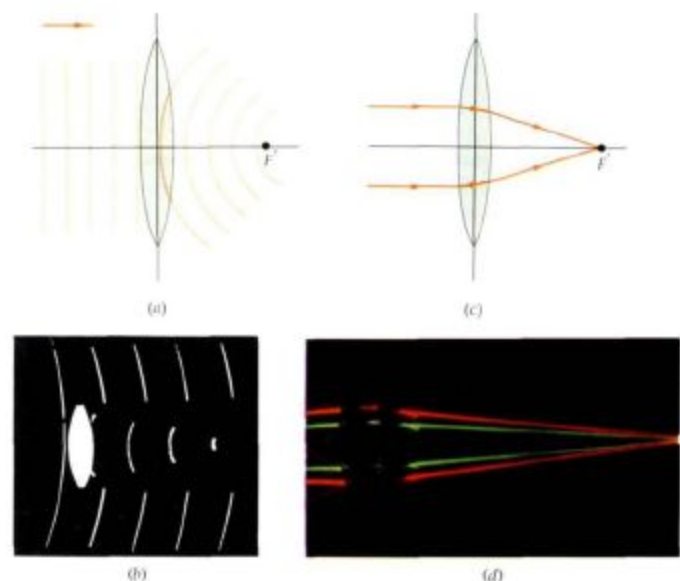
Ecuación de la lente delgada

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad 31-19$$

que se denomina **ecuación de la lente delgada**. Obsérvese que es la misma que la ecuación del espejo (ecuación 31-6). Recuérdese, sin embargo, que el convenio de signos para la refracción es un poco diferente del definido para la reflexión. En el caso de las lentes, la distancia imagen s' es positiva cuando la imagen está en el lado de transmisión de la lente, es decir, cuando está en el lado opuesto de aquél por donde incide la luz. El convenio de signos para r en la ecuación 31-18 es el mismo que el de la refracción en una sola superficie. El radio es positivo si el centro de curvatura está en el lado de transmisión de la lente, y negativo si se encuentra en la parte por donde incide la luz.

En la figura 31-26a se muestran frentes de onda planos incidiendo sobre una lente biconvexa. Primero incide sobre la lente la parte central del frente de ondas. Como la velocidad de la onda en la lente es menor que en aire (suponiendo $n > 1$), la parte central del frente de onda se retrasa respecto a las partes más ex-

Figura 31-26 (a) Frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. La parte central del frente de onda se retrasa más dentro de la lente que la parte exterior, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal F . (b) Frentes de onda que pasan a través de una lente. Para conseguir verlos se ha utilizado una técnica fotográfica denominada *registro de la luz en vuelo* que utiliza un láser de pulsos para hacer un holograma de los frentes de onda de la luz. (c) Rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. Los rayos se desvían en cada superficie y convergen en el punto focal. (d) Fotografía de los rayos enfocados por una lente convergente.



ternas, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal F . Los rayos correspondientes a este caso se muestran en la figura 31-26c. Dicha lente se denomina **lente convergente**. Como su distancia focal calculada con la ecuación 31-18 es positiva, también se le llama **lente positiva**. Toda lente que sea más gruesa en el medio que en los bordes es una lente convergente (con tal de que el índice de refracción de la lente sea mayor que el del medio que la rodea). Las figuras 31-27a y 31-27b muestran los frentes de onda y los rayos en el caso de ondas planas incidentes sobre una lente biconcava. En este caso, las partes exteriores de los frentes de onda se retrasan respecto a las partes centrales, dando como resultado a la salida, ondas esféricas que divergen de un punto focal que se encuentra en el lado por el que inciden las ondas. La distancia focal de esta lente es negativa. Toda lente (con índice de refracción mayor que el del medio que la rodea) que es más delgada en la parte central que en los bordes es una **lente divergente**, o **lente negativa**.

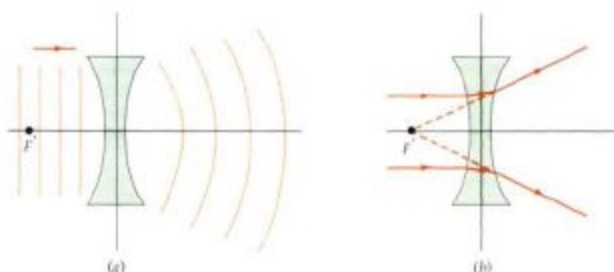
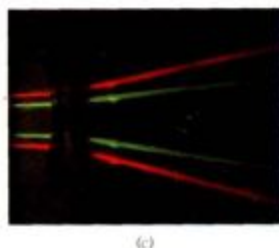


Figura 31-27 (a) Frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente divergente. En este caso las partes exteriores de los frentes de onda se retardan más que la parte central, dando como resultado una onda esférica que diverge cuando progresa como si procediese del punto focal F' delante de la lente. (b) Rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre la misma lente divergente. Los rayos se desvían hacia el exterior y divergen como si procediesen del punto focal F' . (c) Fotografía de los rayos que pasan a través de una lente divergente.



Ejemplo 31-5

Una lente biconvexa de vidrio con un índice de refracción $n=1,5$ tiene sus radios de curvatura de 10 cm y 15 cm, como se ve en la figura 31-28. Hallar su distancia focal.

Supongamos que la luz está incidiendo sobre la superficie con menor radio de curvatura (superficie izquierda en la figura 31-28). El centro de curvatura de la primera superficie, C_1 , está en el lado de transmisión de la lente, de modo que r_1 es positivo e igual a +10 cm. El centro de curvatura de la segunda superficie, C_2 , está en el lado de incidencia, de forma que r_2 es negativo e igual a -15 cm. La ecuación 31-28 se convierte entonces en

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (1,5-1) \left(\frac{1}{+10 \text{ cm}} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} \right) \\ &= 0,5 \left(\frac{3}{30 \text{ cm}} + \frac{2}{30 \text{ cm}} \right) = 0,5 \left(\frac{1}{6 \text{ cm}} \right) \\ f &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ejercicio

Una lente delgada biconvexa tiene un índice de refracción $n=1,6$ y radios de curvatura del mismo valor. Si su distancia focal es 15 cm, ¿cuál es el valor del radio de curvatura de cada superficie? (Respuesta: 18 cm)

Obsérvese que si invertimos el sentido de la luz incidente sobre la lente en el ejemplo 31-5 de modo que incida sobre la superficie con mayor radio de curvatu-

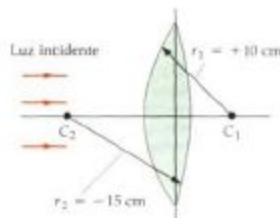


Figura 31-28 Lente biconvexa con radios de curvatura de valor 15 cm y 10 cm correspondiente al ejemplo 31-5. El centro de curvatura de la primera superficie está en el lado de transmisión de la lente, de forma que r es positivo para esta superficie. El centro de curvatura de la segunda superficie está en el lado incidente de la lente, de modo que ahora r es negativo. Ambas superficies tienden a converger los rayos luminosos y contribuyen a dar una distancia focal positiva para la lente.

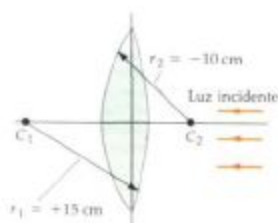


Figura 31-29 La misma lente que la de la figura 31-28 con la luz incidiendo desde el otro lado. El orden de las superficies y los signos de los radios de curvatura están cambiados entre sí, pero la distancia focal es la misma.

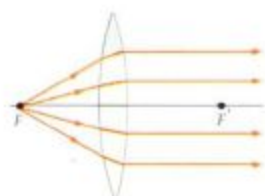


Figura 31-30 Los rayos de luz que divergen desde el punto focal de una lente positiva emergen paralelamente al eje. Este punto se denomina primer punto focal F . El punto en que la lente hace converger los rayos de luz paralelos se denomina segundo punto focal F' .

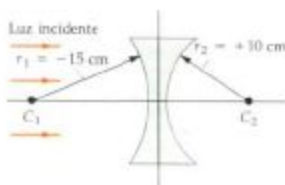


Figura 31-32 Lente biconcava con radios de valor 15 cm y 10 cm. El centro de curvatura de la primera superficie está en el lado de incidencia de la lente y el de la segunda superficie está en el lado de transmisión, de modo que r_1 es negativo y r_2 es positivo. Ambas caras tienden a hacer diverger los rayos de luz y contribuyen a que la distancia focal sea negativa.

ra (procediendo de la derecha, como en la figura 31-29), se intercambia el orden de las superficies. El radio de la primera superficie tiene un valor de 15 cm y es positivo porque el centro de curvatura de dicha superficie está en el lado de transmisión, mientras que el centro de curvatura de la superficie con 10 cm de radio está en el lado de incidencia, de modo que $r_2 = -10$ cm. Utilizando estos valores en la ecuación 31-18 se obtiene el mismo resultado para la distancia focal, $f = 12$ cm. Así pues, la distancia focal de una lente es la misma para la luz incidente por cualquier cara. Si rayos paralelos de luz inciden sobre la lente del ejemplo 31-5 procedentes de la izquierda, éstos se verán enfocados en un punto situado a 12 cm de la lente, mientras que en caso de que incidieran procediendo de la derecha, se enfocarían a 12 cm de la izquierda de la lente. Ambos puntos son los puntos focales o focos de la lente. Utilizando la propiedad de la reversibilidad de los rayos luminosos, podemos ver que la luz divergiendo desde un foco e incidiendo sobre la lente, saldrá de ella como un haz de rayos paralelos, como se ve en la figura 31-10. En un problema sobre lentes en particular, en que se especifique el sentido de la luz incidente, el punto objeto para el cual la luz emerge como un haz de rayos paralelos se denomina **primer punto focal F** y el punto donde se enfocan los rayos incidentes paralelos se llama **segundo punto focal F'** . En el caso de una lente positiva, el primer punto focal está en el lado de incidencia y el segundo, en el lado de transmisión. Si un haz de rayos paralelos incide sobre la lente formando un pequeño ángulo con el eje, como se indica en la figura 31-31, se enfocará en un punto situado en el **plano focal** a una distancia f de la lente.

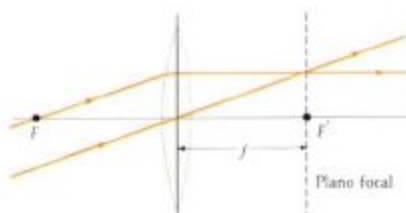


Figura 31-31 Los rayos paralelos que inciden sobre una lente, pero formando un ángulo con su eje, se enfocan en un punto del plano focal de la lente.

Ejemplo 31-6

Una lente biconcava tiene un índice de refracción de 1,5 y los radios de curvatura miden 10 cm y 15 cm. Hallar su distancia focal.

En el caso de la orientación de la lente respecto a la luz incidente indicada en la figura 31-32, el radio de curvatura de la primera superficie es $r_1 = -15$ cm, y el de la segunda superficie $r_2 = +10$ cm. La ecuación del constructor de lentes (ecuación 31-18) nos da entonces

$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1,0) \left(\frac{1}{-15 \text{ cm}} - \frac{1}{+10 \text{ cm}} \right)$$

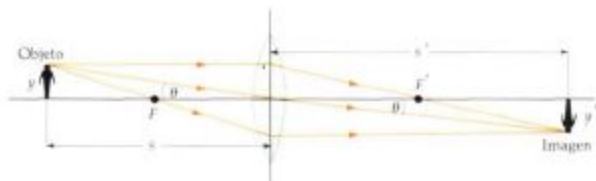
Despejando el valor de f , se tiene $f = -12$ cm. Se obtiene de nuevo el mismo resultado aunque la luz incida en sentido contrario.

En los experimentos de laboratorio en que intervienen lentes, es normalmente mucho más fácil medir la distancia focal que calcularla a partir de los radios de curvatura de sus superficies.

Diagramas de rayos para las lentes

Como sucede con las imágenes formadas por los espejos, es conveniente situar las imágenes dadas por las lentes mediante métodos gráficos. La figura 31-33 ilustra este método en el caso de lentes convergentes. Utilizamos tres rayos principales. Para mayor sencillez, consideremos los rayos contenidos en el plano que pasa por el centro de la lente. Si la lente es positiva, los rayos principales son

1. El **rayo paralelo**, que se dibuja paralelo al eje. Este rayo se desvía de modo que pasa por el segundo punto focal de la lente.
2. El **rayo central**, que pasa por el centro (el vértice) de la lente. Este rayo no sufre desviación. (Las caras de la lente son paralelas en este punto, de modo que el rayo emerge en la misma dirección pero ligeramente desplazado. Como la lente es delgada, dicho desplazamiento es despreciable.)
3. El **rayo focal**, que pasa por el primer punto focal. Este rayo emerge paralelo al eje.



Rayos principales en el caso de una lente positiva

Estos tres rayos convergen en el punto imagen, como se ve en la figura. En este caso, la imagen es real e invertida. En la figura 31-33 se tiene que $\tan \theta = y/s = -y'/s'$. La amplificación lateral vale, pues,

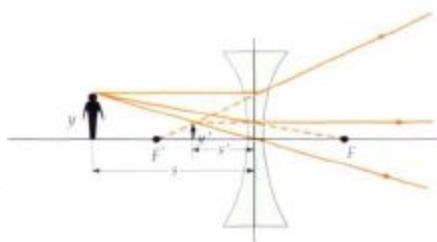
$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Esta expresión es la misma que la obtenida para los espejos. Una vez más, una amplificación negativa indica que la imagen está invertida.

Los rayos principales para una lente negativa o divergente son

1. El **rayo paralelo**, que se dibuja paralelo al eje. Este rayo diverge de la lente como si procediese del segundo punto focal.
2. El **rayo central**, que pasa por el centro (el vértice) de la lente. Este rayo no se desvía.
3. El **rayo focal**, que se dirige hacia el primer punto focal. Este rayo emerge paralelo al eje.

En la figura 31-34 se muestra el diagrama de rayos para una lente divergente.



Rayos principales en el caso de una lente negativa

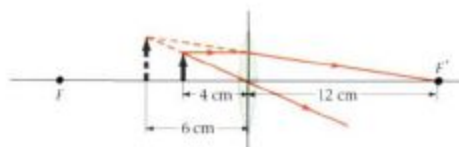
Figura 31-34 Diagrama de rayos para una lente divergente. El rayo paralelo se desvía alejándose del eje como si procediese del segundo punto focal F' . El rayo dirigido hacia el primer punto focal F emerge paralelo al eje. El rayo central no se desvía. Los tres rayos parecen que divergen del punto imagen.

Ejemplo 31-7

Un objeto de 1,2 cm de alto se coloca a 4 cm de la lente biconvexa del ejemplo 31-5. Situar la imagen, establecer si es real o virtual y hallar su altura.

En el ejemplo 31-5, se encontró que la distancia focal de esta lente era $f = 12$ cm. La figura 31-35 muestra el diagrama de rayos para un objeto situado 4 cm delante de la lente positiva de distancia focal 12 cm. El rayo paralelo pasa luego por el segundo punto focal y el rayo central no se desvía. Estos rayos aparecen divergiendo en el lado de transmisión de la lente. Se localiza la imagen extendiendo los rayos hacia atrás hasta que se cortan. Estos dos rayos son suficientes para situar la imagen. (Como comprobación, podemos dibujar el tercer rayo, el rayo focal, a lo largo de la recta que, procedente del primer punto focal F , incide sobre la lente. Este rayo saldrá paralelo al eje.) En la figura puede verse inmediatamente que la imagen es virtual, derecha y aumentada. Está en el mismo lado que el objeto y se encuentra un poco más lejos de la lente que él. Como es muy fácil cometer un error cuando se calcula la distancia imagen utilizando la ecuación 31-19, es siempre una buena idea comprobar el resultado con un diagrama de rayos.

Figura 31-35 Diagrama de rayos correspondiente al ejemplo 31-7. Cuando el objeto está entre el primer punto focal y la lente convergente, la imagen es virtual y derecha.



La distancia imagen se encuentra algebraicamente con la ecuación 31-19:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{4 \text{ cm}} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{3}{12 \text{ cm}} = -\frac{2}{12 \text{ cm}}$$

$$s' = -6 \text{ cm}$$

La distancia imagen es negativa, lo que indica que es virtual y en el lado de incidencia de la lente. La amplificación es

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-6 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = +1,5$$

La imagen es, pues, 1,5 veces mayor que el objeto y es derecha. Como la altura del objeto es 1,2 cm, la altura de la imagen será, 1,8 cm.

Ejercicio

Se coloca un objeto a 15 cm de una lente biconvexa de distancia focal 10 cm. Hallar la distancia imagen y la amplificación. Dibujar un diagrama de rayos. ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? (Respuestas: $s' = 30$ cm, $m = -2$, real, invertida)

Ejercicio

Repetir el ejercicio anterior para un objeto situado a 5 cm de una lente con una distancia focal de 10 cm. (Respuestas: $s' = -10$ cm, $m = 1$, virtual, derecha)

Lentes múltiples

Si tenemos dos o más lentes delgadas, podemos hallar la imagen final producida por el sistema hallando la distancia imagen correspondiente a la primera lente y utilizándola junto con la distancia entre lentes para hallar la distancia objeto correspondiente a la segunda lente. Es decir, se considera cada imagen, sea real o virtual y se forme o no, como el objeto para la siguiente lente.

Ejemplo 31-8

A la derecha de la lente del ejemplo 31-7 y a 12 cm de ella se coloca una segunda lente de distancia focal +6 cm. Situar la imagen final.

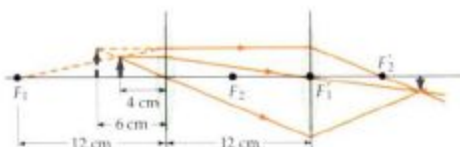


Figura 31-36 Diagrama de rayos correspondiente al ejemplo 31-8. La imagen de la primera lente actúa como objeto de la segunda. Se sitúa la imagen final dibujando dos rayos desde la primera imagen que pasen por la segunda lente. En este caso uno de los rayos utilizados para localizar la primera imagen resulta que es el rayo central de la segunda lente. Un segundo rayo paralelo al eje desde la primera imagen sitúa la imagen final.

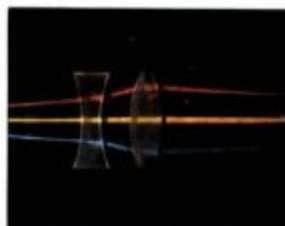
La figura 31-36 muestra el diagrama de rayos para este ejemplo. Los rayos utilizados para localizar la imagen de la primera lente no tienen por qué ser necesariamente los rayos principales correspondientes a la segunda lente. Si no lo fuesen, bastaría simplemente dibujar rayos adicionales desde la primera imagen que fuesen los rayos principales para la segunda lente, como por ejemplo un rayo desde la imagen paralelo al eje, y otro que pase por el primer punto focal de la segunda lente, o uno que pase por el vértice de esta última. En este caso, dos de los rayos principales para la primera lente, lo serían también para la segunda. El rayo paralelo para la primera lente resultaría ser el rayo central para la segunda. Además el rayo focal para la primera lente emerge paralelo al eje y, por tanto, se refracta pasando por el punto focal de la segunda lente. (En la figura, hemos prolongado el rayo central para la primera lente de modo que pase por el punto de la imagen que se ha encontrado mediante los otros dos rayos.) Podemos ver que la imagen final es real, invertida y un poco a la derecha del segundo punto focal de la segunda lente. Podemos localizar su posición algebraicamente observando que la imagen virtual de la primera lente está a 6 cm a la izquierda de la misma y, por consiguiente, está a 18 cm a la izquierda de la segunda lente. Utilizando $s_2 = 18$ cm y $f_2 = 6$ cm, se tiene

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{18 \text{ cm}} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{6 \text{ cm}}$$

lo que nos da

$$s'_2 = 9 \text{ cm}$$



Rayos de luz que pasan a través de una lente divergente seguida de una lente convergente que está colocada en el primer punto focal de la lente divergente.

Figura 31-37 Diagrama de rayos correspondiente al ejemplo 31-9. La imagen de la primera lente está a la derecha de la segunda lente. Esta imagen no llega a formarse porque los rayos son refractados por la segunda lente antes de que originen la primera imagen. Sin embargo, esta imagen sin formar actúa como objeto virtual para la segunda lente. Se halla la imagen final dibujando los rayos indicados hacia la primera imagen. Se ha utilizado un rayo que pasa a través del centro de la segunda lente y otro rayo paralelo al eje cuando incide sobre la segunda lente.

Ejemplo 31-9

Dos lentes con la misma distancia focal de 10 cm distan 15 cm entre sí. Hallar la imagen final de un objeto a 15 cm de una de las lentes.

En el diagrama de rayos de la figura 31-37, la imagen de la primera lente estaría a 30 cm a la derecha de la lente si no existiese la segunda lente. Se calcula este valor utilizando $s_1 = 15$ cm y $f_1 = 10$ cm en la ecuación de la lente delgada:

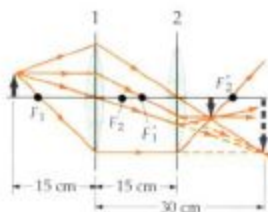
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{15 \text{ cm}} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}}$$

Se obtiene así para s'_1 :

$$s'_1 = 30 \text{ cm}$$

Esta imagen no llega a formarse porque los rayos luminosos inciden sobre la segunda lente antes de que alcancen la posición que ha de ocupar dicha imagen. Podemos situar gráficamente la imagen final escogiendo rayos que se estén dirigiendo hacia la imagen sin formar, cuando incidan en la segunda lente. No necesitan los rayos principales de la primera lente. Cualquier rayo que sale del objeto y llega a la primera lente se dirige forzosamente hacia la imagen de la primera lente. Escogamos un rayo que salga de la primera lente paralelo al eje (el rayo inferior en la figura) y otro que pase por el centro de la segunda lente (el rayo superior en la figura). Vemos que la imagen final está entre la segunda lente y su punto focal. (En la figura hemos prolongado



los dos rayos intermedios utilizados para localizar la situación de la primera imagen sin formar, de modo que pasen por la imagen final.) La imagen final puede situarse algebraicamente utilizando la primera imagen como objeto para la segunda lente. Como esta imagen sin formar está en el lado de transmisión de la segunda lente, es un objeto virtual. Como está a 15 cm de la segunda lente, la distancia objeto es $s_2 = -15$ cm. Entonces

$$\frac{1}{-15 \text{ cm}} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{10 \text{ cm}}$$

Despejando s'_2 , se obtiene

$$s'_2 = 6 \text{ cm}$$

Ejemplo 31-10

Se colocan en contacto entre sí dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2 . Demostrar que la distancia focal equivalente de la combinación, f , viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad 31-20$$

Sea s la distancia objeto para la primera lente (y, por tanto, para la combinación de lentes) y s'_1 la distancia imagen. Aplicando la ecuación de la lente delgada para la primera de ellas, se obtiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1}$$

Como las lentes están juntas, la distancia objeto para la segunda lente es igual a la distancia imagen de la primera lente, pero con signo contrario, de modo que $s_2 = -s'_1$. Llamando s' a la distancia imagen final, tenemos para la segunda lente

$$\frac{1}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_2}$$

Sumando estas dos ecuaciones para eliminar s'_1 , se obtiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

El ejemplo 31-10 nos da el importante resultado de que cuando se ponen dos lentes en contacto (o muy próximas) se suman los valores inversos de sus distancias focales. El valor inverso o recíproco de la distancia focal se denomina **potencia de la lente**. Cuando se expresa en metros una distancia focal, la potencia viene dada en recíprocos de metros denominados **dioptrías (D)**:

$$P = \frac{1}{f} \quad \text{dioptrías} \quad 31-21$$

La potencia de una lente mide su capacidad para enfocar los rayos paralelos a una distancia corta de la misma. Cuanto más corta es la distancia focal, mayor es la potencia. Por ejemplo, una lente con una distancia focal de $25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$ tiene una potencia de $4,0$ dioptrías. Una lente de $10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$ de distancia focal tiene 10 dioptrías de potencia. Como la distancia focal de una lente divergente es negativa, su potencia es también negativa.

Ejemplo 31-11

Una lente tiene una potencia de $-2,5$ dioptrías. ¿Cuál es su distancia focal?

Despejando la distancia focal en la ecuación 31-21, se obtiene

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2,5 \text{ D}} = -0,40 \text{ m} = -40 \text{ cm}$$

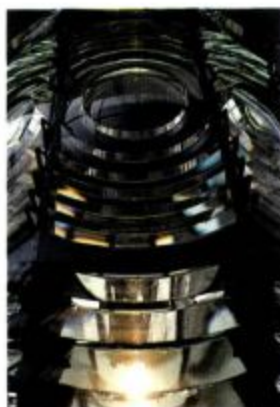
en donde hemos utilizado el hecho de que una dioptría es lo mismo que el inverso de un metro, es decir, $1 \text{ D} = 1 \text{ m}^{-1}$.

Los resultados del ejemplo 31-10 pueden darse simplemente en función de la potencia de una lente. Cuando dos lentes están en contacto, la potencia de la combinación es igual a la suma de las potencias de las lentes:

$$P = P_1 + P_2 \quad \text{dos lentes en contacto} \quad 31-22$$

Cuestiones

- ¿En qué condiciones será positiva la distancia focal de una lente delgada? ¿Negativa?
- La distancia focal de una lente simple es diferente para los distintos colores de la luz. ¿Por qué?



Puede reducirse el peso y volumen de una lente de gran diámetro construyendo la lente mediante segmentos anulares a diferentes ángulos, de modo que la luz procedente de un punto se ve refractada por los segmentos en un haz paralelo. Dicho sistema se denomina lente de Fresnel. En este proyector se han utilizado diversas lentes de Fresnel con objeto de producir haces luminosos intensos a partir de una fuente situada en el punto focal de las lentes.

31-5 Aberraciones

Cuando los rayos procedentes de un punto objeto no se enfocan todos en un solo punto imagen, la imagen borrosa resultante de la imagen se denomina **aberración**. La figura 31-38 muestra los rayos, que procedentes de una fuente puntual sobre el eje, atraviesan una lente delgada con superficies esféricas. Los rayos que inciden sobre la lente lejos del eje se desvían mucho más que los próximos al mismo, con el resultado de que no todos los rayos se enfocan en un simple punto. En lugar de ello, la imagen tiene el aspecto de un disco circular. El **círculo de mínima confusión** se encuentra en el punto C, en donde el diámetro es mínimo. Este tipo de aberración se denomina **aberración esférica**. Es el mismo tipo de aberración que el considerado en la sección 31-2 al estudiar los espejos. Cuando los objetos se encuentran fuera del eje se producen aberraciones análogas pero más complicadas denominadas *coma* (por la imagen en forma de cometa) y *astigmatismo*. La aberración en la forma de la imagen de un objeto extenso debido al hecho de que la ampliación depende de la distancia de los puntos objeto al eje, se llama **distorsión**. No estudiaremos más estas aberraciones excepto para señalar que no se deben a ningún defecto de la lente o del espejo sino que son simples resultados de la aplicación de las leyes de la refracción y de la reflexión a las superficies esféricas. No resultan patentes en nuestras sencillas ecuaciones porque hemos utilizado las aproximaciones de los ángulos pequeños en la deducción de las mismas.

Figura 31-38 Aberración esférica. Los rayos que proceden de un punto objeto situado en el eje no se enfocan en un solo punto. La imagen, pues, es más bien un círculo alrededor del eje que un punto. En el punto C, el círculo tiene su menor diámetro. Esta zona se denomina círculo de mínima confusión. Puede reducirse la aberración esférica bloqueando las partes exteriores de la lente y reduciendo, como consecuencia, el diámetro del círculo de mínima confusión, pero así se reduce también la cantidad de luz que llega a la imagen.

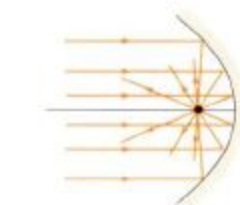
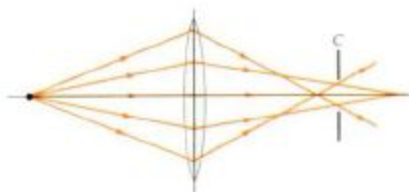


Figura 31-39 Un espejo parabólico enfoca todos los rayos paralelos al eje en un solo punto sin aberración esférica. Las superficies parabólicas son más costosas de fabricar que las esféricas.

Algunas aberraciones pueden eliminarse o corregirse parcialmente con el empleo de superficies no esféricas para las lentes y espejos, pero las superficies no esféricas son normalmente mucho más difíciles y costosas de fabricar que las esféricas. Un ejemplo de superficie reflectora no esférica es el espejo parabólico que puede verse en la figura 31-39. Los rayos que son paralelos al eje de una superficie parabólica se reflejan y enfocan en un punto común sin que importe lo alejados que se encuentren del eje. Se utilizan comúnmente las superficies reflectoras parabólicas en los grandes telescopios astronómicos, que necesitan una gran superficie reflectora para recoger el máximo de luz posible y conseguir así que la imagen sea lo más intensa posible. También puede utilizarse una superficie parabólica en un faro o reflector con objeto de producir un haz de luz paralelo a partir de una pequeña fuente situada en el punto focal de la superficie.

Una importante aberración que aparece en las lentes pero no en los espejos es la **aberración cromática**, que se debe a las variaciones del índice de refracción con la longitud de onda. A partir de la ecuación 31-18, podemos ver que la distancia focal de una lente depende de su índice de refracción n , por tanto, es diferente para cada distinta longitud de onda. Como n es ligeramente mayor para la luz azul que para la luz roja (ver la figura 30-22), la distancia focal para la luz azul será más corta que para la luz roja. Puesto que la aberración cromática no aparece en los espejos, muchos de los grandes telescopios utilizan espejos en lugar de lentes.

La aberración cromática, y otras aberraciones, pueden corregirse parcialmente utilizando combinaciones de lentes en lugar de una sola lente. Por ejemplo, una lente positiva, y otra negativa de mayor distancia focal, pueden utilizarse

juntas para producir un sistema de lentes convergente que tenga una aberración cromática mucho menor que una lente simple de la misma distancia focal. La lente de una buena cámara fotográfica contiene normalmente seis elementos para corregir las diversas aberraciones que se encuentran presentes.

Resumen

1. La imagen formada por un espejo esférico o por una lente, está a una distancia s' , que está relacionada con la distancia objeto s por

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

en donde f es la distancia focal, que es la distancia imagen cuando $s = \infty$. En el caso de un espejo, la distancia focal es la mitad de su radio de curvatura. En una lente delgada en el aire, la distancia focal está relacionada con el índice de refracción n y los radios de curvatura de ambas caras r_1 y r_2 por

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

En estas ecuaciones s , s' , r_1 y r_2 se consideran positivos cuando el objeto, la imagen o el centro de curvatura caen en el lado real del elemento. En los espejos el lado real es el de incidencia. Cuando se trata de lentes, el lado real es el lado incidente para los objetos y el de transmisión para las imágenes y los centros de curvatura. Cuando s' es positivo, la imagen es real, lo que significa que los rayos luminosos realmente divergen del punto imagen. Las imágenes reales pueden observarse sobre las pantallas de vidrio deslustrado o impresionar películas fotográficas situadas en el punto imagen. Cuando s' es negativo, la imagen es virtual, lo que significa que la luz no diverge realmente del punto imagen.

2. La amplificación lateral de la imagen viene dada por

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

en donde y e y' son los tamaños del objeto y de la imagen, respectivamente. Una amplificación negativa significa que la imagen está invertida.

3. En el caso de un espejo plano, r y f son infinitos, $s' = -s$, y la imagen es virtual, derecha y del mismo tamaño que el objeto.
4. Las imágenes pueden situarse de modo conveniente mediante un diagrama de rayos utilizando dos cualesquiera de los rayos principales. El punto desde el que divergen estos rayos, o parece que divergen, es el punto imagen. En el caso de espejos esféricos, existen cuatro rayos principales: el rayo paralelo, que es paralelo al eje; el rayo focal que pasa por el punto focal; el rayo radial, que pasa por el centro de curvatura del espejo; y el rayo central, dirigido hacia el vértice del espejo. En el caso de una lente, existen tres rayos principales: el rayo paralelo, paralelo al eje; el rayo focal, que pasa por el segundo punto focal; y el rayo central, que pasa por el centro de la lente.
5. Una lente positiva o convergente es aquella que es más gruesa en su parte media que en los bordes. La luz paralela incidente sobre una lente positiva se enfoca en el segundo punto focal, que está en el lado de transmisión de la lente. Una lente negativa o divergente es aquella que es más gruesa en los bordes que en el medio. La luz paralela incidente sobre una lente negativa emerge como si fuese originada desde el segundo punto focal, que está en el lado incidente de la lente.

6. La potencia de una lente es igual al recíproco de la distancia focal. Cuando ésta se da en metros, la potencia viene en dioptrías (D):

$$P = \frac{1}{f} \quad \text{dioptrías}$$

$$1 \text{ D} = 1 \text{ m}^{-1}$$

7. La distancia s' en el caso de refracción en una sola superficie esférica de radio r está relacionada con la distancia objeto s y con el radio de curvatura de la superficie r por

$$\frac{n_2}{s} + \frac{n_1}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

en donde n_1 es el índice de refracción del medio en el lado de incidencia de la superficie y n_2 es el índice de refracción del medio en el lado de transmisión. La amplificación de la imagen debida a la refracción en una sola superficie es

$$m = - \frac{n_2 s'}{n_1 s}$$

8. El fenómeno en virtud del cual se ve borrosa la imagen de un simple punto se conoce como aberración. Se produce la aberración esférica debido a que las superficies esféricas enfocan sólo los rayos paraxiales (los que se propagan cercanos al eje) en un solo punto. Los rayos no-paraxiales se enfocan en puntos cercanos dependiendo del ángulo que formen con el eje. Puede reducirse la aberración esférica, reduciendo el tamaño de la superficie esférica, lo cual reduce también la cantidad de luz que alcanza la imagen. La aberración cromática, que se produce en las lentes, pero no en los espejos, es el resultado de la variación del índice de refracción con la longitud de onda. La forma más común de reducir las aberraciones de las lentes consiste en utilizar una serie de elementos adecuados y no una sola lente.

Revisión

- A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Ser capaz de dibujar diagramas de rayos simples para localizar imágenes en espejos y lentes para determinar si se trata de imágenes reales o virtuales, derechas o invertidas, y aumentadas o reducidas.

2. Saber localizar la imagen formada por un espejo o por una lente delgada y calcular la amplificación de la imagen.

3. Poder utilizar la ecuación del constructor de lentes para determinar la distancia focal de una lente a partir de los radios de curvatura de sus superficies.

4. Poder comentar la aberración esférica y la aberración cromática.

- B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Óptica geométrica	Ecuación del constructor de lentes
Imagen	Lente convergente
Imagen virtual	Lente positiva
Inversión de profundidad	Lente divergente
Imagen real	Lente negativa
Rayo paraxial	Distancia focal
Aberración esférica	Punto focal
Objeto virtual	

Reversibilidad	Plano focal
Diagrama de rayos	Objeto virtual
Rayo principal	Potencia de una lente
Amplificación lateral	Dioptría
Profundidad aparente	Aberración cromática

- C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. Una imagen virtual no puede proyectarse sobre una pantalla.

2. Las aberraciones se producen sólo en el caso de imágenes reales.

3. Una distancia imagen negativa implica que la imagen es virtual.

4. Todos los rayos paralelos al eje de un espejo esférico se reflejan pasando por un solo punto.

5. Una lente divergente no puede formar una imagen real de un objeto real.

6. La distancia imagen en el caso de una lente positiva es siempre positiva.

7. La aberración cromática no aparece en los espejos.

Sugerencias bibliográficas

Walker, Jearl. «The Amateur Scientist: The Kaleidoscope Now Comes Equipped with Flashing Diodes and Focusing Lenses», *Scientific American*, diciembre 1985, pág. 134.

Se investigan las reflexiones múltiples que se crean mediante disposiciones de números diversos de espejos.

Walker, Jearl. «The Amateur Scientist: What Is a Fish's View of a Fisherman and the Fly He Has Cast on the Water?» *Scientific American*, marzo 1984, pág. 138.

La refracción hace que el mundo encima del agua le parezca a un pez de modo análogo a como parecen ser las cosas cuando se examinan a través de una lente de «ojo de pez».

Walker, Jearl. «The Amateur Scientist: Shadows Cast on the Bottom of a Pool Are Not Like Other Shadows. Why?» *Scientific American*, julio 1988, pág. 116.

Este artículo describe algunos experimentos sencillos de refracción en superficies curvadas para intentar realizarlos la próxima vez que se tome un baño.

Problemas

Utilizar $n=1.33$ como índice de refracción del agua a no ser que se especifique lo contrario.

Nivel I

31-1 Espejos planos

1. La imagen del punto objeto P de la figura 31-40 está siendo observada como se indica en ella. Dibujar un haz de rayos procedentes del objeto que se refleja en el espejo y entra en el ojo. Para estas posiciones del objeto y del espejo, indicar la región del espacio en que el ojo puede ver la imagen.

Figura 31-40 Problema 1.



2. Cuando dos espejos planos son paralelos, como los que ponen en las paredes opuestas de una peluquería, se producen imágenes múltiples porque cada imagen de un espejo sirve como objeto para el otro espejo. Se coloca un punto objeto entre espejos paralelos distantes entre sí 30 cm. El objeto está a 10 cm de un espejo y a 20 cm del otro. (a) Hallar la distancia del primer espejo a las cuatro primeras imágenes formadas en él. (b) Hallar la distancia del segundo espejo a las cuatro primeras imágenes formadas en él.

3. Una persona de 1,62 m de altura desea poder ver su imagen completa en un espejo plano. (a) ¿Cuál debe ser la altura mínima de dicho espejo? (b) ¿A qué altura sobre el suelo deberá colocarse, suponiendo que la parte superior de la cabeza de dicha persona está a 15 cm por encima del nivel de sus ojos? Dibujar un diagrama de rayos.

4. Dos espejos planos forman un ángulo de 90° . Demostrar, considerando diferentes posiciones de un objeto, que existen tres imágenes sea cualquiera la posición del mismo. Dibujar un haz de rayos apropiados del objeto al ojo para visualizar cada imagen.

5. Dos espejos planos forman un ángulo de 60° entre sí. Demostrar esquemáticamente la situación de todas las imágenes formadas a partir de un punto objeto situado en el bisector del ángulo entre espejos. (b) Repetir para un ángulo de 120° .

31-2 Espejos esféricos

6. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 40 cm. Dibujar diagramas de rayos para localizar la imagen (si se forma una) para un objeto situado a una distancia de (a) 100 cm, (b) 40 cm, (c) 20 cm y (d) 10 cm del espejo. En cada caso decir si la imagen es real o virtual; derecha o invertida; y aumentada, reducida o del mismo tamaño que el objeto.

7. Utilizar la ecuación del espejo para situar y describir las imágenes correspondientes al espejo y a las distancias del problema 6.

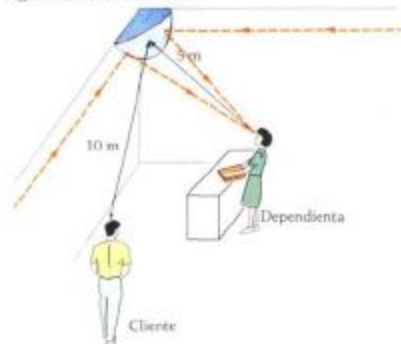
8. Repetir el problema 6 para un espejo convexo con el mismo radio de curvatura.

9. Repetir el problema 7 para el espejo convexo del problema 8.

10. Demostrar que un espejo convexo no puede formar una imagen real de un objeto real, sea cualquiera la distancia a que esté, demostrando que s' es siempre negativa para s positiva.

11. En los almacenes se utilizan espejos convexos para conseguir un amplio margen de observación y vigilancia con un espejo de tamaño razonable. El espejo indicado en la figura 31-41 permite a una dependienta situada a 5 m del mismo, inspeccionar el local entero. Tiene un radio de curvatura de 1,2 m. (a) Si un cliente está a 10 m del espejo, ¿a qué distancia de la superficie del espejo está su imagen? (b) ¿La imagen está detrás o delante del espejo? (c) Si el cliente mide 2 m, ¿qué altura tendrá su imagen?

Figura 31-41 Problema 11.



12. Un cierto telescopio utiliza un espejo cóncavo esférico de 8 m de radio. Hallar la posición y el diámetro de la imagen de la Luna que formará este espejo. La Luna tiene un diámetro de $3,5 \times 10^6$ m y dista $3,8 \times 10^8$ m de la Tierra.

13. Un dentista desea un espejo que le produzca una imagen derecha con una ampliación de 5,5 cuando esté situado a 2,1 cm de un diente. (a) ¿Cuál deberá ser el radio del espejo? (b) ¿Deberá ser cóncavo o convexo?

31-3 Imágenes formadas por refracción

14. Una hoja de papel escrita se protege mediante una lámina gruesa de vidrio que tiene un índice de refracción de 1,5. Si la lámina tiene 2 cm de grosor, ¿a qué distancia por debajo de la parte superior de la lámina se verá el escrito cuando se mire directamente por encima?

15. Una varilla de vidrio muy larga tiene uno de sus extremos conformado como una superficie hemisférica convexa de 5 cm de radio. Su índice de refracción es 1,5. (a) Un punto objeto en el aire está sobre el eje de la varilla y a 20 cm de la superficie. Hallar la imagen y decir si es real o virtual. Repetir para (b) un objeto a 5 cm de la superficie y (c) un objeto muy lejos de la misma. Dibujar un diagrama de rayos en cada caso.

16. ¿A qué distancia de la varilla del problema 15 deberá colocarse el objeto para que los rayos de luz dentro de la varilla sean paralelos? Dibujar un diagrama de rayos para esta situación.

17. Repetir el problema 15 para una varilla de vidrio con una superficie hemisférica cóncava de -5 cm de radio.

18. Repetir el problema 15 cuando la varilla y el objeto están sumergidos en agua.

19. Repetir el problema 15 para una varilla de vidrio con una superficie hemisférica cóncava de -5 cm de radio cuando ella y el objeto están sumergidos en agua.

20. Un pez está a 10 cm de la superficie delantera de una pecera de 20 cm de radio. (a) ¿Dónde parece estar el pez para alguien del exterior que lo ve mirándolo de frente a la pecera? (b) ¿Dónde parecerá estar el pez cuando se encuentre a 30 cm de la superficie delantera de la pecera?

21. Un submarinista lleva una máscara de buceo cuya parte delantera está curvada hacia el exterior con un radio de curvatura de 0,5 m. Existe así una superficie esférica convexa entre el agua y el aire que llena la máscara. Un pez se encuentra a 2,5 m delante de la máscara. (a) ¿Dónde parece estar? (b) ¿Cuál es la ampliación de su imagen?

31-4 Lentes delgadas

22. Las lentes delgadas siguientes están hechas de vidrio con un índice de refracción de 1,5. Hacer un esquema de cada lente y hallar su distancia focal en aire: (a) biconvexa, $r_1 = 10$ cm y $r_2 = -21$ cm; (b) plano-convexa, $r_1 = \infty$ y $r_2 = -10$ cm; (c) biconcava, $r_1 = -10$ cm, $r_2 = +10$ cm; (d) plano-cóncava, $r_1 = \infty$ y $r_2 = +20$ cm.

23. Para construir una lente delgada con radios iguales se utiliza un vidrio con un índice de refracción de 1,6. Hallar los radios de curvatura y hacer un esquema de la misma si la distancia focal en aire es (a) +5 cm y (b) -5 cm.

24. Hallar la distancia focal de una lente de vidrio de índice de refracción 1,62 que tiene una superficie cóncava con 100 cm de radio y una superficie convexa con 40 cm de radio.

25. Una lente biconcava de índice de refracción 1,45 tiene sus radios de 30 cm y 25 cm. Se sitúa un objeto a 80 cm a la izquierda de la lente. Hallar (a) la distancia focal de la misma, (b) la posición de la imagen y (c) su ampliación. (d) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

26. Una lente convergente hecha de poliestireno (índice de refracción 1,59) tiene una distancia focal de 50 cm. Una superficie es convexa con radio de valor 50 cm. Hallar el radio de la segunda superficie. ¿Es convexa o cóncava?

27. Las lentes delgadas siguientes están hechas de vidrio de índice de refracción 1,6. Hacer un esquema de cada lente y hallar su distancia focal en aire: (a) $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 10$ cm; (b) $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm; (c) $r_1 = -10$ cm, $r_2 = -20$ cm.

28. Demostrar que las lentes divergentes no pueden formar nunca una imagen real de un objeto real. (Indicación: Demostrar que s' es siempre negativo.)

29. Para las siguientes distancias objeto y distancias focales de lentes delgadas en el aire, hallar la distancia imagen y la ampliación, y decir si la imagen es real o virtual, derecha o invertida: (a) $s = 40$ cm, $f = 20$ cm; (b) $s = 10$ cm, $f = 20$ cm; (c) $s = 40$ cm, $f = -30$ cm; (d) $s = 10$ cm, $f = -30$ cm.

30. Un objeto de 3,0 cm de altura se coloca a 20 cm delante de una lente delgada de 20 dioptrías de potencia. Dibujar un diagrama de rayos preciso para hallar la posición y el tamaño de la imagen y comprobar los resultados utilizando la ecuación de las lentes delgadas.

31. Repetir el problema 30 para un objeto de 1,0 cm de alto situado a 10 cm delante de una lente delgada de 20 dioptrías de potencia.

32. Repetir el problema 30 para un objeto de 1,0 cm de alto situado a 10 cm delante de una lente delgada cuya potencia es -20 dioptrías.

33. Una lente delgada convergente de 10 cm de distancia focal se utiliza para obtener una imagen el doble de grande que un objeto pequeño. Hallar las distancias objeto e imagen si (a) la imagen ha de estar derecha y (b) si ha de ser invertida. Dibujar para cada caso un diagrama de rayos.

34. (a) ¿Qué se entiende por distancia objeto negativa? ¿Cómo puede obtenerse? Hallar la distancia imagen y la ampliación, y establecer si la imagen es virtual o real, y derecha o invertida para una lente delgada en aire cuando (b) $s = -20$ cm, $f = +20$ cm y (c) $s = -10$ cm, $f = -30$ cm. Dibujar un diagrama de rayos para cada uno de estos casos.

35. Dos lentes convergentes, cada una de ellas de 10 cm de distancia focal, están separadas en 35 cm. Un objeto está a 20 cm a la izquierda de la primera lente. (a) Hallar la posición de la imagen final utilizando un diagrama de rayos y la ecuación de las lentes delgadas. (b) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? (c) ¿Cuál es la ampliación lateral total de la imagen?

36. Resolver el problema 35 para una segunda lente que es divergente con -15 cm de distancia focal.

31-5 Aberraciones

37. Una lente biconvexa de radios $r_1 = +10$ cm y $r_2 = -10$ cm está hecha de un vidrio con índice de refracción 1,53 para la luz azul y 1,47 para la luz roja. Hallar la distancia focal de esta lente para (a) la luz roja y (b) la luz azul.

Nivel II

38. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 6,0 cm. Un punto objeto está sobre el eje y a 9 cm del espejo. Construir un diagrama de rayos preciso mostrando los rayos que a partir del objeto forman ángulos de 5° , 10° , 30° y 60° con el eje, que inciden sobre el espejo y se reflejan en sentido contrario hasta cortar el eje. (Utilizar un compás para dibujar el espejo y un transportador para medir los ángulos que sean necesarios para dibujar los rayos reflejados.) ¿Cuál es el espacio que ocupan a lo largo del eje las imágenes así construidas?

39. Un objeto situado a 8 cm de un espejo esférico cóncavo produce una imagen virtual 10 cm detrás del espejo. (a) Si el objeto se aleja hasta 25 cm del espejo, ¿en dónde se situará la imagen? (b) ¿Es real o virtual?

40. Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 6,0 cm. Dibujar rayos paralelos al eje a 0,5; 1,0; 2,0 y 4,0 cm del eje y hallar los puntos en que los rayos reflejados cortan el eje. (Utilizar un compás para dibujar el espejo y un transportador para hallar el ángulo de reflexión de cada rayo.) (a) ¿Cuál es el espaciado Δx de los puntos en donde estos rayos cortan al eje x ? (b) ¿En qué porcentaje podría reducirse este espaciado si se bloquease el borde del espejo de modo que los rayos que disten más de 2,0 cm no puedan incidir sobre él?

41. Un objeto situado a 100 cm de un espejo cóncavo forma una imagen real a 75 cm del mismo. Se da entonces la vuelta al espejo de forma que su cara convexa mire al objeto. El espejo se mueve de forma que la imagen queda ahora a 75 cm por detrás del espejo. ¿Cuánto se habrá trasladado el espejo? ¿Se habrá acercado o alejado del objeto?

42. (a) Demostrar que si f es la distancia focal de una lente delgada en aire, su distancia focal en agua es f' , obtenida a partir de

$$f = \frac{n_1(n-1)}{n_2-n}$$

en donde n_1 es el índice de refracción del agua y n el de la lente. (b) Calcular la distancia focal en aire y en agua de una lente biconcava de índice de refracción $n=1,5$ que tiene radios de valores 30 cm y 35 cm.

43. Supóngase que queremos ver nuestra cara durante el afeitado o el maquillaje. Si se desea que la imagen sea derecha, virtual y ampliada 1,5 veces cuando la cara está a 30 cm delante del espejo, ¿qué clase de espejo deberá utilizarse, convexo o cóncavo, y cuál deberá ser su distancia focal?

44. Una varilla de vidrio de 96 cm de longitud con un índice de refracción de 1,6 tiene sus extremos tallados en forma de superficies esféricas convexas de radios 8 cm y 16 cm. Un punto objeto está fuera de la varilla sobre su eje y a 20 cm del extremo de radio 8 cm. (a) Hallar la distancia imagen debida a la refracción en la primera superficie. (b) Hallar la imagen final debida a la refracción en ambas superficies. (c) ¿La imagen final es real o virtual?

45. Repetir el problema 44 para un punto objeto en el aire sobre el eje de la varilla a 20 cm del extremo con el radio de 16 cm.

46. (a) Hallar la distancia focal de una lente biconvexa gruesa con un índice de refracción de 1,5, un espesor de 4 cm y radios de +20 cm y -20 cm. (b) Hallar la distancia focal de esta lente en agua.

47. Una lente delgada de índice de refracción 1,5 tiene cara convexa con un radio de 20 cm. Cuando se coloca a 50 cm

de esta lente un objeto de 1 cm de altura, se forma una imagen derecha de 2,15 cm de altura. (a) Calcular el radio de la segunda cara de la lente. ¿Es cóncava o convexa? (b) Dibujar un esquema de la lente.

48. (a) Demostrar que para obtener una ampliación de magnitud m con una lente delgada convergente de distancia focal f , la distancia objeto debe venir dada por

$$s = \frac{m+1}{m} f$$

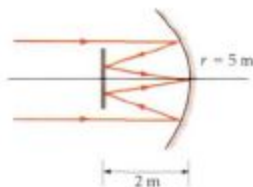
(b) La lente de una cámara con 50 mm de distancia focal se utiliza para hacer una fotografía de una persona de 1,75 m de altura. ¿A qué distancia de la cámara deberá colocarse la persona para que el tamaño de la imagen sea de 24 mm?

49. Una capa de agua de 2 cm de espesor ($n=1,33$) flota encima de una capa de 4 cm de gruesa de tetracloruro de carbono ($n=1,46$) dentro de un depósito. ¿A qué profundidad respecto a la superficie libre del agua parecerá estar el fondo del depósito para un observador que está mirando desde arriba y con incidencia normal?

50. Un observador sentado en su coche en reposo ve a un corredor por su retrovisor lateral, que es un espejo convexo con un radio de curvatura de 2 m. El corredor está a 5 m del espejo y se está acercando a 3,5 m/s. ¿Con qué rapidez parece estar corriendo cuando se le observa en el espejo?

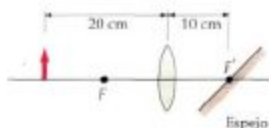
51. Luz de rayos paralelos procedente de un objeto lejano incide en el gran espejo de la figura 31-42 ($r=5$ m) y se refleja en un espejo pequeño que está a 2 m del grande y que realmente es esférico y no plano como se ve en la figura. La luz se enfoca en el vértice del espejo grande. (a) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo pequeño? ¿Es convexo o cóncavo?

Figura 31-42 Problema 51.



52. Un objeto pequeño está a 20 cm de una lente positiva delgada de 10 cm de distancia focal. A la derecha de la misma se encuentra un espejo plano que corta el eje en el segundo punto focal de la lente y está inclinado de modo que los rayos reflejados no vuelven a pasar por la lente (ver figura 31-43). (a) Hallar la posición de la imagen final. (b) ¿Esta imagen es real o virtual? (c) Dibujar un diagrama de rayos mostrando la imagen final.

Figura 31-43 Problema 52.



53. Un objeto está situado 12 cm a la izquierda de una lente de 10 cm de distancia focal. A la derecha de ésta y a 20 cm se coloca una segunda lente de 12,5 cm de distancia focal. (a) Hallar la posición de la imagen final. (b) ¿Cuál es la ampliación de la imagen? (c) Dibujar un diagrama de rayos mostrando la imagen final.

54. A 15 cm delante de una lente positiva de 15 cm de distancia focal se encuentra un objeto. A 20 cm de la primera lente se encuentra otra también positiva de 15 cm de distancia focal. Hallar la imagen final y dibujar un diagrama de rayos.

55. Resolver el problema 54 si la segunda lente tiene una distancia focal de -15 cm.

56. En el siglo XVII, Antonie van Leeuwenhoek, el primer gran microscopista, utilizó lentes esféricas simples hechas primero con gotas de agua y después de vidrio en sus primeros instrumentos, con los que realizó sorprendentes descubrimientos. Consideremos una esfera de vidrio de 2,0 mm de radio con un índice de refracción de 1,50. Hallar la distancia focal de esta lente. *Indicación:* Utilizar la ecuación para la refracción en una superficie esférica simple para hallar la distancia imagen correspondiente a una distancia objeto infinita de la primera superficie. Luego utilizar este punto imagen como punto objeto para la segunda superficie.

Nivel III

57. Un objeto está 15 cm a la izquierda de una lente delgada convexa de 10 cm de distancia focal. 25 cm a la derecha de la misma se halla un espejo cóncavo de 10 cm de radio. (a) Hallar la posición de la imagen final formada por el espejo y la lente. (b) ¿La imagen es virtual o real? ¿Derecha o invertida? (c) Mostrar sobre un esquema dónde debe estar el ojo para ver esta imagen.

58. Hallar la imagen final correspondiente al caso del problema 52 cuando el espejo no esté inclinado. Suponer que la imagen se ve con el ojo situado a la izquierda de la lente mirando hacia el espejo a través de la misma.

59. Una mujer utiliza un espejo cóncavo de 1,5 m de radio para maquillarse. ¿A qué distancia del espejo deberá estar su cara para que la imagen se encuentre a 80 cm de la cara?

60. Cuando se coloca 30 cm delante de una lente un foco luminoso brillante, aparece una imagen derecha a 7,5 cm de la lente. Aparece también una imagen invertida débil a 6 cm delante de la lente debida a la reflexión en la cara delantera de la misma. Cuando se da la vuelta a la lente, esta imagen más débil e invertida, resulta estar a 10 cm delante de la lente. Hallar el índice de refracción de la lente.

61. Un espejo cóncavo horizontal de 50 cm de radio de curvatura, contiene una capa de agua con un índice de refracción de 1,33 y una profundidad máxima de 1 cm. ¿A qué altura sobre el espejo deberá colocarse un objeto de modo que su imagen esté en la misma posición que el objeto?

62. Una lente con una cara cóncava de 17 cm de radio y la otra convexa de 8 cm de radio tiene una distancia focal en aire de 27,5 cm. Cuando se coloca en un líquido de índice de refracción desconocido, la distancia focal aumenta a 109 cm. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

63. Una bola de vidrio de 10 cm de radio tiene un índice de refracción de 1,5. La mitad trasera de la bola está recubierta de forma que actúa como un espejo cóncavo (figura 31-44). Ha-

Figura 31-44 Problema 63.



llar la posición de la imagen final vista por un ojo a la izquierda del objeto y de la bola para un objeto situado a (a) 30 cm y (b) 20 cm a la izquierda de la superficie delantera de la bola.

64. En una expresión de la ecuación de la lente utilizada por Newton, y que es útil en algunos casos, se miden las distancias objeto e e imagen i a partir de los puntos focales. Demostrar que si $x = s - f$ y $x' = s' - f$, puede escribirse la ecuación de las lentes delgadas como $xx' = f^2$, y que la ampliación lateral viene dada por $m = -x'/f = -f/x$. Hacer un esquema de una lente y sobre él indicar x y x' .

65. Se coloca un objeto a 2,4 m de una pantalla y se sitúa una lente de distancia focal f entre el objeto y la pantalla de modo que se forma sobre la pantalla una imagen real del objeto. Cuando la lente se acerca 1,2 m a la pantalla, se forma sobre ésta, otra imagen del objeto. ¿En dónde estaba situada la lente antes de moverla? ¿Cuál es su distancia focal?

66. Un objeto se encuentra a 17,5 cm a la izquierda de una lente de 8,5 cm de distancia focal. A 5 cm de ésta se encuentra otra lente de -30 cm de distancia focal. (a) Hallar la distancia entre el objeto y la imagen final formada por la segunda lente. (b) ¿Cuál es la ampliación total? (c) La imagen final, ¿es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

67. (a) Demostrar que una pequeña variación dn en el índice de refracción del material de una lente produce un pequeño cambio en la distancia focal df dado aproximadamente por

$$\frac{df}{f} = \frac{-dn}{n-1}$$

(b) Utilizar este resultado para hallar la distancia focal de una lente delgada para la luz azul, con $n = 1,53$, si la distancia focal para la luz roja con $n = 1,47$, es 20 cm.

68. La ampliación lateral de un espejo esférico o de una lente delgada viene dada por $m = -s'/s$. Demostrar que en el caso de objetos de extensión horizontal pequeña, la ampliación longitudinal es aproximadamente $-m^2$. *Indicación:* Demostrar que $ds'/ds = s^2/s^2$.

69. Una lente delgada biconvexa tiene radios r_1 y r_2 y un índice de refracción n_1 . La superficie de radio r_1 está en contacto con un líquido de refracción n_2 , y la superficie de radio r_2 está en contacto con un líquido de índice de refracción n_3 . Demostrar que la ecuación de la lente delgada en estas condiciones puede expresarse como

$$\frac{n_2}{s} + \frac{n_3}{s'} = \frac{n_1}{f}$$

en donde la distancia focal viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 r_1} - \frac{n_1 - n_3}{n_1 r_2}$$

Capítulo 32

Instrumentos Ópticos

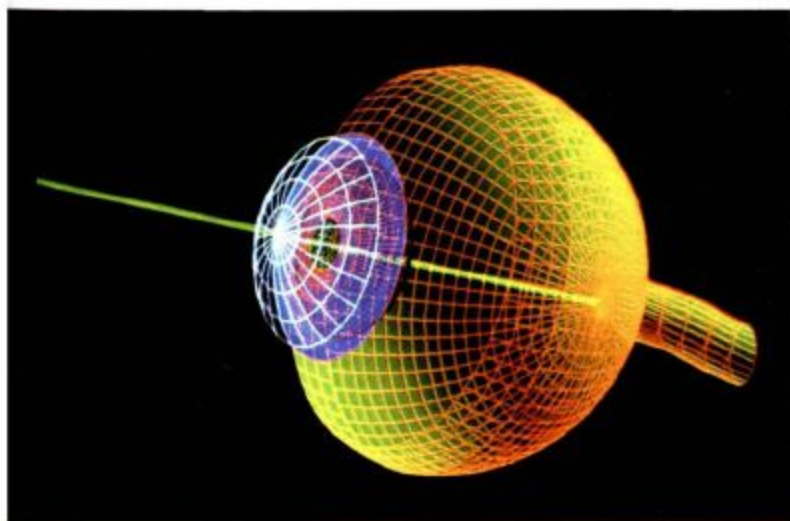


Imagen modelo del ojo humano calculada por ordenador.

En este capítulo utilizaremos lo que hemos aprendido sobre espejos y lentes para analizar el modo de funcionamiento de diversos instrumentos ópticos, tales como la cámara fotográfica, la lupa o microscopio simple, el microscopio y el telescopio. El instrumento óptico más importante es el ojo, que será estudiado en primer lugar. Muchos de los instrumentos ópticos que se utilizan hoy día son muy complicados. Los principios básicos que hay tras ellos son muy simples, pero la gran imaginación puesta al servicio de las aplicaciones de estos principios han revolucionado nuestra capacidad de ver y entender el mundo que nos rodea.

32-1 El ojo

El sistema óptico de máxima importancia es el ojo, indicado en la figura 32-1. La luz entra en el ojo a través de una abertura variable, la *pupila*, y se enfoca mediante el *sistema lente-córnea* sobre la *retina*, una película de fibras nerviosas que cubre la superficie posterior del ojo. La retina contiene diminutas estructuras sensibles denominadas *bastones* y *conos*, que reciben la imagen y transmiten la información a lo largo del nervio óptico hasta el cerebro. La forma de la lente cristalina puede alterarse ligeramente mediante la acción de los *músculos ciliares*. Cuando el ojo se enfoca sobre un objeto alejado, el músculo se relaja y el sistema

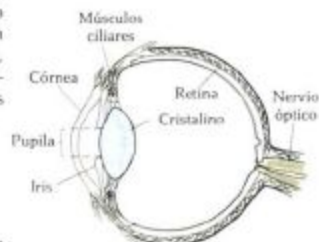


Figura 32-1 Vista en corte del ojo humano. La cantidad de luz que entra en el ojo se controla mediante el iris, que regula el tamaño de la pupila. El espesor del cristalino queda controlado por los músculos ciliares.

Figura 32-2 (a) Un ojo hipermetrope enfoca los rayos procedentes de un objeto P cercano en un punto P' detrás de la retina. (b) Una lente convergente corrige este defecto desplazando la imagen de forma que caiga sobre la retina. Estos diagramas y los siguientes se han dibujado como si todo el efecto de enfoque del ojo lo realizase el cristalino; de hecho, el sistema córnea-cristalino actúa más como una superficie esférica refractora que como una lente delgada.



Por el contrario, el ojo de una persona **miope** tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de objetos distantes delante de la retina. Una persona miope puede ver objetos cercanos, ya que sus rayos incidentes demasiado convergentes pueden enfocarse sobre la retina, pero no puede enfocar con nitidez los objetos lejanos. La miopía se corrige con una lente divergente (negativa), como puede verse en la figura 32-3.



Figura 32-3 (a) Un ojo miope enfoca los rayos procedentes de un objeto lejano en un punto P' situado delante de la retina. (b) Una lente divergente corrige este defecto.

Otro defecto común de la visión es el **astigmatismo**, que está originado porque la córnea no es perfectamente esférica, sino que tiene diferente curvatura en un plano que en otro. Esto da como resultado una imagen borrosa ya que un punto objeto da lugar a un corto segmento. El astigmatismo se corrige con lentes que combinan la forma cilíndrica con la forma esférica.

Ejemplo 32-1

¿En cuánto debe variar la distancia focal del sistema lente-córnea del ojo cuando el objeto se mueve desde el infinito hasta el punto próximo a 25 cm? Suponer que la distancia de la córnea a la retina es de 2,5 cm.

Cuando el objeto está en el infinito, los rayos que proceden del mismo son paralelos y el ojo los enfoca sobre la retina, lo que da una distancia focal para el sistema córnea-lente de 2,5 cm. Cuando el objeto está a 25 cm, la distancia focal f debe ser tal que la distancia imagen sea 2,5 cm. Utilizando $s = 25$ cm como distancia objeto y $s' = 2,5$ cm para la distancia imagen en la ecuación de la lente delgada (ecuación 31-19), se tiene

$$\frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{2,5 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{10}{25 \text{ cm}} = \frac{11}{25 \text{ cm}}$$

$$f = \frac{25 \text{ cm}}{11} = 2,27 \text{ cm}$$

Por consiguiente, la distancia focal debe disminuir en 0,23 cm. En función de la potencia del sistema córnea-lente, cuando la distancia es 2,5 cm = 0,025 m para los objetos distantes, la potencia vale $P=1/f=40$ dioptrías. Cuando la distancia focal es 2,27 cm, la potencia es de 44 dioptrías.

Ejercicio

Hallar la variación de la distancia focal del ojo cuando un objeto originalmente a 4 m se acerca a 40 cm del ojo. (Suponer que la distancia de la córnea a la retina es de 2,5 cm.) (Respuesta: 0,13 cm)

El tamaño aparente de un objeto queda determinado por el tamaño de la imagen sobre la retina. Cuanto mayor es esta imagen, mayor es el número de bastones y conos activados. En las figuras 32-4a y b podemos ver que el tamaño de la imagen sobre la retina es mayor cuando el objeto está cerca y más pequeño si está alejado. Así, aunque el tamaño real del objeto no cambia, su tamaño aparente es mayor cuando se le acerca al ojo. Una medida conveniente del tamaño de la imagen sobre la retina es el ángulo θ subtendido por el objeto en el ojo, como se ve en la figura 32-4. A partir de la figura 32-4c, podemos ver que el ángulo θ está relacionado con el tamaño y' de la imagen por

$$\theta = \frac{y'}{2,5 \text{ cm}} \quad 32-1$$

Por consiguiente, el tamaño de la imagen es directamente proporcional al ángulo subtendido por el objeto. Tanto en la figura 32-4a como b, se observa que el ángulo θ está relacionado con el tamaño y del objeto y con su distancia s por

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{s}$$

En el caso de ángulos pequeños, podemos utilizar la aproximación $\text{tg } \theta \approx \theta$ y escribir

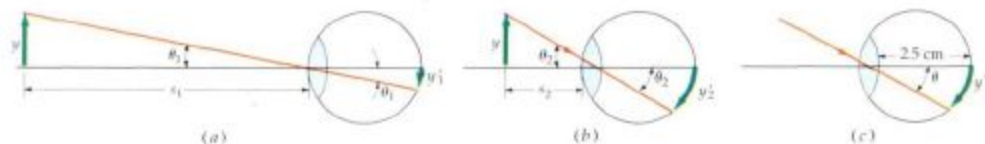
$$\theta = \frac{y}{s} \quad 32-2$$

Combinando las ecuaciones 32-1 y 32-2, se obtiene

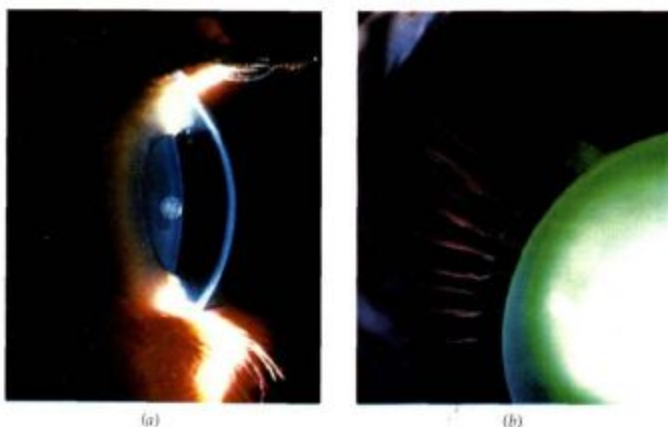
$$y' = (2,5 \text{ cm})\theta = (2,5 \text{ cm})\frac{y}{s} \quad 32-3$$

Así pues, el tamaño de la imagen sobre la retina es proporcional al del objeto y es inversamente proporcional a la distancia entre el objeto y el ojo.

Figura 32-4 (a) Un objeto lejano de altura y y parece pequeño debido a que su imagen sobre la retina es reducida. (b) Cuando el mismo objeto está más cerca, parece mayor porque su imagen en la retina es más grande. El tamaño de la imagen en la retina es proporcional al ángulo θ subtendido por el objeto, que a su vez es inversamente proporcional a la distancia del objeto. (c) El ángulo subtendido es $\theta = y/(2,5 \text{ cm})$.



(a) Ojo humano visto de perfil. (b) El cristalino o lente del ojo se mantiene en su lugar gracias a los músculos ciliares cuyas fibras se indican en la parte superior izquierda de la figura. Cuando las fibras se contraen, se reduce la tensión sobre el cristalino, y éste, que está constituido por un tejido elástico, tiende a curvarse más hacia fuera. Las mayores curvaturas del cristalino permiten al ojo enfocar objetos cercanos. (c) Algunos de los 120 millones de bastoncillos y de los 7 millones de conos del ojo amplificadas alrededor de 5000 veces. Los bastoncillos (que son los más esbeltos) son más sensibles en luz tenue, mientras que los conos son más sensibles al color. Los bastoncillos y los conos forman la capa inferior de la retina y están cubiertos por células nerviosas, vasos sanguíneos y células de soporte. La mayor parte de la luz que entra en el ojo es reflejada o absorbida antes de que llegue a los conos o bastoncillos. La luz que los alcanza provoca impulsos eléctricos que circulan por los nervios ópticos hasta alcanzar finalmente al cerebro. (d) Red neural utilizada en el sistema de visión de ciertos robots. Modelada de forma aproximada como el ojo humano, contiene 1920 sensores.



Ejemplo 32-2

Suponer que el punto próximo del ojo es 75 cm. ¿Qué potencia deberán tener unas gafas de lectura para acercar el punto próximo a 25 cm?

Si el punto próximo es 75 cm, hay hipermetropía. Para leer un libro deberá sujetarse al menos a 75 cm del ojo de modo que la letra impresa quede enfocada en la retina. La imagen de la impresión sobre la retina es entonces muy pequeña. Una lente convergente, que es la que se emplea en las gafas para leer, permite que el libro se acerque al ojo de modo que la imagen de la letra impresa resulte mayor. Cuando el libro esté a 25 cm del ojo queremos que la imagen formada por la lente convergente esté a 75 cm del ojo. Recuérdese que una lente convergente forma una imagen virtual y derecha cuando el objeto está entre la lente y el punto focal. Es de esperar entonces que la distancia focal de la lente sea mayor que 25 cm.

La figura 32-5 muestra un diagrama de un objeto a 25 cm de una lente convergente que produce una imagen virtual y derecha a $s' = -75$ cm. Utilizando la ecuación de las lentes delgadas con $s = 25$ cm y $s' = -75$ cm, se obtiene

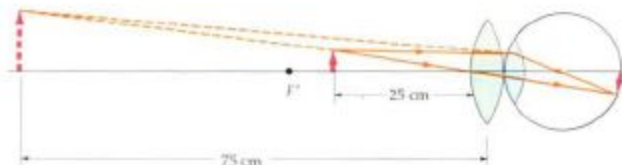
$$\frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{-75 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

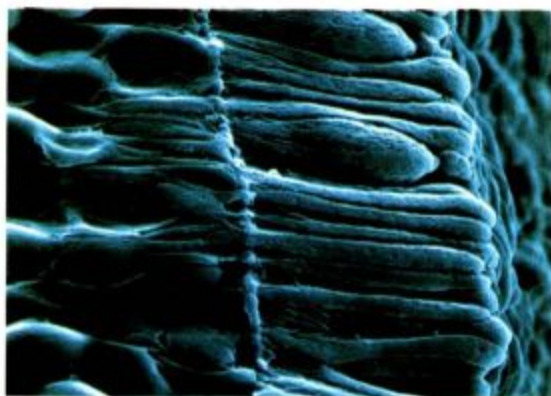
$$\frac{1}{f} = \frac{2}{75 \text{ cm}} = \frac{1}{0,375 \text{ m}} = 2,67 \text{ dioptrías}$$

$$f = \frac{1}{2,67 \text{ m}^{-1}} = 0,375 \text{ m} = 37,5 \text{ cm}$$

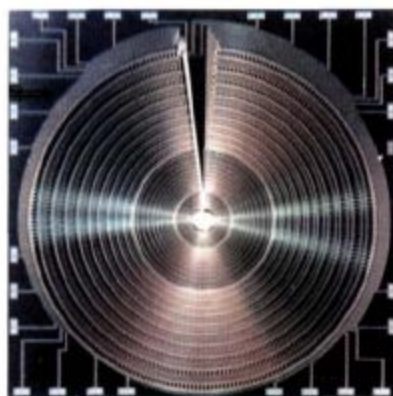
Así pues, la potencia de estas lentes para lectura deberán ser de 2,67 dioptrías, que se obtiene cuando la distancia focal de las gafas es de 37,5 cm.

Figura 32-5 Diagrama de rayos correspondiente al ejemplo 32-2. Cuando el objeto está situado justo dentro del primer punto focal de la lente convergente, la imagen es virtual, derecha, aumentada y se encuentra lejos de la lente. En este ejemplo, se ha escogido la distancia imagen de forma que valga 75 cm, que correspondería al punto próximo de un ojo hipermetrope y se ha escogido la distancia objeto como 25 cm. Entonces se calcula la distancia focal de la lente para estos valores escogidos utilizando la ecuación de la lente delgada.





(c)



(d)

Existe otro método alternativo para resolver este problema que utiliza el resultado que encontramos en la sección 31-4 de que la potencia de dos lentes en contacto es la suma de las potencias de cada lente aislada. Sin gafas de lectura, cuando el objeto está a $75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$ del ojo, la imagen está a $2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m}$, que es la distancia que separa el cristalino de la retina. La distancia focal del ojo puede determinarse entonces mediante la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{0,75 \text{ m}} + \frac{1}{0,025 \text{ m}} = \frac{1}{f_c}$$

La potencia del cristalino es entonces

$$P_c = \frac{1}{f_c} = 1,33 \text{ m}^{-1} + 40,00 \text{ m}^{-1} = 41,33 \text{ dioptrías}$$

Cuando se utilizan las gafas de lectura, la distancia imagen de la combinación deberá ser $0,025 \text{ m}$ cuando el objeto esté a una distancia de 25 cm . Si f_c es la distancia focal de la combinación y $P_c = 1/f_c$ es la potencia de la combinación, se tiene

$$\frac{1}{0,25 \text{ m}} + \frac{1}{0,025 \text{ m}} = \frac{1}{f_c} = P_c$$

o bien

$$P_c = 4,00 \text{ m}^{-1} + 40 \text{ m}^{-1} = 44,0 \text{ dioptrías}$$

La potencia de la combinación es igual a la suma de la potencia del cristalino más la de la lente para lectura:

$$P_c = P_c + P_g$$

La potencia de la lente de lectura es, pues,

$$P_g = P_c - P_c = 44,0 \text{ dioptrías} - 41,33 \text{ dioptrías} = 2,67 \text{ dioptrías}$$

que está de acuerdo con nuestro primer cálculo. En ambos métodos hemos supuesto que la lente de lectura está en contacto con el cristalino. Por tanto, nuestros resultados se aplican a lentes de contacto. En el caso de que se trate de gafas que se encuentran a corta distancia del ojo, los resultados son ligeramente diferentes.

Cuestión

1. A cierta persona se le prescriben gafas con una potencia de -2 dioptrías. ¿Es miope o hipermetrope?

32-2 La lupa o microscopio simple

En el ejemplo 32-2 vimos que el tamaño aparente de un objeto puede aumentarse utilizando una lente convergente con objeto de conseguir que el objeto se acerque al ojo y, por tanto, aumente la imagen en la retina. Una lente convergente de este tipo recibe el nombre de **lupa** o **microscopio simple**. En la figura 32-6a se encuentra, en el punto próximo del ojo a una distancia x_p , un objeto pequeño de altura y . Como vimos anteriormente, el tamaño de la imagen en la retina es proporcional al ángulo θ_o subtendido por el objeto en el ojo. En este caso, θ_o viene dado aproximadamente por

$$\theta_o = \frac{y}{x_p}$$

En la figura 32-6b se ha colocado delante del ojo una lente convergente de distancia focal f , inferior a x_p , y el objeto se ha situado en el punto focal de la lente. Los rayos emergen paralelos de la lente, indicando que la imagen está delante de la misma a una distancia infinita. Los rayos paralelos son enfocados por el ojo relajado sobre la retina. Si la lente está en contacto con el ojo, el ángulo subtendido por el objeto es ahora aproximadamente

$$\theta = \frac{y}{f}$$

Figura 32-6 (a) Un objeto situado en el punto próximo subtende un ángulo θ_o en el ojo. (b) Cuando el objeto está en el punto focal de la lente convergente, los rayos emergen de la lente paralelos entre sí y entran en el ojo como si procediesen de un objeto situado a una distancia muy grande. Así pues, la imagen es observada por el ojo relajado como procedente del infinito. Cuando f es menor que la distancia del punto próximo, la lente convergente permite que el objeto se acerque más al ojo, incrementando así el ángulo θ subtendido por el objeto y aumentando en consecuencia el tamaño de la imagen sobre la retina.



El cociente θ/θ_o se denomina **amplificación angular** o **poder amplificador M** de la lente:

Poder amplificador de una lente

$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{x_p}{f}$$

32-4

Ejemplo 32-3

Una persona con un punto próximo de 25 cm utiliza una lente de 40 dioptrías como lupa. ¿Qué amplificación se obtiene?

La distancia focal de una lente de 40 dioptrías es

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{40 \text{ m}^{-1}} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

Utilizando $x_p = 25 \text{ cm}$ y $f = 2,5 \text{ cm}$ en la ecuación 32-4, la amplificación vale

$$M = \frac{25 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}} = 10$$

El objeto parece 10 veces mayor porque puede situarse a 2,5 cm en lugar de a 25 cm del ojo, de modo que se incrementa diez veces el tamaño de la imagen en la retina. Se utiliza la lente convergente adicional, o lupa, para enfocar los rayos muy divergentes del objeto que se encuentra muy próximo.

Ejercicio

¿Cuál es la amplificación en el ejemplo 32-3 si el punto próximo de la persona es 30 cm en lugar de 25 cm? (Respuesta: $M=12$)

Es posible aumentar ligeramente esta amplificación acercando ligeramente el objeto a la lupa. Cuando el objeto está dentro del punto focal de la lupa, la imagen es virtual y derecha, como en la figura 32-5. Cuando el objeto se acerca hacia la lupa, la imagen se acerca aún más al ojo y aumenta ligeramente el ángulo subtendido. Se tiene la mayor amplificación posible cuando la imagen está en el punto próximo del ojo, como sucedía en el ejemplo 32-2. Los cálculos demuestran que en este caso la amplificación es exactamente mayor en una unidad, a la de la imagen en el infinito (ver problema 26). Por ejemplo, si el punto próximo está a 25 cm, una lente con una distancia focal de 2,5 cm daría una amplificación de 11 con la imagen a 25 cm en lugar de dar una amplificación de 10 con la imagen en el infinito. En el ejemplo 32-2 vimos que una lente de 37,5 cm de distancia focal produce una imagen a 75 cm del ojo cuando el objeto está a 25 cm del mismo. Como el ángulo subtendido por la imagen sobre la retina varía de forma inversa con la distancia del objeto (o imagen) al ojo, la amplificación era $(75 \text{ cm})/(25 \text{ cm})=3$ en este ejemplo. Si quisiéramos trasladar el objeto hacia atrás desde los 25 cm hasta el punto focal de la lente a 37,5 cm, la imagen podría observarse con el ojo relajado pero la amplificación sería 2 en lugar de 3. En la práctica, la ganancia de amplificación que se obtiene viendo la imagen situada en el punto próximo, en lugar de verla en el infinito con el ojo relajado, no compensa el cansancio adicional del ojo, de forma que utilizaremos la ecuación 32-4 para la amplificación de una lupa.

Se utilizan lentes simples (llamadas *oculares*) en microscopios compuestos y en anteojos o telescopios para observar la imagen formada por otra lente o sistema de lentes. También suelen utilizarse para corregir aberraciones, combinaciones de lentes con una distancia focal resultante positiva y corta, en lugar de emplear una sola lente, pero el principio es el mismo que el de una lupa.

32-3 La cámara fotográfica

Los elementos básicos de una cámara fotográfica consisten en una caja o cámara oscura, una lente positiva, un sistema de apertura variable, un obturador que puede abrirse durante un tiempo corto, variable a voluntad, y una película (figura 32-7). A diferencia del ojo, que tiene una lente (cristalino) de distancia focal variable, la distancia focal de la lente de una cámara es fija. Normalmente, la distancia focal de una lente para una cámara tipo 35 es de 50 mm. (El número 35 se refiere a la anchura de la película en mm.) El procedimiento de enfoque consiste en variar la distancia de la lente a la película acercándola o alejándola de la misma.

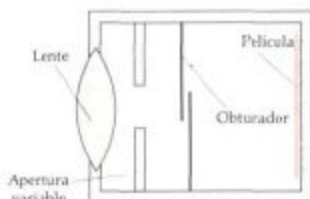


Figura 32-7 Diagrama esquemático de una cámara fotográfica. La lente positiva enfoca la luz sobre la película. La apertura variable limita la cantidad de luz que entra en la cámara y el área de la lente utilizada. La velocidad del obturador puede variarse para modificar el tiempo de exposición.

Ejemplo 32-4

La distancia focal de la lente de una cámara es 50 mm. ¿Cuánto deberá moverse la lente de forma que pase de estar enfocando un objeto muy alejado a otro situado sólo a 2 m?

Cuando el objeto está lejano, la imagen dada por la lente está en su foco, de modo que la película deberá estar a 50 mm de la lente. Cuando el objeto está sólo a 2 m, la distancia imagen es s' dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \text{ m}} + \frac{1}{s'} &= \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ mm}} \\ \frac{1}{s'} &= \frac{1}{50 \text{ mm}} - \frac{1}{2000 \text{ mm}} \\ &= \frac{40}{2000 \text{ mm}} - \frac{1}{2000 \text{ mm}} \\ s' &= \frac{2000 \text{ mm}}{39} = 51,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la lente deberá alejarse 1,3 mm más de la película.

Ejercicio

En el ejemplo 32-4, ¿en cuánto deberá alejarse la lente para cambiar el enfoque de un objeto situado muy lejos a otro, a sólo 1 m de distancia? (Respuesta: 2,6 mm)

La cantidad de luz que incide sobre la película puede controlarse variando el tiempo que el obturador está abierto y variando el tamaño de la apertura. Para un tipo de película determinado, existe una cantidad de luz óptima que dará una buena fotografía con el contraste apropiado. Demasiada poca luz dará una fotografía oscura. Un exceso de luz dará una fotografía excesivamente clara con muy poco contraste. La cantidad de luz necesaria para el contraste adecuado está relacionada con la «velocidad» de la película que está clasificada mediante un número DIN (en Europa), o un número ASA equivalente (en Estados Unidos). Cuanto mayor es el número de ASA o DIN, más rápida es la película y menor es la cantidad de luz que se necesita. Una película con un número ASA elevado, como el ASA 400 o ASA 1000, es buena para tomar fotografías en interiores en donde se dispone de poca luz. Cuando se utilizan películas de alta velocidad normalmente se tiene cierta reducción en la calidad de la foto (en la nitidez de la imagen o en el colorido); de modo que en el caso de fotografías de exteriores tomadas con gran cantidad de luz, es preferible utilizar películas de velocidades inferiores, como la ASA 100 a la ASA 64. También puede que sea necesario utilizar películas de baja velocidad en situaciones de luz brillante si el obturador de la cámara tiene una variabilidad limitada. Las velocidades de los obturadores en las buenas cámaras pueden variar ordinariamente desde exposiciones de varios segundos, para fotografías con luz muy escasa, hasta 1/1000 de segundo, para fotografías en donde se quiere que la acción resulte detenida. Si la cámara se sostiene con la mano, los tiempos de exposición superiores a 1/60 de segundo dan frecuentemente imágenes borrosas debido al inevitable movimiento de la cámara.

El tamaño máximo de la apertura está limitado por el tamaño de la lente, que a su vez se encuentra limitada por los diversos tipos de aberraciones estudiadas en la sección 31-5. (Aunque hemos considerado la lente de una cámara como una lente positiva simple, los sistemas ópticos en las cámaras buenas son combinaciones de lentes proyectadas para reducir las aberraciones cromática, esférica, etc.) El tamaño de la apertura viene dado por el número f , que es el cociente entre la distancia focal y el diámetro de la apertura:

Número f

$$\text{Número } f = \frac{f}{D}$$

32-5

Corte de una cámara fotográfica de 35 mm.



La máxima apertura es el número f de la lente. Por ejemplo, una lente $f/2,8$ con una distancia focal de 50 mm tiene un diámetro máximo utilizable dado por

$$D = \frac{f}{\text{número } f} = \frac{50 \text{ mm}}{2,8} = 17,9 \text{ mm}$$

Las lentes con grandes diámetros (números f pequeños) son caras por lo costoso que resulta la corrección de sus aberraciones. Las posiciones de apertura de una cámara suelen marcarse $f/22$, $f/16$, $f/11$, $f/8$, $f/5,6$, $f/4$, $f/2,8$, $f/2,0$, $f/1,4$, $f/1,0$ y así siguiendo hasta el número f más bajo, que corresponde al diámetro más grande utilizable de la lente. Obsérvese que cada posición sucesiva señala un diámetro de la apertura que es $\sqrt{2} = 1,4$ veces el de la posición anterior. Como la cantidad de luz que entra en una cámara es proporcional al área de la lente, que a su vez es proporcional al cuadrado del diámetro, la apertura al pasar de una posición a otra inmediata, por ejemplo de $f/2,0$ a $f/1,4$, aumenta el área y, por tanto, la cantidad de luz que entra en un tiempo determinado en un factor de 2. El aumentar la apertura, sin embargo, lleva como contra partida la reducción de la profundidad de foco —el margen de distancias a los objetos que están nítidamente enfocados sobre la película.

Ejercicio

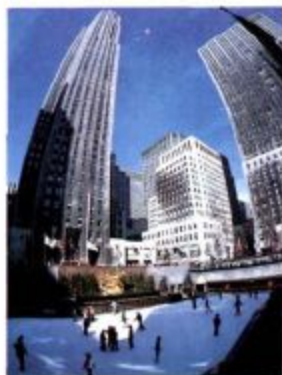
¿Cuál es el número f de una lente cuya distancia focal es 50 mm y cuyo diámetro máximo utilizable es 8,93 mm? (Respuesta: $f/5,6$)

Ejemplo 32-5

Las instrucciones para una determinada película indican que debe ponerse la apertura en $f/11$ y la velocidad del obturador en $1/250$ s para tomar fotografías en días con sol brillante. ¿Cuál deberá ser la velocidad del obturador si la apertura se fija a $f/5,6$?

Como $11^2 = 121$ y $5,6^2 = 31,4$, el área de la apertura de $f/5,6$ es $121/(31,4) = 3,85$ o aproximadamente 4 veces mayor que la $f/11$. Así pues, para conseguir la cantidad deseada de luz se deberá utilizar una velocidad del obturador 4 veces mayor, o sea $1/1000$ s.

Una cámara de 35 mm con una lente que posee una distancia focal de 50 mm tiene un campo de visión que es aproximadamente el mismo que el de la visión

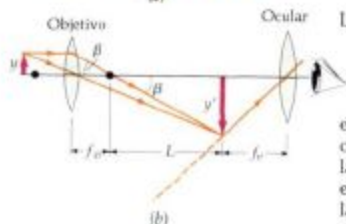


Fotografía con un objetivo gran angular de la pista de patinaje del Rockefeller Center en Nueva York. Obsérvese la distorsión en la parte superior de la fotografía.

Figura 32-8 (a) William Marin en el Laboratorio Nacional de Brookhaven escoge una lente objetivo para observar una muestra de residuos radioactivos con un microscopio moderno óptico. (b) Diagrama esquemático de un microscopio compuesto formado por dos lentes positivas, el objetivo de distancia focal f_o y el ocular de distancia focal f_e . La imagen real del objeto formada por el objetivo se observa a través del ocular, que actúa como una lupa simple. La imagen final se encuentra en el infinito.



(a)



(b)

ordinaria, alrededor de 45° . Para aumentar el campo de visión, se utiliza una lente de gran amplitud angular con una menor distancia focal, por ejemplo, 24 mm. Cuando la distancia del objeto es mucho mayor que la distancia focal, que es el caso normal en una cámara, la distancia imagen s' es aproximadamente igual a f . Como la amplificación lateral de una lente es $m = (-)s'/s$, el tamaño de la imagen sobre la película es aproximadamente proporcional a la distancia focal. Una lente gran angular da así sobre la película una imagen más pequeña que si se tratase de una lente normal para un tamaño dado del objeto. Una lente teleobjetivo, o telefoto, tiene una gran distancia focal para aumentar el tamaño de la imagen sobre la película y hacer así que el objeto parezca más cercano. Una lente de este tipo con una distancia focal de 200 mm daría una amplificación aproximadamente 4 veces mayor que la de una lente ordinaria con una distancia focal de 50 mm.

Cuestiones

- ¿Cuáles son las ventajas de tener una cámara con un obturador rápido?
- ¿Por qué es más cara una lente $f/1,0$ que otra de $f/2,8$?

32-4 Microscopio compuesto

El microscopio compuesto (figura 32-8) se utiliza para examinar objetos muy pequeños situados a distancias muy cortas. En su forma más simple, está formado por dos lentes convergentes. La lente más cercana al objeto, denominada **objetivo**, forma una imagen real del objeto. Esta imagen está aumentada y es invertida. La lente más próxima al ojo, denominada **ocular**, se utiliza como una simple lupa para observar la imagen formada por el objetivo. El ocular se coloca de forma tal que la imagen formada por el objetivo cae en el primer punto focal del ocular. La luz emerge así del ocular en forma de haz paralelo como si procediese de un punto situado a una gran distancia delante de la lente. (Esto se denomina normalmente «ver la imagen en el infinito».) Como vimos en la sección 32-2, la función de una lupa simple (el ocular en este caso) es hacer que el objeto (la imagen formada por el objetivo en este caso) se acerque más al ojo que el propio punto próximo. Como una lupa produce una imagen virtual que es derecha, la imagen final producida por las dos lentes está invertida.

La distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular recibe el nombre de **longitud del tubo** L . Su valor se ha fijado ya en 16 cm. El objeto se coloca ligeramente fuera del primer punto focal del objetivo de modo que se forme una imagen aumentada en el primer punto focal del ocular a una distancia $L + f_o$ del objetivo, en donde f_o es la distancia focal del objetivo. Según se ve en la figura 32-8, $\tan \beta = y/f_o = -y'/L$. La amplificación lateral del objetivo es, pues,

$$m_o = \frac{y'}{y} = -\frac{L}{f_o} \quad 32-6$$

La amplificación angular del ocular es

$$M_e = \frac{x_p}{f_e}$$

en donde x_p es el punto próximo del observador y f_e es la distancia focal del ocular. Como vimos en la sección 32-2, puede obtenerse una amplificación angular ligeramente mayor colocando el objeto (la imagen formada por el objetivo) en un punto ligeramente dentro del primer punto focal del ocular de forma que la imagen final esté en el punto próximo. La ligera ganancia en la amplificación angular del ocular no compensa normalmente el cansancio del ojo al obligarle a ver la imagen en el punto próximo en lugar de verla en el infinito con el ojo

relajado. El poder amplificador de un microscopio es el producto de la amplificación lateral del objetivo por la amplificación angular del ocular:

$$M = m_o M_e = -\frac{L}{f_o} \frac{x_p}{f_e} \quad 32-7$$

Poder amplificador de un microscopio

Ejemplo 32-6

Un microscopio tiene una lente objetivo de 1,2 cm de distancia focal y un ocular de 2,0 cm de distancia focal separadas 20 cm. (a) Hallar el poder amplificador si el punto próximo del observador está a 25 cm. (a) ¿En dónde deberá colocarse el objeto si la imagen final ha de verse en el infinito?

(a) La distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular es $20 \text{ cm} - 2 \text{ cm} - 1,2 \text{ cm} = 16,8 \text{ cm}$. El poder amplificador viene dado por la ecuación 32-7 con $L = 16,8 \text{ cm}$, $f_o = 1,2 \text{ cm}$, $f_e = 2,0 \text{ cm}$ y $x_p = 25 \text{ cm}$:

$$M = -\frac{16,8 \text{ cm}}{1,2 \text{ cm}} \frac{25 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = -175$$

El signo negativo indica que la imagen final está invertida.

(b) Podemos calcular la distancia objeto entre el objeto original y el objetivo a partir de la ecuación de la lente delgada. En la figura 32-8 podemos ver que la distancia imagen es

$$s' = f_o + L = 1,2 \text{ cm} + 16,8 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

Entonces se halla la distancia objeto mediante

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

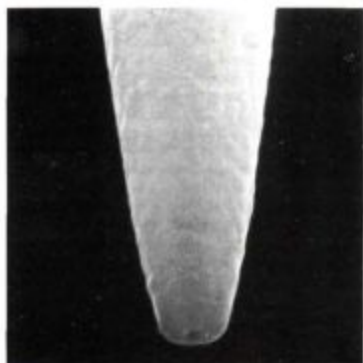
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{18 \text{ cm}} = \frac{1}{1,2 \text{ cm}}$$

Despejando s , se obtiene $s = 1,29 \text{ cm}$. Por tanto, el objeto deberá colocarse a 1,29 cm del objetivo, o a 0,09 cm fuera de su primer punto focal.

Cuanto más corta sea la longitud de onda de la luz utilizada para obtener la imagen de una muestra, menor podrá ser el tamaño del objeto que puede verse así. Puesto que las longitudes de onda corta de la luz transportan más energía, debe existir un compromiso entre el poder de resolución del microscopio y el daño potencial que pueda sufrir la muestra a examinar. (a) Prototipo de un microscopio de campo próximo. (b) La apertura del microscopio es un orificio de 50 nm en la punta de una pipeta de vidrio. La muestra se coloca tan cerca de la apertura, que la luz se encuentra con ella antes de que tenga oportunidad de diverger. El haz barre la superficie de la muestra, parcialmente se transmite a su través y se recoge mediante un fotodetector. Finalmente se construye una imagen línea a línea sobre un monitor de video. Los microscopios de campo próximo que utilizan luz amarillo-verdosa de una longitud de onda del orden de los 500 nm han conseguido una resolución de cerca de 40 nm. Esta resolución es un orden de magnitud mejor que la posible con un microscopio óptico convencional.



(a)

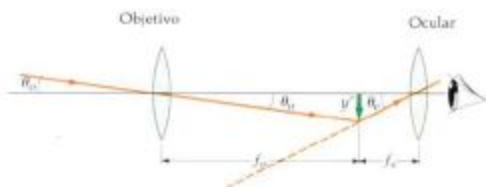


(b)

32-5 Anteosojos y telescopios

Los telescopios se utilizan para observar objetos que están muy alejados y que son muy grandes (es corriente utilizar también la denominación de anteojo, sobre todo cuando el sistema óptico está formado sólo por lentes). Su objeto consiste en conseguir que la imagen del objeto esté más próxima que éste, es decir, hacer que sea mayor el ángulo subtendido por la imagen, de modo que el objeto parezca mayor. El anteojo astronómico, ilustrado esquemáticamente en la figura 32-9, se compone de dos lentes positivas —una lente objetivo que forma una imagen real e invertida, y un ocular que se utiliza como una simple lupa para observar esta imagen. Como el objeto está muy lejano, la imagen dada por el objetivo cae en su punto focal y la distancia imagen es igual a f_o . Puesto que la distancia objeto es mucho mayor que la distancia focal del objetivo, la imagen formada por el objetivo es mucho menor que el objeto. Por ejemplo, si estamos mirando a la Luna, la imagen de la Luna formada por el objetivo es mucho menor que la propia Luna. Lo que se pretende con el objetivo no es amplificar el objeto, sino producir una imagen que esté más cerca y que pueda así observarse con el ocular. Como la imagen está en el segundo punto focal del objetivo y en el primer punto focal del ocular, el objetivo y el ocular deben estar separados por la suma de sus distancias focales, $f_o + f_c$, siendo f_c la distancia focal del ocular.

Figura 32-9 Diagrama esquemático de un anteojo astronómico. El objetivo forma una imagen real de un objeto distante cerca de su segundo punto focal, que coincide con el primer punto focal del ocular. Éste sirve como lupa simple para observar la imagen.



El poder amplificador del anteojo es la amplificación angular θ_c/θ_o , siendo θ_c el ángulo subtendido por la imagen final, según se ve a través del ocular, y θ_o es el ángulo subtendido por el objeto cuando se observa directamente sin la ayuda de ninguna lente. El ángulo θ_o es el mismo que el que subtendía el objeto en el objetivo indicado en la figura 32-9. (La distancia de un objeto lejano, como la Luna, al objetivo, es esencialmente la misma que la distancia al ojo.) En esta figura puede verse que

$$\operatorname{tg} \theta_c = -\frac{y'}{f_c} \approx \theta_c$$

en donde hemos utilizado la aproximación de ángulo pequeño $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ y hemos introducido un signo menos para hacer que θ_c sea positivo cuando y' sea negativo. El ángulo θ_c de la figura es el subtendido por la imagen final:

$$\operatorname{tg} \theta_c = -\frac{y'}{f_c} \approx \theta_c$$

Como y' es negativo, θ_c también lo es, indicando que la imagen está invertida. El poder amplificador del anteojo es entonces

Poder amplificador de un anteojo

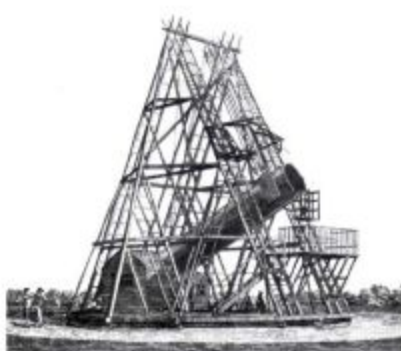
$$M = \frac{\theta_c}{\theta_o} = -\frac{f_o}{f_c}$$

32-8

Según esta ecuación, podemos ver que se consigue un gran poder amplificador con un objetivo de gran distancia focal y un ocular de pequeña distancia focal.



(a)



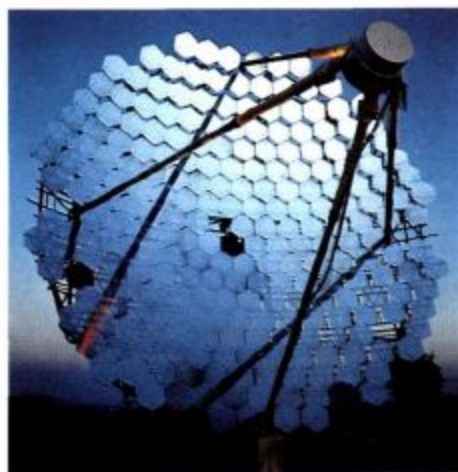
(b)



(c)



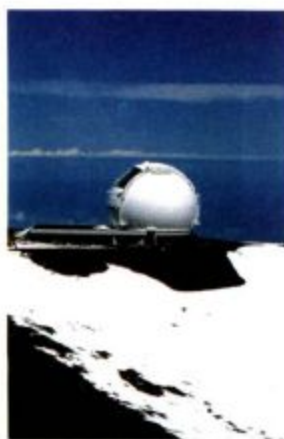
(d)



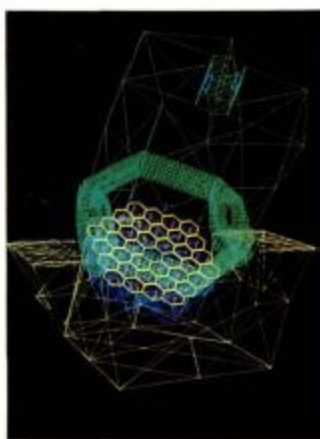
(e)

La astronomía con longitudes de onda ópticas comenzó con Galileo aproximadamente hace unos 400 años. En este siglo, los astrónomos han empezado a explorar el espectro electromagnético a otras longitudes de onda empezando con la radioastronomía en los años 40, luego en los comienzos de la década de los 60 siguieron con la astronomía de los rayos X basada en los satélites artificiales y, más recientemente, se trabaja en astronomía de ultravioletas, infrarrojos y rayos gamma. (a) El anteojo de Galileo del siglo XVII con el que descubrió las montañas de la Luna, las manchas solares, los anillos de Saturno y las bandas y las lunas de Júpiter. (b) Grabado del telescopio reflector construido en los años 1780 y que fue utilizado por el gran astrónomo Herschel. Fue el primero en observar galaxias exteriores a la nuestra. (c) Debido a la dificultad de construir lentes grandes y libres de defectos, los anteojos o telescopios refractores, como este de 91.4 cm del Observatorio de Lick, han sido superados en su capacidad de recoger grandes

cantidades de luz por los telescopios reflectores. (d) Aquí puede verse al gran astrónomo Hubble, que descubrió la aparente expansión del universo. Se encuentra sentado en la cabina del observador del telescopio reflector Hale de 5.08 m, que es lo suficientemente grande como para que el observador se siente en el propio foco. (e) Este reflector óptico de 10 m, en el Observatorio de Whipple, en el sur de Arizona, es el instrumento más grande construido expresamente para utilizar en la astronomía de los rayos gamma. Los rayos gamma de alta energía de origen desconocido inciden sobre la parte superior de la atmósfera y crean cascadas de partículas, como electrones de elevada energía que emiten radiación Cherenkov que puede observarse desde el suelo. De acuerdo con cierta hipótesis, los rayos gamma de alta energía son emitidos cuando la materia se acelera hacia unas estrellas ultradensas en rotación, denominadas pulsares. (Para ver una imagen de la radiación Cherenkov, ver la pág. 469; para una imagen de un pulsar, ver la pág. 237.)



(a)



(b)



(c)

(a) El Observatorio Keck, situado en la cima del volcán inactivo de Mauna Kea, Islas Hawái, alojará el telescopio óptico más grande del mundo. En este lugar tan remoto y a esta altitud tan elevada existe poco vapor de agua, escasa turbulencia atmosférica u otras clases de contaminación, lo que hace que este lugar sea casi el ideal para la astronomía.

(b) El telescopio Keck, comenzó a funcionar a finales de 1991, está compuesto de 36 segmentos de espejo exagonales que en conjunto constituyen un solo espejo de 10 m de amplitud —aproximadamente el doble de grande que el hasta ahora telescopio más grande de un solo espejo que funciona actualmente.

(c) La forma exacta de uno de los espejos se comprueba mediante efectos interferenciales producidos con luz coherente que se reflejan en el mismo — como se indica aquí. (d) Debajo de cada segmento de espejo Keck existe un sistema de sensores controlados por ordenador y sistemas mecánicos accionados por motor que pueden hacer variar de modo continuo la forma del espejo. Estos ajustes en las posiciones, que son sensibles hasta dentro de los 100 nm, permiten al sistema compensar las variaciones en la alineación de los segmentos debidas a pequeños cambios en las tensiones gravitatorias cuando se inclina el telescopio, a las dilataciones y contracciones térmicas, y a las fluctuaciones en las corrientes de aire que se producen en la cima de la montaña.



(d)

Ejemplo 32-7

El anteojo o telescopio refractor más grande del mundo está en el Observatorio Yerkes de la Universidad de Chicago en Williams Bay, Wisconsin (Estados Unidos). El objetivo tiene un diámetro de 102 cm y una distancia focal de 19,5 m. La distancia focal del ocular es 10 cm. ¿Cuál es su poder amplificador?

Según la ecuación 32-8 se tiene

$$M = -\frac{f_o}{f_e} = -\frac{19,5 \text{ m}}{0,10 \text{ m}} = -195$$

La principal consideración a tener en cuenta en el caso de un anteojo o telescopio astronómico no es su poder amplificador sino su capacidad de recoger la luz procedente del objeto lejano, que depende del tamaño del objetivo. Cuanto mayor es el objetivo, mayor es la luminosidad de la imagen. Sin embargo, son muy difíciles de fabricar lentes muy grandes sin aberraciones. Además, se plantean serios problemas mecánicos a la hora de sujetar y soportar lentes muy grandes por sus bordes. Un telescopio reflector utiliza un espejo cóncavo en lugar de una lente como objetivo. Esto ofrece varias ventajas importantes. Una de ellas es que un espejo no produce aberración cromática. Además, su sujeción mecáni-

ca es mucho más sencilla porque el espejo pesa bastante menos que una lente de calidad óptica equivalente y puede sujetarse en toda su superficie trasera.

Un problema que se presenta en el telescopio reflector es que la imagen del espejo objetivo debe observarse en la región de los rayos incidentes (figura 32-10). En los telescopios reflectores muy grandes, como el telescopio en el Monte Palomar, California (Estados Unidos), cuyo espejo tiene un diámetro de 200 pulgadas (5,1 m), el observador se sienta en un receptáculo próximo al punto focal del espejo. Para que dicho alojamiento obstruya la menor cantidad de luz posible se hace muy pequeño, de modo que existe poco espacio para situar instrumentos auxiliares, como espectrógrafos. En los telescopios más pequeños, la fracción de luz obstruida por este sistema sería demasiado grande. Un procedimiento para reducir la cantidad de luz obstruida consiste en utilizar un segundo espejo más pequeño para reflejar los rayos a través de un orificio pequeño practicado en el centro del objetivo, como se indica en la figura 32-11. Así se tiene la ventaja adicional de que el área de observación se hace más accesible y se dispone de más sitio para la instalación de instrumentos auxiliares.



Figura 32-11 Telescopio reflector con un espejo secundario para dirigir la luz de forma que atraviese un pequeño orificio existente en el espejo objetivo. Esta

disposición tiene la ventaja respecto a la de la figura 32-10 de que se dispone de más sitio para alojar instrumentación auxiliar en la región donde se realiza la observación.

El hecho de que la imagen final resulte invertida en un anteojo simple no es ninguna desventaja cuando se observan objetos astronómicos como estrellas o planetas, pero sí lo es cuando se quiere mirar a objetos terrestres. Los binoculares utilizan dos prismas rectos ($45-45-90^\circ$) en cada lado que proporcionan una segunda inversión a la imagen de modo que la imagen final está derecha. En la figura 32-12a se muestra un prisma de este tipo con su hipotenusa horizontal y sus catetos reflectores verticales. La luz que entra por la cara mayor se refleja dos veces y emerge en sentido contrario por la misma cara mayor. Las imágenes horizontales se invierten, pero no las verticales. En la figura 32-12b, un segundo prisma con su hipotenusa vertical vuelve a invertir el sentido de la luz, haciéndolo coincidir con el sentido incidente, pero además invierte las imágenes verticales sin alterar las horizontales. Las reflexiones múltiples en los prismas hace aumentar tam-

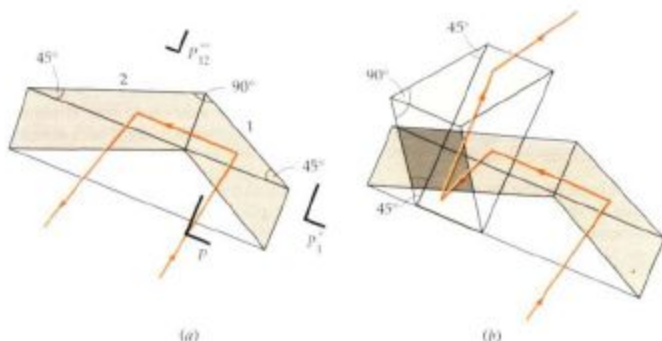


Figura 32-10 Los telescopios reflectores utilizan espejos como objetivo. Como el compartimento donde se aloja el observador bloquea parte de la luz incidente, el montaje indicado en la figura sólo se utiliza en telescopios con espejos objetivo muy grandes.

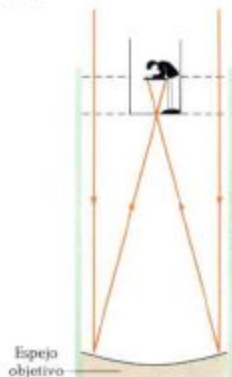


Figura 32-12 (a) Prisma de $45-45-90^\circ$ con su hipotenusa horizontal y las caras reflectoras 1 y 2 verticales. La imagen P'_{12} debida a la reflexión en las superficies 1 y 2 se ha invertido en la dirección horizontal pero no en la vertical. (b) Si la luz entra luego en otro prisma idéntico al primero, pero con su hipotenusa vertical, se invertirá la imagen en la dirección vertical. Después de pasar a través de ambos prismas, la luz emerge en su dirección y sentido originales habiéndose invertido la imagen tanto en dirección vertical como horizontal.



(a)



(b)

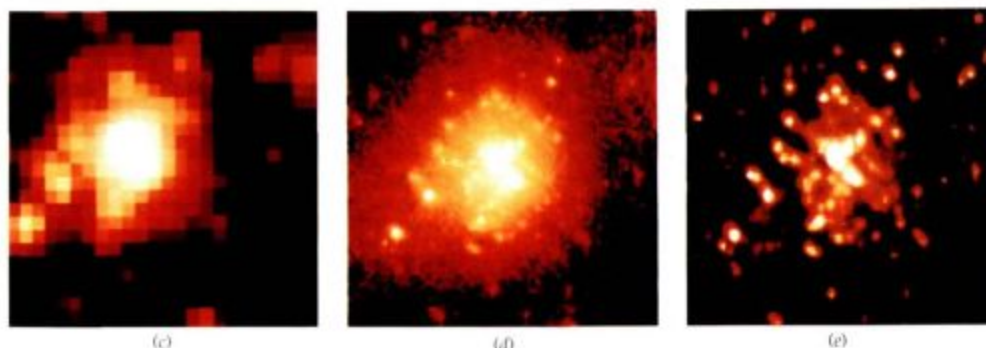
El telescopio espacial Hubble (a) antes y (b) después de desplegarse con ayuda de un gran brazo mecánico accionado desde la lanzadera espacial que lo puso en órbita. El telescopio orbita a unos 615 km por encima de la superficie terrestre, muy por encima de la turbulencia atmosférica que limita la capacidad en los telescopios montados en Tierra de resolver imágenes en las longitudes de onda ópticas. Debido a un error en el dispositivo utilizado para medir la forma del espejo reflector principal del telescopio Hubble, éste adolece de aberración esférica. En el momento actual no se ve clara la forma en que este defecto pueda remediarse. (c) Una imagen en falso color de 30 Doradus, un cúmulo de estrellas en la Gran Nube de Magallanes, obtenida con un telescopio montado en Tierra de 2.2 m. (d) La misma región, según la imagen obtenida por el Hubble con una mejora seis veces superior en la resolución. (e) Versión procesada por ordenador de la imagen Hubble, con eliminación de los errores debidos a la aberración esférica. Este sistema de procesamiento puede funcionar bien con fuentes brillantes, pero es poco probable que permita obtener imágenes correctas con el Hubble de fuentes muy tenues, procedentes de galaxias muy distantes, como se esperaba en un principio.

bién la longitud del trayecto seguido por la luz, de forma que puede utilizarse una distancia focal relativamente grande aunque el espacio real sea relativamente corto.

Resumen

1. El sistema córnea-lente (córnea-cristalino) del ojo enfoca la luz sobre la retina, en donde se encuentran los elementos sensibles (bastones y conos) que transmiten la información a lo largo del nervio óptico al cerebro. Cuando el ojo está relajado, la distancia focal del sistema córnea-cristalino es del orden de 2,5 cm, distancia de la córnea a la retina. Cuando los objetos se acercan al ojo, la forma del cristalino varía ligeramente para que disminuya la distancia focal global de modo que la imagen quede de nuevo enfocada en la retina. La distancia más corta a la que puede enfocar el cristalino sobre la retina se denomina punto próximo, cuyo valor medio típico es de 25 cm aproximadamente, pero que varía con las personas y con la edad. El tamaño aparente de un objeto depende del tamaño de la imagen sobre la retina, que a su vez depende de la distancia del objeto al ojo. Cuanto más cerca esté el objeto, mayor será su imagen sobre la retina y, por consiguiente, mayor será el tamaño aparente del objeto.
2. Una lupa es una lente simple con distancia focal positiva cuyo valor es menor que la distancia del punto próximo. La amplificación angular de una lupa simple es el cociente entre la distancia del punto próximo y la distancia focal de la lente:

$$M = \frac{x_p}{f}$$



3. Una cámara de fotografiar básica se compone de una lente, un sistema de apertura variable, un obturador, una caja hermética a la luz y una película. Como la distancia focal de la lente es fija, se consigue el enfoque acercando o alejando la lente de la película. El número f de la apertura es el cociente entre la distancia focal y el diámetro de la lente:

$$\text{Número } f = \frac{f}{D}$$

La distancia focal de una lente ordinaria de una cámara de 35 mm es del orden de 50 mm. Una lente de teleobjetivo tiene una mayor distancia focal, lo que permite obtener una imagen mayor sobre la película pero con un campo de visión más estrecho. Una lente gran angular tiene una menor distancia focal, de forma que se obtiene una imagen más pequeña sobre la película pero con un campo de visión mucho mayor.

4. El microscopio compuesto se utiliza para observar objetos muy pequeños a cortas distancias. En su forma más sencilla consta de dos lentes —un objetivo y un ocular. El objeto a examinar se coloca ligeramente al exterior del punto focal del objetivo, que forma así una imagen aumentada del objeto en el punto focal del ocular. Éste actúa como una lupa simple para la observación de la imagen final. El poder amplificador del microscopio es el producto de la amplificación lateral del objetivo por la amplificación angular del ocular:

$$M = m_o M_e = - \frac{L}{f_o} \frac{x_e}{f_e}$$

en donde L es la longitud del tubo, que es la distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular.

5. Se emplea el anteojo o telescopio para observar objetos que están muy lejanos. El objetivo del anteojo o telescopio forma una imagen real que es mucho menor que el objeto pero que está mucho más cercana. Entonces se utiliza el ocular como una lupa simple para ver la imagen. Un telescopio reflector utiliza un espejo como objetivo. El poder amplificador de un telescopio es igual al cociente entre la distancia focal del objetivo y la distancia focal del ocular, con signo negativo:

$$M = - \frac{f_o}{f_e}$$

La característica más importante de un telescopio astronómico es su capacidad de recoger la luz procedente de objetos lejanos, que es proporcional al área del objetivo.

Sugerencias bibliográficas

Everhart, Thomas E., y Thomas L. Hayes: «The Scanning Electron Microscope», *Scientific American*, enero 1972, pág. 54.

En este artículo se describe cómo se utiliza la interacción entre un haz de electrones de alta energía y la materia mediante el microscopio de «barrido» (scanning) electrónico para crear una imagen de aspecto tridimensional.

Koretz, Jane F., y George H. Handelman: «How the Human Eye Focuses», *Scientific American*, julio 1988, pág. 92.

A lo largo de la vida de una persona, aumenta gradualmente la distancia más pequeña a la que puede enfocar el ojo. Este artículo describe mediciones y análisis que sugieren que este hecho se debe a cambios en el cristalino, incluyendo el aumento de su espesor y la disminución del índice de refracción.

Land, Michael F.: «Animal Eyes with Mirror Optics», *Scientific American*, diciembre 1978, pág. 126.

Diversos animales marinos, descritos en este artículo, utilizan la reflexión en lugar de la refracción para formar imágenes de su entorno.

Price, William H.: «The Photographic Lens», *Scientific American*, agosto 1976, pág. 72.

En este artículo se presenta una historia de la forma de diseñar las lentes, incluyendo una descripción de los sistemas modernos de proyecto con ayuda de un ordenador.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Poder discutir cómo funciona el ojo.
2. Poder demostrar mediante un diagrama sencillo por qué un objeto parece mayor cuando se acerca al ojo.
3. Ser capaz de describir cómo funciona una lupa simple y calcular su amplificación angular.
4. Poder explicar cómo funciona una cámara fotográfica.
5. Poder describir con diagramas y ecuaciones cómo funciona un microscopio y un anteojo o telescopio.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Acomodación	Poder amplificador
Punto próximo	Número f
Hipermetropía	Objetivo
Miopía	Ocular
Lupa simple	Longitud del tubo
Amplificación angular	

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La lente del ojo forma una imagen real.
2. Una lupa deberá tener una distancia focal corta.
3. Una lupa forma una imagen virtual.
4. La lente de una cámara fotográfica forma una imagen real.
5. El área de apertura de una cámara es proporcional al número f .
6. La distancia focal de un teleobjetivo es mayor que la de un gran angular.
7. La imagen formada por el objetivo de un microscopio es invertida y mayor que el objeto.
8. La imagen formada por el objetivo de un telescopio es invertida y mayor que el objeto.
9. Un telescopio reflector utiliza un espejo como ocular.

Problemas

Nivel 1

32-1 El ojo

En los problemas siguientes, tomar como distancia entre el sistema córnea-cristalino del ojo y la retina 2,5 cm y suponer que las lentes de las gafas correctoras están en contacto con el ojo, a no ser que se diga lo contrario.

1. Suponer que el ojo estuviese diseñado como una cámara con una lente de distancia focal fija $f = 2,5$ cm que pudiese moverse acercándose o alejándose de la retina. Aproximadamente, ¿cuánto habría que alejar la lente para enfocar la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo sobre la retina?

Indicación: Hallar la distancia de la retina a la imagen situada detrás de ella para un objeto situado a 25 cm.

2. Hallar la variación de la distancia focal del ojo cuando un objeto originalmente a 3 m se acerca a 30 cm del ojo.

3. Una persona hipermetrópe necesita leer la pantalla de un ordenador situada a 45 cm de su ojo. Su punto próximo está a 80 cm. (a) Hallar la distancia focal de las lentes de sus gafas de lectura que producirán una imagen de la pantalla a 80 cm de su ojo. (b) ¿Cuál es la potencia de las lentes?

4. Hallar (a) la distancia focal y (b) la potencia de una lente que producirá una imagen a 80 cm del ojo de un libro que está a 30 cm del mismo.

5. Una persona hipermetrope necesita lentes con una potencia de 1,75 dioptrías para leer confortablemente en un libro que está a 25 cm de su ojo. ¿Cuál es su punto próximo sin las lentes?
6. Una persona miope no puede enfocar claramente objetos que están a una distancia superior a 225 cm de su ojo. ¿Qué potencia deberán tener las lentes necesarias para poder ver objetos distantes claramente?
7. Como el índice de refracción del cristalino no es muy diferente del que posee el material que le rodea, la mayor parte de la refracción tiene lugar en la córnea, en donde n cambia abruptamente desde 1,0 en el aire a 1,4. Suponiendo que la córnea tiene forma esférica homogénea con un índice de refracción de 1,4, calcular su radio si enfoca la luz paralela sobre la retina que está a una distancia de 2,5 cm. ¿Es de esperar que el resultado obtenido sea mayor o menor que el radio real de la córnea?
8. Si dos objetos puntuales próximos entre sí han de verse como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer en la retina sobre dos conos diferentes que no sean adyacentes. Es decir, debe existir un cono inactivado entre ellos. La separación de los conos es del orden de $1 \mu\text{m}$. (a) ¿Cuál es el ángulo menor que pueden subtender los dos puntos? (Ver figura 32-13.) (b) ¿A qué distancia mínima pueden encontrarse entre sí los dos puntos si están a 20 m del ojo?

Figura 32-13 Problema 8. Los dos puntos se observarán como dos puntos separados únicamente si sus imágenes caen sobre dos conos diferentes, y no adyacentes, de la retina.



32-2 La lupa o microscopio simple

9. Una persona con un punto próximo a 30 cm utiliza una lupa de 20 dioptrías de potencia. ¿Cuál es la ampliificación que se obtiene si la imagen final está en el infinito?
10. Una persona con su punto próximo a 25 cm desea obtener una ampliificación de 5 con una lupa. ¿Cuál debería ser su distancia focal?
11. ¿Cuál es el poder ampliificador de una lente de 7 cm de distancia focal cuando se observa la imagen en el infinito por una persona cuyo punto próximo está a 35 cm?
12. Se utiliza como lupa una lente de distancia focal 6 cm con la imagen en el infinito, primero por una persona cuyo punto próximo está a 25 cm, y luego por otra cuyo punto próximo está a 40 cm. (a) ¿Cuál es el poder ampliificador efectivo de la lente para cada una de las personas? (b) Comparar el tamaño de la imagen en la retina cuando cada una de ellas mira al mismo objeto con la lupa.
- 32-3 La cámara fotográfica
13. ¿Cuál es el diámetro de una lente $f/1,4$ si su distancia focal vale 50 mm?
14. Una lente tiene un diámetro útil de 2,5 cm. ¿Cuál es su número f si su distancia focal es 50 mm?
15. Un teleobjetivo tiene una distancia focal de 200 mm. ¿En cuánto deberá trasladarse para cambiar su enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro, a una distancia de 30 m?
16. Una lente gran-angular tiene una distancia focal de 28 mm. ¿En cuánto deberá trasladarse para cambiar su enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro que se encuentra a una distancia de 5 m?
17. Una cámara consigue una exposición adecuada con una apertura de $f/16$ a $1/30$ s. ¿Qué velocidad deberá utilizarse en el obturador con (a) $f/11$, (b) $f/8$, (c) $f/5,6$, (d) $f/4$, y (e) $f/2,8$?
18. Las condiciones de luminosidad de un día determinado con un cierto tipo de película exige una apertura de $f/8$ a $1/250$ s. (a) Si se desea tomar una foto de un colibrí a $1/1000$ s, ¿qué número f deberá utilizarse? (b) Si se fija una apertura de $f/22$ para otra foto, ¿qué velocidad deberá utilizarse?
- 32-4 Microscopio compuesto
19. El objetivo de un microscopio tiene una distancia focal de 0,5 cm. Forma una imagen a 16 cm de su segundo punto focal. ¿Cuál es el poder ampliificador para una persona cuyo punto próximo está a 25 cm si la distancia focal del ocular es 3 cm?
20. Un microscopio tiene un objetivo de 16 mm de distancia focal y ocular que da una ampliificación angular de 5 para una persona cuyo punto próximo mide 25 cm. La longitud del tubo es 18 cm. (a) ¿Cuál es la ampliificación lateral del objetivo? (b) ¿Cuál es el poder ampliificador del microscopio?
21. Un microscopio manual, simétrico y de poca precisión, está compuesto por dos lentes convergentes de 20 dioptrías, sujetas en los extremos de un tubo de 30 cm de longitud. (a) ¿Cuál es la longitud del tubo de este microscopio? (b) ¿Cuál es la ampliificación lateral del objetivo? (c) ¿Cuál es el poder ampliificador del microscopio? (d) ¿A qué distancia del objetivo deberá colocarse el objeto?
22. Repetir el problema 21 para el mismo sistema de dos lentes separadas 40 cm.
- 32-5 Anteojos y telescopios
23. Un anteojo simple tiene un objetivo de 100 cm de distancia focal y un ocular de 5 cm de distancia focal. Se utiliza para mirar a la Luna, que subtende un ángulo de 0,009 rad. (a) ¿Cuál es el diámetro de la imagen formada por el objetivo? (b) ¿Qué ángulo subtende la imagen final en el infinito? (c) ¿Cuál es el poder ampliificador del anteojo?
24. La lente objetivo de un anteojo refractor del Observatorio de Yerkes tiene una distancia focal de 19,5 m. Se utiliza para examinar la Luna, que subtende un ángulo de 0,009 rad aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la imagen de la Luna formado por el objetivo?
25. El telescopio reflector de 200 pulgadas del Monte Palomar tiene un espejo con un diámetro de 200 pulgadas = 5,1 m y una distancia focal de 1,68 m. (a) ¿En qué factor se ha incrementado la capacidad de recibir la luz respecto a la lente de 40 pulgadas (1,02 m) de diámetro de la lente del anteojo del Observatorio de Yerkes? (b) Si la distancia focal del ocular es 1,25 cm, ¿cuál es el poder ampliificador del telescopio?

Nivel II

26. (a) Demostrar que si la imagen final de una lupa está en el punto próximo del ojo en lugar de estar en el infinito, la amplificación angular viene dada por

$$M = \frac{x_p}{f} + 1$$

(b) Hallar la amplificación de una lente de 20 dioptrías para una persona de 30 cm de punto próximo si la imagen final está en dicho punto próximo. Dibujar un diagrama de rayos para este caso.

27. Un botánico examina una hoja utilizando una lente convexa de 12 dioptrías de potencia como lupa. ¿Cuál es la amplificación angular esperada si (a) la imagen final está en el infinito y (b) está a 25 cm?

28. Demostrar que cuando la imagen de una lupa se ve en el punto próximo, la amplificación angular y lateral de la lupa son iguales.

29. Una cámara de 35 mm produce una foto de 24 mm por 36 mm de tamaño. Se utiliza para tomar una fotografía de una persona de 175 cm de altura, cuya imagen llena justo la altura (24 mm) de la película. ¿A qué distancia de la cámara se encontraba la persona si la distancia focal de la lente es de 50 mm?

30. Se utiliza una cámara de 35 mm con objetivos intercambiables para tomar una fotografía de un halcón que tiene una envergadura de 2 m. El halcón está a 30 m de distancia. ¿Cuál deberá ser la distancia focal ideal del objetivo para que la imagen de las alas llene justo la anchura de la película, que es 36 mm?

31. Un anteojo astronómico tiene un poder amplificador de 7. Las dos lentes están separadas 32 cm. Hallar la distancia focal de cada lente.

32. El punto próximo de cierta persona es 80 cm. Se le prescriben gafas para lectura de modo que pueda leer un libro a 25 cm de sus ojos. Las gafas están a 2 cm de los ojos. ¿Qué potencia deberán tener las lentes a utilizar en sus gafas?

33. Una desventaja del anteojo astronómico para su empleo terrestre (por ejemplo, para ver un partido de fútbol) es que la imagen está invertida. Un anteojo de Galileo utiliza una lente convergente como objetivo pero una lente divergente como ocular. La imagen formada por el objetivo está detrás del ocular en su punto focal de modo que la imagen final es virtual, derecha y en el infinito. (a) Demostrar que el poder amplificador es $M = -f_o/f_e$, en donde f_o es la distancia focal del objetivo y f_e es la del ocular (que es negativa). (b) Dibujar un diagrama de rayos para demostrar que la imagen final es verdaderamente virtual, derecha y que está en el infinito.

34. Un anteojo de Galileo (ver problema 33) está diseñado de forma que la imagen final esté en el punto próximo, que está a 25 cm, en lugar de estar en el infinito. La distancia focal del objetivo es 100 cm y la del ocular es -5 cm. (a) Si la distancia

a que se encuentra el objeto es 30 m, ¿dónde está la imagen del objetivo? (b) ¿Cuál es la distancia objeto para el ocular en el que la imagen final está en el punto próximo? (c) ¿A qué distancia están entre sí las lentes? (d) Si la altura del objeto es 1,5 m, ¿cuál es la altura de la imagen final? (e) ¿Cuál es la amplificación angular de la imagen?

35. Un microscopio tiene un objetivo con una potencia de 45 dioptrías y un ocular con una potencia de 80 dioptrías. Las lentes están separadas 28 cm. Suponiendo que la imagen final se forma a 25 cm del ojo, ¿cuál es el poder amplificador?

Nivel III

36. A la edad de 45 años, una persona empezó a utilizar gafas para leer de 2,1 dioptrías de potencia, de modo que pudiese leer un periódico a 25 cm. Después a la edad de 55 años, se dio cuenta de que debía mantener el periódico a una distancia de 40 cm para poder verlo claramente con las gafas. (a) ¿En dónde estaba su punto próximo a los 45 años? (b) ¿En dónde está a los 55? (c) ¿Qué potencia necesitarán tener sus gafas a esta edad, de modo que pueda leer de nuevo a una distancia de 25 cm? (Suponer que las gafas están a 2,2 cm de sus ojos.)

37. Si en un anteojo se mira por el extremo correspondiente al objetivo, se verá un objeto distante de tamaño reducido. Si el objetivo tiene una distancia focal de 2,25 m y un ocular de distancia focal 1,5 cm, ¿en qué factor se reduce el tamaño angular del objeto?

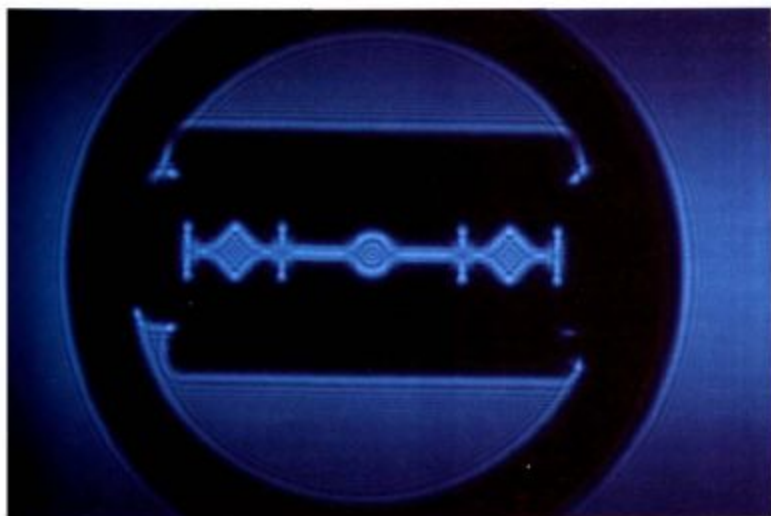
38. Un profesor de física de edad avanzada descubre que puede ver claramente aquellos objetos que están situados entre 0,75 m y 2,5 m, de modo que decide que necesita bifocales. La parte superior de la lente le permitirá ver claramente los objetos situados en el infinito y la parte inferior le permitirá ver nítidamente objetos hasta 25 cm. Suponer que la lente está a 2 cm de su ojo. (a) Calcular la potencia de la lente requerida para la parte superior de sus bifocales. (b) Calcular la potencia de la lente para la parte inferior. (c) ¿Existe un margen de distancias en el que no pueda ver claramente los objetos, mire por donde mire, de sus bifocales? Si es así, ¿cuál es este margen? (d) ¿Existe algún margen de distancias en el que no pueda ver nítidamente objetos, lleve o no puestas sus bifocales? Si es así, ¿cuál es este margen?

39. Un microscopio tiene un poder amplificador de -600 y un ocular con una amplificación angular de 15. La lente objetivo está a 22 cm del ocular. Sin hacer ninguna aproximación, calcular (a) la distancia focal del ocular, (b) la posición de un objeto en donde quedará enfocado por un ojo relajado y (c) la distancia focal de la lente objetivo.

40. Un cazador perdido en las montañas intenta construir un anteojo con dos lentes, una de 2,0 dioptrías de potencia y la otra con 6,5 dioptrías de potencia, y un tubo de cartón. (i) ¿Cuál es el poder amplificador máximo posible? (b) ¿Qué longitud deberá tener el tubo? (c) ¿Qué lente deberá utilizar como ocular? ¿Por qué?

Capítulo 33

Interferencia y difracción



Difracción de la luz sobre una hoja de afeitar.

Los fenómenos de singular importancia que distinguen las ondas de las partículas son la interferencia y la difracción. La interferencia es la combinación por superposición de dos o más ondas que se encuentran en un punto en el espacio. La difracción es la desviación que sufren las ondas alrededor de los bordes y esquinas que se produce cuando una porción de un frente de ondas se ve cortado o interrumpido por una barrera u obstáculo. El esquema de la onda resultante puede calcularse considerando cada punto del frente de onda original como una fuente puntual de acuerdo con el principio de Huygens y calculando el diagrama de interferencia que resulta de todas estas fuentes.

En el capítulo 14 estudiamos la interferencia que sufren dos ondas sonoras procedentes de dos focos puntuales y realizamos una breve discusión cualitativa sobre la difracción del sonido. Como el tratamiento analítico de la interferencia y difracción es el mismo para todas las ondas, sean sonoras, producidas en cuerdas, en el agua u ondas electromagnéticas, resulta conveniente repasar el capítulo 14 antes de iniciar este capítulo.

33-1 Diferencia de fase y coherencia

Cuando se combinan dos ondas armónicas procedentes de dos focos de la misma frecuencia y longitud de onda pero de diferente fase, la onda resultante es una onda armónica cuya amplitud depende de esta diferencia de fase. Si la diferencia

de fase es 0 o un número entero de veces 360° , las ondas están en fase y la interferencia es constructiva. La amplitud resultante es igual a la suma de las amplitudes individuales, y la intensidad (que es proporcional al cuadrado de la amplitud) es máxima. Si la diferencia es igual a 180° (π radianes) o un número entero impar de veces 180° , las ondas están desfasadas y la interferencia es destructiva. En este caso la amplitud resultante es igual a la diferencia entre las amplitudes individuales, y la intensidad es un mínimo. Si las amplitudes son iguales, la intensidad máxima es cuatro veces la de cada uno de los focos y la intensidad mínima es igual a cero.

Una causa común de la existencia de una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia en la longitud de la trayectoria recorrida por las dos ondas. Una diferencia de trayectos de una longitud de onda produce una diferencia de fase de 360° , que es equivalente a decir que no existe ninguna diferencia de fase en absoluto. Una diferencia de trayectos de media longitud de onda produce una diferencia de fase de 180° . En general, una diferencia de trayectos de Δr contribuye a una diferencia de fase δ dada por

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360^\circ \quad 33-1$$

Otra causa de diferencias de fase es el cambio de fase en 180° que a veces sufre una onda cuando se refleja en una superficie límite determinada. Este cambio de fase es análogo a la inversión de un pulso sobre una cuerda cuando se refleja en un punto en donde la densidad aumenta repentinamente, como sucede si una cuerda ligera está unida a otra más pesada. La inversión del pulso reflejado es equivalente a un cambio de fase de 180° en el caso de una onda sinusoidal, que puede considerarse como una serie de pulsos. Cuando la luz que se propaga en aire incide sobre la superficie de un medio en el que la luz se desplaza más lentamente, como un vidrio o el agua, existe un cambio de fase de 180° en la luz reflejada. Cuando la luz se está propagando inicialmente en vidrio o agua, no se produce ningún cambio de fase en la luz reflejada en la superficie vidrio-aire o agua-aire. Este hecho es análogo a la reflexión sin inversión de un pulso que se mueve en una cuerda pesada y llega a un punto en donde ésta se encuentra unida a otra cuerda más ligera.

Como ya mencionamos en el capítulo 14, la interferencia de ondas procedentes de dos focos no se observa a menos que los focos sean coherentes, es decir, la diferencia de fase entre las ondas procedentes de los focos debe ser constante con el tiempo. Como normalmente un haz de luz es el resultado de millones de átomos que radian independientemente, en general dos focos de luz no son coherentes; la diferencia de fase entre las ondas procedentes de estos focos fluctúa al azar muchas veces por segundo. Normalmente en óptica se consigue la coherencia dividiendo el haz de luz procedente de un foco en dos o más haces, que posteriormente se combinan para producir un diagrama de interferencia. Esta división puede ser producida por reflexión en las dos superficies de una película delgada (sección 33-2); reflexión en un espejo de los haces combinados por reflexión procedentes de otros espejos, como ocurre en el interferómetro de Michelson (sección 33-3); o difracción del haz en dos pequeñas rendijas practicadas en una barrera opaca (sección 33-4). También pueden obtenerse focos coherentes utilizando una sola fuente puntual y su imagen en un espejo plano para las dos fuentes, dispositivo que recibe el nombre de *espejo de Lloyd*. Hoy en día los láseres son las fuentes más importantes de luz coherente en el laboratorio. Los láseres tienen la propiedad de que todos los átomos del mismo radian en fase entre sí, lo que produce una fuerte colimación de la luz radiada.

Ejemplo 33-1

- (a) ¿Cuál es la mínima diferencia de trayectos que producirá una diferencia de fase de 180° en el caso de luz de 800 nm de longitud de onda? (b) La diferencia de trayectos que acabamos de obtener, ¿qué diferencia de fase producirá en una luz de 700 nm de longitud de onda?

(a) Según la ecuación 33-1, tenemos

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 360^\circ = 180^\circ$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(800 \text{ nm}) = 400 \text{ nm}$$

(b) Para $\lambda = 700 \text{ nm}$ y $\Delta r = 400 \text{ nm}$, se tendrá

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 360^\circ = \frac{400 \text{ nm}}{700 \text{ nm}} 360^\circ = 206^\circ = 3,59 \text{ rad}$$

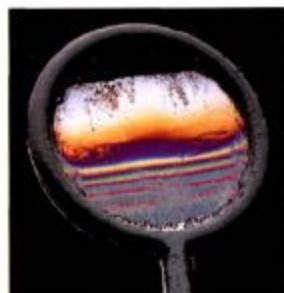
33-2 Interferencia en películas delgadas

Sin ninguna duda todos hemos observado las bandas coloreadas que aparecen en las pompas de jabón o en las películas aceitosas que suelen cubrir el agua que se encuentra en una calle mojada. Estas bandas se deben a la interferencia producida por la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película. Resultan diferentes colores debido a las variaciones que existen en el espesor de la película, que producen interferencia para distintas longitudes de onda en diferentes puntos de la misma.

Consideremos que estamos observando, con ángulos pequeños respecto a la normal, una película delgada de agua (como una burbuja de jabón), según se ve en la figura 33-1. Parte de la luz se refleja en la superficie superior. Puesto que la luz se mueve más lentamente en el agua que en el aire, existe un cambio de fase de 180° en esta reflexión. Parte de la luz entra en la película y es parcialmente reflejada por la superficie inferior agua-aire. No existe cambio de fase en esta reflexión. Si la luz es casi perpendicular a la superficie, tanto el rayo reflejado en la superficie superior como el reflejado en la superficie inferior pueden entrar en el ojo situado en el punto P en la figura. La diferencia de caminos entre estos dos rayos es de $2t$, siendo t el espesor de la película. Esta diferencia de caminos produce una diferencia de fase de $(2t/\lambda') 360^\circ$, en donde λ' es la longitud de onda de la luz en la película que está relacionada con la longitud de onda λ en el aire por $\lambda' = \lambda/n$ (ecuación 30-4), en donde n es el índice de refracción de la película. La diferencia de fase entre estos dos rayos es de 180° más la debida a la diferencia de caminos. Se produce interferencia destructiva cuando la diferencia de caminos $2t$ es cero o un número entero de longitudes de onda λ' (dentro de la película). Se produce una interferencia constructiva si la diferencia de caminos es un número impar de semilongitudes de onda.



Figura 33-1 Los rayos de luz que se reflejan en las superficies superior e inferior de una película delgada son coherentes porque ambos rayos proceden de la misma fuente. Si la luz está incidiendo casi normalmente, los dos rayos reflejados estarán muy cerca el uno del otro y producirán interferencia.



Interferencia de los rayos de luz que proceden de la superficie delantera y trasera de una película delgada jabonosa. En la parte superior, donde la película es muy delgada, los rayos procedentes de la superficie delantera de la película (que sufren un cambio de fase de 180°) y los rayos procedentes de la superficie trasera (que no cambian de fase) interfieren destructivamente y la película se ve oscura. En otras partes de la película, la interferencia es destructiva o constructiva dependiendo de la longitud de onda y del espesor de la película.

Podemos expresar estas condiciones matemáticamente. Cuando existe un cambio de fase de 180° debido a la reflexión, las condiciones para la interferencia son

$$\frac{2t}{\lambda'} = m \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \text{ (destructiva)} \quad 33-2a$$

$$\frac{2t}{\lambda'} = m + \frac{1}{2} \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \text{ (constructiva)} \quad 33-2b$$

Condiciones para la interferencia con un cambio de fase de 180°



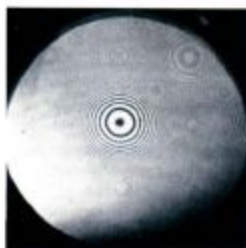
Figura 33-2 Interferencia de la luz reflejada en una película delgada de agua descansando sobre una superficie de vidrio. En este caso ambos rayos sufren un cambio de fase de 180° en la reflexión.

Condiciones para la interferencia con dos cambios de fase de 180°

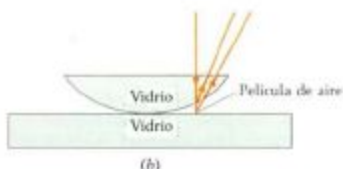
$$\frac{2t}{\lambda'} = m \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \text{ (constructiva)} \quad 33-3a$$

$$\frac{2t}{\lambda'} = m + \frac{1}{2} \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \text{ (destruktiva)} \quad 33-3b$$

Figura 33-3 (a) Anillos de Newton observados con luz reflejada en una película delgada de aire entre un vidrio plano y una superficie de vidrio convexa. En el centro el espesor de la película de aire es despreciable y la interferencia es destructiva debido al cambio de fase de uno de los rayos. (b) Superficies de vidrio para la observación de los anillos de Newton que se ven en (a). En este caso, la película delgada de aire entre ambas superficies de vidrio.



(a)



(b)

Cuando se observa con luz monocromática una película delgada de espesor variable, utilizando, por ejemplo, la luz amarilla de una lámpara de sodio, se ven bandas o líneas alternativamente brillantes y oscuras, denominadas **franjas**. La distancia entre una franja brillante y otra oscura inmediata, es la distancia en que la película cambia de espesor de forma tal que la diferencia de trayectos de la luz $2t$ es $\lambda/2$. La figura 33-3a ilustra el diagrama de interferencias observado cuando se refleja la luz en una película de aire encerrada entre una superficie de vidrio esférica y una superficie de vidrio plana en contacto. Estas franjas de interferencias circulares se conocen como **anillos de Newton**. En la figura 33-3b se muestran los típicos rayos reflejados en la superficie superior e inferior de la película de aire. Cerca del punto de contacto de las superficies, en donde la diferencia de caminos entre el rayo reflejado en la superficie superior vidrio-aire y en la superficie inferior aire-vidrio es esencialmente cero, o por lo menos muy pequeña comparada con la longitud de onda de la luz, la interferencia es perfectamente destructiva debido al desplazamiento de fase de 180° del rayo reflejado en la superficie inferior aire-vidrio. Por consiguiente, esta región central es oscura. La primera franja brillante se presenta para un radio tal que la diferencia de caminos es $\lambda/2$ que contribuye a una diferencia de fase de 180° , la cual se suma a la causada por el desplazamiento de fase en la reflexión y produce una diferencia de fase total de 360° , o cero. La segunda región oscura se presenta en un radio para el que la diferencia de caminos es λ , y así sucesivamente.

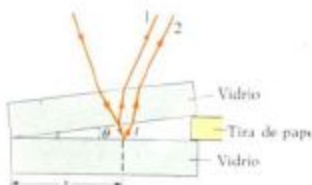


Figura 33-4 Luz incidiendo normalmente sobre una película de aire en forma de cuña situada entre dos láminas de vidrio. La diferencia de trayectoria o caminos $2t$ es proporcional a x . Cuando se mira desde arriba se observan alternativamente bandas brillantes y oscuras.

Ejemplo 33-2

Se construye una película de aire en forma de cuña situando un pequeño trozo de papel entre los bordes de dos piezas planas de vidrio como muestra la figura 33-4. Se hace incidir luz de 500 nm de longitud de onda normalmente a las superficies de vidrio, y se observan franjas de interferencia por reflexión. ¿Si el ángulo θ que forman las superficies planas de vidrio es de $3 \times 10^{-4} \text{ rad}$, cuántas franjas de interferencia se observan por unidad de longitud?

Debido al cambio de fase de 180° experimentado por el rayo reflejado en la lámina de vidrio inferior la primera franja próxima al punto de contacto (en donde la diferencia de trayectorias es igual a cero) será oscura. Sea x la distancia horizontal a la m -ésima franja oscura cuando la separación entre las placas es t como se muestra en la figura. El ángulo θ es muy pequeño, y viene dado aproximadamente por

$$\theta = \frac{t}{x}$$

Utilizando la ecuación 33-2a para m , tenemos

$$m = \frac{2r}{\lambda} = \frac{2t}{\lambda}$$

ya que la película está formada por aire. Sustituyendo $t = x\theta$ obtenemos

$$m = \frac{2x\theta}{\lambda}$$

o

$$\frac{m}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2(3 \times 10^{-4})}{5 \times 10^{-5} \text{ cm}} = 12 \text{ cm}^{-1}$$

en donde hemos utilizado $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Por tanto, se observan 12 franjas oscuras por centímetro. En la práctica, el número de franjas por centímetro, que resulta fácil de contar, se puede utilizar para determinar el ángulo.

Obsérvese que si se aumenta el ángulo de la cuña, las franjas resultan cada vez más juntas. La distancia a lo largo del vidrio entre franjas adyacentes oscuras (o adyacentes brillantes) es aquella distancia que resulta de una diferencia de trayectos adicional igual a la longitud de onda de la luz en la película. Si se aumenta el ángulo de la cuña, esta distancia disminuye.

Ejercicio

¿Cuántas franjas por centímetro se observan en el ejemplo 33-2 si se utiliza luz de 650 nm de longitud de onda? (Respuesta: $9,2 \text{ cm}^{-1}$)

En la figura 33-5a se muestran las franjas de interferencia producidas por una película de aire en forma de cuña que se encuentra entre dos láminas planas de vidrio, tal y como se describe en el ejemplo 33-2. El hecho de que las franjas producidas sean tan rectas nos da una idea de lo planas que son las láminas de vidrio. Estas láminas reciben el nombre de **ópticamente planas**. Una película similar en forma de cuña pero formada entre dos láminas de vidrio ordinario producen un diagrama de franjas tan irregular como el que se muestra en la figura 33-5b, lo que indica que estas láminas no son ópticamente planas.

Figura 33-5 (a) Franjas en línea recta producidas en una película de aire en forma de cuña como la de la figura 33-4. El hecho de que éstas sean rectas nos da una idea de lo planas que son las láminas de vidrio. (b) Franjas procedentes de una película de aire en forma de cuña contenida entre dos placas de vidrio que no son ópticamente planas.



(a)

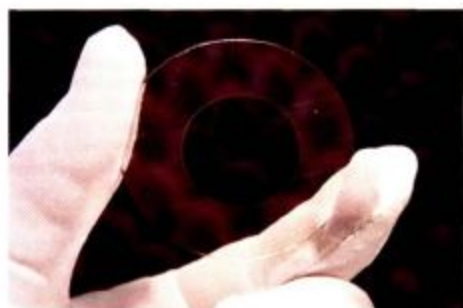


(b)



(a)

(a) Una lente de pequeño angular (izquierda) y otra gran angular (derecha) antes de montarse en las cámaras del Voyager 2. Cada lente tiene dos tipos de recubrimientos de película delgada: un recubrimiento de baja emitancia térmica que refleja las longitudes de onda térmicas para evitar las pérdidas de calor y mantener calientes los elementos del telescopio, y un recubrimiento antirreflejante para longitudes de onda ópticas. (b) Puede verse aquí sobre la región central de un disco transparente de policarbonato la película antirreflejante utilizada en las lentes de (a).



(b)

Se construye una lente no reflejante cubriéndola con una delgada película de un material que tiene un índice de refracción de 1,22 aproximadamente, que es un valor comprendido entre el del vidrio y el del aire, de modo que las intensidades de la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película sean aproximadamente iguales. Como ambos rayos sufren un cambio de fase de 180° , no existe diferencia de fase entre ellos debida a la reflexión. El espesor de la película se escoge de modo que sea $\lambda'/4$ en donde $\lambda' = \lambda/n$ y λ es un valor en la mitad del espectro visible, de modo que se consigue un cambio de fase de 180° debido a la diferencia de trayectos de $\lambda'/2$. Así se reduce al mínimo la reflexión en la superficie recubierta de esta manera.

Cuestiones

1. ¿Por qué debe ser delgada una película que se utiliza para observar colores de interferencia?
2. Si el ángulo de la película de aire en forma de cuña, como el del ejemplo 33-2, es demasiado grande no se observan franjas. ¿Por qué?
3. La separación entre los anillos de Newton disminuye rápidamente cuando el diámetro de los anillos aumenta. Explicar cualitativamente por qué ocurre esto.

33-3 El interferómetro de Michelson

Un **interferómetro** es un dispositivo que utiliza franjas de interferencia para llevar a cabo medidas precisas de distancias. En la figura 33-6 se muestra un diagrama esquemático de un interferómetro de Michelson. La luz procedente de una fuente no puntual incide sobre una placa A , parcialmente plateada de forma que divide el haz reflejando una parte y transmitiendo otra. El haz reflejado viaja hasta el espejo M_2 y es de nuevo reflejado hacia el ojo situado en O . El haz transmitido viaja a través de una placa compensadora B , que tiene el mismo espesor que la placa A , llega al espejo M_1 y se refleja de nuevo hacia la placa A y luego al ojo en O . El objeto de la placa compensadora B es conseguir que ambos haces atraviesen el mismo espesor de vidrio. El espejo M_1 es fijo, pero el espejo M_2 se puede desplazar hacia delante y atrás mediante un sistema de ajustes con tornillos muy fino y exactamente calibrado. Los dos haces se combinan en O y forman un diagrama de interferencia. Este diagrama se comprende más fácilmente considerando el espejo M_2 y la imagen del espejo M_1 producida por el espejo del divisor del haz A . Esta imagen la designaremos por M_1' en el esquema. Si los espejos M_1 y M_2 están exactamente perpendiculares entre sí y equidistantes del divisor del haz, la imagen M_1' coincidirá con M_2 . Si no es así, M_1' estará ligeramente desplazada y formará un pequeño ángulo con respecto a M_2 , como se ve en el esquema. El diagrama de interferencia en O será entonces el de una película delgada en forma de cuña de aire entre M_1' y M_2 semejante al estudia-

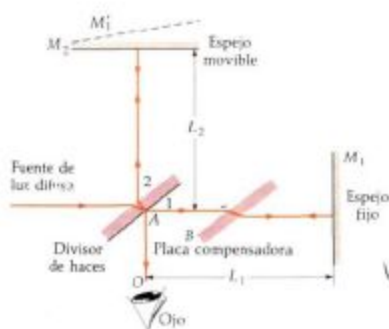


Figura 33-6 Interferómetro de Michelson. La línea de puntos M_1' es la imagen del espejo M_1 , es el espejo A . La interferencia de franjas observada es la de una pequeña película de aire en forma de cuña situada entre los focos M_1' y M_2' . Mientras se desplaza M_2 , las franjas se desplazan a lo largo del campo de visión.

do en el ejemplo 33-2. Si ahora se mueve el espejo M_2 , se desplazará el diagrama de franjas. Si, por ejemplo, se mueve el espejo M_2 hacia el divisor del haz en una distancia igual a $\frac{1}{2}\lambda$, el espesor de la cuña aumentará en $\frac{1}{2}\lambda$ en cada punto. Esto introducirá una diferencia de trayectos adicional de $\frac{1}{2}\lambda$ en todo punto de la cuña (porque la luz atraviesa dos veces la cuña). El diagrama de interferencia se desplazará en media franja; es decir, una franja que antes era oscura ahora se hará brillante, y así sucesivamente. Si se conoce la distancia que se ha movido el espejo M_2 , puede determinarse la longitud de onda de la luz. Michelson utilizó este tipo de interferómetro para medir la longitud de onda de una raya espectral de la luz emitida por el kriptón 86 en función del metro patrón. Esta medición fue entonces utilizada para volver a definir el metro patrón en función de esta longitud de onda. (En la actualidad se ha cambiado la definición del metro patrón o estándar. Ahora se define en función de la velocidad de la luz en el vacío.)

Otra aplicación del interferómetro de Michelson es la medición del índice de refracción del aire (o de cualquier otro gas). Uno de los haces procedentes de la placa A se hace pasar a través de un recipiente en el que se puede hacer el vacío. La longitud de onda de la luz en el aire λ' está relacionada con la que posee en el vacío por $\lambda' = \lambda/n$, en donde n es el índice de refracción del aire (alrededor de 1,0003). Cuando se hace el vacío en el recipiente mencionado, la longitud de onda de la luz que pasa a su través aumenta de modo que existen menos ondas en la longitud del recipiente. Esto origina un desplazamiento en el diagrama de franjas. Midiendo dicho desplazamiento puede determinarse el índice de refracción (ver problema 10).

Michelson utilizó también su interferómetro en un famoso experimento en colaboración con Edward W. Morley en 1887, mediante el cual intentaban medir la diferencia de la velocidad de la luz relativa a la Tierra en la dirección del movimiento de la Tierra y en la dirección perpendicular a ésta. Este experimento se describirá con cierto detalle en el capítulo siguiente.

Ejemplo 33-3

Se inserta en uno de los brazos o ramas de un interferómetro de Michelson una película de espesor $12\ \mu\text{m}$ e índice de refracción 1,33. La luz empleada tiene una longitud de onda de $589\ \text{nm}$ en aire. ¿En cuántas franjas se desplazará el diagrama?

El número de ondas en la película delgada N_i es igual al espesor de la misma $2t$ dividido por la longitud de onda $\lambda' = \lambda/n$:

$$N_i = \frac{2t}{\lambda'} = \frac{2nt}{\lambda} = \frac{2(1,33)(12 \times 10^{-6}\ \text{m})}{589 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 54,2\ \text{ondas}$$

El número de ondas que había originalmente en este espacio cuando estaba ocupado por aire y no por la película es

$$N_a = \frac{2t}{\lambda} = \frac{2(12 \times 10^{-6}\ \text{m})}{589 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 40,8\ \text{ondas}$$

Existen, pues, $54,2 - 40,8 = 13,4$ ondas más en una de las ramas del interferómetro, de modo que el diagrama de interferencia se desplazará en 13,4 franjas.



Figura 33-7 Ondas de agua planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura. Las ondas a la derecha de la barrera son ondas circulares concéntricas con la abertura como si allí existiese una fuente puntual.

33-4 Diagrama de interferencia de dos rendijas

Los diagramas de interferencia de la luz procedente de dos o más focos sólo pueden observarse si los focos son coherentes, es decir, únicamente si están en fase o tienen una diferencia de fase que es constante en el tiempo. Ya hemos mencionado que la aleatoriedad de las emisiones de luz por los átomos hace que dos fuentes de luz diferentes sean en general incoherentes. Pueden observarse las interferencias en películas delgadas analizadas anteriormente porque los dos haces procedentes de la misma fuente luminosa han sido separados por reflexión.

En el famoso experimento ideado por Thomas Young en 1801 en el que demostró la naturaleza ondulatoria de la luz, se producían dos fuentes luminosas coherentes iluminando dos rendijas paralelas con una sola fuente. Suponemos aquí que ambas rendijas son muy estrechas. (Estudiaremos el caso general en la sección 33-8.) Vimos en el capítulo 14 que cuando una onda se encuentra con una barrera que posee una abertura muy pequeña, ésta actúa como fuente puntual de ondas (figura 33-7). En el experimento de Young cada rendija actúa como una fuente lineal, que es equivalente a una fuente puntual en dos dimensiones. El diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla bastante alejada de las rendijas, que están separadas entre sí en una distancia d . A distancias muy grandes de las rendijas, las líneas que van desde las mismas a un cierto punto P sobre la pantalla son aproximadamente paralelas y la diferencia de trayectos es aproximadamente $d \sin \theta$, como se indica en la figura 33-8c. Así pues, tenemos máximos de interferencia en unos ángulos dados por

Máximos de interferencia de dos rendijas

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m=0, 1, 2, \dots \quad 33-4$$

Los mínimos de interferencia se presentan en

Mínimos de interferencia de dos rendijas

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m=0, 1, 2, \dots \quad 33-5$$

La diferencia de fase δ en el punto P es $2\pi/\lambda$ veces la diferencia de trayectos $d \sin \theta$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad 33-6$$

La distancia y_m , medida a lo largo de la pantalla desde el punto central hasta la m -ésima franja brillante (ver figura 33-8b) está relacionada con el ángulo θ por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_m}{L}$$

donde L es la distancia desde las rendijas a la pantalla. Para un θ pequeño, tenemos

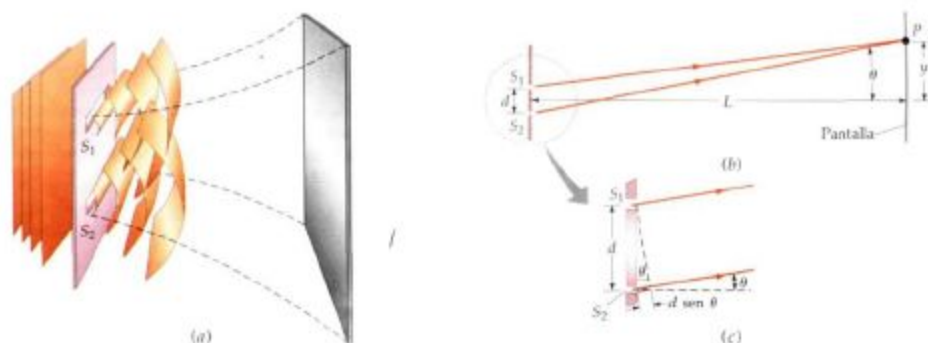
$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{y_m}{L}$$

de modo que $d \sin \theta$ vale aproximadamente

$$d \sin \theta \approx d \frac{y_m}{L}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 33-4, se obtiene

$$d \frac{y_m}{L} = m\lambda$$



Por tanto, en el caso de ángulos pequeños (que es casi siempre el caso), la distancia medida a lo largo de la pantalla hasta la franja m -ésima viene dada por

$$y_m = m \frac{\lambda L}{d} \quad 33-7$$

Obsérvese que según este resultado las franjas están igualmente separadas entre sí en la pantalla, con la distancia entre dos franjas sucesivas brillantes dada por

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}$$

Para calcular la intensidad en un punto cualquiera P de la pantalla, es necesario sumar dos funciones de onda armónicas que difieran en fase, como hicimos en el capítulo 14 cuando discutimos la interferencia de las ondas sonoras. Las funciones de onda para las ondas electromagnéticas son los vectores del campo eléctrico. Sea E_1 el campo eléctrico en un punto P de la pantalla generado por las ondas procedentes de la rendija 1, y sea E_2 el campo eléctrico generado por las ondas procedentes de la rendija 2. Como los ángulos que nos interesan son muy pequeños, podemos suponer que los campos son paralelos y considerar sólo sus magnitudes. Ambos campos eléctricos oscilan con la misma frecuencia (ya que ambos proceden de una única fuente que ilumina a ambas rendijas) y poseen la misma amplitud. (La diferencia de caminos es sólo del orden de unas pocas longitudes de onda de la luz.) La diferencia de fase δ viene dada por la ecuación 33-6. Si representamos estas funciones de onda por

$$E_1 = A_0 \sin \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = A_0 \sin (\omega t + \delta)$$

la función de onda resultante es

$$E = E_1 + E_2 = A_0 \sin \omega t + A_0 \sin (\omega t + \delta) \quad 33-8$$

Hemos utilizado la expresión trigonométrica para la suma de dos funciones sinusoidales:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad 33-9$$

La ecuación 33-8 resulta

$$E = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \sin (\omega t + \frac{1}{2}\delta) \quad 33-10$$

La amplitud de la onda resultante es $2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta$. Posee su valor máximo igual a $2A_0$ cuando las ondas se encuentran en fase ($\delta = 0$, o un número entero de veces 2π), y es igual a cero cuando están desfasadas 180° ($\delta = \pi$ o un número

Figura 33-8 (a) Dos rendijas actúan como fuentes coherentes de luz para la observación de la interferencia en el experimento de Young. Las ondas cilíndricas procedentes de las rendijas se solapan y producen un diagrama de interferencia sobre una pantalla lejana. (b) Construcción geométrica para calcular la relación entre la distancia y medida sobre la pantalla con L y θ . (c) Debido a que la pantalla está muy lejos en comparación con la separación entre rendijas, los rayos procedentes de éstas que van a un punto de la pantalla son casi paralelos y la diferencia de trayectos entre ambos es $d \sin \theta$.

impar de π). Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en el punto P es

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} \delta \quad 33-11$$

en donde I_0 es la intensidad de la luz que se obtiene en la pantalla para cualquiera de las rendijas por separado. El ángulo de fase δ está relacionado con la posición sobre la pantalla por la ecuación 33-6. En el caso de ángulos pequeños, $d \sin \theta \approx dy_m/L$, el ángulo de fase se relaciona con y_m por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y_m d}{L} \quad 33-12$$

La figura 33-9a muestra el diagrama de intensidad como se ve en la pantalla. Se indica un gráfico de la intensidad en función del $\sin \theta$ en la figura 33-9b. Cuando θ es pequeño, es equivalente a una representación de la intensidad en función de y puesto que $y \approx L \sin \theta$. La intensidad I_0 es la que produce cada rendija por separado. La línea a trazos muestra la intensidad media, $2I_0$, que es el resultado de promediar sobre muchos máximos y mínimos de interferencia. Sería la intensidad que se obtendría de las dos fuentes si actuaran independientemente sin interferencia. En otras palabras, es la intensidad que se observaría si las fuentes fuesen incoherentes, porque entonces existiría una diferencia de fase adicional entre ellas que fluctuaría al azar de modo que sólo podría observarse la intensidad media.

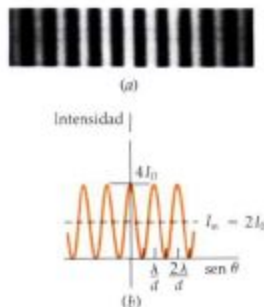


Figura 33-9 (a) Diagrama de interferencia observado sobre la pantalla alejada de las dos rendijas de la figura 33-8. (b) Representación de la intensidad en función del $\sin \theta$. La intensidad máxima es $4I_0$, siendo I_0 la intensidad debida a cada rendija por separado. La intensidad media (línea a trazos) es $2I_0$. Para θ pequeño, esta curva es también una representación de la intensidad en función de la distancia y medida sobre la pantalla, porque $y = L \tan \theta \approx L \sin \theta$.

Ejemplo 33-4

Dos rendijas estrechas distantes entre sí 1,5 mm se iluminan con luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. Las franjas de interferencia se observan sobre una pantalla situada a 3 m de distancia. Hallar la separación de las franjas sobre la pantalla.

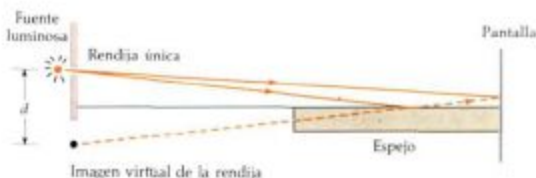
La distancia y_m , medida a lo largo de la pantalla hasta la franja m -ésima viene dada por la ecuación 33-7, con $L = 3$ m, $d = 1,5$ mm, y $\lambda = 589$ nm. La separación entre franjas es igual a esta distancia dividida por el número de franjas, o sea y_m/m . Despejando y_m/m en la ecuación 33-7 y sustituyendo en la expresión hallada los valores dados, se tiene

$$\frac{y_m}{m} = \lambda \frac{L}{d} = \frac{(589 \times 10^{-9} \text{ m})(3 \text{ m})}{0,0015 \text{ m}} = 1,18 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,18 \text{ mm}$$

Por consiguiente, las franjas están separadas entre sí 1,18 mm.

Mediante el dispositivo que se muestra en la figura 33-10 que se conoce con el nombre de **espejo de Lloyd** se puede seguir otro método para producir un diagrama de interferencia de dos rendijas. Se sitúa una sola rendija a una distancia igual a $\frac{1}{2}d$ por encima del plano de un espejo. La luz procedente del foco que incide directamente sobre la pantalla interfiere con la reflejada por el espejo. Se puede considerar que la luz reflejada procede de la imagen virtual de la rendija formada por el espejo. Debido al cambio de fase de 180° en la reflexión en el espejo, el diagrama de interferencia es el de dos fuentes rectilíneas coherentes que difieren en fase en 180° . El diagrama es el mismo que el de la figura 33-9 para dos rendijas exceptuando el hecho de que los máximos y los mínimos están intercambiados. La franja central situada justo encima del espejo en un punto equidis-

Figura 33-10 Espejo de Lloyd para producir un diagrama de interferencia de doble rendija. Las dos fuentes (fuente luminosa y su imagen) son coherentes y están desfasadas 180° . La banda central de interferencia en el punto equidistante de las fuentes es oscura.



tante de los focos es oscura. Se produce interferencia constructiva en los puntos para los cuales la diferencia de caminos es de media longitud de onda o cualquier número impar de medias longitudes de onda. En estos puntos, la diferencia de fase de 180° debida a la diferencia de caminos se combina con la diferencia de fase de 180° de las fuentes para producir una interferencia constructiva.

Ejercicio

Un foco puntual de luz ($\lambda = 589 \text{ nm}$) se coloca encima de un espejo a $0,4 \text{ mm}$ de él. Se observan franjas de interferencia en una pantalla situada a 6 m . Hallar la separación de las franjas en la pantalla. (Respuesta: $4,42 \text{ mm}$)

Cuestión

4. Cuando se produce interferencia destructiva, ¿qué le ocurre a la energía de las ondas luminosas?

33-5 Suma de ondas armónicas utilizando fasores

Para calcular el diagrama de interferencia producido por tres, cuatro, o más focos coherentes y el diagrama de difracción de una sola rendija, es necesario combinar varias ondas armónicas de la misma frecuencia pero que difieren en fase. Una interpretación geométrica de las funciones de onda armónicas conduce a un método general de suma de ondas armónicas de la misma frecuencia mediante una construcción geométrica. Este método nos permitirá hallar la suma de dos ondas armónicas geoméricamente sin tener que recordar la identidad trigonométrica de la ecuación 33-9. Resulta ser útil incluso cuando sean diferentes las amplitudes de ondas. El método se basa en el hecho de que el componente y (o el x) de la resultante de dos vectores es igual a la suma de los componentes y (o el x) de los vectores.

Sean

$$E_1 = A_1 \sin(\omega t) \quad \text{y} \quad E_2 = A_2 \sin(\omega t + \delta)$$

las funciones de onda de las dos ondas a considerar. (Hemos escogido $t = 0$ cuando $E_1 = 0$.) Podemos simplificar nuestra notación escribiendo α para el valor ωt . Nuestro problema consiste entonces en hallar la suma

$$E_1 + E_2 = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta)$$

Consideremos un vector en el plano xy de módulo A_1 que forma un ángulo α con el eje x (figura 33-11). El componente y de este vector es $A_1 \sin \alpha$, que es la función de onda E_1 . Al variar t , el vector, llamado *fasor* gira en el plano xy con una frecuencia angular ω . Hemos encontrado fasores en nuestro estudio de circuitos de ca en la sección 28-3. Análogamente, la función de onda $E_2 = A_2 \sin(\alpha + \delta)$ es el componente y de un fasor de módulo A_2 que forma el ángulo $\alpha + \delta$ con el eje x . Mediante las leyes de la suma vectorial, la suma de estos componentes es igual al componente y del vector resultante A' , como puede verse en la figura 33-11. El componente y del vector resultante, $A' \sin(\alpha + \delta)$ es una función de onda armónica que corresponde a la suma de las dos funciones de ondas originales:

$$A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta) = A' \sin(\alpha + \delta) \quad 33-13$$

en donde A' (la amplitud de la onda resultante) y δ' (la fase de la onda resultante respecto a la primera onda) se pueden hallar sumando los fasores que representan las ondas, como se ve en la figura 33-11. Al variar el tiempo, α varía. Los fasores que representan las dos funciones de onda y el fasor resultante que representa la función de onda resultante giran en el espacio, pero sus posiciones relativas no varían debido a que todos giran con la misma velocidad angular ω .

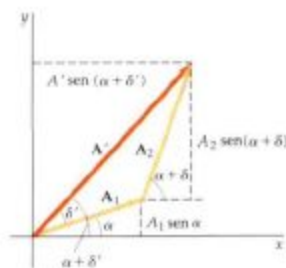


Figura 33-11 La función de onda $A_1 \sin \alpha$ es el componente y del vector A_1 , que forma un ángulo α con el eje x . La función de onda $A_2 \sin(\alpha + \delta)$ es el componente y del vector A_2 , que forma un ángulo $\alpha + \delta$ con el eje x . La suma de estas funciones de onda es $A' \sin(\alpha + \delta)$, que es el componente y del vector resultante $A' = A_1 + A_2$.

Ejemplo 33-5

Utilice el método de suma de fasores para deducir la ecuación 33-10 correspondiente a la superposición de dos ondas de la misma amplitud.

La figura 33-12 muestra los fasores que representan dos ondas de amplitud A_0 y la onda resultante de amplitud A' . Estos tres fasores forman un triángulo isósceles en el cual los dos ángulos iguales son δ' . Puesto que la suma de estos ángulos es igual al ángulo exterior δ , tenemos que

$$\delta' = \frac{1}{2}\delta$$

Puede hallarse la amplitud A' mediante el triángulo rectángulo indicado en la figura 33-12b que se forma bisecando el fasor resultante. A partir de este triángulo tenemos

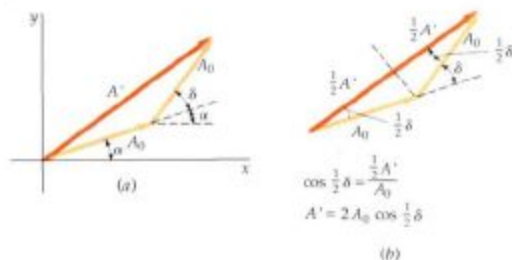
$$\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{\frac{1}{2}A'}{A_0}$$

Por lo tanto, la amplitud viene dada por $A' = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta$, y la onda resultante es

$$A' \sin(\alpha + \delta') = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \sin(\alpha + \frac{1}{2}\delta)$$

de acuerdo con la ecuación 33-10, ya que $\alpha = \omega t$

Figura 33-12 Suma de fasores de dos ondas que tienen amplitudes iguales A_0 y una diferencia de fase de δ . (a) Los fasores en un instante de tiempo concreto en el que $\alpha = \omega t$. (b) Construcción geométrica para hallar la amplitud A' de la onda resultante.



Ejemplo 33-6

Calcular la resultante de las ondas

$$E_1 = 4 \sin(\omega t) \quad \text{y} \quad E_2 = 3 \sin(\omega t + 90^\circ)$$

La figura 33-13 muestra el diagrama de fasores para esta suma. Los fasores forman un ángulo de 90° entre sí. La magnitud de la resultante de estos dos fasores es 5 y forma un ángulo de 37° con el primer fasor, según se indica en la figura. La suma de estas dos ondas es

$$E_1 + E_2 = 5 \sin(\omega t + 37^\circ)$$

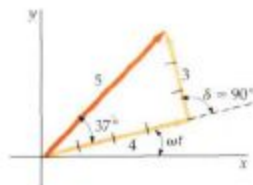


Figura 33-13 Diagrama de fasores para la suma de las ondas del ejemplo 33-6.

33-6 Diagrama de interferencia de tres o más focos igualmente separados

Si tenemos tres o más focos igualmente separados y en fase entre sí, el esquema de intensidades sobre una pantalla alejada es semejante al producido por dos focos, pero existen algunas diferencias importantes. La posición en la pantalla de los máximos es la misma sin importar cuántas fuentes o focos existen, pero estos máximos tienen intensidades mucho mayores y son mucho más nítidos en el caso de que haya muchas fuentes. Podemos calcular el esquema de intensidades correspondiente a las interferencias entre tres o más focos igualmente espaciados utilizando el método de los fasores para sumar ondas armónicas que vimos en la sección anterior. Estaremos más interesados en los puntos donde la interferencia es perfectamente constructiva o perfectamente destructiva, es decir, en los máximos y mínimos de interferencia.

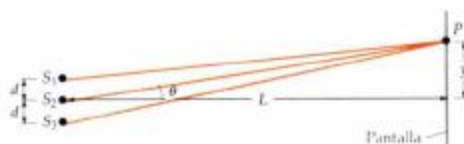


Figura 33-14 Construcción geométrica para calcular el diagrama de intensidad obtenido lejos de tres fuentes igualmente separadas que están en fase.

En primer lugar consideraremos el caso de tres fuentes, como se ve en la figura 33-14. La geometría es la misma que en el caso de las dos fuentes. A una distancia grande de las fuentes los rayos procedentes de ellas y que llegan a un punto P de la pantalla son aproximadamente paralelos. La diferencia de caminos entre la primera y la segunda fuente es entonces $d \sin \theta$, como antes, y entre la primera y tercera fuente la diferencia de caminos es de $2d \sin \theta$. La onda en el punto P es la suma de las tres ondas. Sea $\alpha = \omega t$ la fase de la primera onda en el punto P . Así pues, tenemos el problema de sumar tres ondas de la forma

$$\begin{aligned} E_1 &= A_0 \sin \alpha \\ E_2 &= A_0 \sin (\alpha + \delta) \\ E_3 &= A_0 \sin (\alpha + 2\delta) \end{aligned} \quad 33-14$$

en donde

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{L} \quad 33-15$$

como en el problema de las dos rendijas.

Es más sencillo analizar el diagrama resultante en función del ángulo de fase δ entre la primera y la segunda fuente o entre la segunda y tercera fuente en lugar de hacerlo directamente en función del ángulo espacial θ . Si conocemos la amplitud resultante debida a las tres ondas en un punto determinado P correspondiente a un ángulo de fase particular δ , podemos relacionar este ángulo de fase con el ángulo θ mediante la ecuación 33-15.

En el punto del máximo central $\theta = 0$, el ángulo de fase δ es cero; es decir todas las ondas están en fase. La amplitud de la onda resultante es tres veces la de cada onda individual. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en este máximo central es 9 veces la correspondiente a cada fuente actuando separadamente. Cuando el ángulo θ aumenta desde $\theta = 0$, el ángulo de fase δ aumenta y disminuye la intensidad. Por tanto, la posición $\theta = 0$ es una posición de intensidad máxima.

La figura 33-15 muestra la suma de fasores de tres ondas correspondiente a un ángulo de fase δ de aproximadamente $30^\circ = \pi/6$ rad. (Esto corresponde a un punto P situado en la pantalla para el cual θ viene dado por $\sin \theta = \lambda\delta/2\pi d = \lambda/12d$.) La amplitud resultante es considerablemente menor que tres veces la

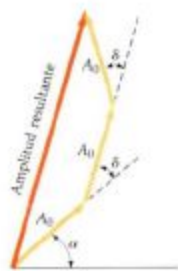


Figura 33-15 Diagrama de fasores para determinar la amplitud resultante debida a tres ondas, cada una de ellas de amplitud A_0 , que tienen diferencias de fase de δ y 2δ debidas a diferencias de caminos de $d \sin \theta$ y $2d \sin \theta$. En ángulo $\alpha = \omega t$ varía con el tiempo pero no influye en el cálculo de la amplitud resultante.

de cada fuente. Cuando aumenta el ángulo de fase δ , la amplitud resultante disminuye hasta que la amplitud resulta ser nula para $\delta = 120^\circ$. En el caso de esta diferencia de fases, los tres fasores forman un triángulo equilátero (figura 33-16). El primer mínimo de interferencia para tres focos se presenta para un ángulo de fase menor (y, por tanto, para un ángulo espacial θ menor) que en el caso de sólo dos focos (en este caso el primer mínimo se presenta a $\delta = 180^\circ$). Cuando δ aumenta a partir de 120° , crece la amplitud resultante, llegándose a un **máximo secundario** cerca de $\delta = 180^\circ$. En el ángulo de fase $\delta = 180^\circ$, la amplitud es la misma que se tendría para una sola fuente puesto que las ondas de las dos primeras fuentes se cancelan entre sí, quedando sólo la tercera. La intensidad de este máximo secundario es un noveno del máximo en $\theta = 0$. Cuando δ aumenta más allá de 180° , la amplitud disminuye nuevamente y es nula para $\delta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. Para δ mayor que 240° , la amplitud crece y es de nuevo igual a tres veces la de cada foco cuando $\delta = 360^\circ$. Este ángulo de fase corresponde a una diferencia de caminos de 1 longitud de onda para las ondas de las dos primeras fuentes y de 2 longitudes de onda para las ondas de la primera y tercera fuente. Por tanto, las tres ondas están en fase en este punto. Los máximos más grandes, denominados **máximos principales**, están en las mismas posiciones que cuando sólo existen dos fuentes, y corresponden a los puntos en que los ángulos θ vienen dados por

Máximos principales
de interferencia

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

33-16

Estos máximos son más intensos y más estrechos que los que aparecen con sólo dos fuentes. Se presentan en los puntos en que la diferencia de caminos entre focos adyacentes es cero o un número entero de longitudes de onda.

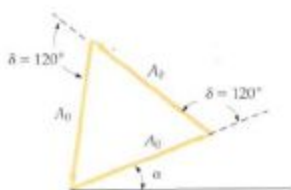


Figura 33-16 La amplitud resultante correspondiente a las ondas procedentes de tres focos es cero cuando δ es 120° . Este mínimo de interferencias se presenta para un ángulo θ menor que el correspondiente al primer mínimo con dos focos, que se presenta cuando δ es 180° .

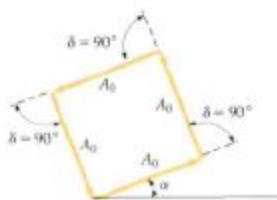


Figura 33-17 Diagrama de fasores para el primer mínimo en el caso de cuatro fuentes en fase e igualmente espaciadas. La amplitud es nula cuando la diferencia de fase de las ondas procedentes de fuentes adyacentes es 90° .

Estos resultados pueden generalizarse a más fuentes. Por ejemplo, si tenemos cuatro fuentes en fase igualmente distantes, los máximos de interferencia vienen de nuevo dados por la ecuación 33-16 pero los máximos son todavía más estrechos y existen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Para $\theta = 0$, la intensidad es 16 veces la correspondiente a una sola fuente. El primer mínimo de interferencia se presenta cuando $\delta = 90^\circ$, como puede verse mediante el diagrama de fasores de la figura 33-17. El primer máximo secundario está próximo a $\delta = 120^\circ$, en donde las ondas procedentes de tres de las fuentes se contrarrestan, dejando solamente la onda que procede de la cuarta fuente. La intensidad del máximo secundario es aproximadamente un dieciseisavo de la correspondiente al máximo central. Existe otro mínimo para $\delta = 180^\circ$, un máximo secundario cerca de $\delta = 240^\circ$ y otro mínimo para $\delta = 270^\circ$ antes del máximo principal siguiente que corresponde a $\delta = 360^\circ$.

Las figuras 33-18a-c muestran los esquemas de intensidad para los casos de dos fuentes igualmente espaciadas, tres fuentes igualmente espaciadas y cuatro fuentes igualmente espaciadas. En la figura 33-18d, I_0 es la intensidad debida a

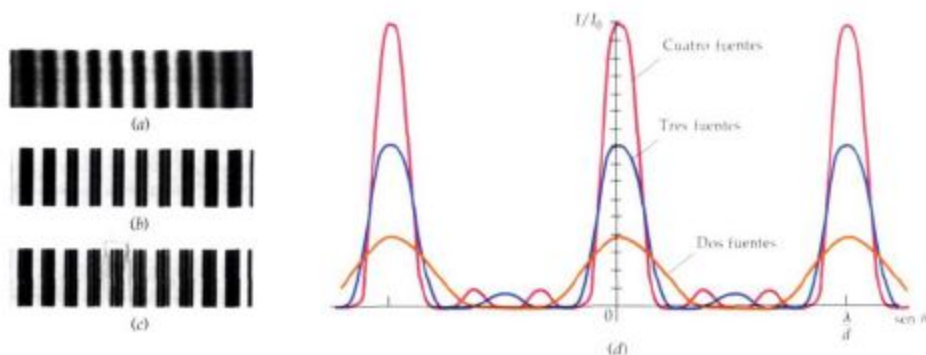


Figura 33-18 Diagramas de intensidad para (a) dos, (b) tres y (c) cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas. Existe un máximo secundario entre cada par de máximos principales en el caso de las tres fuentes y dos máximos secundarios si se trata de cuatro fuentes. (d) Representación de la intensidad en función del $\sin \theta$ para dos, tres y cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas.

cada fuente actuando por separado. En el caso de tres fuentes existe un máximo secundario muy pequeño entre cada par de máximos principales, y éstos son más nítidos, más agudos y más intensos que los debidos a sólo dos fuentes. Si se tienen cuatro fuentes, aparecen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales y estos últimos son todavía más estrechos e intensos.

A partir de estos comentarios, podemos ver que al aumentar el número de fuentes, la intensidad se concentra cada vez más en los máximos principales dados por la ecuación 33-16, y estos máximos se hacen cada vez más estrechos. Si se tienen N fuentes, la intensidad de los máximos principales es N^2 veces la debida a una sola de ellas. El primer mínimo se presenta en un ángulo de fase de $\delta = 360^\circ/N$, puesto que los N fasores forman entonces un polígono cerrado de N lados. Existen $N - 2$ máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Estos máximos secundarios son muy débiles comparados con los máximos principales. Cuando aumenta el número de fuentes, los máximos principales se hacen cada vez más agudos y más intensos, mientras que las intensidades de los máximos secundarios se hacen despreciables frente a las de los máximos principales.

Ejemplo 33-7

Cuatro fuentes luminosas coherentes igualmente espaciadas y con longitud de onda de 500 nm están separadas por una distancia $d = 0,1$ mm. Se observa el diagrama de interferencia sobre una pantalla a una distancia de 1,4 m. Hallar las posiciones de los máximos principales de interferencia y comparar su anchura con los que se obtendrían con sólo dos fuentes con la misma separación.

De acuerdo con la ecuación 33-16, los máximos se presentan en ángulos dados por

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} = m \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}}{1 \times 10^{-4} \text{ m}} = (5 \times 10^{-3}) m$$

en donde $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Como θ es pequeño podemos aproximar $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$. La distancia y medida a lo largo de la pantalla desde el máximo central está relacionada con θ por

$$y = L \tan \theta \approx L \theta$$

Por tanto, la posición del máximo principal m -ésimo es

$$y_m = L \theta_m = m(1,4 \text{ m})(5 \times 10^{-3}) = m(7,0 \text{ mm})$$

Así pues los máximos principales en la pantalla distan entre sí 7,0 mm.

El primer mínimo se presenta cuando la diferencia de fases entre dos fuentes adyacentes es $\delta = 90^\circ = \pi/2$. Esto corresponde a una diferencia de trayec-

tos de $\lambda/4$. El ángulo θ de este mínimo viene dado por $d \sin \theta = \lambda/4$, o sea

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{4d} = \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}}{4 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,25 \times 10^{-3}$$

La posición y de este mínimo es

$$y = L\theta = (1,4 \text{ m})(1,25 \times 10^{-3}) = 1,75 \text{ mm}$$

Consideraremos como anchura de los máximos principales la distancia existente entre los dos mínimos que hay a cada lado del máximo. Para $\theta = 0$ esta distancia es $2y = 3,5 \text{ mm}$. Si tuviésemos sólo dos fuentes con la misma separación, los máximos principales estarían en los mismos puntos pero el primer mínimo se presentaría a un ángulo θ correspondiente a una diferencia de caminos de $\lambda/2$. La anchura de estos máximos sería, por tanto, el doble de la que se obtendría con cuatro fuentes, como se ven en la figura 33-18.

Cuestión

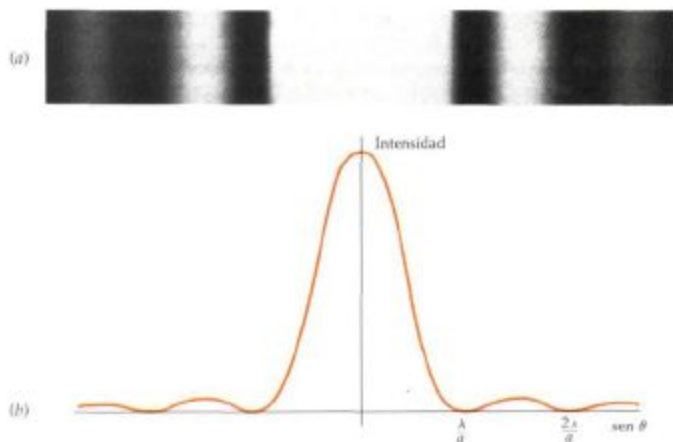
5. ¿Cuántos máximos secundarios existirán entre los máximos principales en el diagrama de interferencia producido por cinco fuentes igualmente espaciadas? ¿Por qué serán difíciles de ver?

33-7 Diagrama de difracción de una sola rendija

Descripción cualitativa

En nuestro estudio de los diagramas de interferencia producidos por dos o más rendijas, hemos supuesto que éstas eran muy estrechas, de modo que podíamos considerarlas como fuentes lineales que generan ondas cilíndricas, que en nuestros diagramas bidimensionales son focos puntuales de ondas circulares. Por consiguiente, podíamos admitir que la intensidad debida a una sola rendija actuando aislada era la misma (I_0) en cualquier punto P sobre la pantalla con independencia del ángulo θ formado entre el rayo dirigido al punto P y la recta normal entre la rendija y la pantalla. Cuando la rendija no es estrecha, la intensidad recibida en una pantalla alejada no es independiente del ángulo sino que dis-

Figura 33-19 (a) Diagrama de difracción de una sola rendija observado sobre una pantalla lejana. (b) Representación de la intensidad en función del $\sin \theta$ correspondiente al diagrama en (a).



minuye cuando aumenta el ángulo. Consideremos una rendija de anchura a . La figura 33-19 muestra el diagrama de intensidad sobre una pantalla lejana respecto a la rendija de anchura a en función del $\text{sen } \theta$. Podemos ver que la intensidad es máxima en la dirección normal ($\text{sen } \theta = 0$) y disminuye hasta cero para un ángulo que depende de la anchura de la rendija a y de la longitud de onda λ . La mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en un **máximo central de difracción** ancho, aunque existen bandas de máximos secundarios más pequeños a cada lado del máximo central. Los primeros valores nulos de intensidad se presentan para ángulos dados por

$$\text{sen } \theta = \lambda/a \quad 33-17$$

Obsérvese que para una longitud de onda determinada λ , la anchura del máximo central varía en razón inversa con la anchura de la rendija. Es decir, si *aumentamos* la anchura de la rendija a , *disminuye* el ángulo θ en que la intensidad es por primera vez nula, originándose un máximo de difracción central más estrecho. Inversamente, si *disminuye* la anchura de la rendija, *aumenta* el ángulo correspondiente al primer mínimo, dando así un máximo central de difracción más ancho. Cuando a es muy pequeña, no existen puntos de intensidad nula en el diagrama y la rendija actúa como una fuente lineal (un foco puntual en dos dimensiones), radiando energía luminosa esencialmente por igual en todas direcciones.

Podemos escribir la ecuación 33-17 de forma ligeramente diferente. Multiplicando ambos miembros por a , se tiene

$$a \text{ sen } \theta = \lambda \quad 33-18$$

La cantidad $a \text{ sen } \theta$ es la diferencia de caminos entre un rayo de luz que sale de la parte superior de la rendija y otro que sale de su parte inferior. Vemos que el primer mínimo de difracción se produce cuando estos dos rayos están en fase, es decir, cuando su diferencia de caminos es de 1 longitud de onda. Podemos comprender este resultado considerando cada punto sobre un frente de onda como si fuese un foco luminoso puntual de acuerdo con el principio de Huygens. En la figura 33-20, hemos colocado una línea de puntos sobre el frente de ondas en la rendija para representar esquemáticamente estos focos puntuales. Supongamos, por ejemplo, que tenemos 100 de dichos puntos y que estamos observando a un ángulo θ para el que $a \text{ sen } \theta = \lambda$, es decir, el ángulo para el que las ondas procedentes de la parte superior e inferior de la rendija están en fase. Consideremos la rendija dividida en dos regiones, con los primeros 50 puntos en la primera de ellas, región superior, y los focos del 51 al 100 en la región segunda, inferior. Cuando la diferencia de caminos entre la parte superior y la inferior de la rendija es igual a una longitud de onda, la diferencia de caminos entre el foco 1 (el primer foco de la región superior) y el foco 51 (el primer foco de la región inferior) es $\frac{1}{2}$ longitud de onda. Las ondas procedentes de estos dos focos estarán desfasadas en 180° y, por tanto se anularán mutuamente. Análogamente, las ondas procedentes del segundo foco en cada región (foco 2 y foco 52) se cancelarán. Continuando con este argumento, podemos ver que las ondas procedentes de cada par de focos separados entre sí en $a/2$ se cancelarán. Así pues, no existirá energía luminosa en este ángulo. Podemos ampliar este argumento al segundo y tercer mínimos en el diagrama de difracción de la figura 33-19. Para un ángulo tal que $a \text{ sen } \theta = 2\lambda$, podemos dividir la rendija en cuatro regiones, dos en la mitad superior y otras dos en la mitad inferior. Utilizando el mismo razonamiento, la intensidad de la luz de la mitad superior es cero por la cancelación de pares de focos y, análogamente, ocurre lo mismo con la segunda mitad. La expresión general para los puntos de intensidad cero en el diagrama de difracción de una sola rendija es pues

$$a \text{ sen } \theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad 33-19$$

Normalmente sólo nos interesa la presencia del primer mínimo de intensidad luminosa porque casi toda la energía luminosa se encuentra contenida en el máximo de difracción central.

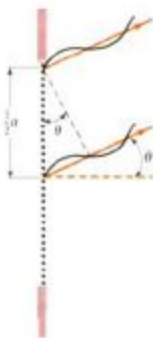


Figura 33-20 Una sola rendija se representa mediante un gran número de focos o fuentes puntuales de igual amplitud. En el primer mínimo de difracción de una rendija, las ondas procedentes del foco junto a la parte superior de la misma y las que proceden del foco justo debajo del punto medio de la rendija están desfasadas en 180° y se anulan entre sí, como ocurre con todos los demás pares de focos.

Puntos de intensidad cero de difracción para una sola rendija

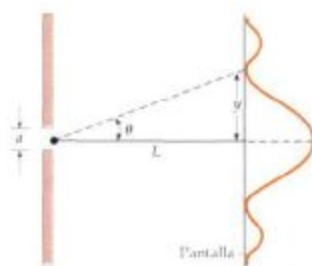


Figura 33-21 La distancia y medida sobre la pantalla desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ por $\text{tg } \theta = y/L$, en donde L es la distancia a la pantalla. Como el ángulo es muy pequeño, $\text{tg } \theta \approx \text{sen } \theta$. Entonces $y = L \text{tg } \theta \approx L \text{sen } \theta = L \lambda/a$.

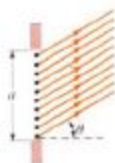


Figura 33-22 Esquema para el cálculo del diagrama de interferencias lejos de una rendija estrecha. Se supone que la rendija de anchura a contiene un gran número de fuentes puntuales en fase separadas por una distancia d . Los rayos procedentes de estas fuentes que terminan en un punto muy alejado son aproximadamente paralelos. La diferencia de caminos para las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes, es, pues, $d \text{ sen } \theta$.

Figura 33-23 Una sola rendija se representa por N fuentes de amplitud A_0 . En el punto máximo central con $\theta = 0$, las ondas procedentes de las mismas se suman en fase, dando una amplitud resultante $A_{\text{max}} = NA_0$.

En la figura 33-21, la distancia y desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ y la distancia L que separa la rendija de la pantalla por

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{L}$$

Como este ángulo es muy pequeño, $\text{tg } \theta \approx \text{sen } \theta$. Por ello, de acuerdo con la ecuación 33-17, se tiene

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{y}{L}$$

o bien

$$y = \frac{L\lambda}{a} \quad 33-20$$

Ejemplo 33-8

En un experimento en clase para demostrar la difracción por una sola rendija, se hace pasar el haz de un láser de 700 nm de longitud de onda a través de una rendija vertical de 0,2 mm de ancho que luego incide sobre una pantalla a 6 m de distancia. Hallar la anchura del máximo de difracción central sobre la pantalla, es decir, la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central.

La anchura del máximo central de difracción en la figura 33-21 es $2y$. La ecuación 33-20 nos da

$$y = \frac{L\lambda}{a} = \frac{(6 \text{ m})(700 \times 10^{-9} \text{ m})}{0,0002 \text{ m}} = 2,1 \times 10^{-2} \text{ m} = 2,1 \text{ cm}$$

La anchura del máximo central es, pues, $2y = 4,2 \text{ cm}$.

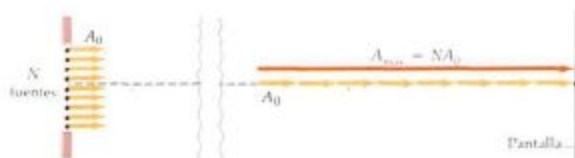
Estudio cuantitativo

A continuación calcularemos el diagrama de intensidad indicado en la figura 33-19 utilizando el método de los fasores para sumar ondas armónicas. Supondremos que se divide en N intervalos la rendija de anchura a y que existe un foco puntual de ondas en el punto medio de cada intervalo. Si la distancia entre dos fuentes adyacentes es d y a es la anchura de la abertura, tenemos $d = a/N$.

Como la pantalla sobre la cual estamos calculando la intensidad está muy alejada de las fuentes, los rayos procedentes de éstas y que llegan hasta un punto P de dicha pantalla son aproximadamente paralelos. La diferencia de trayectos entre dos fuentes cualesquiera adyacentes es entonces $d \text{ sen } \theta$ (figura 33-22) y la diferencia de fases es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \theta$$

Si A_0 es la amplitud debida a una sola fuente, la amplitud en el punto máximo central en donde $\theta = 0$ y todas las ondas están en fase, es $A_{\text{max}} = NA_0$ (figura 33-23). Se encuentra el valor de la amplitud en otro punto en un cierto ángulo θ utilizando el método de fasores para la suma de ondas armónicas. Como en el caso de la suma de 2,3 ó 4 ondas, la intensidad es cero en un punto en el que



los fasores que representan las ondas forman un polígono cerrado. En este caso el polígono tiene N lados (figura 33-24). En el primer mínimo, la onda procedente de la primera fuente cerca de la parte superior de la abertura y la que procede de la fuente exactamente debajo del punto medio de la abertura están desfasadas 180° . En este caso las ondas procedentes de la fuente cerca de la parte superior e inferior de la abertura están desfasadas en casi 360° . (La diferencia de fase es realmente $360^\circ - (360^\circ)/N$.) Así pues, si el número de fuentes es muy grande, se obtiene una anulación completa cuando las ondas procedentes de la primera y última fuente están desfasadas en 360° , lo cual corresponde a una diferencia de caminos de una longitud de onda de acuerdo con la ecuación 33-18.

Podemos calcular ahora la amplitud en un punto general para el cual las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes difieren en una fase igual a δ . La figura 33-25 muestra el diagrama de fasores para la suma de N ondas que difieren de fase de la primera onda en $\delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$. Cuando N es muy grande y δ muy pequeña, el diagrama de fasores es aproximadamente un arco de circunferencia. La amplitud resultante A es la longitud de la cuerda de este arco. Se calcula esta amplitud resultante en función de la diferencia de fase entre la primera y última onda. A partir de la figura 33-25 tenemos

$$\text{sen } \frac{1}{2} \phi = \frac{A/2}{r}$$

o bien

$$A = 2r \text{ sen } \frac{1}{2} \phi \quad 33-21$$

en donde r es el radio del arco. Como la longitud del arco es $A_{\text{máx}} = NA_0$ y el ángulo subtendido es ϕ , tenemos

$$\phi = \frac{A_{\text{máx}}}{r} \quad 33-22$$

o sea,

$$r = \frac{A_{\text{máx}}}{\phi}$$

Sustituyendo por esta expresión en la ecuación 33-21, se tiene,

$$A = \frac{2A_{\text{máx}}}{\phi} \text{ sen } \frac{1}{2} \phi = A_{\text{máx}} \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi}$$

Como la amplitud en el punto máximo central ($\theta=0$) es $A_{\text{máx}}$, el cociente entre la intensidad en cualquier otro punto y la del máximo central, viene dado por

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_{\text{máx}}^2} = \left(\frac{\text{sen } \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi} \right)^2$$

o sea,

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen } \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi} \right)^2 \quad 33-23$$

La diferencia de fase ϕ entre la primera y última onda es $2\pi/\lambda$ veces la diferencia de caminos $a \text{ sen } \theta$ entre la parte superior y la inferior de la abertura:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta \quad 33-24$$

Las ecuaciones 33-23 y 33-24 describen el diagrama de intensidad de la figura 33-19. El primer mínimo aparece para $a \text{ sen } \theta = \lambda$, punto en donde las ondas pro-



Figura 33-24 Diagrama de fasores correspondiente al primer mínimo en el diagrama de difracción de una sola rendija. Cuando las ondas procedentes de las N fuentes se contrarrestan completamente, los N fasores forman un polígono cerrado. La diferencia de fase entre ondas procedentes de fuentes adyacentes es entonces $\delta = 360^\circ/N$. Cuando N es muy grande, las ondas procedentes de la primera y última fuente están aproximadamente en fase.

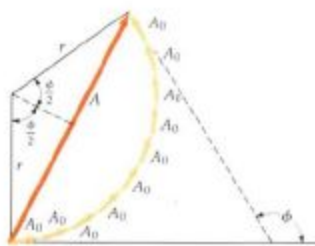


Figura 33-25 Modelo de fasores para el cálculo de la amplitud de las ondas procedentes de N fuentes en función de la diferencia de fase ϕ entre las ondas procedentes de la primera fuente cercana al borde superior de la rendija y la última cercana a su borde inferior. En el caso de que N sea muy grande, la amplitud resultante A es la cuerda de un arco de circunferencia de longitud $NA_0 = A_{\text{máx}}$.

Intensidad de difracción de una sola rendija



Figura 33-26 Diagrama de fasores para el cálculo de la amplitud aproximada del primer máximo secundario del diagrama de difracción de una sola rendija. Este máximo secundario se produce cerca del punto medio entre el primer y segundo mínimos cuando los N fasores completan $1\frac{1}{2}$ circunferencias.

cedentes de la parte superior y de la parte inferior de la abertura tienen una diferencia de caminos de λ y están en fase. El segundo mínimo se presenta para $a \sin \theta = 2\lambda$, en donde las ondas que proceden de la parte superior e inferior de la abertura poseen una diferencia de caminos de 2λ .

Existe un máximo secundario aproximadamente a medio camino entre el primero y segundo mínimos para $a \sin \theta = \frac{3}{2}\lambda$. En la figura 33-26 se ve el diagrama de fasores para determinar la intensidad aproximada de este máximo secundario. La diferencia de fases entre la primera y la última onda es aproximadamente $360^\circ + 180^\circ$. Los fasores completan así $1\frac{1}{2}$ circunferencias. La amplitud resultante es el diámetro de una circunferencia cuya longitud es dos tercios de la longitud total A_{\max} . Si $C = \frac{2}{3} A_{\max}$ es el valor de la circunferencia, el diámetro A vale

$$A = \frac{C}{\pi} = \frac{\frac{2}{3} A_{\max}}{\pi} = \frac{2}{3\pi} A_{\max}$$

y

$$A^2 = \frac{4}{9\pi^2} A_{\max}^2$$

La intensidad en este punto es

$$I = \frac{4}{9\pi^2} I_0 = \frac{1}{22,2} I_0 \quad 33-25$$

Cuestión

6. Al ir reduciendo lentamente pero de forma continua la anchura de una rendija que produce un diagrama de difracción de una sola rendija, ¿cómo variará dicho diagrama?

33-8 Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas

Cuando se tienen dos o más rendijas, el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla lejana es una combinación del diagrama de difracción de una sola rendija y el diagrama de interferencia de varias rendijas, que ya hemos estudiado. En la figura 33-27 se ve el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla originado por dos rendijas cuya separación d es 10 veces la anchura a de cada una de ellas. El diagrama es el mismo que el obtenido por la interferencia de dos rendijas muy estrechas (figura 33-9) excepto en que se encuentra modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija; es decir, la intensidad debida a cada rendija por separado no es ahora constante sino que disminuye con el ángulo, como se indica en la figura 33-27b. Puede calcularse la intensidad a partir del diagrama de dos rendijas (ecuación 33-11) sustituyendo la intensidad de cada rendija (I_0 en dicha ecuación) por la intensidad debida al diagrama de difracción de cada rendija, que es el valor I dado por la ecuación 33-23. Por tanto, la intensidad correspondiente al diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas es

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\delta \quad 33-26$$

Intensidad interferencia-difracción correspondiente a dos rendijas

en donde ϕ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de la parte superior e inferior de cada rendija, que se relaciona con la anchura de cada una de ellas por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

y δ es la diferencia de fase entre los rayos que proceden de los centros de dos rendijas adyacentes, que se relaciona con la separación entre rendijas por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

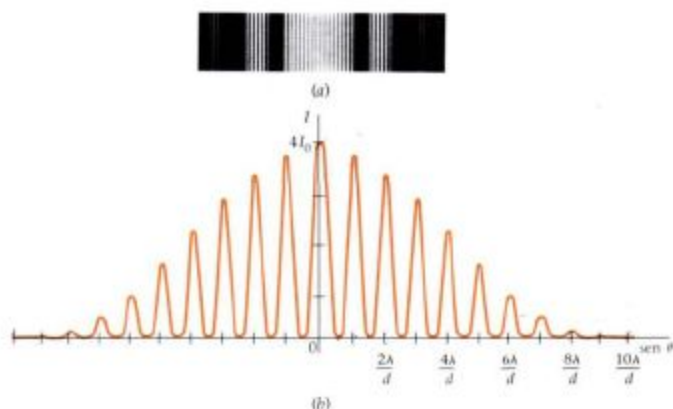


Figura 33-27 (a) Diagrama de interferencia-difracción correspondiente a dos rendijas cuya separación d es igual a 10 veces su anchura a . Se pierde el décimo máximo de interferencia a cada lado del máximo de interferencia central porque cae en el primer mínimo de difracción. (b) Representación de la intensidad en función del $\sin \theta$ correspondiente a la banda central del diagrama en (a).

En la ecuación 33-26, la intensidad I_0 es la intensidad en $\theta = 0$ debida a una sola rendija. Obsérvese que en la figura 33-27 el máximo central de difracción contiene 19 máximos de interferencia — el máximo central de interferencia y 9 máximos a cada lado. El décimo máximo de interferencia a cada lado del central está en un ángulo θ dado por $\sin \theta = 10\lambda/d = \lambda/a$, puesto que $d = 10a$. Este valor coincide con el primer mínimo de difracción, de modo que este máximo de interferencia no se ve. En estos puntos, la luz procedente de las dos rendijas se encontraría en fase e interferirían constructivamente, pero no existe la luz de ninguna de ellas porque esos puntos son mínimos de difracción.

Ejemplo 33-9

Dos rendijas de anchura $a = 0,015$ mm están separadas por una distancia $d = 0,06$ mm y se encuentran iluminadas por luz de longitud de onda $\lambda = 650$ nm. ¿Cuántas franjas brillantes se ven en el máximo central de difracción?

El número de franjas brillantes en el máximo central de difracción depende de la longitud de onda de la luz, sino únicamente del cociente entre la separación de las rendijas y su anchura:

$$\frac{d}{a} = \frac{0,06 \text{ mm}}{0,015 \text{ mm}} = 4$$

El ángulo del primer mínimo de difracción viene dado por

$$\sin \theta = \lambda/a$$

Como $a = d/4$, esta expresión puede escribirse

$$\sin \theta = 4\lambda/d$$

Así pues, la posición del cuarto máximo de interferencia coincide con la posición del primer mínimo de difracción, de forma que existirán 3 máximos de interferencia a cada lado del máximo de interferencia central, lo que da un total de 7 franjas brillantes dentro del máximo central de difracción. $(2M-1)$

Cuestión

7. ¿Cuántos máximos de interferencia estarán contenidos en el máximo central de difracción en el diagrama de difracción-interferencia de dos rendijas, si la separación d de las dos rendijas es 5 veces su anchura a ? ¿Cuántos habrían si $d = Na$ para cualquier valor de N ? $(2N-1)$

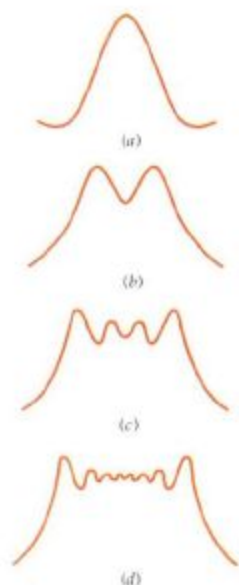


Figura 33-28 Diagramas de difracción correspondientes a una sola rendija a diversas distancias de la pantalla. Cuando la pantalla se acerca hacia la rendija, el diagrama de Fraunhofer (a) que se observa lejos de ésta se va transformando gradualmente en el diagrama de Fresnel (d) que es el que se observa cerca de la rendija.

33-9 Difracción de Fraunhofer y de Fresnel

Al deducir la ecuación 33-23 que describe el diagrama de difracción de una sola rendija se hicieron las siguientes hipótesis de trabajo

1. Sobre la rendija están incidiendo ondas planas. (Suponíamos que eran iguales las amplitudes y las fases de las numerosas fuentes secundarias de Huygens).
2. El diagrama se observaba a una distancia grande de la rendija en comparación con el tamaño de las aberturas. (Suponíamos que los rayos que iban desde las fuentes a un punto cualquiera de la pantalla eran aproximadamente paralelos para simplificar los cálculos geométricos.)

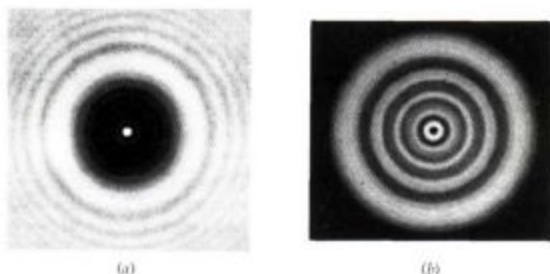
Los diagramas de difracción que se observan en puntos desde los cuales se ven casi paralelos los rayos procedentes de una abertura o de un obstáculo se denominan **diagramas de difracción de Fraunhofer**. El diagrama de intensidad de la figura 33-19 es, pues, un diagrama de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. Los diagramas de Fraunhofer pueden observarse a grandes distancias del obstáculo o abertura, de modo que los rayos que alcanzan un punto cualquiera sean aproximadamente paralelos, o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en el plano focal de la lente. Si una rendija tiene una anchura de muchas longitudes de onda, no se observará el diagrama de Fraunhofer porque será muy pequeño el ángulo correspondiente al primer mínimo. Por ejemplo, si $a = 1000 \lambda$, el primer mínimo se presentará para un ángulo θ dado por $\sin \theta = 1/1000 = \theta$. Este ángulo tan pequeño no es apenas diferente del ángulo que forman los rayos procedentes de la parte superior e inferior de la rendija que terminan en el máximo central, rayos que se suponían paralelos en nuestra deducción.

Cuando el diagrama de difracción se observa cerca de una abertura o de un obstáculo, se denomina **diagrama de difracción de Fresnel**. Debido a la complicada geometría, este diagrama es mucho más difícil de analizar. La figura 33-28 ilustra la diferencia existente entre los diagramas de Fresnel y de Fraunhofer en el caso de una sola rendija.*

En la figura 33-29a se muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco iluminado por luz procedente de un foco situado sobre su eje. Obsérvese el punto brillante en el centro del diagrama causado por la interferencia constructiva de las ondas luminosas difractadas desde el borde del disco. Este diagrama tiene cierto interés histórico. En un intento de desacreditar la teoría ondulatoria de Fresnel, Poisson aplicó la misma a este caso y consideró que la predicción de la existencia del punto brillante en el centro de la sombra del disco resultaría anulada y ridiculizada por los hechos experimentales. Sin embargo, Fresnel inmediatamente demostró experimentalmente que dicho punto existe efectivamente. Esta demostración sirvió para convencer a muchos de los que dudaban de la validez de la teoría ondulatoria de la luz. El diagrama de difracción de Fresnel de una abertura se muestra en la figura 33-29b. Comparándolo con el diagrama del disco opaco de la figura 33-29a, puede verse que ambos diagramas son complementarios entre sí.

* Ver Richard E. Haskel, «A Simple Experiment on Fresnel Diffraction», *American Journal of Physics*, vol. 38, 1970, pág. 1039.

Figura 33-29 (a) Diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco. En el centro de la sombra, las ondas luminosas difractadas por el borde del disco están en fase y producen un punto brillante denominado *punto de Poisson*. (b) Diagrama de difracción de Fresnel de una abertura circular. Comparar este diagrama con el de la parte (a).

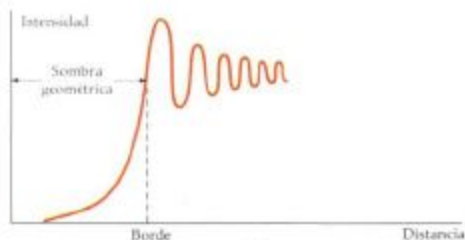


(a)

(b)



(a)



(b)

La figura 33-30a muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un borde rectilíneo iluminado por la luz procedente de un foco puntual. Se ve un gráfico de la intensidad en función de la distancia (medida a lo largo de una línea perpendicular al borde) en la figura 33-30b. La intensidad de la luz no cae abruptamente a cero en la sombra geométrica, sino que disminuye rápidamente y es despreciable al cabo de unas pocas longitudes de onda del borde. Puede verse el diagrama de difracción de Fresnel de una abertura rectangular en la figura 33-31. Estos diagramas no pueden verse con las fuentes luminosas extensas, como las lámparas incandescentes ordinarias, porque las franjas oscuras del diagrama producidas por la luz procedente de un punto de la fuente se solapan con las franjas brillantes del diagrama producido por la luz procedente de otros puntos.

33-10 Difracción y resolución

La figura 33-32 muestra el diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular y tiene importantes aplicaciones para el estudio de la resolución de muchos instrumentos ópticos. El ángulo θ subtendido por el primer mínimo de difracción está relacionado con la longitud de onda y con el diámetro de la abertura D por

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad 33-27$$



Figura 33-32 Diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular.

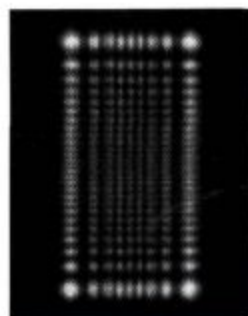
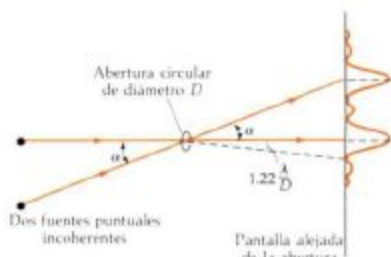


Figura 33-31 Difracción de Fresnel de una abertura rectangular.

La ecuación 33-27 es semejante a la ecuación 33-17 excepto que el factor aparece en el análisis matemático del problema, que es solo una rendija pero más complicado debido a la geometría circular. En muchas aplicaciones el ángulo θ es pequeño, de modo que $\sin \theta \approx \theta$. El primer mínimo de difracción se produce entonces por

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Figura 33-33 Dos focos distantes que subtenden un ángulo α . Si α es mucho mayor que $1,22 \lambda/D$, siendo λ la longitud de onda de la luz y D el diámetro de la abertura, los diagramas de difracción apenas se solapan y los focos se ven fácilmente como dos focos separados. Si α no es mucho mayor que $1,22 \lambda/D$, el solapamiento de los diagramas de difracción hace que sea difícil distinguir dos fuentes de una.



La figura 33-33 muestra a dos focos puntuales que subtenden un ángulo α respecto a una abertura circular alejada de los focos. También se incluye en dicha figura los diagramas de difracción de Fraunhofer correspondientes. Si α es mucho mayor que $1,22 \lambda/D$, se verán como dos focos. Sin embargo, al ir disminuyendo α , aumenta el solapamiento de los diagramas de difracción y resulta cada vez más difícil distinguir los dos focos de un solo foco. Para la separación angular crítica de α , dada por

$$\alpha_c = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad 33-29$$

el primer mínimo del diagrama de difracción de un foco cae en el máximo central de la otra fuente o foco. Se dice entonces que estos objetos están en el límite justo de su resolución según el denominado **criterio de Rayleigh para la resolución**. La figura 33-34 muestra los diagramas de difracción para dos fuentes cuando α es mayor que el ángulo crítico que permite la resolución y cuando α es exactamente igual al ángulo crítico mencionado.

La ecuación 33-29 tiene muchas aplicaciones. El poder de resolución de un instrumento óptico, como un microscopio o un telescopio, se refiere a la capacidad del mismo para resolver y distinguir dos objetos que están muy juntos. Las imágenes de los objetos tienden a solaparse debido a los efectos de difracción de la abertura de entrada del instrumento. Podemos ver en la ecuación 33-29 que puede aumentarse el poder de resolución, bien aumentando el diámetro D de la lente (o espejo), o haciendo disminuir la longitud de onda λ . Los telescopios astronómicos utilizan grandes lentes o espejos objetivo para aumentar su resolución y además aumentar también su capacidad de recoger la luz que procede de objetos lejanos. En un microscopio se utiliza a veces una película de un aceite transparente con índice de refracción del orden de 1,55 colocada bajo el objetivo con objeto de que disminuya la longitud de onda de la luz ($\lambda' = \lambda/n$). Aún puede reducirse más la longitud de onda mediante la utilización de luz ultravioleta, de modo que las lentes de un microscopio ultravioleta deben construirse de cuarzo o fluorita. En el capítulo 35, veremos que los electrones presentan propiedades ondulatorias de interferencia y difracción exactamente igual que la luz. Las longitudes de onda de los electrones varían de forma inversa con la raíz cuadrada de su energía cinética y pueden hacerse tan pequeñas como se desee. Cuando se quiere una resolución muy elevada se dispone de microscopios electrónicos que utilizan electrones en lugar de la luz.



(a)



(b)

Figura 33-34 Diagramas de difracción correspondientes a una abertura circular y a dos fuentes puntuales incoherentes cuando (a) es mucho mayor que $1,22 \lambda/D$ y (b) cuando α corresponde al límite de resolución, $\alpha_c = 1,22 \lambda/D$.

Ejemplo 33-10

¿Qué separación angular mínima deben tener dos objetos si han de ser resueltos justamente por el ojo? ¿A qué distancia mutua deben estar si se encuentran alejados ambos a 100 m? Suponer que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm y que la longitud de onda de donde da la luz es de 600 nm.

Utilizando la ecuación 33-29 con $D=5$ mm y $\lambda=600$ nm, tenemos como valor de la separación angular mínima

$$\alpha_c = 1,22 \frac{6 \times 10^{-7} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,46 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Si los objetos están separados entre sí una distancia y y se encuentran alejados a 100 m, se resolverán apenas si $\text{tg } \alpha_c = y/(100 \text{ m})$. Entonces

$$y = (100 \text{ m}) \text{tg } \alpha_c \approx (100 \text{ m}) \alpha_c = 1,46 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,46 \text{ cm}$$

en donde hemos utilizado la aproximación de ángulos pequeños $\text{tg } \alpha_c \approx \alpha_c$.

Es instructivo comparar la limitación que marca la resolución del ojo debido a la difracción, como se ha visto en el ejemplo 33-10, con la originada por la separación de los receptores (conos) en la retina. Para que sean vistos como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer sobre la retina en dos conos no adyacentes. (Ver el problema 8 en el capítulo 32.) Como la retina está a 2,5 cm aproximadamente de la lente del ojo o cristalino, se obtiene la distancia y sobre la retina que corresponde a una separación angular de $1,5 \times 10^{-4}$ rad mediante

$$\alpha_c = 1,5 \times 10^{-4} \text{ rad} = \frac{y}{2,5 \text{ cm}}$$

o bien

$$y = 4 \times 10^{-4} \text{ cm} = 4 \times 10^{-6} \text{ m} = 4 \mu\text{m}$$

La separación real de los conos en la fóvea (central), en donde los conos están muy estrechamente juntos, es del orden de 1 μm . Fuera de esta región se encuentran separados entre 3 y 5 μm .

Ejercicio

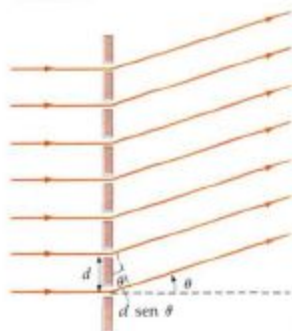
Dos objetos están separados 4 cm. ¿A qué distancia de ellos debemos estar de forma que todavía puedan resolverse por el ojo si $\lambda=600$ nm y el diámetro de la pupila del mismo es 5 mm? (Respuesta: 274 m)

33-11 Redes de difracción

Una herramienta útil para la medición de la longitud de onda de la luz es la **red de difracción**, que consiste en un gran número de rayas o rendijas igualmente espaciadas y marcadas o grabadas sobre una superficie plana. Una red de este tipo puede fabricarse cortando surcos paralelos y con separación constante sobre una placa de vidrio o metal con una máquina de gran precisión. Cuando se trata de una red de reflexión, la luz se refleja en los salientes entre las rayas marcadas. Un disco gramofónico presenta algunas de las propiedades de una red de reflexión. En el caso de las redes de transmisión, la luz pasa a través de los espacios transparentes que existen entre las rayas grabadas. Existen redes baratas, de plástico, con 10 000 o más rayas por centímetro. El espaciado de las rayas en una red con 10 000 rayas por cm es $d = (1 \text{ cm})/10\,000 = 10^{-4} \text{ cm}$.

Consideremos una onda luminosa plana que incide normalmente sobre una red de transmisión (figura 33-35) y supongamos que la anchura de cada rendija es muy pequeña, de forma que cada una de ellas produce un haz muy difractado. El diagrama de interferencia producido sobre una pantalla a gran distancia de

Figura 33-35 Luz que incide normalmente sobre una red de difracción. Para un ángulo θ , la diferencia de caminos entre rayos procedentes de rendijas adyacentes es $d \text{ sen } \theta$.



la red es el debido a un gran número de focos luminosos igualmente espaciados. Los máximos de interferencia se encuentran en ángulos θ dados por

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m=0, 1, 2, \dots \quad 33-30$$

en donde m se denomina **número de orden**. La posición de un máximo de interferencia no depende del número de focos, pero cuantos más focos existan, más nítidos e intensos serán dichos máximos, como se veía en la figura 33-18.

En la figura 33-36b puede verse un espectroscopio típico, que utiliza una red de difracción para analizar la luz procedente de un foco como un tubo que contiene átomos de gas, por ejemplo, helio o vapor de sodio. Los átomos de gas se excitan mediante el bombardeo por electrones que son acelerados por una alta tensión aplicada a través del tubo. La luz emitida por dicho tipo de fuentes no está formada por un espectro continuo. En su lugar, el espectro contiene únicamente ciertas longitudes de onda que son características de los átomos contenidos en el tubo o foco. La luz emitida por éste pasa a través de una rendija estrecha de colimación y se hace paralela mediante una lente adecuada. La luz paralela incide entonces sobre la red, pero en vez de observarse sobre una pantalla muy alejada, la luz paralela que emerge de la red se enfoca mediante un anteojo y se observa directamente. El anteojo está montado sobre una plataforma rotatoria que ha sido calibrada de modo que pueda medirse el ángulo θ . En la dirección hacia delante ($\theta=0$), se ve el máximo central correspondiente a todas las longitudes de onda. Si el foco emite luz de una longitud de onda particular λ , se verá el primer máximo de interferencia en el ángulo θ dado por la ecuación 33-30 con $m=1$. Toda longitud de onda emitida por el foco produce una imagen separada de la rendija de colimación del espectroscopio denominada **línea o raya espectral**. El conjunto de líneas correspondiente a $m=1$ se denomina **espectro de primer orden**. El **espectro de segundo orden** corresponde a $m=2$ para cada longitud de onda. Pueden verse órdenes mayores si el ángulo θ dado por la ecuación 33-30 es menor de 90° . Dependiendo de las longitudes de onda y de la separación entre las rendijas de la red, los órdenes pueden aparecer mezclados; es decir, la línea de tercer orden correspondiente a una determinada longitud de onda puede aparecer antes que la línea de segundo orden correspondiente a otra longitud de onda. Si se conoce la separación de las rendijas de la red, pueden determinarse las longitudes de onda emitidas por el foco mediante la medición del ángulo θ .

Figura 33-36 (a) Este antiguo espectroscopio del siglo pasado que perteneció a Gustav Kirchhoff utilizaba un prisma en lugar de una red de difracción para dispersar la luz. (b) Espectroscopio para prácticas de alumnos. La luz procedente de la rendija colimadora cercana a la fuente se hace paralela mediante una lente e incide sobre una red. Se observa la luz difractada con un anteojo que forma un ángulo con el haz incidente que puede medirse con gran exactitud.

Ejemplo 33-11

Sobre una red de difracción de 10 000 rayas por centímetro está incidiendo luz de sodio. ¿A qué ángulos se verán las dos líneas amarillas de longitudes de onda de 589,00 nm y 589,59 nm en el primer orden?



(a)



(b)

Utilizando $m=1$ y $d=10^{-4}$ cm = 10^{-6} m en la ecuación 33-30, se tiene para $\lambda=589 \times 10^{-9}$ m

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\lambda}{d} = \frac{589 \times 10^{-9} \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}} = 0,589 \\ \theta &= 36,09^\circ\end{aligned}$$

Para $\lambda=589,59$ nm, un cálculo semejante da $\sin \theta=0,58959$, es decir $\theta=36,13^\circ$.

Una característica importante de un espectroscopio es su capacidad para medir la luz de dos longitudes de onda muy próximas λ_1 y λ_2 . Por ejemplo, las dos líneas amarillas destacadas del espectro del sodio tienen longitudes de onda de 589,00 y 589,59 nm, que pueden observarse como dos longitudes de onda si no se solapan sus máximos de interferencia. De acuerdo con el criterio de Rayleigh para la resolución, estas longitudes de onda se resuelven si la separación angular de sus máximos de interferencia es mayor que la separación angular entre un máximo de interferencia y el primer mínimo de interferencia que aparece a cada lado. Se define el **poder de resolución** de una red de difracción como $\lambda/|\Delta\lambda|$, en donde $|\Delta\lambda|$ es la diferencia más pequeña entre dos longitudes de onda próximas, cada una de ellas aproximadamente igual a λ , que pueden ser resueltas. El poder de resolución es proporcional al número de rendijas iluminadas porque cuantas más rendijas estén iluminadas más nítido será el máximo de interferencia. Puede mostrarse que el poder de resolución R es

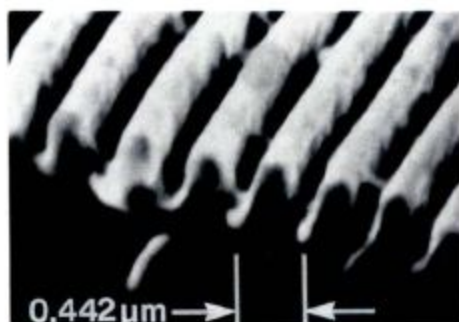
$$R = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \quad 33-31$$

en donde N es el número de rendijas y m es el número de orden (ver problema 73). Podemos ver a partir de la ecuación 33-31 que para resolver las dos rayas amarillas del espectro del sodio, el poder de resolución debe ser

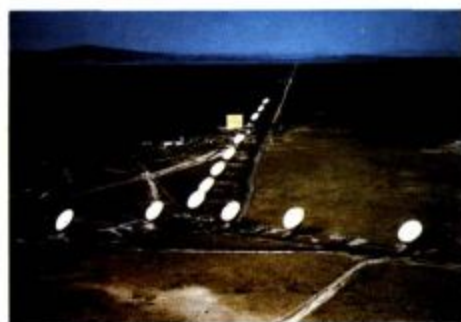
$$R = \frac{589,00 \text{ nm}}{589,59 - 589,00 \text{ nm}} = 998$$

Así pues, para resolver las dos líneas amarillas del sodio en el primer orden ($m=1$), necesitamos una red que contenga alrededor de 1000 rendijas en el área iluminada por la luz.

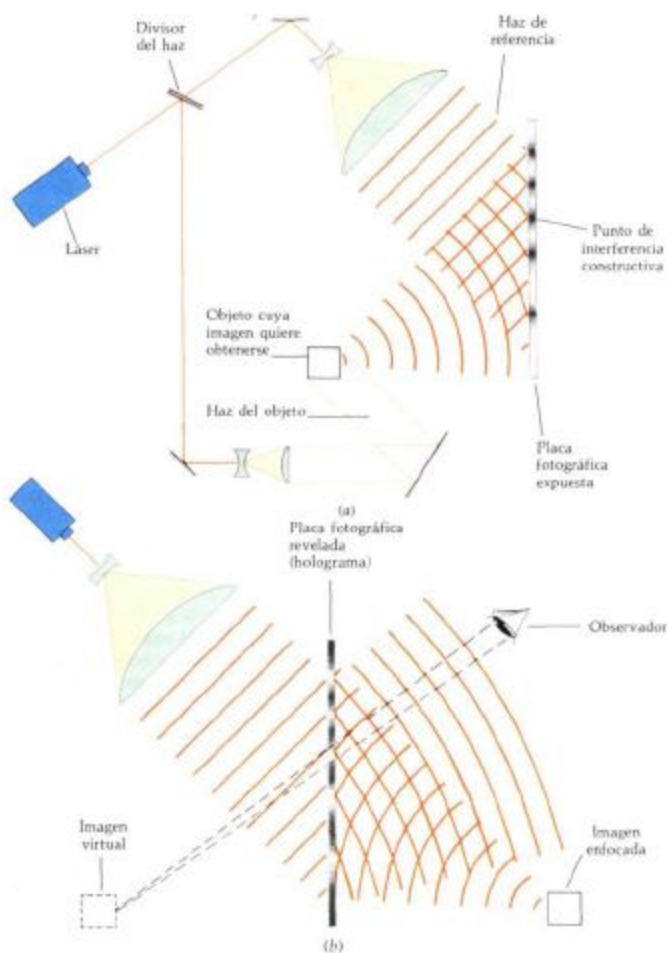
(c) Fotomicrografía de la forma de surcos que posee la superficie de una red de difracción. (d) Vista aérea de una red de difracción existente en Nuevo México (denominado VLA). Cuando se satisface la ecuación 33-30 se suman constructivamente las señales de radio procedentes de galaxias muy lejanas. En este caso, d es la distancia entre dos telescopios adyacentes.



(c)



(d)



(a) Producción de un holograma. El diagrama de interferencia producido por el haz de referencia y el haz procedente del objeto se registra sobre una película fotográfica. (b) Cuando se revela la película y se ilumina con luz láser coherente, se ve una imagen tridimensional. Los hologramas que pueden verse en las tarjetas de crédito o en ciertos sellos de correos, denominados hologramas arco iris, son más complicados. Se utiliza una tira horizontal del holograma original para hacer un segundo holograma. La imagen tridimensional puede verse cuando el observador se mueve de un lado a otro, pero si se observa con luz láser, la imagen desaparece cuando los ojos del observador se mueven por arriba o por abajo de la imagen de la rendija. Cuando se observa con luz blanca, la imagen se ve de diferentes colores si el observador se mueve en la dirección vertical.

Hologramas

Una interesante aplicación de las redes de difracción consiste en la producción de una fotografía tridimensional denominada **holograma**. En una fotografía ordinaria, se recibe y registra sobre una película la intensidad de la luz reflejada por un objeto. Cuando la película se mira con luz transmitida, se obtiene una imagen bidimensional. En un holograma, un haz procedente de un láser se descompone o divide en dos haces, un haz de referencia y un haz objeto. El haz objeto se refleja en el objeto a fotografiar, y el diagrama de interferencia entre él y el haz de referencia se registra sobre una película fotográfica. Esto puede hacerse porque el haz de láser es coherente, de modo que puede mantenerse constante la diferencia de fase relativa entre el haz de referencia y el haz objeto durante la exposición. Las franjas de interferencia en la película actúan como una red de difracción. Cuando se ilumina con un láser la película, se produce una réplica tridimensional del objeto.

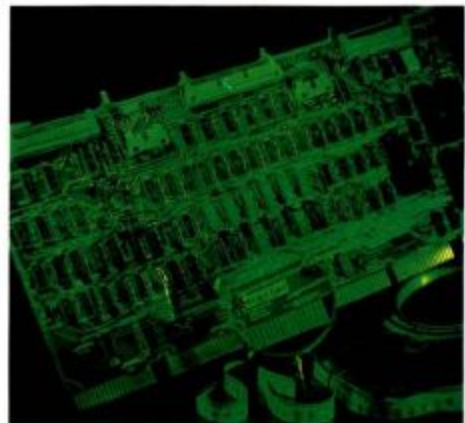


(a)

(a) Un técnico produce un holograma de una estatua en la Universidad de Estrasburgo. Cuando posteriormente se ilumina con luz láser la placa de vidrio, la estatua aparece en forma de imagen tridimensional. (b) y (c) Dos vistas del holograma «Digital». Obsérvese que aparecen partes diferentes del circuito detrás de la lupa situada en primer plano. (d) Una emulsión holográfica ampliada 100 veces. (e) Un sistema de proyección holográfica especial aparece delante del piloto, de modo que éste puede recibir información importante del panel de control del avión superpuesta sobre la vista directa de la pista de aterrizaje, todo al mismo tiempo.



(b)



(c)



(d)



(e)

Resumen

1. Dos rayos de luz interfieren constructivamente si su diferencia de fase es cero o un número entero de veces 360° . Interfieren destructivamente si su diferencia de fase es 180° o un número entero impar de veces 180° . Una causa frecuente de diferencias de fase son las diferencias de caminos o trayectos. Una diferencia de caminos Δr introduce una diferencia de fase δ dada por

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360^\circ$$

Se introduce una diferencia de fase de 180° cuando una onda luminosa se refleja en un límite o frontera entre dos medios, de forma que la velocidad de onda en el segundo medio es mayor que la que posee en el primero, como sucede con el aire y el agua o el vidrio.

2. La interferencia de rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de una película delgada produce bandas o franjas coloreadas como las que se observan con frecuencia en películas de jabón o de aceite. La diferencia de fase entre los dos rayos es el resultado de la diferencia de caminos que en este caso es el doble del espesor de la película más cualquier cambio de fase adicional debido a la reflexión de uno o ambos rayos.
3. El interferómetro de Michelson utiliza las interferencias para medir pequeñas distancias como las de las longitudes de onda de la luz, o para medir pequeñas diferencias en el índice de refracción, como el que existe entre el aire y el vacío.
4. La diferencia de trayectos a un ángulo θ sobre una pantalla alejada procedente de dos rayos que emergen de dos rendijas estrechas separadas entre sí una distancia d , es $d \sin \theta$. Cuando esta diferencia de caminos es un número entero de veces la longitud de onda, la interferencia es constructiva y la intensidad es máxima. Cuando la diferencia de fase es un número entero impar de $\lambda/2$, la interferencia es destructiva, dando como resultado un mínimo de intensidad

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= m \lambda & m &= 0, 1, 2, \dots & \text{máximos} \\ d \sin \theta &= (m + \frac{1}{2})\lambda & m &= 0, 1, 2, \dots & \text{mínimos} \end{aligned}$$

Si es I_0 la intensidad debida a cada rendija por separado, la intensidad en los puntos de interferencia constructiva es $4 I_0$ y la correspondiente a la interferencia destructiva es 0. Cuando existen muchas rendijas igualmente espaciadas, se presentan los máximos principales de interferencia en los mismos puntos que cuando habían sólo dos rendijas, pero los máximos son mucho más intensos y mucho más estrechos. En el caso de N rendijas, la intensidad de los máximos principales es $N^2 I_0$ y existen $N - 2$ máximos secundarios entre cada par de máximos principales.

5. Se produce difracción siempre que una porción de un frente de onda se encuentra limitada por un obstáculo o abertura. La intensidad de la luz en un punto cualquiera del espacio puede calcularse mediante el empleo del principio de Huygens, considerando que cada punto del frente de onda es una fuente o foco puntual y calculando el diagrama de interferencia resultante. Se observan diagramas de Fraunhofer a distancias grandes del obstáculo o abertura de modo que los rayos que llegan a un punto cualquiera son aproximadamente paralelos o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar los rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en su plano focal. Se observan diagramas de Fresnel en puntos próximos a la fuente. La difracción de la luz suele ser difícil de observar porque la longitud de onda es muy pequeña o porque la intensidad de la luz no es lo suficientemente intensa. Excepto en el caso de los diagramas de Fraunhofer de una rendija estrecha larga, los diagramas de difracción son normalmente difíciles de analizar.
6. Cuando la luz está incidiendo sobre una sola rendija de anchura a , el diagrama de intensidad sobre una pantalla muy alejada muestra un máximo central

de difracción ancho que disminuye a cero para un ángulo θ dado por

$$a \sin \theta = \lambda$$

La anchura del máximo central es inversamente proporcional a la anchura de la rendija. Se presentan otros ceros en el diagrama de difracción de una sola rendija en ángulos dados por

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

A cada lado del máximo central existen máximos secundarios de mucho menor intensidad.

- El diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer de dos rendijas es el mismo que el diagrama de interferencia correspondiente a dos rendijas estrechas modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija.
- Cuando la luz procedente de dos fuentes o focos que están muy próximos pasan a través de una abertura, los diagramas de difracción de ambas pueden solaparse. Si el solapamiento es demasiado grande, no pueden resolverse las dos fuentes como dos fuentes separadas. Cuando el máximo central de difracción de un foco coincide con el mínimo de difracción del otro, se dice que las dos fuentes están en el límite de resolución según el criterio de Rayleigh. En el caso de una abertura circular, la separación angular crítica de dos fuentes mediante el criterio para la resolución de Rayleigh es

$$\alpha_c = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

en donde D es el diámetro de la abertura.

- Una red de difracción está formada por un gran número de rayas o rendijas muy juntas, y se utiliza para medir la longitud de onda de la luz emitida por una fuente. Las posiciones de los máximos de interferencia de una red vienen dadas por

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

en donde m es el número de orden. El poder de resolución de una red es

$$R = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN$$

siendo N el número de rendijas de la red que resultan iluminadas y m el número de orden.

Sugerencias bibliográficas

Baumeister, Philip, y Gerald Pincus: «Optical Interference Coatings», *Scientific American*, diciembre 1970, pág. 58.

Tanto las cámaras de televisión, como los láseres, las lámparas de proyección y las lentes de diversos tipos, emplean películas delgadas para reflejar o transmitir luz de ciertas longitudes de onda.

Nassau, Kurt: «Color Involving Geometrical and Physical Optics», *The Physics and Chemistry of Color: The Fifteen Causes of Color*, parte IV, John Wiley and Sons, Nueva York, 1983.

Comprende un acertado estudio de la producción del color mediante películas delgadas.

Walker, Jearl: «The Amateur Scientist: A Ball Bearing Aids in the Study of Light and Also Serves as a Lens», *Scientific American*, noviembre 1984, pág. 186.

Es un informe acerca de una investigación poco corriente sobre las propiedades del diagrama de difracción de una bola de cojinete colocada en el haz de un láser.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer-se los siguientes conocimientos:

1. Poder resolver problemas en los que intervengan las interferencias en películas delgadas.
2. Poder describir el interferómetro de Michelson.
3. Poder hacer un esquema del diagrama de intensidad de la interferencia por dos rendijas y calcular la posición de los máximos y mínimos.
4. Ser capaz de utilizar el método de fasores para hallar la suma de varias ondas armónicas.
5. Poder hacer un esquema del diagrama de interferencia de tres o más rendijas igualmente espaciadas.
6. Estar en condiciones de dibujar el diagrama de difracción de una sola rendija y calcular la posición del primer mínimo de difracción.
7. Poder hacer un esquema del diagrama combinado interferencia-difracción correspondiente a varias rendijas.
8. Ser capaz de enunciar el criterio de Rayleigh para la resolución y utilizarlo para investigar las condiciones correspondientes a la resolución de dos objetos próximos.
9. Poder analizar el empleo de las redes de difracción y hallar el poder de resolución de una red.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Franjas
Anillos de Newton
Ópticamente plano

Interferómetro
Espejo de Lloyd
Fasor
Máximos secundarios
Máximos principales
Máximo central de difracción
Diagrama de difracción de Fraunhofer
Diagrama de difracción de Fresnel
Criterio de Rayleigh para la resolución
Red de difracción
Número de orden
Línea o raya espectral
Poder de resolución
Holograma

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. Cuando ocurre interferencia destructiva entre dos ondas, la energía se convierte en energía térmica.
2. Sólo se observa interferencia en ondas procedentes de fuentes coherentes.
3. En el diagrama de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola rendija, cuando más estrecha es ésta, más ancho es el máximo central del diagrama de difracción.
4. Una abertura circular puede producir un diagrama de difracción de Fraunhofer y uno de Fresnel.
5. La capacidad de resolver dos fuentes puntuales depende de la longitud de onda de la luz.

Problemas

Nivel I

33-1 Diferencia de fase y coherencia

1. ¿Cuál de los siguientes pares de fuentes o focos luminosos son coherentes? (a) Dos velas. (b) Una vela y su imagen en un espejo plano. (c) Dos pequeños orificios iluminados por el mismo foco. (d) Dos faros de un coche. (e) Dos imágenes de una vela debidas a la reflexión en la superficie delantera y trasera de un vidrio de ventana.
2. (a) ¿Qué diferencia de camino mínima se necesita para introducir un desplazamiento de fase de 180° en una luz de 600 nm de longitud de onda? (b) ¿Qué desplazamiento de fase introducirá esta diferencia de camino en luz de 800 nm de longitud de onda?
3. Dos fuentes coherentes de microondas que producen ondas de $1,5 \text{ cm}$ de longitud de onda están en el plano xy , una de ellas en el eje y en $y = 15 \text{ cm}$ y la otra en $x = 3 \text{ cm}$, $y = 14 \text{ cm}$. Si las fuentes están en fase, hallar la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al origen de coordenadas.
4. Una luz de 500 nm de longitud de onda está incidiendo normalmente sobre una película de agua de 10^{-4} m de espesor. El índice de refracción del agua es $1,33$. (a) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el agua? (b) ¿Cuántas longitudes

de onda están contenidas en la distancia $2t$, siendo t el espesor de la película? (c) ¿Cuál es la diferencia de fase entre la onda reflejada en la parte superior de la película y la reflejada en la inferior después de que ha recorrido esta distancia?

33-2 Interferencia en películas delgadas

5. Un aro de alambre se introduce en agua jabonosa y se saca de modo que la película jabonosa sea vertical. (a) Cuando se observa por reflexión con luz blanca, la parte superior de la película aparece negra. Explicar la razón. (b) Debajo de la región negra existen bandas coloreadas. ¿La primera de ellas es roja o azul? (c) Describir la apariencia de la película cuando se observa por transmisión de la luz.
6. Se prepara una película de aire en forma de cuña colocando un trocito de papel entre los bordes de dos láminas de vidrio planas. Una luz de 700 m de longitud de onda incide normalmente sobre las láminas de vidrio y se observan bandas de interferencia por reflexión. (a) La primera banda próxima al punto de contacto de las láminas, ¿es oscura o brillante? ¿Por qué? (b) Existen cinco bandas oscuras por centímetro. ¿Cuál es el ángulo de la cuña?
7. Se utiliza una capa muy fina de un material transparente con un índice de refracción de $1,30$ como un recubrimiento antirreflejante en la superficie de vidrio de índice de refrac-

ción 1,50. ¿Cuál deberá ser el espesor para que la película no refleje la luz de 600 nm de longitud de onda (en el vacío)?

8. El diámetro de hilos finos puede medirse muy exactamente mediante diagramas de interferencia. Se disponen dos láminas exactamente planas de vidrio de longitud L junto con el hilo en la forma indicada en la figura 33-37. Este montaje se ilumina con luz monocromática y se detectan las franjas de interferencia resultantes. Supóngase que $L = 20$ cm y se utiliza luz amarilla de sodio para su iluminación ($\lambda = 590$ nm). Si se ven 19 franjas brillantes a lo largo de la distancia de 20 cm, ¿cuáles son los límites del diámetro del hilo? *Indicación:* Puede que no esté justo en el extremo la franja 19, pero no se ven 20 franjas.

Figura 33-37 Problema 8.



33-3 El interferómetro de Michelson

9. Se inserta una película delgada de índice de refracción $n = 1,5$ para una luz de longitud de onda 600 nm en un brazo de un interferómetro de Michelson. (a) Si se produce un desplazamiento igual a 12 franjas, ¿cuál es el espesor de la película? (b) Si se cambia la iluminación por una luz de 400 nm, al insertar la película se produce un desplazamiento de 16 franjas. ¿Cuál es el índice de refracción de la película para esta luz de 400 nm de longitud de onda?

10. Se inserta una celdilla hueca de 5 cm de longitud y con ventanas de vidrio en un brazo de un interferómetro de Michelson. Se hace el vacío en la celdilla y se ajustan los espejos hasta obtener una franja brillante en el centro. Gradualmente y según se va introduciendo el aire de nuevo, se produce un desplazamiento de 49,6 franjas si se utiliza luz de 589,29 nm. (a) ¿Cuál es el número de ondas que hay en la celdilla de 5,0 cm de largo cuando está sometida al vacío? (b) ¿Cuál es el número de ondas cuando hay aire en la celdilla? (c) Según este experimento, ¿cuál es el índice de refracción del aire?

33-4 Diagrama de interferencia de dos rendijas

11. Dos rendijas estrechas separadas entre sí 1 mm se iluminan con luz de 600 nm de longitud de onda y se observa el diagrama de interferencia en una pantalla situada a 2 m. Calcular el número de franjas brillantes por centímetro que se verán en la pantalla.

12. Utilizando un aparato convencional de dos rendijas con luz de 589 nm de longitud de onda se observan, sobre una pantalla a 3 m, 28 franjas brillantes por centímetro. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?

13. Dos rendijas estrechas están separadas a una distancia d . Su diagrama de interferencia ha de observarse sobre una pantalla a gran distancia L . (a) Calcular el espaciado y de los máximos sobre la pantalla para luz de 500 nm de longitud de onda cuando $L = 1$ m y $d = 1$ cm. (b) ¿Es de esperar que se observe en la pantalla la interferencia de la luz en este caso? (c) ¿A qué distancia deberán encontrarse las rendijas para que los máximos se encuentren separados en 1 mm para esta longitud de onda y distancia de la pantalla?

14. Una rendija larga, estrecha y horizontal está situada a 1 m por encima de un espejo plano. El diagrama de interfe-

rencias producido por la rendija y su imagen se ven en una pantalla situada a una distancia de 1 m de la rendija. La longitud de onda de la luz es 600 nm. (a) Hallar la distancia encima del espejo correspondiente a un primer máximo. (b) ¿Cuántas bandas oscuras por centímetro se ven en la pantalla?

15. En una demostración en clase, se utiliza un rayo láser para iluminar dos rendijas separadas por 0,5 mm, y se observa el diagrama de interferencias producido sobre una pantalla situada a una distancia de 5 m. La distancia en la pantalla a la franja brillante número 37 es de 25,7 cm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

16. Se hace incidir luz de 633 nm de longitud de onda procedente de un láser de helio-neón normalmente sobre un plano que contiene dos rendijas. El primer máximo de interferencia se encuentra a 82 cm del máximo central cuando se observa en una pantalla situada a 12 m. (a) Calcular la separación de las rendijas. (b) ¿Cuántos máximos de interferencia se observan?

33-5 Suma de ondas armónicas utilizando fasores

17. Hallar la resultante de las dos ondas

$$E_1 = 2 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = 3 \text{ sen } (\omega t + 270^\circ)$$

18. Hallar la resultante de las dos ondas

$$E_1 = 4 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = 3 \text{ sen } (\omega t + 60^\circ)$$

33-6 Diagrama de interferencia de tres o más focos igualmente separados

19. Tres ondas tienen campos eléctricos dados por

$$E_1 = E_s \text{ sen } \omega t \quad E_2 = E_s \text{ sen } (\omega t + \delta) = E_s = E_s \text{ sen } (\omega t + 2\delta)$$

Utilizando el método de fasores, dibujar los fasores apropiados a cada una de ellas. Calcular la amplitud (en función de E_s) y la fase de la onda resultante para (a) $\delta = 30^\circ$, (b) $\delta = 60^\circ$, (c) $\delta = 90^\circ$ y (d) $\delta = 240^\circ$.

20. Tres rendijas están separadas entre sí por una distancia $d = 0,1$ mm y se iluminan uniformemente con luz de 600 nm de longitud de onda. Los diagramas de interferencia que se producen se observan en una pantalla situada a una distancia de 2 m. Calcular las posiciones de los máximos y mínimos de interferencia.

21. Cinco rendijas que se encuentran separadas entre sí por una distancia igual, se iluminan uniformemente. Dicha distancia es suficientemente grande como para que la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ sea válida en los primeros máximos. (a) Calcular el ángulo θ , entre el primer máximo de interferencia y el máximo central ($\theta = 0$) y comparar este ángulo con el formado con el primer mínimo. (b) Dibujar el diagrama de interferencias.

22. Repetir el problema 21 para seis rendijas igualmente espaciadas.

33-7 Diagrama de difracción de una sola rendija

23. Resulta fácil confundir la ecuación 33-19, a $\text{sen } \theta = m\lambda$, y la ecuación $d \text{ sen } \theta = m\lambda$. Definir para cada ecuación los símbolos y explicar sus aplicaciones.

24. Se hace incidir luz de 600 nm sobre una rendija larga y estrecha. Calcular el ángulo del primer mínimo de difracción si la anchura de la rendija es (a) 1 mm, (b) 0,1 mm, (c) 0,01 mm.

25. Se observa el diagrama de difracción de una sola rendija de la luz en una pantalla situada a una gran distancia L de la rendija. Obsérvese en la ecuación 33-20 que la anchura $2y$ del máximo central varía inversamente con la anchura a de la rendija. Calcular la anchura $2y$ para $L=2$ m, $\lambda=500$ nm, y (a) $a=0,1$ mm, (b) $a=0,01$ mm, y (c) $a=0,001$ mm.

26. En una demostración en clase de la difracción, se hace pasar un haz láser de 700 nm de longitud de onda a través de una rendija vertical de $0,5$ mm de anchura que luego incide sobre una pantalla distante 6 m. Hallar la longitud horizontal del máximo principal de difracción en la pantalla, es decir, hallar la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central.

27. Se hacen incidir microondas planas sobre una rendija larga y estrecha de 5 cm de longitud. El primer mínimo de difracción se observa a $\theta=37^\circ$. ¿Cuál es la longitud de onda de las microondas?

33-8 Diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas

28. Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con una luz de longitud de onda 500 nm. Las rendijas tienen una separación de $0,1$ mm y una anchura a . (a) Hallar la anchura a si el quinto máximo de interferencia está en el mismo ángulo que el primer mínimo de difracción. (b) En este caso, ¿cuántas franjas brillantes se verán en el máximo central de difracción?

29. Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con luz de 700 nm de longitud de onda. Las rendijas tienen una anchura de $0,01$ mm y están separadas por $0,2$ mm. ¿Cuántas franjas brillantes se verán en el máximo de difracción central?

30. Supóngase que el máximo central de difracción correspondiente a dos rendijas contiene 17 franjas de interferencia para cierta longitud de onda de la luz. ¿Cuántas franjas de interferencia se espera que existan en el primer máximo secundario de difracción?

33-9 Difracción de Fraunhofer y de Fresnel

No se proponen problemas para esta sección.

33-10 Difracción y resolución

31. Una luz de 700 nm de longitud de onda está incidiendo sobre un agujerito de $0,1$ mm. (a) ¿Cuál es el ángulo que hay entre el máximo central y el primer mínimo de difracción correspondiente a una difracción de Fraunhofer? (b) ¿Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo de difracción en una pantalla situada a 8 m?

32. Dos fuentes de longitud de onda 700 nm están a 10 m del orificio del problema 31. ¿A qué distancia deben estar entre sí las fuentes para que sus diagramas de difracción sean resueltos por el criterio de Rayleigh?

33. (a) ¿A qué distancia deben estar entre sí dos objetos en la Luna para que puedan ser resueltos por el ojo sin la ayuda de ningún instrumento? Considerar que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm, la longitud de onda de la luz es de 600 nm y la distancia a la Luna es de $380\,000$ km. (b) ¿A qué distancia deben estar los objetos en la Luna para que sean resueltos mediante un telescopio que tiene un espejo de 5 m de diámetro?

34. Dos fuentes de 700 nm de longitud de onda están separadas por una distancia horizontal x . Están a 5 m de una rendija

vertical de $0,5$ mm de anchura. ¿Cuál es el menor valor de x que permite que el diagrama de difracción de las fuentes sea resuelto mediante el criterio de Rayleigh?

35. ¿Cuál es la abertura necesaria (en milímetros) en unos prismáticos de ópera (binoculares) para que un observador pueda distinguir las pestañas de una soprano (separadas entre sí $0,5$ mm) situada a una distancia de 25 m? Suponer que la longitud de onda efectiva de la luz es de 550 nm.

36. Los faros de un pequeño coche se encuentran separados por una distancia de 112 cm. ¿A qué distancia máxima pueden resolverse estos faros si el diámetro de las pupilas es de 5 mm y la longitud de onda efectiva de la luz es de 550 nm?

37. Los cazadores suelen decir que no se debe disparar hasta que se observa el blanco de los ojos del animal. Si los ojos se encuentran separados entre sí por una distancia de $6,5$ cm y el diámetro de la pupila del observador es de 5 mm. ¿A qué distancia pueden resolverse los dos ojos utilizando luz de 550 nm?

33-11 Redes de difracción

38. Una red de difracción con 2000 rendijas por centímetro se utiliza para medir las longitudes de onda emitidas por el gas hidrógeno. ¿En qué ángulo θ , en el espectro de primer orden, deberá esperarse hallar las dos líneas violetas de 434 y 410 nm de longitud de onda?

39. Con la red utilizada en el problema 38, se encuentran otras dos líneas del espectro de hidrógeno de primer orden en los ángulos $\theta_1=9,72 \times 10^{-2}$ rad y $\theta_2=-1,32 \times 10^{-1}$ rad. Hallar las longitudes de onda de estas líneas.

40. Repetir el problema 38 en el caso de una red con $15\,000$ líneas por centímetro.

41. Una red de 2000 rendijas por centímetro se utiliza para analizar el espectro del mercurio. (a) Hallar la desviación angular de primer orden de las dos líneas de $579,0$ y $577,0$ nm de longitud de onda. (b) ¿Cuál deberá ser la anchura del haz en la red para que puedan resolverse estas líneas?

42. ¿Cuál es la longitud de onda más larga que puede observarse en el espectro de quinto orden utilizando una red con 4000 rendijas por centímetro?

Nivel II

43. Se hace incidir normalmente luz procedente de un láser sobre tres rendijas muy estrechas e igualmente espaciadas. Cuando se cubre una de las rendijas de los extremos, el máximo de primer orden se encuentra situado a $0,60^\circ$ de la normal. Si se cubre la rendija central dejando las otras dos abiertas, calcular (a) el ángulo del máximo de primer orden y (b) el número de orden del máximo que en estas condiciones se produce con el mismo ángulo que lo hacía anteriormente el máximo de cuarto orden.

44. Normalmente el techo de las bibliotecas se recubre de un tipo de aislante acústico que posee pequeños orificios separados por una distancia de aproximadamente $6,0$ mm. (a) Utilizando luz con longitud de onda de 500 nm, ¿a qué distancia debería encontrarse una persona para poder resolver estos orificios? El diámetro de la pupila del ojo del observador es de aproximadamente 5 mm. (b) ¿Podrían verse mejor estos orificios si se utilizara luz roja o luz violeta?

45. El telescopio del Monte Palomar posee un diámetro aproximado de 5 m (200 pulgadas). Suponiendo que las condicio-

nes del cielo fuesen «ideales», la resolución estaría limitada por la difracción. Supongamos una estrella doble que se encuentra a 4 años-luz. ¿Cuál debe ser la separación entre las estrellas para que sus imágenes puedan ser resueltas?

46. Una lámina de mica de $1,20 \mu\text{m}$ de espesor se encuentra suspendida en el aire. En el espectro de luz reflejada en la lámina se encuentran ventanas en el espectro visible a 421, 474, 542, y 633 nm. Calcular el índice de refracción de la mica.

47. Una película delgada de índice de refracción 1,5 está rodeada por aire. Se ilumina normalmente con luz blanca y se observa por reflexión. El análisis de la luz reflejada resultante muestra que las únicas longitudes de onda que se han perdido cerca de la parte visible del espectro son las de 360, 450 y 602 nm. Es decir, en el caso de estas longitudes de onda existe interferencia destructiva. (a) ¿Cuál es el espesor de la película? (b) ¿Qué longitudes de onda visible serán de un brillo extra en el diagrama de interferencia reflejado? (c) Si esta película está depositada sobre vidrio cuyo índice de refracción es 1,6, ¿qué longitudes de onda del espectro visible se perderán en la luz reflejada?

48. En un láser de rubi de 694 nm de longitud de onda, los extremos del cristal de rubi constituyen la abertura que determina el diámetro del haz de luz emitido. Si el diámetro es de 2 cm y se apunta el láser en dirección a la Luna, situada a 380 000 km de distancia, calcular aproximadamente el diámetro del haz de luz que alcanza la Luna, suponiendo que los efectos se deben sólo a la difracción.

49. Se hace incidir luz de sodio de 589 nm de longitud de onda normalmente sobre una red de difracción de 2 cm^2 con 4000 líneas por centímetro. Se proyecta el diagrama de difracción de Fraunhofer sobre una pantalla situada a 1,5 m mediante una lente de 1,5 m de distancia focal situada justo enfrente de la red. Calcular (a) las posiciones de los dos primeros máximos de intensidad en uno de los lados del máximo central, (b) la anchura del máximo central, y (c) la resolución en el primer orden.

50. En el segundo máximo secundario del diagrama de difracción de una sola rendija, la diferencia de fase entre las ondas procedentes de la parte superior e inferior de la rendija es aproximadamente igual a 5π . Los fasores utilizados para calcular la amplitud en este punto completan dos círculos y medio. Si I_0 es la intensidad en el máximo central, calcular la intensidad I en este segundo máximo secundario.

51. Una lente de una cámara fotográfica se construye de vidrio cuyo índice de refracción es 1,6. Esta lente se recubre con una película de fluoruro magnésico ($n = 1,38$) para mejorar su transmisión luminosa. Esta película ha de producir una reflexión cero para la luz de longitud de onda 540 nm. Considerar que la superficie de la lente es un plano liso y que la película tiene un espesor uniforme. (a) ¿Cuál deberá ser el espesor de la película para realizar su objetivo en primer lugar? (b) ¿Existirán interferencias destructivas para otras longitudes de onda visibles? (c) En qué factor se reducirá la reflexión en esta película en el caso de la longitud de onda de 400 y 700 nm? Despreciar la variación de la luz reflejada procedente de las dos superficies.

52. (a) Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla a una distancia grande L de tres fuentes igualmente separadas (separación d , siendo $d \gg \lambda$) vienen dadas aproximadamente por

$$y = \frac{n\lambda L}{3d} \quad \text{donde } n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots$$

es decir, n no es un múltiplo de 3. (b) Para $L = 1 \text{ m}$, $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ y $d = 0,1 \text{ mm}$, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las tres fuentes.

53. (a) Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla a una distancia grande L de cuatro fuentes igualmente espaciadas (espaciado $d \gg \lambda$)

$$y = \frac{n\lambda L}{4d} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, \dots$$

es decir, n no es múltiplo de 4. (b) Para $L = 2 \text{ m}$, $\lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$, y $d = 0,1 \text{ mm}$, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las cuatro fuentes. Comparar esta anchura con la de dos fuentes con el mismo espaciado.

54. En una cámara de orificio pequeño se obtienen imágenes borrosas debido al tamaño finito del orificio y a los fenómenos de difracción. Cuanto más pequeño es el orificio, se reduce la borrosidad debida al tamaño de éste (es decir, debido a los rayos que llegan al punto imagen procedentes de diferentes partes del objeto), pero la borrosidad debida a la difracción se incrementa. El tamaño óptimo de la abertura para la imagen más definida es aquel para el cual la dispersión debida a la difracción iguala a la dispersión debida al tamaño. Estimar el tamaño óptimo de la abertura si la distancia desde el orificio a la pantalla es de 10 cm y la longitud de onda de la luz 550 nm.

55. Se hace incidir luz de 480 nm de longitud de onda sobre cuatro rendijas: cada una de ellas de $2 \mu\text{m}$ de anchura y separada de la siguiente por $6 \mu\text{m}$. (a) Calcular el ángulo al centro del primer cero del diagrama de difracción de una sola rendija. (b) Calcular los ángulos de cualquier máximo de interferencia brillante que se encuentre en el interior del máximo de difracción central. (c) Calcular la dispersión angular entre el máximo de interferencia central y el primer mínimo de interferencia en ambos lados de éste. (d) Representar la intensidad en función del ángulo en una pantalla distante.

56. Una gota de aceite ($n = 1,22$) flota sobre agua ($n = 1,33$). Cuando se observa luz reflejada desde arriba como se ve en la figura 33-38, ¿cuál es el espesor de la gota en el punto en donde se observa la segunda franja roja, contando desde el borde de la gota? Suponer que dicha luz tiene una longitud de onda de 650 nm.

Figura 33-38 Problema 56.



57. El pintor impresionista Georges Seurat utilizaba una técnica denominada «puntillismo», en la cual sus pinturas estaban compuestas por puntos pequeños cercanos de color puro, cada uno de ellos de unos 2 mm de diámetro. La ilusión de la mezcla de colores de forma suave se produce en el ojo del observador debido a efectos de difracción. Calcular la distancia mínima de visión para que este efecto actúe adecuadamente. Utilizar la longitud de onda de la luz visible que

requiere la máxima distancia, de modo que nos aseguremos que el efecto funciona para todas las longitudes de onda de la luz visible. Suponer que la pupila del ojo tiene un diámetro de 5 mm.

58. Se utiliza luz de 600 nm de longitud de onda para iluminar normalmente dos placas de vidrio de 22 cm de longitud que están en contacto por un extremo y están separadas en el otro por un hilo de 0,025 mm de diámetro. ¿Cuántas franjas aparecerán a lo largo de la longitud total de las placas?

59. Una red de difracción cuadrada con un área de 25 cm² tiene una resolución de 22 000 en el cuarto orden. ¿Con qué ángulo deberá realizarse una observación para ver una longitud de onda de 510 nm en el cuarto orden?

60. Luz de 550 nm de longitud de onda ilumina dos rendijas de anchura 0,03 mm y separación 0,15 mm. (a) ¿Cuántos máximos de interferencia caen dentro de la anchura total del máximo central de difracción? (b) ¿Cuál es el cociente entre la intensidad del tercer máximo de interferencia a un lado de la línea central (sin contar el máximo central de interferencia) y la intensidad del máximo de interferencia central?

61. La luz está incidiendo con un ángulo ϕ respecto a la normal sobre un plano vertical que contiene dos rendijas de separación d (figura 33-39). Demostrar que los máximos de interferencia están situados en los ángulos θ dados por $\sin \theta + \sin \phi = m\lambda/d$.

Figura 33-39 Problema 61.



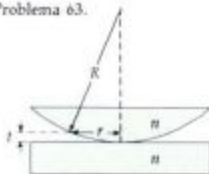
62. Luz blanca cae con un ángulo de 30° respecto a la normal sobre un plano que contiene un par de rendijas separadas en 2,5 μm. ¿Qué longitudes de onda de luz visible dan un máximo de interferencia brillante en la luz transmitida en la dirección normal al plano? (Ver problema 61.)

Nivel III

63. Un aparato de anillos de Newton se compone de una lente de vidrio de radio de curvatura R que descansa sobre una lámina de vidrio plana como se ve en la figura 33-40. La película delgada entre ambas es aire de espesor variable. El diagrama se observa por luz reflejada. (a) Demostrar que en el caso de un espesor t la condición para una franja de interferencia brillante (constructiva) es

$$t = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Figura 33-40 Problema 63.



(b) Demostrar que en tanto $t/R \ll 1$, el radio r de una franja circular brillante viene dado por

$$r = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda R} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(c) ¿Qué aspecto tendrá el diagrama de la luz transmitida en comparación con el de la luz reflejada? (d) Utilizar $R = 10$ m y un diámetro de 4 cm para la lente. ¿Cuántas franjas brillantes se verán si el aparato se ilumina con luz amarilla de sodio ($\lambda = 590$ nm) y se observa por reflexión? (e) ¿Cuál será el diámetro de la sexta franja brillante? (f) Si el vidrio utilizado en el aparato tiene un índice de refracción $n = 1,5$ y se coloca agua entre los dos trozos de vidrio, ¿qué variaciones tendrán lugar en las franjas brillantes?

64. Un refractómetro de laminas es un dispositivo para medir o comparar los índices de refracción de los fluidos. Este dispositivo divide un haz de luz monocromática en dos partes, cada una de las cuales es dirigida a lo largo del eje de un tubo cilíndrico para luego combinarse de nuevo en un solo haz que se hace pasar a través de un telescopio. Suponer que la longitud de cada tubo es de 0,4 m y que se utiliza luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. Ambos tubos se someten inicialmente al vacío y se observa una interferencia constructiva en el centro del campo de visión. Según se permite entrar el aire lentamente en uno de los tubos, el campo de visión central varía alternativamente de oscuro a brillante un total de 198 veces. (a) ¿Cuál es el índice de refracción del aire? (b) Si se pueden contar las franjas con un error de ± 25 franjas, en donde una de las franjas es equivalente a un ciclo completo de la variación de intensidad en el centro del campo de visión, ¿con una precisión puede determinar este experimento el índice de refracción del aire?

65. En el caso de una red de difracción estamos interesados no sólo en el poder de resolución R , que es la capacidad de la red para separar dos longitudes de onda próximas, sino también en la dispersión D de la red. Ésta se define por $D = \Delta\theta_m/\Delta\lambda$ en el orden m -ésimo. (a) Demostrar que puede escribirse D como

$$D = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}$$

siendo d el espaciado de la red. (b) Si se han de resolver las dos rayas amarillas del sodio (longitudes de onda 589,0 y 589,6 nm) mediante una red de difracción de segundo orden con 2000 rendijas por centímetro, ¿cuántas rendijas deben ser iluminadas mediante el haz? (c) ¿Cuál será la separación entre estas líneas amarillas resueltas si se observa el diagrama en una pantalla situada a 4 m de la red?

66. Luz de longitud de onda λ se difracta a través de una rendija única de anchura a y el diagrama resultante se observa en una pantalla situada a una distancia grande L de la rendija. (a) Demostrar que la anchura del máximo principal en la pantalla viene dada aproximadamente por $2L\lambda/a$. (b) Si se corta una rendija de anchura $2L\lambda/a$ en la pantalla y se ilumina, demostrar que la anchura de su máximo principal a la misma distancia L , es decir de nuevo sobre el plano de la rendija, vale a con la misma aproximación.

67. Un experimento de doble rendija utiliza un láser helio-neón con una longitud de onda de 633 nm y una separación entre rendijas de 0,12 mm. Cuando se coloca una lámina delgada de plástico delante de una de las rendijas, el diagrama de interferencia se desplaza en 5,5 franjas. Cuando se repite el experimento bajo el agua, el desplazamiento es de 3,5 franjas. Calcular (a) el espesor de la lámina de plástico y (b) el índice de refracción de la misma.

68. Tres rendijas, cada una de ellas separada de sus vecinas en 0,06 mm, se iluminan mediante una fuente de luz coherente de 550 nm de longitud de onda. Las rendijas son extremadamente estrechas, de modo que pueden ignorarse los efectos de la difracción. Se sitúa una pantalla a 2,5 m de las rendijas. La intensidad de la línea central es 0,05 W/m². Considérenos un lugar a 1,72 cm de la línea central. (a) Dibujar los fasores, de acuerdo con el modelo para la suma de ondas armónicas, apropiado para este lugar. (b) A partir del diagrama de fasores, calcular la intensidad luminosa en dicha posición.

69. Dos fuentes coherentes están situadas sobre el eje *y* a $+\lambda/4$ y $-\lambda/4$. Emiten ondas de longitud de onda λ e intensidad I_0 . (a) Calcular la intensidad neta *I* en función del ángulo θ medido desde el eje $+x$. (b) Hacer una representación polar de $I(\theta)$.

70. Repetir el problema 69 para cuatro fuentes que están situadas sobre el eje *y* en $+3\lambda/4, +\lambda/4, -\lambda/4$ y $-3\lambda/4$.

71. En el caso de la difracción por una sola rendija, calcular los tres primeros valores de ϕ (que es la diferencia de fase total entre los rayos procedentes de cada borde de la rendija) que producen máximos subsidiarios mediante (a) el empleo del modelo de fasores y (b) haciendo $dI/d\phi = 0$, en donde *I* viene dada por la ecuación 33-23.

72. En el caso de una red de difracción en la que todas las superficies son normales a la radiación incidente, la mayoría de la energía se consume en el orden cero, que resulta inútil desde el punto de vista espectroscópico puesto que las diversas longitudes de onda no resultan angularmente dispersadas. Por consiguiente, las redes modernas tienen los surcos con forma especial como se ve en la figura 33-41. Estos surcos así conformados desplazan la reflexión especular, que contiene la mayor parte de la energía, del orden cero a otro orden superior. (a) Calcular el ángulo de inclinación ϕ en función de *a* (separación entre surcos), de λ (la longitud de onda) y de *m* (el orden en el que ha de producirse la reflexión especular). (b) Calcular el ángulo adecuado para que la reflexión especular se produzca en el segundo orden para la luz de longitud de onda de 450 nm que incide sobre una red con 10 000 líneas por centímetro.

73. En este problema se deducirá la ecuación 33-31 que da el poder de resolución de una red de difracción que contiene *N* rendijas separadas entre sí una distancia *d*. Para ello, se calculará la separación angular entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ y la haremos igual a la separación angular del máximo de orden *m*-ésimo correspondiente a dos longitudes de onda próximas. (a) Demostrar que la diferencia de fase ϕ entre la luz procedente de dos rendijas adyacentes viene dada por

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

(b) Derivar esta expresión para demostrar que una pequeña variación en el ángulo $d\theta$ da como resultado un cambio de fase $d\phi$ dado por

$$d\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta d\theta$$

(c) En el caso de *N* rendijas, la separación angular entre un máximo de interferencia y un mínimo de interferencia corresponde a un cambio de fase de $d\phi = 2\pi/N$. Utilizar este hecho para demostrar que la separación angular $d\theta$ entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ viene dada por

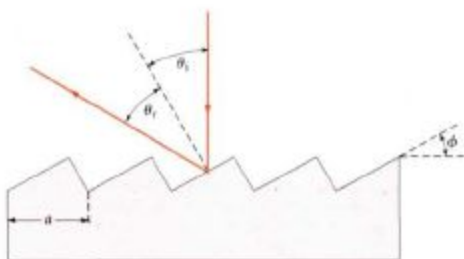
$$d\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad 33-32$$

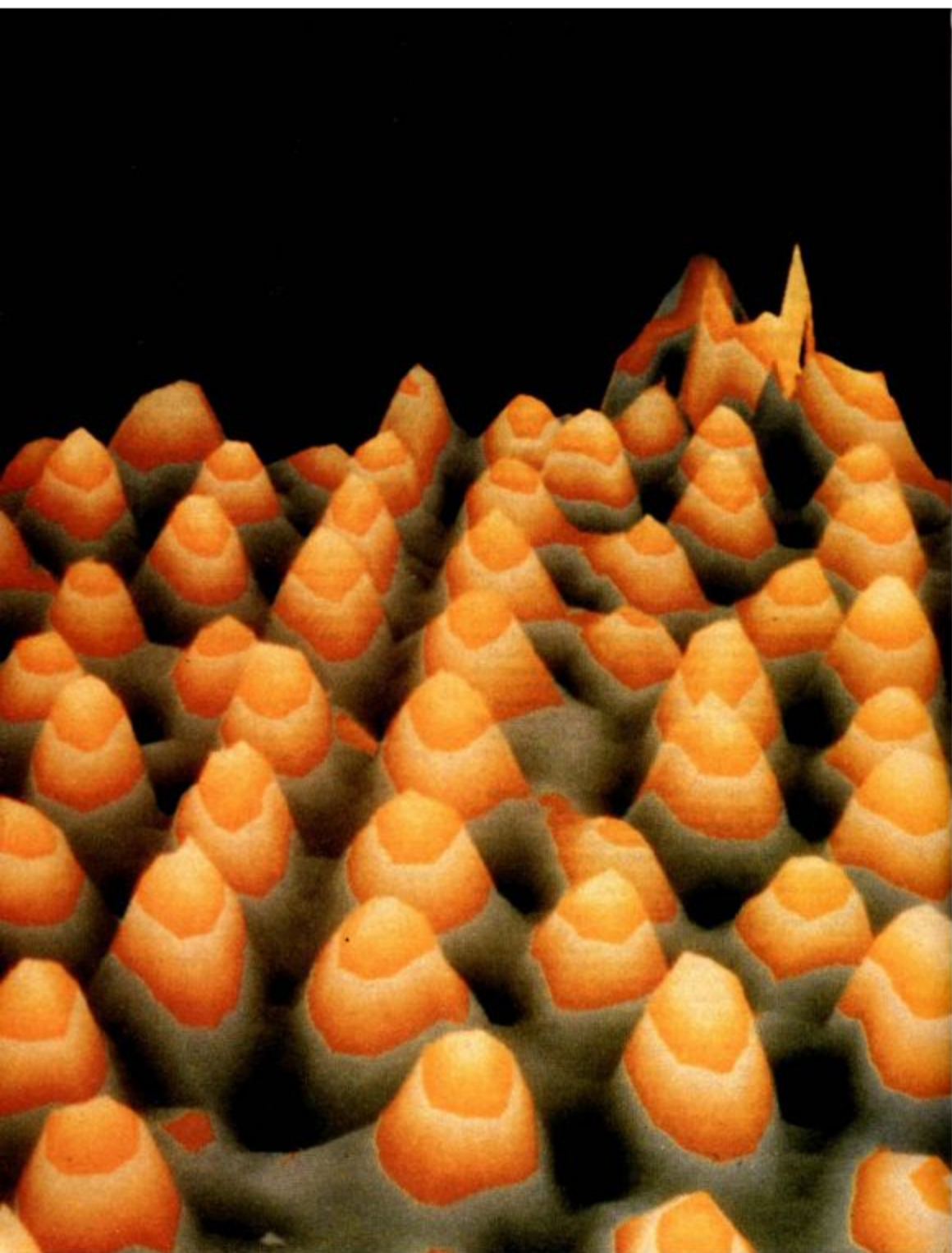
(d) El ángulo del máximo de interferencia de orden *m*-ésimo para la longitud de onda λ viene dado por la ecuación 33-30. Calcular la diferencial de cada miembro de esta ecuación para demostrar que la separación angular del máximo de orden *m*-ésimo para dos longitudes de onda muy cercanas que difieren en $d\lambda$ viene dada por

$$d\theta = \frac{m d\lambda}{d \cos \theta} \quad 33-33$$

(e) De acuerdo con el criterio de Rayleigh, se resolverán en el orden *m*-ésimo dos longitudes de onda si la separación angular de las mismas dada por la ecuación 33-33 es igual a la separación angular del máximo y el mínimo de interferencia dados por la ecuación 33-32. Utilizarlo para deducir la ecuación 33-31 que nos da el poder de resolución de una red.

Figura 33-41 Problema 72.





6

Parte

Física Moderna

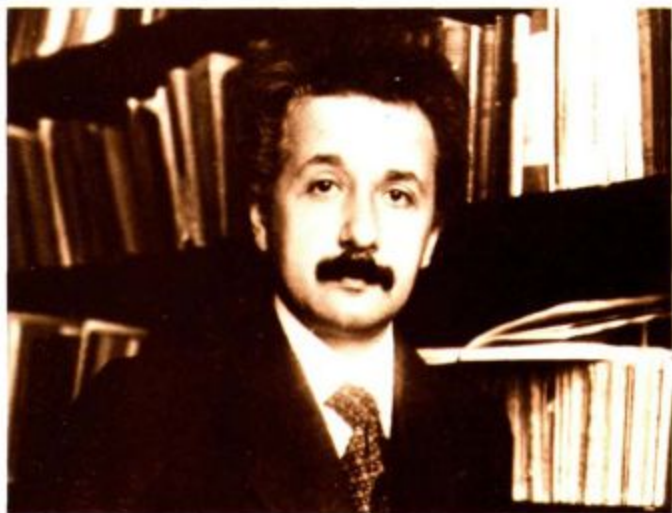


En esta fotografía se muestra con una amplificación de alrededor de 1 000 000 000 la superficie del silicio, ingrediente importante en muchos dispositivos semiconductores. Los átomos individuales se ven como colinas en esta micrografía, obtenida mediante un modernísimo microscopio de barrido. La información digital reunida por el microscopio se representa mediante un ordenador, que asigna falsos colores para acentuar la estructura cristalina.

Capítulo 34

Relatividad

Albert Einstein en 1916.



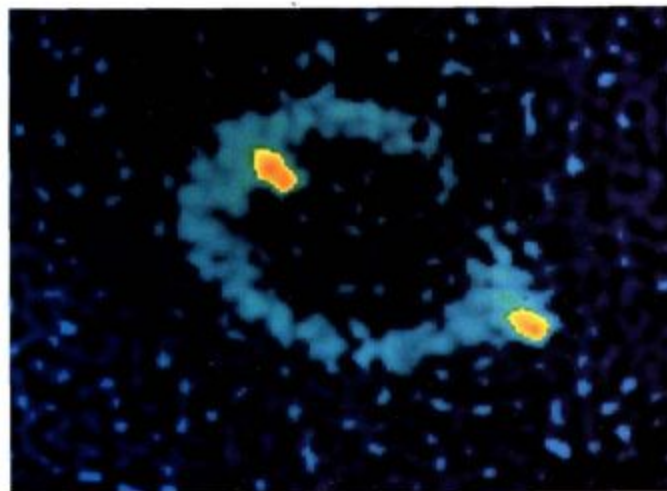
A finales del siglo XIX, muchos físicos pensaban que ya se habían descubierto todas las leyes importantes de la física y que les había quedado poco que hacer, excepto quizás ultimar los detalles restantes. Las leyes de Newton del movimiento y de la gravedad parecían describir todos los movimientos conocidos sobre la Tierra igual que los de los planetas y demás cuerpos celestes, mientras que las ecuaciones de Maxwell de la electricidad y el magnetismo parecían dar una descripción completa de los fenómenos electromagnéticos. Incluso, aunque fueron acumulándose nuevas pruebas acerca del comportamiento de las moléculas y de los átomos, se suponía que estos nuevos fenómenos llegarían a ser adecuadamente descritos por las teorías de Newton y de Maxwell. Sin embargo, el descubrimiento de la radioactividad por Becquerel en 1896, los artículos teóricos de Planck en 1897 y de Einstein en 1905, junto con el trabajo de Rutherford, Millikan, Bohr, De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, y otros en los primeros años del siglo XX condujeron a la elaboración de dos teorías completamente nuevas: la relatividad y la mecánica cuántica. Estas teorías revolucionaron el mundo de la ciencia y constituyeron los fundamentos de nuevas tecnologías que han cambiado la faz de nuestra civilización.

En este capítulo estudiaremos la relatividad. La teoría de la relatividad se compone de dos teorías bastante diferentes, la teoría especial y la teoría general.

La primera, desarrollada por Einstein y otros científicos en 1905, se refiere esencialmente a la comparación entre las medidas realizadas en diferentes sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros. Sus consecuencias, que pueden deducirse con un mínimo de cálculo matemático, son aplicables en una gran diversidad de situaciones que aparecen en ciencia y en la técnica. Por otra parte, la teoría general, también desarrollada por Einstein y otros investigadores alrededor de 1916, trata con sistemas de referencia acelerados y con la gravedad. Una comprensión completa de la teoría general exige el empleo de matemáticas avanzadas y muy complejas y las aplicaciones de esta teoría se enmarcan principalmente en el área de la gravitación. Tiene una gran importancia en la cosmología, pero se encuentra raramente en otras áreas de la física o de la ingeniería. Por consiguiente, nos dedicaremos a la teoría especial (frecuentemente denominada *relatividad especial*) y únicamente comentaremos brevemente la teoría general en la última sección de este capítulo.

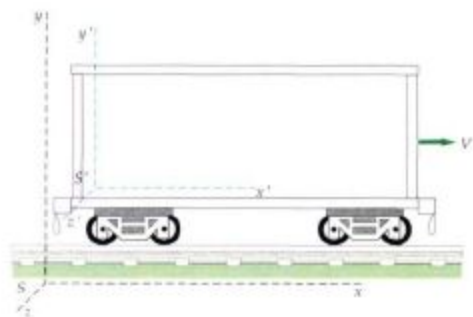
34-1 Relatividad newtoniana

La primera ley de Newton no distingue entre una partícula en reposo y otra que se está moviendo con velocidad constante. Si no existe ninguna fuerza externa neta actuando sobre ella, la partícula permanecerá en su estado inicial—bien en reposo, o moviéndose con su velocidad inicial. Consideremos una partícula en reposo respecto a nosotros sin que actúen fuerzas sobre ella. De acuerdo con la primera ley de Newton, seguirá estando en reposo. A continuación consideremos la misma partícula desde el punto de vista de un segundo observador que se está moviendo con velocidad constante respecto a nosotros. Desde el «sistema de referencia» de este observador, tanto nosotros como la partícula se está moviendo con velocidad constante. La primera ley de Newton también es válida para dicho observador. (Obsérvese que si éste se estuviese acelerando respecto a nosotros, vería cómo la partícula se aceleraba respecto a él sin que actuase ninguna fuerza sobre ella. En consecuencia, la primera ley de Newton no es válida para él.) ¿Cómo podremos distinguir si somos nosotros y la partícula los que estamos en reposo mientras que el segundo observador se mueve con velocidad constante, o es este segundo observador quien permanece en reposo y estamos en movimiento tanto nosotros como la partícula?



Esta estructura en forma de anillo de la radio-fuente MG1131 + 0456 se considera debida a la acción de «lente gravitatoria», propuesta por primera vez por Einstein en 1936, en la que una cierta fuente se transforma en una imagen en forma de anillo debido a un objeto muy grande y de gran masa situado más hacia delante.

Figura 34-1 Vagón que se está moviendo con velocidad constante a lo largo de una vía rectilínea. El sistema de referencia S está en reposo respecto al vagón mientras que se mueve con velocidad V en relación a S , que está en reposo respecto a la vía. Es imposible decir mediante la realización de experimentos mecánicos dentro del vagón si es éste el que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V o es la vía la que se mueve hacia la izquierda con velocidad V .



Consideremos algunos ejemplos sencillos. Supongamos que se tiene un tren moviéndose sobre una vía recta y horizontal con velocidad constante V . (Suponemos que en el movimiento no existen saltos ni traqueteos.) Escogamos un sistema de coordenadas xyz con el eje x a lo largo de la vía, como se ve en la figura 34-1. No importa qué punto de la vía escogemos como origen. Dentro de las diferentes posibilidades, diferirán las posiciones del tren y sus contenidos (respecto al origen), pero su velocidad será siempre la misma. Un conjunto de sistemas coordinados en reposo relativo entre sí se denomina un **sistema de referencia**. Llamaremos S al sistema de referencia en reposo respecto al sistema de la vía. Pasamos ahora a la realización de diversos experimentos mecánicos en un vagón cerrado del tren. Para todos ellos escogeremos un sistema coordinado en reposo relativo al tren. Este sistema coordinado es un sistema de referencia S' , que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V relativa al sistema S . Obsérvese que una pelota en reposo en el tren seguirá estando en reposo. Si dejamos caer la pelota, cae en línea recta hacia abajo en el sistema S' con la aceleración debida a la gravedad g . (Como es natural, cuando se observa en el sistema S , la pelota describirá una trayectoria parabólica porque tiene una velocidad inicial V hacia la derecha.) Ningún experimento mecánico que podamos hacer —la medición del período de un péndulo o de un cuerpo sobre un muelle, la observación de la colisión de dos cuerpos, o cualquier otro— nos dirá si el tren se está moviendo y la vía está en reposo, o si es la vía la que se mueve y el tren está en reposo. Las leyes de Newton son válidas tanto para el sistema de referencia S' como para el sistema de referencia S .

Un sistema en el que son válidas las leyes de Newton se denomina **sistema de referencia inercial**.

Todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial son también sistemas de referencia inerciales.

Si tenemos dos sistemas de referencia inerciales moviéndose con velocidad constante uno respecto al otro, como los sistemas S y S' , no existe ningún experimento mecánico que pueda decirnos cuál está en reposo y cuál está en movimiento, o si ambos están moviéndose. Este resultado se conoce como el **principio de la relatividad newtoniana**:

No puede detectarse el movimiento absoluto.

Este principio fue bien conocido por Galileo, Newton, y otros científicos en el siglo XVII. Pero durante el siglo XIX, cambió esta visión del problema. Entonces se pensaba generalmente que la relatividad newtoniana no era válida y que en principio podía detectarse el movimiento absoluto haciendo una medida de la velocidad de la luz.

34-2 El experimento de Michelson-Morley

Durante nuestro estudio del movimiento ondulatorio hemos aprendido que todas las ondas mecánicas necesitan un medio para su propagación y que la velocidad de dichas ondas depende únicamente de las propiedades del medio. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras en aire depende de la temperatura de este último. Esta velocidad se refiere al aire en calma. Ciertamente que puede detectarse el movimiento relativo al aire en calma. Si nos movemos respecto al aire en calma, notamos la sensación de viento.

Por consiguiente, era natural esperar que la propagación de la luz y de otras ondas electromagnéticas se realizase en cierto tipo de medio de soporte. El medio que se propuso recibió históricamente el nombre de *éter*, pero resultaba ser un medio con propiedades muy poco corrientes. Por ejemplo, debería tener una gran rigidez para que permitiese la propagación de ondas de velocidades tan elevadas. (Recuérdese que la velocidad de las ondas en una cuerda dependía de la tensión aplicada en ella, y que las ondas sonoras longitudinales en un sólido dependían del módulo de compresibilidad del mismo.) Pero, por otra parte, el éter no podía introducir ningún tipo de fuerza de arrastre o rozamiento en los planetas, ya que su movimiento se explicaba totalmente con el sólo empleo de la ley de la gravitación. Se sospechaba que el éter estaba en reposo relativo respecto a las estrellas lejanas, pero se consideraba que este punto constituía una cuestión abierta. Por tanto, resultaba de considerable interés determinar la velocidad de la Tierra respecto al éter. Albert Michelson emprendió la realización de experimentos para esta determinación, primero en 1881 y luego de nuevo con Edward Morley en 1887 con mayor precisión. Se pensaba que una medición de la velocidad de la luz respecto a cierto sistema de referencia que se moviese a través del éter daría un resultado mayor o menor que c en una cantidad que dependía de la velocidad del sistema en relación con el éter, y de la dirección del movimiento respecto a la dirección del haz de luz. Así pues, en 1881 Michelson decidió medir la velocidad de la luz respecto a la Tierra y a partir de esta medición determinar la velocidad de la Tierra con respecto al éter.

De acuerdo con la teoría de Maxwell del electromagnetismo, la velocidad de la luz y de otras ondas electromagnéticas es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

en donde ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del espacio libre o vacío. No hay nada en las ecuaciones de Maxwell que nos diga en qué sistema de referencia tendrá que tener este valor la velocidad de la luz, pero se esperaba que ésta debía ser la velocidad de la luz respecto a su medio natural, el éter.

En las medidas usuales de la velocidad de la luz (sección 30-1), se determinaba el tiempo que empleaba un pulso de luz en ir y volver a un espejo. La figura 34-2 muestra una fuente luminosa y un espejo separados una distancia L . Si suponemos que ambos se están moviendo con velocidad v a través del éter, la teoría clásica predice que la luz viajará hacia el espejo con velocidad $c - v$ y regresará con velocidad $c + v$ (siendo ambas velocidades relativas al espejo y a la fuente luminosa). El tiempo empleado en el recorrido completo sería

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = 2c \frac{L}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad 34-1$$

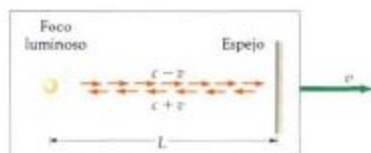


Figura 34-2 Foco luminoso y espejo moviéndose con velocidad v respecto al «éter». De acuerdo con la teoría clásica, la velocidad de la luz respecto al foco y al espejo es $c - v$ hacia el espejo y $c + v$ alejándose del espejo.

Podemos ver que este valor difiere del tiempo $2L/c$ en el factor $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$, que es casi igual a 1 si v es mucho menor que c . Podemos simplificar esta expresión para valores pequeños de v/c utilizando el desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots \approx 1 + nx \quad 34-2$$

cuando x es mucho menor que 1. Si hacemos $n = -1/2$ y $x = v^2/c^2$, la ecuación 34-1 se convierte en

$$t_1 = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad 34-3$$

La velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol es próxima a 3×10^4 m/s. Si tomamos este valor como una estimación de v , tendremos $v = 3 \times 10^4$ m/s, $v/c = (3 \times 10^4 \text{ m/s}) / (3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 10^{-4}$, y $v^2/c^2 = 10^{-8}$. Así pues, la corrección debida al movimiento de la Tierra es ciertamente pequeña.

Michelson se dio cuenta de que, aunque este efecto es demasiado pequeño como para poder medirlo directamente, sería posible medir v^2/c^2 mediante una determinación de diferencias. Para ello, utilizó el interferómetro de Michelson, estudiado en la sección 33-3. En el experimento en cuestión un haz de luz se mueve a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra y otro se mueve perpendicularmente a esta dirección (figura 34-3). La diferencia entre los tiempos que emplean ambos haces en realizar un recorrido completo de ida y vuelta depende de la velocidad de la Tierra y puede determinarse con una medida interferencial. Supongamos que el interferómetro está orientado de forma tal que el haz que incide sobre el espejo M_1 tiene la dirección del supuesto movimiento de la Tierra. La ecuación 34-3 nos da entonces el resultado clásico correspondiente al tiempo t_1 del viaje completo correspondiente al haz transmitido. El haz que se refleja en el divisor del haz e incide sobre el espejo M_2 se mueve con una cierta velocidad u (relativa a la Tierra) perpendicular al movimiento de la Tierra. Respecto al éter, viaja con velocidad c como se indica en la figura 34-4. La velocidad u (de acuerdo con la teoría clásica) es entonces la diferencia vectorial $u = c - v$, como se ve en la misma figura. El módulo o valor de u es $\sqrt{c^2 - v^2}$, de modo que el tiempo que emplea este haz en el viaje de ida y vuelta completo t_2 es

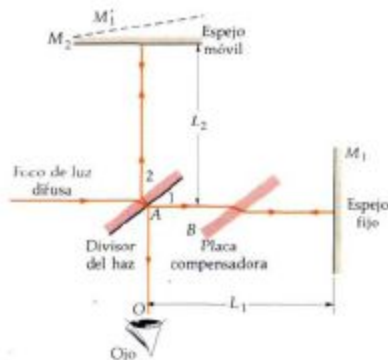
$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad 34-4$$

Utilizando de nuevo el desarrollo del binomio, se obtiene

$$t_2 = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad 34-5$$

Esta expresión es ligeramente diferente de la dada para t_1 en la ecuación 34-3.

Figura 34-3 Interferómetro de Michelson. La línea a trazos M_1' es la imagen del espejo M_1 en el espejo A . Las franjas de interferencia formadas son las originadas por una pequeña película de aire en forma de cuña que se origina entre las fuentes M_1 y M_1' . Admitir que el haz de luz que se refleja en el espejo M_1 es paralelo al movimiento de la Tierra, y el que se refleja en el espejo M_2 es perpendicular a dicho movimiento. La interferencia entre los dos haces depende del número relativo de ondas que hay en cada trayecto, lo que a su vez depende de la velocidad de los haces luminosos respecto a la Tierra. Si la velocidad de la luz a lo largo del trayecto paralelo es diferente de la que marcha a lo largo del trayecto perpendicular, el diagrama de franjas de interferencia se desplazará cuando se haga rotar 90° al interferómetro.



La diferencia entre estos dos tiempos es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad 34-6$$

Esta diferencia de tiempo ha de detectarse mediante la observación de la interferencia entre ambos haces luminosos.

Debido a la dificultad de hacer que los dos caminos sean de la misma longitud con la precisión requerida, se observaba el diagrama de interferencia de los dos haces y luego se giraba el aparato completo 90° . La rotación produce una diferencia de tiempos dada por la ecuación 34-6 para cada haz. La diferencia total de tiempos de $2\Delta t$ da como resultado una diferencia de fase de $\Delta\phi$ entre los dos haces, en donde

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{2c \Delta t}{\lambda}$$

y λ es la longitud de onda de la luz. Por tanto, las franjas de interferencia observadas en la primera orientación deberían desplazarse en un número de franjas ΔN dado por

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2c \Delta t}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad 34-7$$

En el primer intento realizado por Michelson en 1881, L medía unos 1,2 m y λ era 590 nm. Para $v^2/c^2 = 10^{-8}$ se esperaba que ΔN sería 0,04 franjas. Sin embargo, no se observó ningún desplazamiento. En el caso de la Tierra ocurría como si exactamente estuviese en reposo respecto al éter en el momento en que se realizó el experimento. Éste se repitió seis meses después, cuando el movimiento de la Tierra respecto al Sol tenía sentido opuesto al anterior. Aunque los errores e incertidumbres experimentales se estimaron que debían ser del mismo orden que el propio desplazamiento de las franjas esperado, Michelson indicó que la observación de carencia de desplazamiento en las franjas constituía una prueba de que la Tierra no se movía en relación con el éter. En 1887, cuando repitió el experimento con Edward W. Morley, utilizó un sistema mejorado para hacer girar el aparato sin introducir ningún desplazamiento de franjas debido a deformaciones mecánicas, y aumentó la longitud L del trayecto efectivo de la luz a unos 11 m mediante una serie de reflexiones múltiples. La figura 34-5 muestra la configuración del aparato de Michelson-Morley. En este intento se esperaba que ΔN sería de 0,4 franjas, de 20 a 40 veces mayor que el valor mínimo que podía observarse. Pero, una vez más, no se observó ningún desplazamiento. Desde entonces se ha repetido el experimento en diversas condiciones por diferentes científicos, pero nunca se ha encontrado ningún desplazamiento.

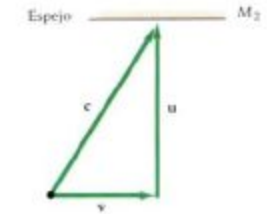
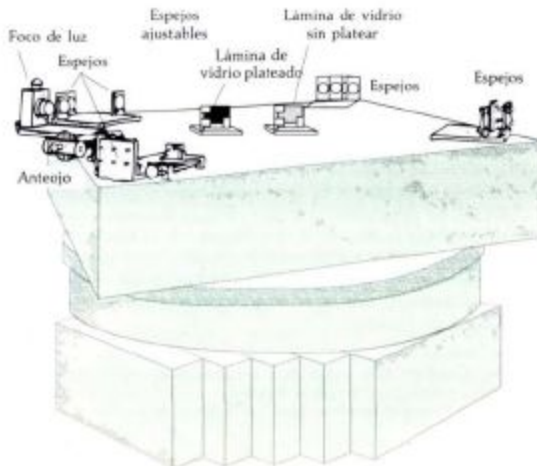


Figura 34-4 Un haz de luz reflejado desde la placa divisora en un interferómetro de Michelson. El interferómetro se mueve hacia la derecha con respecto al éter con una velocidad v , y el haz de luz se mueve perpendicularmente hacia el espejo M_2 con la velocidad u . La velocidad de la luz es c en el sistema del éter. Respecto a la Tierra, en donde el interferómetro está fijo, la velocidad de la luz es $u = c - v$. Por tanto, según la teoría clásica, la velocidad de la luz respecto a la Tierra es $u = (c^2 - v^2)^{1/2} = c(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Figura 34-5 Dibujo del aparato de Michelson-Morley utilizado en su experimento en 1887. Los instrumentos ópticos se montaron sobre una losa de arena de 1,5 m de lado, que flotaba en mercurio, reduciéndose por tanto las deformaciones y vibraciones que habían afectado a los experimentos anteriores. Haciendo girar el aparato en el plano horizontal podían hacerse observaciones en todas direcciones.

En 1905, a la edad de 26 años, Albert Einstein publicó un artículo sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles*. En este artículo, postulaba que el movimiento absoluto no podría detectarse por ningún experimento. (Estudiaremos con detalle los postulados de Einstein en la próxima sección.) Por tanto, era de esperar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley. Podemos considerar tanto el aparato como la Tierra en reposo. Así pues, no era de esperar ningún desplazamiento de franjas al girar 90° el aparato puesto que todas las direcciones son equivalentes. Einstein no pretendía explicar los resultados del experimento de Michelson-Morley. Su teoría nació de sus propias consideraciones de los fundamentos de la electricidad y del magnetismo y de la inusual propiedad de las ondas electromagnéticas de propagarse en el vacío. En su primer artículo, que contiene la teoría completa de la relatividad especial, sólo hizo de pasada una referencia al experimento de Michelson-Morley y en años posteriores no pudo recordar si conocía los detalles de este experimento antes de que publicase su teoría.

34-3 Postulados de Einstein

La teoría de la relatividad especial puede deducirse de dos postulados propuestos por Einstein en su artículo original del año 1905. Enunciados de forma simple, estos postulados dicen

Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme.

Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente.

Postulados de Einstein

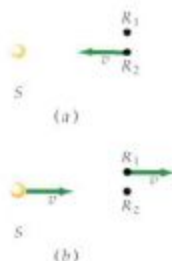


Figura 34-6 (a) Foco luminoso estacionario S y observador estacionario R_1 , con un segundo observador R_2 moviéndose hacia el foco con velocidad v . (b) En el sistema de referencia en el que está en reposo el observador R_2 , el foco luminoso S y el observador R_1 se mueven hacia la derecha con velocidad v . Si no puede detectarse el movimiento absoluto, los dos puntos de vista son equivalentes. Como la velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente, el observador R_2 mide el mismo valor para dicha velocidad que el observador R_1 .

El postulado 1 es simplemente una extensión del principio newtoniano de relatividad para incluir todos los tipos de mediciones físicas (no sólo aquellas que fueran mecánicas). El postulado 2 describe una propiedad común a todas las ondas. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras no depende del movimiento de la fuente sonora. Cuando un coche que se acerca hace sonar su bocina, la frecuencia que se oye aumenta de acuerdo con el efecto doppler estudiado en la sección 14-6, pero la velocidad de las ondas que se mueven en el aire no depende de la velocidad del coche. La velocidad de las ondas depende únicamente de las propiedades del aire, como su temperatura, por ejemplo.

Aunque ambos postulados parecen muy razonables, muchas de sus implicaciones comunes resultan sorprendentes y contradicen a lo que normalmente denominamos sentido común. Por ejemplo, una importante implicación de estos postulados es que todo observador mide el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo del foco y del observador. Consideremos un foco luminoso S y dos observadores, R_1 en reposo relativo a S y R_2 moviéndose hacia S con velocidad v , como se indica en la figura 34-6a. La velocidad de la luz medida por R_1 es $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Cuál es la velocidad que mide R_2 ? La respuesta es *no* $c + v$. Según el postulado 1, la figura 34-6a es equivalente a la figura 34-6b, en la que R_2 está en reposo y tanto el foco S como R_1 se están moviendo con velocidad v . Es decir, puesto que no puede detectarse el movimiento absoluto, no es posible decir quién se está moviendo realmente y quién está en reposo. Según el postulado 2, la velocidad de la luz de una fuente móvil es independiente del movimiento de ésta. Así pues, examinando la figura 34-6b, vemos que R_2 mide como valor de la velocidad de la luz exactamente c , igual que R_1 . Este resultado se considera con frecuencia como una alternativa al segundo postulado de Einstein:

* *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905, p. 841. Para la traducción del original alemán ver W. Ferrett y G.B. Jeffrey (traducción), *The Principle of Relativity: A collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* por H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, y W. Weyl, Dover, New York, 1923.

Postulado 2 (Alternativa). Todo observador mide el mismo valor c para la velocidad de la luz.

Este resultado contradice nuestras ideas intuitivas acerca de las velocidades relativas. Si un coche se mueve a 50 km/h alejándose de un observador, y otro coche se mueve a 80 km/h en la misma dirección y sentido, la velocidad del segundo coche respecto al primero es de 30 km/h. Este resultado se mide fácilmente y se encuentra conforme a nuestra intuición. Sin embargo, de acuerdo con los postulados de Einstein, si un haz de luz se está moviendo en la misma dirección y sentido que los coches, los observadores situados en ellos medirán la misma velocidad para el haz luminoso. Nuestras ideas intuitivas acerca de la combinación de velocidades, son aproximaciones que sólo son válidas cuando las velocidades son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Incluso en un avión que se esté moviendo con la velocidad del sonido, no es posible medir la velocidad de la luz con suficiente exactitud como para distinguir la diferencia entre los resultados c y $c+v$, siendo v la velocidad del avión. Con objeto de poder hallar dicha diferencia deberíamos, o bien movernos con una velocidad muy grande (mucho mayor que la del sonido), o hacer unas mediciones extremadamente exactas, como en el experimento de Michelson-Morley.

34-4 La transformación de Lorentz

Los postulados de Einstein tienen importantes consecuencias cuando se quieren medir intervalos de tiempo y de espacio, o bien velocidades relativas. A través de todo este capítulo estaremos comparando mediciones de las posiciones y los tiempos de ciertos sucesos (como destellos luminosos) hechas por observadores que se están moviendo unos respecto a otros. Utilizaremos un sistema de coordenadas rectangulares xyz con origen O , denominado sistema de referencia S , y otro sistema $x'y'z'$ con origen O' , denominado el sistema S' , que se está moviendo con una velocidad constante V respecto al sistema S . Entonces, respecto a S' , el sistema S se está moviendo con velocidad constante $-V$. Por sencillez, consideremos que el sistema S' se está moviendo con velocidad de módulo V a lo largo del eje x en su sentido positivo respecto a S . Entonces, respecto a S' , el sistema S se mueve con velocidad V sobre el eje x' en el sentido negativo del mismo. En cada uno de los sistemas, supondremos que existen tantos observadores como sean necesarios y que están equipados con dispositivos de medida, como relojes y reglas, que son idénticos cuando se comparan entre sí en reposo (ver figura 34-7).

Necesitamos muchos observadores, por ejemplo, para determinar los tiempos en que ocurren los sucesos. Si un observador está distante de un suceso, entonces su tiempo observado puede verse alterado por el tiempo que emplea la información sobre dicho suceso en llegar hasta su posición (como el tiempo de recorrido de los pulsos de luz). El observador puede evitar estos problemas registrando únicamente sucesos *locales* para él y dejando que se ocupen de los demás sucesos a aquellos observadores que están en los lugares adecuados. Es como tener un juez o árbitro al principio de una pista de carreras y otro al final de la misma.

Utilizaremos los postulados de Einstein para encontrar la relación general entre las coordenadas x , y y z y el tiempo t de un suceso visto en el sistema de referencia S y las coordenadas x' , y' y z' y el tiempo t' del mismo suceso visto en el sistema de referencia S' , que se está moviendo con velocidad relativa uniforme respecto a S . Consideraremos únicamente el caso simple en que los orígenes están coincidiendo en el instante $t=t'=0$. La relación clásica, denominada **transformación de Galileo**, es

$$x = x' + Vt' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t' \quad 34-8a$$

La transformación inversa es

$$x' = x - Vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \quad 34-8b$$

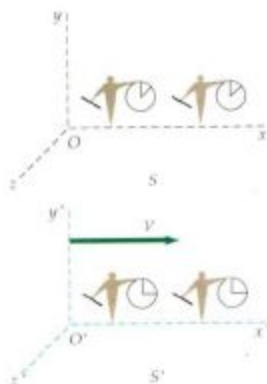


Figura 34-7 Sistemas coordenados de referencia S y S' moviéndose con velocidad relativa V . En ambos sistemas existen observadores con reglas y relojes que son idénticos cuando se comparan en reposo.

Transformación de Galileo

Estas ecuaciones son consistentes con las observaciones experimentales en tanto que V sea mucho menor que c . De ellas se deduce la ley clásica familiar de suma de velocidades. Si una partícula tiene una velocidad $u_x = dx/dt$ en el sistema S , su velocidad en el sistema S' es

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = V + u_x \quad 34-9$$

Si derivamos esta ecuación una vez más, encontraremos que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas:

$$a_x = du_x/dt = du'_x/dt' = a'_x$$

Debe quedar claro que la transformación galileana no es consistente con los postulados de Einstein de la relatividad especial. Si la luz se mueve a lo largo del eje x con velocidad c en S , estas ecuaciones implican que la velocidad en S' es $u'_x = c - V$, en lugar de ser $u'_x = c$, que es consistente tanto con los postulados de Einstein como con los experimentos. Por consiguiente, las ecuaciones de transformación clásicas deben modificarse para hacerlas consistentes con los postulados de Einstein. Daremos un breve esquema de un método para obtener la transformación relativista.

Supongamos que la ecuación de la transformación relativista para x es la misma que la ecuación clásica (ecuación 34-8a) excepto por la presencia de un multiplicador constante en el segundo miembro. Es decir, supondremos que la ecuación tiene la forma

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad 34-10$$

en donde γ es una constante que puede depender de V y c pero no de las coordenadas. La transformación inversa debe tener el mismo aspecto excepto por el signo de la velocidad:

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad 34-11$$

Consideremos un pulso luminoso que parte del origen de S en $t=0$. Como hemos supuesto que los orígenes son coincidentes en $t=t'=0$, el pulso también parte del origen de S' en $t'=0$. El postulado de Einstein exige que la ecuación correspondiente al componente x del frente de ondas del pulso de la luz sea $x=ct$ en el sistema S y $x'=ct'$ en el sistema S' . Sustituyendo x por ct y x' por ct' en las ecuaciones 34-10 y 34-11, se tiene

$$ct = \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t' \quad 34-12$$

y

$$ct' = \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t \quad 34-13$$

Podemos eliminar o bien t' o bien t entre estas dos ecuaciones y determinar γ . Se obtiene

$$\gamma^2 = (1 - V^2/c^2)^{-1}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad 34-14$$

(Es importante observar que γ es siempre mayor que 1 y que cuando V es mucho menor que c , $\gamma \approx 1$.) Por consiguiente, la transformación relativista para x y x' viene dada por las ecuaciones 34-10 y 34-11 estando dado γ por la ecuación 34-14. Podemos obtener ecuaciones para t y t' combinando la ecuación 34-10 con la transformación inversa dada por la ecuación 34-11. Sustituyendo en la ecuación 34-11 x por $x = \gamma(x' + Vt')$, se tiene

$$x' = \gamma[\gamma(x' + Vt') - Vt] \quad 34-15$$

de donde puede despejarse t en función de x' y t' . La transformación relativista completa es

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad 34-16$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right) \quad 34-17$$

Transformación de Lorentz

La inversa es

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad 34-18$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right) \quad 34-19$$

La transformación descrita por las ecuaciones 34-16 a 34-19 se denomina **transformación de Lorentz**. Relaciona las coordenadas de espacio y tiempo x , y , z y t de un suceso en el sistema S a las coordenadas x' , y' , z' y t' del mismo suceso visto en el sistema S' , que se está moviendo a lo largo del eje x con velocidad V relativa al sistema S .

Examinaremos ahora algunas aplicaciones de la transformación de Lorentz.

Dilatación del tiempo

Una consecuencia importante de los postulados de Einstein y de la transformación de Lorentz es que, el intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el mismo lugar en cierto sistema de referencia, es siempre menor que el intervalo de tiempo existente entre los mismos sucesos, medido en otro sistema de referencia en el que los sucesos se verifican en lugares diferentes. Consideremos dos sucesos que se producen en x'_0 en los instantes t'_1 y t'_2 en el sistema S' . Podemos hallar los tiempos t_1 y t_2 correspondientes a los mismos sucesos en S mediante la ecuación 34-17. Se tiene

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{Vx'_0}{c^2} \right)$$

y

$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{Vx'_0}{c^2} \right)$$

de modo que

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

El tiempo transcurrido entre dos sucesos que ocurren en el *mismo lugar* en un sistema de referencia se denomina el **tiempo propio** t_p . En este caso, el intervalo de tiempo $\Delta t_p = t'_2 - t'_1$ medido en el sistema S' es el tiempo propio. El intervalo de tiempo Δt medido en cualquier otro sistema de referencia es siempre más largo que el tiempo propio. Este crecimiento se denomina **dilatación del tiempo**:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \quad 34-20$$

Dilatación del tiempo

Ejemplo 34-1

Dos sucesos ocurren en el mismo punto x'_0 en los instantes t'_1 y t'_2 en el sistema S' , que se está moviendo con velocidad V respecto al sistema S . ¿Cuál es la separación espacial de estos sucesos en el sistema S ?

Según la ecuación 34-16, tenemos

$$x_1 = \gamma(x'_0 + Vt'_0)$$

y

$$x_2 = \gamma(x'_0 + Vt'_2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \gamma V(t'_2 - t'_0) \\ &= V(t_2 - t_0) \end{aligned}$$

La separación espacial de estos sucesos en S es la distancia que un punto simple, tal como el x'_0 en S' , se mueve en S durante el intervalo de tiempo que transcurre entre los sucesos.

Podemos comprender la dilatación del tiempo directamente a partir de los postulados de Einstein sin utilizar la transformación de Lorentz. La figura 34-8a muestra un observador A' a una distancia D de un espejo. El observador y el espejo están en una nave espacial que está en reposo en el sistema S' . El observador produce un destello y mide el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre el destello original y el momento en que ve el destello que retorna reflejado en el espejo. Como la luz viaja con velocidad c , este tiempo es

$$\Delta t' = \frac{2D}{c}$$

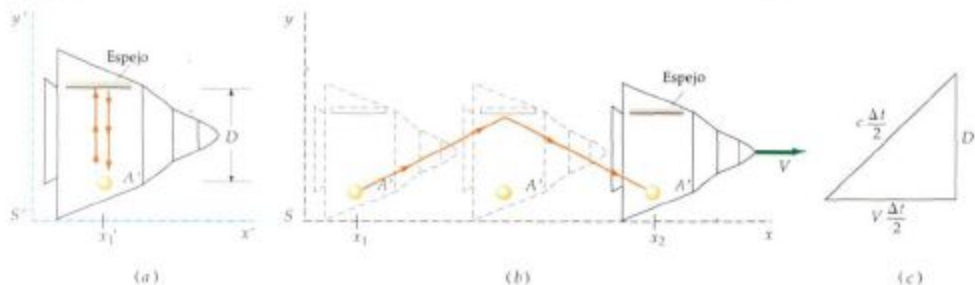
Consideremos a continuación estos mismos dos sucesos, el destello luminoso original y la recepción del destello reflejado, según se observarían en el sistema de referencia S , en el que el observador A' y el espejo se están moviendo hacia la derecha con velocidad V , como se indica en la figura 34-8b. Los sucesos se producen en dos lugares diferentes x_1 y x_2 en el sistema S . Durante el intervalo de tiempo Δt (según se mide en S) entre el destello original y el de retorno, el observador A' y su nave espacial han recorrido una distancia horizontal $V \Delta t$. En la figura 34-8b podemos ver que el trayecto recorrido por la luz es más largo en S que en S' . Sin embargo, según los postulados de Einstein, la luz viaja con la misma velocidad c en el sistema S y en el S' . Como la luz recorre una longitud mayor en S a la misma velocidad, debe emplear más tiempo en llegar al espejo y regresar. El intervalo de tiempo en S es, pues, más largo que en S' . A partir del triángulo de la figura 34-8c, se tiene

$$\left(\frac{c \Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2$$

o bien

$$\Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Figura 34-8 (a) El observador A' y el espejo están dentro de una nave espacial en el sistema S' . El tiempo que tarda el destello luminoso en llegar al espejo y regresar, según la medida realizada por A' resulta ser $2D/c$. (b) En el sistema S , la nave se está moviendo hacia la derecha con velocidad V . Si la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas, el tiempo que tarda la luz en llegar al espejo y regresar es más largo que $2D/c$ en S porque la distancia recorrida es mayor que $2D$. (c) Triángulo rectángulo que sirve para calcular el tiempo Δt en el sistema S .



Haciendo uso de $\Delta t' = 2D/c$, se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$

Ejemplo 34-2

Los astronautas de una nave espacial que se aleja de la Tierra a $V=0,6c$ interrumpen su conexión con el control espacial, diciendo que van a dormir una siesta de 1 hora y que luego volverán a llamar. ¿Cuál es la duración de su siesta según se mide en la Tierra?

Como los astronautas van a dormir y se despertarán en el mismo lugar en su sistema de referencia, el intervalo de tiempo correspondiente a una siesta de 1 hora medido por ellos mismos es su tiempo propio. En el sistema de referencia de la Tierra, los astronautas se desplazarán una distancia considerable entre ambos sucesos. El intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia de la Tierra (utilizando dos relojes situados donde se producen dichos sucesos) es más largo en un factor γ . Con $V=0,6c$, tendremos

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - (0,6)^2 = 0,64$$

Entonces γ vale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,64}} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

Así pues, la siesta según las medidas terrestres durará 1,25 horas.

Ejercicio

Si la nave espacial del ejemplo 34-2 se está moviendo con $V=0,8c$, ¿cuánto durará su siesta de 1 hora, medida desde la Tierra? (Respuesta: 1,67 h)

Contracción de longitudes

Un fenómeno estrechamente relacionado con la dilatación del tiempo es la **contracción de longitudes**. La longitud de un objeto medida en el sistema de referencia en que dicho objeto se encuentra en reposo se denomina su **longitud propia** L_p . En un sistema de referencia en el que el objeto se está moviendo, la longitud medida es más corta que su longitud propia. Consideremos una varilla en reposo en el sistema S' con un extremo en x'_2 y el otro en x'_1 . La longitud de la varilla en este sistema es su longitud propia $L_p = x'_2 - x'_1$. Para hallar la longitud de la varilla en el sistema S hay que tener cierto cuidado. En este sistema, la varilla se está moviendo hacia la derecha con velocidad V , que es la velocidad de S' . Se define la longitud de la varilla en el sistema S como $L = x_2 - x_1$, en donde x_2 es la posición de un extremo en un cierto instante t_1 , y x_1 es la posición del otro extremo en el mismo instante $t_1 = t_2$, medidos en el sistema S . Para calcular $x_2 - x_1$ en un cierto instante es conveniente utilizar la ecuación 34-18, porque relaciona x , x' y t , mientras que la ecuación 34-16 no resulta adecuada porque relaciona x , x' y t' :

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$$

y

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1)$$

Como $t_2 = t_1$, obtenemos

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) = \sqrt{1 - V^2/c^2} (x'_2 - x'_1)$$

Contracción de longitudes

o sea

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p = \sqrt{1 - V^2/c^2} L_p \quad 34-21$$

La longitud de una varilla es, pues, más corta cuando se mide en un sistema en movimiento. Antes de que se publicase el artículo de Einstein, Lorentz y FitzGerald intentaron explicar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley suponiendo que las distancias en la dirección del movimiento se contraían en la cantidad dada por la ecuación 34-21. Esta contracción se conoce ahora como **contracción de Lorentz-FitzGerald**.

Ejemplo 34-3

Una regla que tiene una longitud de 1 m se mueve en una dirección a lo largo de su longitud con velocidad relativa V respecto a un observador. Éste mide la longitud de la regla y da 0,914 m. ¿Cuál es la velocidad V ?

La longitud de la regla medida en un sistema que se está moviendo con velocidad V está relacionada con su longitud propia mediante la ecuación 34-21:

$$L = \frac{L_p}{\gamma}$$

Entonces

$$\gamma = \frac{L_p}{L} = \frac{1 \text{ m}}{0,914 \text{ m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 1,094$$

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} = 0,914$$

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = (0,914)^2 = 0,835$$

$$\frac{V^2}{c^2} = 1 - 0,835 = 0,165$$

$$V = 0,406c$$

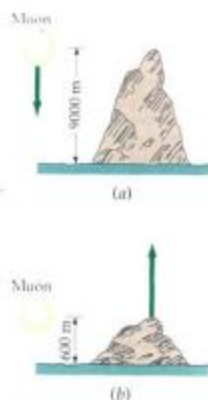


Figura 34-9 Aunque los muones se crean a una gran altura en la atmósfera y su periodo de vida medio es sólo de unos $2 \mu\text{s}$ cuando están en reposo, muchos aparecen en la superficie de la Tierra. (a) En el sistema de referencia terrestre un muón típico moviéndose a $0,998c$ tiene un periodo de vida medio de $30 \mu\text{s}$ y recorre 9000 m en este tiempo. (b) En el sistema de referencia del muón, la distancia recorrida por la Tierra es de sólo 600 m en el periodo de $2 \mu\text{s}$.

Un ejemplo interesante de dilatación del tiempo o de contracción de longitud lo proporciona la aparición de muones como radiación secundaria de los rayos cósmicos. Los muones se desintegran de acuerdo con la ley estadística de la radioactividad:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad 34-22$$

en donde N_0 es el número inicial de muones en el instante $t=0$, $N(t)$ es el número que queda en el instante t y τ es el periodo de vida media, que vale aproximadamente $2 \mu\text{s}$ en el caso de los muones en reposo. Puesto que los muones se crean (a partir de la desintegración de los piones) a gran altura en la atmósfera, normalmente a varios miles de metros por encima del nivel del mar, pocos de estos muones alcanzarán el nivel del mar. Un muón típico moviéndose con velocidad $0,998c$ recorrería sólo 600 m aproximadamente en $2 \mu\text{s}$. Sin embargo, el periodo del muón medio en el sistema de referencia terrestre debe incrementarse en el factor $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, que vale 15 para esta velocidad particular. Por tanto, el periodo medido en el sistema de referencia Tierra es $30 \mu\text{s}$, y un muón con una velocidad de $0,998c$ recorre del orden de 9000 m en este tiempo. Desde el punto de vista del muón, éste vive sólo $2 \mu\text{s}$, pero la atmósfera está circulando junto a él a la velocidad de $0,998c$. La distancia de 9000 m en el sistema terrestre se encuentra así contraída a sólo 600 m en el sistema del muón, como se indica en la figura 34-9.

Es fácil distinguir experimentalmente entre las predicciones clásica y relativista de las observaciones de los muones al nivel del mar. Supóngase que observa-

mos 10^8 muones a una altitud de 9000 m en un cierto intervalo de tiempo con un detector de muones. ¿Cuántos sería de esperar que se observasen al nivel del mar en el mismo intervalo de tiempo? De acuerdo con la predicción no relativista, el tiempo que tardarán estos muones en recorrer 9000 m es $(9000 \text{ m})/0,998c \approx 30 \mu\text{s}$, que equivale a 15 periodos. Sustituyendo $N_0 = 10^8$ y $t = 15 \tau$ en la ecuación 34-22, se obtiene

$$N = 10^8 e^{-15} = 30,6$$

Así pues, sería de esperar que sólo 31 del total original de 100 millones de muones habrían quedado sin desintegrarse al llegar al nivel del mar.

De acuerdo con las predicciones relativistas, la Tierra debería recorrer únicamente la distancia contraída de 600 m en el sistema en reposo del muón. Esto se realiza en sólo $2 \mu\text{s} = 1 \tau$. Por consiguiente, el número de muones que son de esperar al nivel del mar es

$$N = 10^8 e^{-1} = 3,68 \times 10^7$$

Así pues, la relatividad predice que se deberán observar 36,8 millones de muones en el mismo intervalo de tiempo. Experimentos de este tipo han confirmado las predicciones relativistas.

Cuestión

1. Un observador está de pie en una esquina y un amigo suyo pasa conduciendo un automóvil por delante de él. Ambos anotan los tiempos en que el coche pasa por dos cruces de calles diferentes. Cada uno de ellos determina en su reloj las lecturas de tiempo que transcurren entre ambos sucesos. ¿Cuál de ellos ha determinado el intervalo de tiempo propio?

34-5 Sincronización de relojes y simultaneidad

Vimos en la sección 34-4 que el tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos sucesos que se producen en el mismo punto en un cierto sistema de referencia. Por tanto, puede medirse con un solo reloj. Sin embargo, en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero, los dos mismos sucesos ocurren en lugares diferentes, de modo que se necesitan dos relojes para registrar los tiempos. El tiempo o instante de cada suceso se mide con un reloj diferente y el intervalo se halla mediante resta. Este procedimiento exige que ambos relojes estén **sincronizados**. Demostraremos en esta sección que

Dos relojes sincronizados en un sistema de referencia no están sincronizados en ningún otro sistema que se mueva respecto al primero.

Un corolario de este resultado es que

Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se mueva respecto al primero.

(Esto es cierto a no ser que los sucesos y los relojes estén en el mismo plano perpendicular al movimiento relativo). La comprensión de estos hechos normalmente resuelve todas las paradojas de la relatividad. Desgraciadamente, la creencia intuitiva (e incorrecta) de que la simultaneidad es una relación absoluta, es difícil de eliminar.

Supóngase que tenemos dos relojes en reposo en los puntos A y B separados entre sí una distancia L en el sistema S . ¿Cómo podemos sincronizar estos dos relojes? Si un observador en A mira el reloj situado en B y hace que su reloj marque el mismo tiempo, los relojes no estarán sincronizados. Debido al tiempo L/c que tarda la luz en recorrer el espacio que separa un reloj de otro. Para sincronizar los relojes, el observador en A debe hacer que su reloj adelante en el tiempo L/c . Entonces verá que el reloj en B marca un tiempo que es L/c detrás del corres-

pendiente a su reloj, pero calculará que los relojes están sincronizados cuando tenga en cuenta el tiempo L/c que la luz tarda en llegar hasta él. Todos los observadores, excepto aquellos que están a mitad del camino entre ambos relojes, verán que éstos marcan tiempos diferentes, pero también podrán calcular que los relojes están sincronizados cuando corrijan el tiempo que tarda la luz en llegar hasta ellos. Un método equivalente para la sincronización de dos relojes consistiría en que un tercer observador en C a mitad del camino entre los dos relojes enviara una señal luminosa hacia los observadores A y B de modo que éstos dispusieran sus relojes marcando una hora ya preestablecida al recibir la señal.

Examinemos ahora la cuestión de la **simultaneidad**. Supongamos que A y B se ponen de acuerdo para hacer explotar bombas en el instante t_0 (habiendo sincronizado previamente sus relojes). El observador C verá la luz procedente de las dos explosiones en el mismo momento, y puesto que está equidistante de A y B , llegará a la conclusión de que las explosiones son simultáneas. Otros observadores en S verán la luz procedente desde A o desde B primero, dependiendo de su posición, pero después de corregir el tiempo que la luz emplea en llegar hasta ellos, también llegarán a la conclusión de que las explosiones eran simultáneas. Así pues, definiremos que:

Dos sucesos en un sistema de referencia son simultáneos si las señales luminosas procedentes de los sucesos alcanzan en el mismo instante a un observador situado a mitad de camino entre ellos.

Para demostrar que dos sucesos que son simultáneos en el sistema S no lo son en otros sistemas S' moviéndose con movimiento relativo respecto a S , utilizaremos un ejemplo presentado por Einstein. Un tren se está moviendo con velocidad V y pasa por delante del andén de una estación. Tenemos unos observadores A , B y C en la parte delantera, trasera y mitad del tren. Supongamos ahora que caen sobre el tren y el andén unos rayos en la parte delantera y trasera del tren y que los relámpagos son simultáneos en el sistema del andén (S) (figura 34-10). Es decir, un observador C en un punto intermedio entre las posiciones A y B en donde caen los rayos, observa los dos destellos en el mismo momento. Es conveniente suponer que los rayos producen unas quemaduras en el tren y en el andén de modo que los sucesos pueden fácilmente localizarse en cada sistema de referencia. Puesto que C está en el punto medio del tren, a mitad de camino entre los lugares en que se han producido las quemaduras, los sucesos pueden ser simultáneos en S' sólo si C ve los destellos en el mismo instante. Sin embargo, C ve el destello procedente de la parte delantera del tren antes que el destello que viene de la parte trasera. Podemos comprender este hecho considerando el movimiento de C según se ve desde el sistema S (figura 34-11). En el instante en que la luz procedente del destello delantero alcanza a C , éste se ha movido una cierta distancia acercándose hacia el destello delantero mientras que se ha alejado otra cierta distancia del destello trasero. Así pues, la luz procedente del destello trasero aún no ha alcanzado a C , como se indica en la figura. Por consiguiente, el observador C debe llegar a la conclusión de que los sucesos no son simultáneos y que el rayo cayó en la parte delantera antes que otro cayese en la trasera. Además, todos los observadores en S' sobre el tren estarán de acuerdo con C cuando hayan corregido sus lecturas en el tiempo que tarda la luz en llegar a ellos.

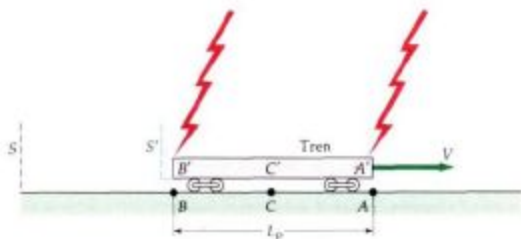


Figura 34-10 Dos rayos caen simultáneamente en los extremos de un tren moviéndose con velocidad V en el sistema S unido al andén. La luz procedente de estos sucesos simultáneos alcanza al observador C situado en el punto medio entre ambos al mismo tiempo. La distancia entre los relámpagos es L_p .

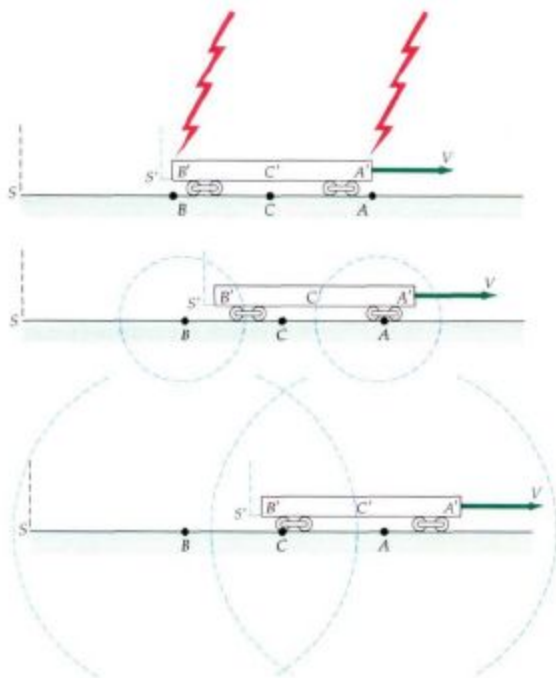
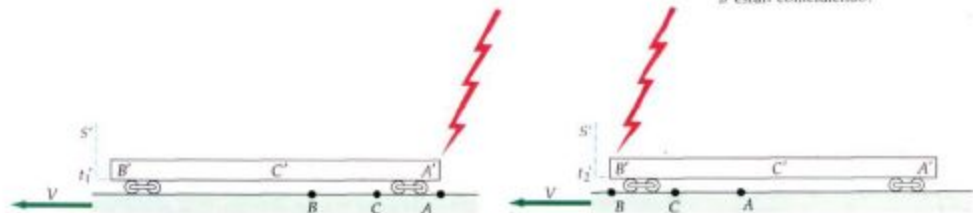


Figura 34-11 En el sistema S la luz procedente del rayo en la parte delantera del tren alcanza al observador C' en el punto medio del tren antes que la luz procedente del rayo en la parte trasera del tren debido a que éste se mueve. Como C' está en el punto medio entre los sucesos (que se produce en la parte delantera y trasera del tren), estos sucesos no son para él simultáneos.

Sea $L_{p,\text{tren}}$ la longitud propia del tren, es decir, su longitud cuando se mide en S' en el que está en reposo. Además, sea $L_{p,\text{andén}}$ la longitud propia del andén, es decir, la distancia entre las quemaduras según se ven desde S . Puesto que las marcas de quemaduras en el andén coinciden con la parte delantera y trasera del tren en el instante (en S) en que cayeron los rayos, la distancia entre las quemaduras $L_{p,\text{andén}}$ es igual a la longitud del tren L_T según se mide en el sistema S en el que se está moviendo. Esta longitud es menor que la longitud propia del tren debido a la contracción de longitudes; es decir, $L_T = L_{p,\text{andén}} < L_{p,\text{tren}}$.

En la figura 34-12 vemos los sucesos de las caídas de los rayos según se ven en el sistema de referencia del tren (S') en el que el tren está en reposo y el andén se está moviendo. En este sistema, la distancia entre las quemaduras en el andén se ha contraído, de modo que ésta es más corta que en S , y el tren está en reposo, de modo que el tren no es más largo que lo que es en S . Cuando el rayo cae sobre la parte delantera del tren en A' , dicha parte delantera está en A , y su parte trasera todavía no ha alcanzado el punto B . Posteriormente, cuando el rayo caiga sobre la parte trasera del tren en B' , esta parte habrá alcanzado el punto B sobre el andén.

Figura 34-12 Los rayos de la figura 34-10 vistos desde el sistema S' del tren. En este sistema, la distancia entre A y B sobre el andén es menor que $L_{p,\text{andén}}$ y la longitud propia del tren $L_{p,\text{tren}}$ es más larga que $L_{p,\text{andén}}$. El primer rayo cae en la parte delantera del tren cuando A' y A están coincidiendo. El segundo rayo cae en la parte trasera del tren cuando B' y B están coincidiendo.



En el sistema de referencia S , los rayos inciden en A y B simultáneamente. Supongamos que existen relojes en el andén en A y B que están sincronizados en el sistema S . Desde el punto de vista del sistema S' unido al tren, los relojes y el andén se están moviendo y pasando al tren. Un rayo incide primero en la parte delantera del tren, que está en el punto A , y un cierto tiempo después, otro rayo cae sobre la parte trasera del tren que está ahora en B . Así pues, los relojes móviles no están sincronizados si se ven desde el sistema S' . Si el reloj en A marca las 12:00 del mediodía cuando el rayo cae en A , el reloj en B deberá marcar un cierto tiempo anterior a las 12:00 del mediodía en ese instante. El reloj en B marca las 12:00 del mediodía posteriormente cuando coincide con la parte trasera del tren, y el rayo cae en B . Otro modo de decir esto mismo es que el reloj en A adelanta al reloj en B según se ve en S' . En el sistema S' , llamaremos al reloj en A el reloj «cazador» porque en este sistema los dos relojes se están moviendo en el sentido negativo de las x' con el reloj A en x_2 persiguiendo, o cazando, al reloj B en x_1 .

La discrepancia entre los tiempos de los dos relojes que están sincronizados en el sistema S según se ven en el sistema S' puede hallarse a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supóngase que tenemos relojes en los puntos x_1 y x_2 que están sincronizados en S . ¿Cuáles son los tiempos t_1 y t_2 en estos relojes cuando se observan desde el sistema S' en el instante t'_0 ? Según la ecuación 34-19, tenemos

$$t'_0 = \gamma \left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2} \right)$$

y

$$t'_0 = \gamma \left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2} \right)$$

Entonces

$$t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \quad 34-23$$

Obsérvese que el reloj cazador (en x_2) adelanta al otro (en x_1) en una cantidad que es proporcional a su separación propia $x_2 - x_1$.

Si dos relojes se sincronizan en el sistema en el que están en reposo, estarán fuera de sincronismo en otro sistema cualquiera. En el sistema en el que se están moviendo, el reloj «cazador» adelanta (muestra un tiempo posterior) en una cantidad

$$\Delta t_s = L_p \frac{V}{c^2}$$

en donde L_p es la distancia propia entre los relojes.

Un ejemplo numérico ayudará a una comprensión más clara de la dilatación del tiempo, la sincronización de los relojes y la consistencia interna de estos resultados.

Ejemplo 34-4

Un observador situado en una nave espacial tiene un cañón láser y un espejo (como en nuestro ejemplo de la dilatación del tiempo de la figura 34-8). La distancia del cañón al espejo es de 15 minutos de luz (escrito $15 \text{ c} \cdot \text{min}$) y la nave se mueve con una velocidad $V = 0,8c$. La nave va recorriendo una plataforma espacial muy larga que tiene dos relojes sincronizados, uno en la posición de la nave en el momento que el observador dispara el cañón láser y el otro en la posición de la nave que ocupa cuando la luz retorna al cañón después de reflejarse en el espejo. Hallar los intervalos de tiempo transcurridos entre los sucesos (disparar el cañón láser y el regreso del destello procedente del espejo) en el sistema de la nave y en el sistema de la plataforma. Hallar la distancia recorrida por la nave y la cantidad en que están desincronizados los relojes de la plataforma vistos desde la nave.

Llamaremos S' al sistema de referencia de la nave espacial y S al de la plataforma. En la nave la luz va desde el cañón al espejo y vuelve, lo que representa una distancia total de $D=30\text{ c}\cdot\text{min}$. El tiempo que emplea la luz en recorrer $30\text{ c}\cdot\text{min}$ es

$$\Delta t' = \frac{D}{c} = \frac{(30\text{ c}\cdot\text{min})}{c} = 30\text{ min}$$

Como ambos sucesos ocurren en el mismo lugar de la nave, el intervalo de tiempo es el tiempo propio:

$$\Delta t_p = D/c = 30\text{ min}$$

Durante este tiempo, la plataforma se mueve hacia atrás respecto a la nave una distancia igual a la distancia L' existente entre los relojes de la plataforma medidos en el sistema S' :

$$L' = \Delta x' = V \Delta t' = (0,8c)(30\text{ min}) = 24\text{ c}\cdot\text{min}$$

En el sistema S , el tiempo transcurrido entre los sucesos es más largo en un factor γ . Como $V/c=0,8$, $1 - V^2/c^2 = 1 - 0,64 = 0,36$. El factor γ es, pues,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,36}} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$$

Por consiguiente, el tiempo transcurrido entre los sucesos según se observan en el sistema S es

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p = \frac{5}{3} (30\text{ min}) = 50\text{ min}$$

Durante este tiempo, la nave recorre una distancia en el sistema S igual a la distancia propia entre los relojes de la plataforma:

$$L_p = \Delta x = V \Delta t = (0,8c)(50\text{ min}) = 40\text{ c}\cdot\text{min}$$

Obsérvese que esta distancia es más larga que la distancia contraída entre los relojes que miden los observadores en el sistema S' de la nave.

Los observadores situados en la plataforma dirán que el reloj de la nave está

atrasado puesto que registra un tiempo de 30 minutos solamente entre los sucesos, mientras que el tiempo medido en la plataforma es de 50 minutos.

La figura 34-13 muestra la situación vista desde la nave espacial en S' . La plataforma está viendo pasar la nave con velocidad $0,8c$. Existe un reloj en el punto x_1 , que coincide con la nave cuando se dispara el cañón láser y otro en el punto x_2 , que coincide con la nave cuando se recibe el destello de retorno del espejo. Supongamos que el reloj en x_1 marca las 12:00 (mediodía) en el instante de lanzar el destello. Los relojes en x_1 y x_2 están sincronizados en S pero no en S' . En S' , el reloj en x_2 , que está cazando al que está en x_1 , adelanta en

$$\frac{L_p V}{c^2} = \frac{(40\text{ c}\cdot\text{min})(0,8c)}{c^2} = 32\text{ min}$$

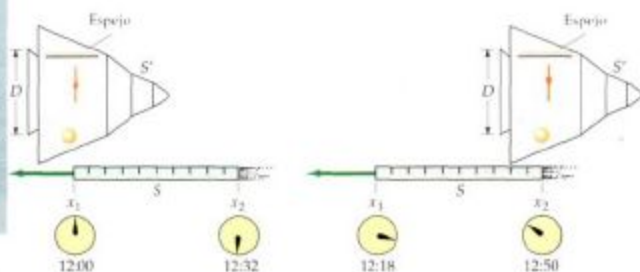


Figura 34-13 Ejemplo 34-4. Relojes situados en una plataforma observados desde el sistema de referencia de la nave S' . Durante el tiempo $\Delta t' = 30\text{ min}$ que emplea la plataforma en atravesar la nave, los relojes en la plataforma se retrasan y señalan sólo $(30\text{ min})/\gamma = 18\text{ min}$. Pero los relojes no están sincronizados, de forma que el reloj cazador adelanta en $L_p V/c^2$, que en este caso vale 32 min. El tiempo que tarda la nave espacial en pasar según se aprecia en la plataforma es, por consiguiente, $32\text{ min} + 18\text{ min} = 50\text{ min}$.

Cuando la nave coincide con x_2 , el reloj marca allí 12:50. Por consiguiente el tiempo transcurrido entre los sucesos en S es 50 minutos. Obsérvese que de acuerdo con los observadores situados en S' , este reloj señala un tiempo de $50 \text{ min} - 32 \text{ min} = 18 \text{ min}$ para un viaje que dura 30 min en S' . Así pues, los observadores en S' ven cómo este reloj se va retrasando en un factor de $30/18 = 5/3$.

Cada observador en uno de los sistemas ve que los relojes del otro sistema retrasan. De acuerdo con los observadores en S , que miden 50 min para el intervalo de tiempo, el intervalo de tiempo en S' (30 min) es demasiado pequeño, de modo que ven a cada reloj aislado en S' marchar más despacio en un factor de $5/3$. De acuerdo con los observadores en S' , los observadores en S miden un tiempo que es demasiado *largo* a pesar del hecho de que sus relojes retrasan porque los relojes en S no están sincronizados. Los relojes se mueven sólo durante 18 minutos, pero el segundo adelanta al primero en 32 minutos, de modo que el intervalo de tiempo es 50 minutos.

Cuestiones

- Dos observadores están en movimiento relativo. ¿En qué circunstancias pueden estar de acuerdo en la simultaneidad de dos sucesos diferentes?
- Si el suceso A se produce antes que se produzca el suceso B en un sistema determinado, ¿puede ser posible que exista un sistema de referencia en el que el suceso B se produzca antes que el suceso A ?
- Dos sucesos son simultáneos en un sistema en el cual se producen además en el mismo punto del espacio. ¿Son simultáneos en otros sistemas de referencia?

34-6 Efecto Doppler

Al deducir el efecto doppler para el sonido (sección 14-9) vimos que la variación de frecuencia en el caso de una velocidad dada V depende de que sea la fuente o el receptor el que se está moviendo con esta velocidad. Esta diferencia es posible en el caso del sonido debido a que existe un medio (el aire) respecto al cual tiene lugar el movimiento, y así no es sorprendente que pueda distinguirse el movimiento de la fuente o del receptor respecto al aire en calma. Esta distinción o diferencia entre el movimiento de la fuente o del receptor no puede hacerse en el caso de la luz o de otras ondas electromagnéticas en el vacío. Las expresiones que hemos deducido para el efecto doppler no pueden corregirse en el caso de la luz. Deduciremos ahora el efecto doppler relativista.

Consideremos una fuente que se mueve hacia un receptor con velocidad V y que está en el mismo sistema que el receptor. Supongamos que la fuente emite N ondas electromagnéticas. Si la fuente se mueve hacia el receptor, la primera onda recorrerá una distancia $c \Delta t_R$ y la fuente recorrerá $V \Delta t_R$ en el tiempo Δt_R medido en el sistema del receptor. La longitud de onda será

$$\lambda' = \frac{(c \Delta t_R - V \Delta t_R)}{N}$$

La frecuencia f' observada por el receptor será por tanto

$$\begin{aligned} f' &= \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - V \Delta t_R} N \\ &= \frac{1}{1 - V/c} \frac{N}{\Delta t_R} \end{aligned}$$

Si la frecuencia de la fuente es f_0 , emitirá $N = f_0 \Delta t_0$ ondas en el tiempo Δt_0 medido por la fuente. En este caso Δt_0 es el intervalo de tiempo propio (la primera onda y la onda enésima se emiten en el mismo lugar en el sistema de referencia

de la fuente). Los tiempos Δt_s y Δt_g están relacionados por la ecuación normal de la dilatación del tiempo $\Delta t_g = \gamma \Delta t_s$. Así pues obtenemos en el caso del efecto doppler de una fuente luminosa móvil

$$f = \frac{1}{1 - V/c} \frac{f_0 \Delta t_s}{\Delta t_g} = \frac{f_0}{1 - V/c} \frac{1}{\gamma}$$

o bien

$$f = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} f_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} f_0 \quad \text{cuando se aproximan} \quad 34-24a$$

Esta expresión sólo difiere de nuestra ecuación clásica en el factor de dilatación del tiempo.

Cuando el foco y el receptor se mueven alejándose entre sí, el mismo análisis demuestra que la frecuencia observada viene dada por

$$f = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} f_0 = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} f_0 \quad \text{cuando se alejan} \quad 34-24b$$

Se deja como problema (problema 34-64) el demostrar que se obtienen los mismos resultados si se hacen los cálculos en el sistema de referencia de la fuente.

Ejemplo 34-5

La longitud de onda más larga emitida por el hidrógeno en la serie de Balmer (ver capítulo 35) tiene un valor de $\lambda_0 = 656$ nm. En la luz procedente de una galaxia lejana, el valor medido es $\lambda' = 1458$ nm. Hallar la velocidad de alejamiento o retroceso de dicha galaxia respecto a la Tierra.

Si sustituimos $f = c/\lambda'$ y $f_0 = c/\lambda_0$ en la ecuación 34-24b, se tiene

$$\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = \frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda'}$$

Esta ecuación se simplifica un poco si ponemos $\beta = V/c$. Entonces elevando al cuadrado dicha ecuación y tomando la inversa de cada miembro, tendremos

$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{1458 \text{ nm}}{656 \text{ nm}}\right)^2 = 4,94$$

de modo que

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= 4,94 - 4,94 \beta \\ \beta &= \frac{4,94 - 1}{4,94 + 1} = 0,663 = \frac{V}{c} \end{aligned}$$

La galaxia, pues, se está alejando a una velocidad de $V = 0,663c$. El desplazamiento hacia longitudes de onda más largas de la luz procedente de las galaxias distantes que se están alejando de nosotros se denomina **desplazamiento hacia el rojo**.

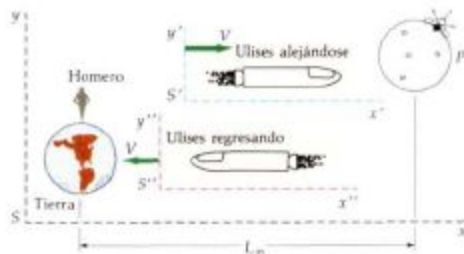
34-7 Paradoja de los gemelos

Homero y Ulises son gemelos idénticos. Ulises realiza un viaje a una velocidad muy elevada hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la Tierra mientras Homero permanece en ella. Cuando se reúnen de nuevo, ¿cuál de los gemelos es más viejo, o son ambos de la misma edad? La respuesta correcta es que Homero, el gemelo que permaneció en su casa, es más viejo. Este problema,

con variaciones, ha sido un tema de grandes debates durante decenios, aunque hay muy pocos que estén en desacuerdo con la respuesta anterior.* El problema es una paradoja debido al papel aparentemente simétrico que juegan ambos gemelos frente al resultado asimétrico que se obtiene para su edad. La paradoja se resuelve cuando se observa la asimetría del papel de ambos gemelos. El resultado relativista está en conflicto con el sentido común que se basa en nuestra creencia fuerte, pero incorrecta, de la existencia de una simultaneidad absoluta. Consideremos un caso particular con ciertos valores numéricos que, aunque sea impracticable, hace que los cálculos sean más sencillos.

Supongamos que el planeta P y Homero situado en la Tierra y distante L_p del anterior están fijos en el sistema de referencia S , según se ve en la figura 34-14. Despreciemos el movimiento de la Tierra. Los sistemas de referencia S' y S'' se están moviendo con velocidad V hacia el planeta y alejándose de él respectivamente. Ulises acelera rápidamente hasta alcanzar la velocidad V ; luego viaja con velocidad de crucero en S' hasta que alcanza el planeta que es cuando se detiene quedando momentáneamente en reposo en S . Para volver, acelera rápidamente hasta la velocidad V hacia la Tierra y viaja en S'' hasta que la alcanza, deteniéndose finalmente. Podemos admitir que los tiempos de aceleración son despreciables en comparación con los tiempos de vuelo en crucero. Para ilustrar el problema podemos utilizar los valores siguientes: $L_p = 8$ años-luz y $V = 0,8c$; entonces $\sqrt{1 - V^2/c^2} = 3/5$ y $\gamma = 5/3$.

Figura 34-14 Paradoja de los gemelos. La Tierra y un planeta lejano están fijos en el sistema S . Ulises vuela en el sistema S' hacia el planeta y luego regresa a la Tierra en el S'' . Su gemelo Homero queda en la Tierra. Cuando Ulises regresa es más joven que su gemelo. Los papeles jugados por los gemelos no son simétricos. Homero permanece en un sistema de referencia inercial, pero Ulises ha de acelerar si quiere volver a casa.



Es sencillo analizar el problema desde el punto de vista de Homero en la Tierra. De acuerdo con el reloj de Homero, Ulises está viajando en S' durante un tiempo $L_p/V = 10$ años y en S'' durante otro tiempo igual. Así pues Homero es 20 años más viejo cuando Ulises regresa. El intervalo de tiempo en S' entre el momento de abandonar la Tierra y llegar al planeta es más corto debido a su tiempo propio. El tiempo para alcanzar el planeta en el reloj de Ulises es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10 \text{ a}}{5/3} = 6 \text{ años}$$

Puesto que se requiere el mismo tiempo para el viaje de vuelta, Ulises habrá anotado 12 años para el viaje de ida y vuelta y será 8 años más joven que Homero.

Desde el punto de vista de Ulises, el cálculo de su tiempo de viaje no es difícil. La distancia de la Tierra al planeta está contraída y es sólo

$$L' = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{8 \text{ años-luz}}{5/3} = 4,8 \text{ años-luz}$$

Para $V = 0,8c$, emplearía sólo 6 años en cada parte del viaje.

La dificultad real de este problema consiste en que Ulises ha de comprender por qué su gemelo ha envejecido en 20 años durante su ausencia. Si consideramos a Ulises en reposo y a Homero moviéndose, su reloj atrasará y deberá medir

* Puede encontrarse una colección de varios artículos relativos a esta paradoja en *Special Relativity Theory. Selected Reprints*. American Association of Physics Teachers, New York, 1963.

sólo $\frac{2}{3}(6) = 3,6$ años. Entonces, ¿por qué no ha envejecido Homero sólo 7,2 años durante el viaje completo? Como es natural, aquí radica la paradoja. La dificultad en el caso del análisis desde el punto de vista de Ulises es que no permanece en un sistema inercial. ¿Qué ocurre mientras Ulises está frenando y arrancando? Para investigar este problema con detalle necesitamos considerar los sistemas de referencia acelerados, problema relacionado con el estudio de la relatividad general y más allá del objetivo de este texto. Sería instructivo considerar que los gemelos envían señales regulares uno al otro de modo que pueden anotar la edad del otro continuamente. Si se disponen las cosas de modo que se envíe una señal cada año, la edad del otro gemelo puede determinarse simplemente contando las señales recibidas. La frecuencia de llegada de las señales no será una por año debido al desplazamiento doppler. La frecuencia observada vendrá dada por las ecuaciones 34-24a y 34-24b. Utilizando $V/c=0,8$ y $V^2/c^2=0,64$, se tiene para el caso en que los dos gemelos se están alejando el uno del otro

$$f = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} f_0 = \frac{\sqrt{1 - 0,64}}{1 + 0,8} f_0 = \frac{1}{3} f_0$$

Cuando se estén acercando, la ecuación 34-24 da $f' = 3f_0$.

Consideramos la situación primero desde el punto de vista de Ulises. Durante los seis años que tarda en alcanzar el planeta (recuérdese que la distancia se contrae en su sistema de referencia), recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año, y por lo tanto recibe dos señales. Tan pronto él empieza el viaje de regreso, recibe tres señales por año; en los seis años que tarda en regresar recibirá 18 señales, dando un total de 20 durante todo el viaje. De acuerdo con ello espera que su gemelo haya envejecido estos 20 años.

Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de Homero. Recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año durante los 10 años que tarda Ulises en llegar al planeta, y también durante el tiempo que empleará la última señal enviada por Ulises antes de que él regrese a la Tierra. (No puede saber que Ulises ha empezado el viaje de vuelta hasta que le lleguen las señales con frecuencia creciente.) Puesto que el planeta está a una distancia de 8 años-luz, se han de añadir estos 8 años en la recepción de señales a un ritmo de $\frac{1}{3}$ de señal por año. Durante los primeros 18 años, Homero recibe 6 señales. En los dos años finales antes de que Ulises llegue, Homero recibe 6 señales, o sea 3 por año. (La primera señal enviada después de que Ulises inicie el regreso emplea 8 años en alcanzar la Tierra, mientras que Ulises moviéndose a una velocidad $0,8c$, tardará 10 años en regresar y por lo tanto llegará exactamente dos años después de que Homero empiece a recibir señales al ritmo más elevado.) Así pues Homero espera que Ulises haya envejecido 12 años. En este análisis, resulta evidente la asimetría de los papeles que juegan los dos gemelos. Ambos están de acuerdo en que, cuando se reúnan, el que ha sido acelerado será más joven que el que ha permanecido quieto en casa.

Las predicciones de la teoría especial de la relatividad respecto a la paradoja de los gemelos han sido ensayadas muchas veces utilizando partículas pequeñas que pueden acelerarse a velocidades tan grandes que γ es apreciablemente mayor que 1. Pueden acelerarse partículas inestables y atraparse en órbitas circulares dentro de un campo magnético, por ejemplo, compararse sus periodos de vida con los de partículas idénticas en reposo. En estos experimentos las partículas aceleradas viven mayor tiempo en valor medio que las que están en reposo, según acabamos de predecir. Estas predicciones se confirman también por los resultados de los experimentos utilizando relojes atómicos de alta precisión que vuelan alrededor de la Tierra en aviones comerciales, pero el análisis de este experimento es complicado por las necesidades de incluir efectos gravitatorios considerados en la teoría general de la relatividad.*

* Los detalles de este experimento pueden encontrarse en los artículos de J.C. Hafele y Richard E. Keating, "Around-the-world Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains" y "Around-the-world Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", *Science*, julio 14, 1972, pág. 166.

34-8 Transformación de la velocidad

Se puede hallar la forma en que se transforman las velocidades de un sistema de referencia a otro, derivando las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supongamos que una partícula tiene una velocidad $u'_x = dx'/dt'$ en el sistema S' , que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S . Su velocidad en el sistema S es

$$u_x = \frac{dx}{dt}$$

A partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz (ecuaciones 34-16 y 34-17) se tiene

$$dx = \gamma(dx' + V dt')$$

y

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{V dx'}{c^2} \right)$$

La velocidad en S es, pues,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + V dt')}{\gamma \left(dt' + \frac{V dx'}{c^2} \right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2}$$

Si una partícula tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes y o z , podemos utilizar la misma relación entre dt y dt' con $dy = dy'$ y $dz = dz'$, para obtener

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{V dx'}{c^2} \right)} = \frac{dy'/dt'}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vu'_x}{c^2} \right)}$$

y

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vu'_x}{c^2} \right)}$$

La transformación relativista completa de velocidades es

Transformación relativista de velocidades

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2} \quad 34-25a$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)} \quad 34-25b$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)} \quad 34-25c$$

Las ecuaciones de la transformación inversa de las velocidades son

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \quad 34-26a$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \quad 34-26b$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \quad 34-26c$$

Estas ecuaciones difieren del resultado clásico e intuitivo $u_x = u'_x + V$, $u_y = u'_y$ y $u_z = u'_z$ debido a que los denominadores de las ecuaciones 34-25 y 34-26 no son iguales a 1. Cuando V y u'_x son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz c , $\gamma \approx 1$ y $Vu'_x/c^2 \ll 1$. Entonces las expresiones relativista y clásica coinciden.

Ejemplo 34-6

Un avión supersónico se mueve con una velocidad de 1000 m/s (del orden de 3 veces la velocidad del sonido) a lo largo del eje x respecto al observador. Otro avión se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de 500 m/s respecto al primer avión. ¿Con qué velocidad se está moviendo el segundo avión respecto al observador?

De acuerdo con la forma clásica de combinar velocidades, la velocidad del segundo avión respecto al observador es 1000 m/s + 500 m/s = 1500 m/s. Si suponemos que el observador está en reposo en el sistema de referencia S y que el primer avión están en reposo en el sistema S' que se está moviendo a $V = 1000$ m/s respecto a S , el segundo avión tiene una velocidad $u'_x = 500$ m/s en S' . El término de corrección para u_x en el denominador de la ecuación 34-25a es entonces

$$\frac{Vu'_x}{c^2} = \frac{(1000)(500)}{(3 \times 10^8)^2} \approx 5 \times 10^{-12}$$

Este término de corrección es tan pequeño que los resultados clásico y relativista son esencialmente iguales.

Ejemplo 34-7

Repetir el ejemplo 34-6 si el primer avión se mueve con una velocidad $V = 0,8c$ respecto al observador y el segundo avión se mueve con la misma velocidad $0,8c$ respecto al primero.

En este caso el término de corrección es

$$\frac{Vu'_x}{c^2} = \frac{(0,8c)(0,8c)}{c^2} = 0,64$$

La velocidad del segundo avión en el sistema S es entonces

$$u_x = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + 0,64} = 0,98c$$

Este valor es muy diferente del resultado clásico esperado de $0,8c + 0,8c = 1,6c$. De hecho, puede demostrarse a partir de la ecuación 34-25 que si la velocidad de un objeto es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema que se mueva respecto al anterior con una velocidad inferior a c . Veremos en la sección 34-10 que se debería emplear una cantidad infinita de energía para acelerar una partícula hasta la velocidad de la luz. Por consiguiente, la velocidad de la luz c es un límite superior e inalcanzable para la velocidad de cualquier partícula que posea masa. (Las partículas sin masa, como los fotones, siempre se mueven con la velocidad de la luz.)

Ejemplo 34-8

La luz se mueve a lo largo del eje x con velocidad $u_x = c$. ¿Cuál es su velocidad en S' ?

A partir de la ecuación 34-26a, se tiene

$$u'_x = \frac{c - V}{1 - Vc/c^2} = \frac{c(1 - V/c)}{1 - V/c} = c$$

como exigen los postulados de Einstein.

Cuestión

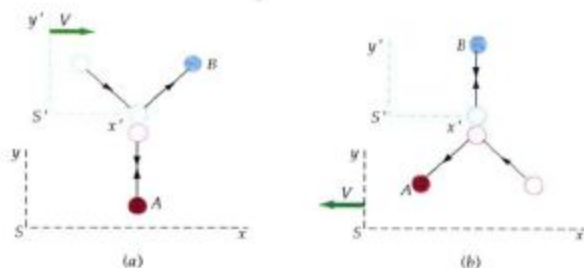
5. La transformación de Lorentz para y y z coincide con el resultado clásico $y=y'$ y $z=z'$. Sin embargo, la transformación relativista de velocidades no da el resultado clásico $u_x=u'_x$ y $u_z=u'_z$. Explicarlo.

34-9 Cantidad de movimiento relativista

Hemos visto en las secciones anteriores que los postulados de Einstein exigen importantes modificaciones en nuestros conceptos de simultaneidad y de medición de tiempos y longitudes. Pero, lo que quizás sea aún más importante, requieren también que modifiquemos nuestros conceptos e ideas acerca de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. En mecánica clásica, se define la cantidad de movimiento de una partícula como el producto de su masa por su velocidad, $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, siendo \mathbf{u} la velocidad. En un sistema aislado de partículas, sin ninguna fuerza neta que actúe sobre el mismo, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

En esta sección veremos mediante un sencillo experimento mental que la expresión clásica para la cantidad de movimiento, $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, es sólo una aproximación. Es decir, esta cantidad no se conserva en un sistema aislado. Consideremos dos observadores: el observador A en el sistema de referencia S y el observador B en el sistema S' . Cada observador tiene una bola de masa m , que son idénticas cuando se comparan en reposo. Ambos observadores lanzan sus bolas verticalmente con una velocidad u_0 de forma que recorre una distancia L , realiza un choque elástico con la otra y regresa. La figura 34-15 muestra el aspecto que presentan ambas colisiones en cada sistema de referencia. Clásicamente, las dos bolas tienen una cantidad de movimiento vertical de valor mu_0 . Como los componentes verticales de las cantidades de movimiento son iguales y opuestos, el componente vertical de la cantidad de movimiento total es nula antes del choque. Éste simplemente invierte la cantidad de movimiento de las bolas, de modo que la cantidad de movimiento vertical total después del choque es también nula.

Figura 34-15 (a) Choque elástico de dos bolas idénticas vistas en el sistema S . El componente vertical de la velocidad de la bola B es u_0/γ en S si vale u_0 en S' . (b) El mismo choque visto en S' . En este sistema la bola A tiene un componente vertical de la velocidad u_0/γ .



Sin embargo, desde el punto relativista, los componentes verticales de las velocidades de las dos bolas no son iguales y opuestos. Así pues, cuando se invierten debido al choque, no se conserva la cantidad de movimiento clásica. Consideremos cómo ve A el choque en el sistema S . La velocidad de su bola es $u_{Ax} = +u_0$. Puesto que la velocidad de la bola de B en el sistema S' es $u'_{By} = 0$, $u'_{Bx} = -u_0$, el componente y de la velocidad de la bola de B en el sistema S es (ecuación 34-25b) $u_{By} = -u_0/\gamma$. Así pues, si se utiliza la expresión clásica de la cantidad de movimiento $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, los componentes verticales de la cantidad de movimiento de las dos bolas no son iguales ni opuestos según los ve el observador A . Como el sentido de movimiento de las bolas se invierte en el choque, no se conserva la cantidad de movimiento. Como es natural, B observa el mismo resultado. En el límite clásico, cuando u es mucho menor que c , γ es aproximadamente 1, y se conserva la cantidad de movimiento del sistema con cualquiera de los observadores.

La razón por la cual la cantidad de movimiento es importante en la mecánica clásica, se debe a que la misma se conserva cuando no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, como sucede con las colisiones. Ahora hemos visto que la cantidad Σmu se conserva únicamente en la aproximación en que $u \ll c$. Definiremos la cantidad de movimiento relativista \mathbf{p} de una partícula de manera que posea las siguientes propiedades:

1. En las colisiones, \mathbf{p} se conserva.
2. Cuando u/c tienda a cero, \mathbf{p} tenderá a $m\mathbf{u}$.

Demostremos a continuación que en la colisión elástica indicada en la figura 34-15 se conserva la magnitud

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad 34-27$$

Como esta magnitud también tiende a $m\mathbf{u}$ cuando u/c tiende a cero, tomaremos esta ecuación como la definición de la **cantidad de movimiento relativista** de una partícula.

Calcularemos el componente y de la cantidad de movimiento relativista de cada partícula en el sistema de referencia S y demostraremos que el componente y de la cantidad de movimiento total relativista es nulo. La velocidad de la bola A en S es u_0 , de modo que el componente y de su cantidad de movimiento relativista es

$$p_{Ay} = \frac{mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}$$

La velocidad de la bola B en S es más complicada. Su componente x es V y su componente y es $-u_0/\gamma$. Así pues,

$$u_B^2 = u_{Bx}^2 + u_{By}^2 = V^2 + (-u_0/\gamma)^2 = V^2 + u_0^2 - \frac{u_0^2 V^2}{c^2}$$

Utilizando este resultado para calcular $\sqrt{1 - u_B^2/c^2}$, se obtiene

$$1 - \frac{u_B^2}{c^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2 V^2}{c^4} = (1 - V^2/c^2)(1 - u_0^2/c^2)$$

y

$$\sqrt{1 - u_B^2/c^2} = \sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - u_0^2/c^2} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - u_0^2/c^2}$$

Por lo tanto, el componente y de la cantidad de movimiento relativista de la bola B vista en S es

$$p_{By} = \frac{mu_{By}}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} = \frac{-mu_0/\gamma}{(1/\gamma)\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} = \frac{-mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}$$

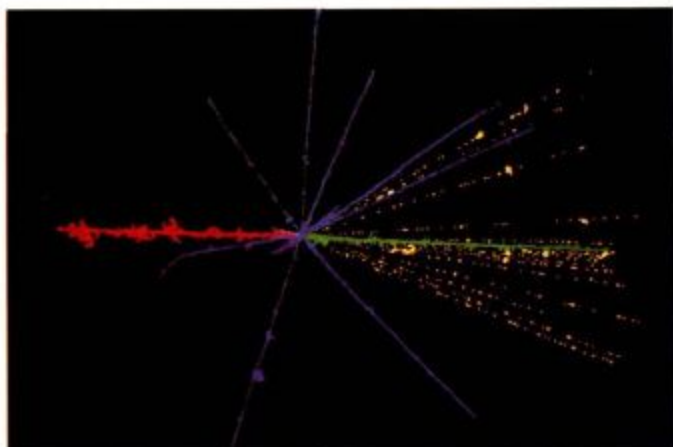
Como $p_{By} = -p_{Ay}$, el componente y de la cantidad de movimiento total de las dos bolas es cero. Si se invierte la velocidad de cada bola en el choque, la cantidad de movimiento total seguirá siendo cero y, por tanto, se conservará la cantidad de movimiento.

Una interpretación de la ecuación 34-27 es que la masa de un objeto aumenta con la velocidad. La magnitud $m/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ se denomina **masa relativista** de la partícula. La masa de una partícula cuando está en reposo en un cierto sistema de referencia se denomina su **masa en reposo** m_0 . Así pues, la masa aumenta desde m_0 en reposo a $m_r = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ cuando se está moviendo con velocidad u . Para evitar confusiones, llamaremos m_0 a la masa en reposo y utilizaremos $m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ para la masa relativista en este capítulo. La masa en reposo de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia. Utilizando esta notación, la cantidad de movimiento relativista de una partícula es, entonces,

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad 34-28$$

Cantidad de movimiento relativista

La creación de partículas elementales demuestra la conversión de energía cinética en energía en reposo. En esta fotografía de 1950 de un chorro de rayos cósmicos, un núcleo de azufre (rojo) de alta energía choca en una emulsión fotográfica y produce una lluvia de partículas, entre las que se incluyen un núcleo de flúor (verde), otros fragmentos nucleares (azul) y alrededor de 16 piones (amarillo).



34-10 Energía relativista

En mecánica clásica, el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética de la misma. En la mecánica relativista, igualaremos la fuerza no equilibrada a la variación temporal de la cantidad de movimiento relativista. El trabajo realizado por una fuerza de este tipo puede calcularse entonces e igualarse a la variación de la energía cinética. Como en la mecánica clásica, definiremos la energía cinética como el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada para acelerar una partícula desde el reposo hasta una cierta velocidad. Considerando sólo una dimensión, se tiene

$$E_i = \int_{v=0}^v \Sigma F \, ds = \int_0^v \frac{dp}{dt} \, ds = \int_0^v u \, dp = \int_0^v u \, d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \quad 34-29$$

en donde hemos utilizado $u = ds/dt$. Se deja como problema a resolver (problema 70) el demostrar que

$$d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} du$$

Si sustituimos esta expresión en el integrando de la ecuación 34-29, se tiene

$$\begin{aligned} E_i &= \int_0^v u \, d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \int_0^v m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} u \, du \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

o bien

$$E_i = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad 34-30$$

La expresión de la energía cinética consta de dos términos. El primero depende de la velocidad de la partícula. El segundo, $m_0 c^2$, es independiente de la ve-

lidad. La magnitud m_0c^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula E_0 y es igual al producto de la masa en reposo por c^2 :

$$E_0 = m_0c^2 \quad 34-31 \quad \text{Energía en reposo}$$

La **energía relativista total** E se define entonces como la suma de la energía cinética más la energía en reposo:

$$E = E_c + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad 34-32 \quad \text{Energía relativista}$$

Así pues, el trabajo realizado por una fuerza sin equilibrar aumenta la energía desde el valor de la energía en reposo m_0c^2 hasta el valor final de la energía $m_0c^2/\sqrt{1 - u^2/c^2} = m_0\gamma c^2$, en donde $m_\gamma = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es la masa relativista. Puede obtenerse una expresión útil para la velocidad de la partícula multiplicando la ecuación 34-28 de la cantidad de movimiento relativista por c^2 y comparando el resultado con la ecuación 34-32 correspondiente a la energía relativista. Se tiene

$$pc^2 = \frac{m_0c^2u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Eu$$

o bien

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \quad 34-33$$

Ejemplo 34-9

Un electrón con su energía en reposo 0,511 MeV se mueve con velocidad $u = 0,8c$. Hallar su energía total, su energía cinética y su cantidad de movimiento.

Primero calcularemos el factor $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} = \frac{5}{3} = 1,67$$

La energía total es entonces

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1,67 (0,511 \text{ MeV}) = 0,853 \text{ MeV}$$

La energía cinética es la energía total menos la energía en reposo:

$$E_c = E - m_0c^2 = 0,853 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} = 0,342 \text{ MeV}$$

El valor de la cantidad de movimiento es

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_0u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = (1,67)m_0(0,8c) = \frac{1,33m_0c^2}{c} \\ &= \frac{(1,33)(0,511 \text{ MeV})}{c} = 0,680 \text{ MeV}/c \end{aligned}$$

La unidad MeV/ c es una unidad conveniente de cantidad de movimiento.

La expresión para la energía cinética dada por la ecuación 34-30 no se parece apenas a la expresión clásica $\frac{1}{2} m_0 u^2$. Sin embargo, cuando u es mucho menor que c , podemos obtener un valor aproximado de $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ utilizando el desarrollo del binomio (ecuación 34-2):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}$$

A partir de este resultado, cuando u es mucho menor que c , la expresión para la energía cinética relativista se transforma en

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \\ \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \\ = \frac{1}{2} m_0 u^2$$

Por tanto, a velocidades bajas la expresión relativista es equivalente a la expresión clásica.

Obsérvese en la ecuación 34-32 que cuando la velocidad u se acerca a la velocidad de la luz c , la energía de la partícula se hace muy grande porque $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ se hace cada vez mayor. Para $u=c$, la energía resulta infinita. Si u fuese mayor que c , $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ resulta ser la raíz cuadrada de un número negativo y, por consiguiente, es imaginaria. Se puede dar una interpretación simple de este resultado considerando que deberá emplearse una cantidad infinita de energía en acelerar una partícula hasta alcanzar la velocidad de la luz, de modo que no puede existir ninguna partícula que estando en reposo en un sistema de referencia inercial cualquiera pueda llegar a moverse con una velocidad igual o mayor que la de la luz c . Como indicábamos en el ejemplo 34-7, si la velocidad de una partícula es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema de referencia que se mueva respecto al primero con velocidades inferiores a c .

En las aplicaciones prácticas, en lugar de la velocidad suele conocerse la cantidad de movimiento o la energía de una partícula. Para eliminar la velocidad u pueden combinarse la ecuación 34-28 correspondiente a la cantidad de movimiento relativista con la ecuación 34-32 que nos da la energía relativista. (Ver el problema 48.) El resultado es

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad 34-34$$

Relación entre la energía total, la cantidad de movimiento y la energía en reposo

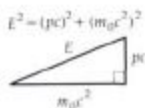


Figura 34-16 Triángulo rectángulo que sirve de regla mnemotécnica para recordar la ecuación 34-34.

Esta útil ecuación puede recordarse mediante la regla mnemotécnica del triángulo indicado en la figura 34-16. Si la energía de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo $m_0 c^2$, puede desprejiciarse el segundo sumando de la ecuación 34-34, obteniéndose la interesante aproximación

$$E = pc \quad \text{para } E \gg m_0 c^2 \quad 34-35$$

La ecuación 34-35 es una relación exacta entre la energía y la cantidad de movimiento para partículas que carecen de masa en reposo, como los fotones y neutrinos.

Ejercicio

Un protón con una masa en reposo de $938 \text{ MeV}/c^2$ tiene una energía total de 1400 MeV . Hallar (a) $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, (b) su cantidad de movimiento, y (c) su velocidad u . [Respuestas: (a) 1,49, (b) $p = 1040 \text{ MeV}/c$, (c) $u = 0,74c$]

La identificación del término m_0c^2 con la energía en reposo no es algo simplemente conveniente. La conversión de la energía en reposo en energía cinética con la correspondiente pérdida de energía en reposo es un acontecimiento común en las desintegraciones radiactivas y en las reacciones nucleares, incluyendo la fisión y la fusión nuclear. En esta sección daremos algunos ejemplos de esta transformación. Einstein consideró a la ecuación 34-31, que relaciona la energía de una partícula con su masa, como el resultado más importante de la teoría de la relatividad. La energía y la inercia, que anteriormente eran dos conceptos diferentes, se relacionan a través de esta famosa ecuación.

Para ilustrar la relación existente entre la masa y la energía, consideremos un choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Clásicamente, se pierde energía cinética en un choque de esta clase. Por ejemplo, en el sistema de referencia de cantidad de movimiento nula, las partículas se mueven la una hacia la otra con cantidades iguales y opuestas, y quedan en reposo después del choque. En este sistema de referencia, se pierde la totalidad de la energía cinética que el sistema poseía antes del choque. En cualquier otro sistema de referencia, las partículas se mueven después con la velocidad del centro de masas, pero la cantidad de energía cinética perdida es la misma. Veremos ahora que si suponemos que se conserva la energía relativista total, la pérdida de energía cinética es igual a la ganancia de energía en reposo del sistema. Consideremos una partícula en reposo de masa m_{10} moviéndose con una velocidad inicial u_1 que choca con una partícula en reposo de masa m_{20} que se mueve con velocidad inicial u_2 . Las partículas chocan y quedan pegadas, formando una partícula de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad final u_3 , como se ve en la figura 34-17. Sea E_1 la energía total inicial y E_2 la energía cinética inicial de la partícula 1, y E_3 la energía total inicial y E_{c3} la energía cinética inicial de la partícula 2. La energía total inicial del sistema es

$$E_i = E_1 + E_2$$

y la energía cinética inicial del sistema es

$$E_{ci} = E_{c1} + E_{c2} = (E_1 - m_{10}c^2) + (E_2 - m_{20}c^2)$$

Después del choque, la partícula compuesta tiene una masa en reposo M_0 , una energía total E_f y una energía cinética $E_{cf} = E_f - M_0c^2$. La pérdida de energía cinética del sistema es, pues,

$$E_{ci} - E_{cf} = (E_1 + E_2 - m_{10}c^2 - m_{20}c^2) - (E_f - M_0c^2) \quad 34-36$$

Si admitimos la conservación de la energía, tendremos $E_f = E_i = E_1 + E_2$. Sustituyendo $E_f + E_{cf} - E_i = 0$ en la ecuación 34-36 y ordenando, se tendrá

$$E_{cf} - E_{ci} = [M_0 - (m_{10} + m_{20})]c^2 = (\Delta m_0)c^2 \quad 34-37$$

en donde $\Delta m_0 = M_0 - (m_{10} + m_{20})$ es el incremento de la masa en reposo del sistema.



Figura 34-17 Choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Una partícula de masa en reposo m_{10} choca con otra de masa en reposo m_{20} . Después de la colisión, las partículas quedan unidas, formando una partícula compuesta de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad u_3 de forma que se conserve la cantidad de movimiento relativista. En este proceso se pierde energía cinética. Si suponemos que se conserva la energía total, la pérdida de energía cinética debe ser igual a c^2 veces el aumento de la masa en reposo del sistema.

Veamos algunos ejemplos numéricos de la física atómica y nuclear para ilustrar estos cambios de la masa en reposo y de la energía en reposo. Las energías en física atómica y nuclear suelen expresarse en unidades de electrón-voltios (eV) o megaelectrón-voltios (MeV):

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Una unidad conveniente para las masas de las partículas atómicas es eV/c^2 o MeV/c^2 , que coincide con la energía en reposo de la partícula dividida por c^2 . En la tabla 34-1 se dan las masas y energías en reposo de algunas partículas elementales, y en ella se ve que la masa de un núcleo no es igual a la suma de las masas de sus partes.

Tabla 34-1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros

Partículas	Símbolos	Energía en reposo, MeV
Fotón	γ	0
Electrón (positrón)	e o e^- (e^+)	0,5110
Muón	μ^\pm	105,7
Pión	π^\pm	135
	π^0	139,6
Protón	p	938,280
Neutrón	n	939,573
Deuterón	${}^2\text{H}$ o d	1875,628
Tritón	${}^3\text{H}$ o t	2808,944
Partícula alfa	${}^4\text{He}$ o α	3727,409

Ejemplo 34-10

Un deuterón está compuesto por un protón y un neutrón ligados conjuntamente. Es el núcleo del átomo de deuterio, que es un isótopo del hidrógeno denominado hidrógeno pesado y que se escribe ${}^2\text{H}$. ¿Cuánta energía se necesita para separar el protón del neutrón en el deuterón?

Según la tabla 34-1, podemos ver que la energía en reposo del deuterón es 1875,63 MeV. La energía en reposo del protón es 938,28 MeV, y la del neutrón es 939,57 MeV. La suma de las energías en reposo del protón y del neutrón es $938,28 \text{ MeV} + 939,57 \text{ MeV} = 1877,85 \text{ MeV}$. Este valor es mayor que la energía en reposo del deuterón en $1877,85 - 1875,63 = 2,22 \text{ MeV}$. La energía necesaria para romper un núcleo en sus partes constituyentes se denomina **energía de enlace** del núcleo. La energía de enlace del deuterón es 2,22 MeV. Esta es la energía que debe adicionarse al deuterón para romperlo en un protón más un neutrón. Esto puede hacerse bombardeando deuterones con partículas energéticas o con radiación electromagnética con energía de por lo menos 2,22 MeV.

Cuando se forma un deuterón mediante la combinación de un neutrón y de un protón, debe liberarse energía. Cuando los neutrones de un reactor colisionan con protones, algunos neutrones son capturados para formar deuterones. En el proceso de captura se liberan 2,22 MeV de energía, normalmente en forma de radiación electromagnética.

El ejemplo 34-10 ilustra una importante propiedad de los átomos y núcleos. Toda partícula estable compuesta, como un deuterón o un átomo de helio (2 neutrones más 2 protones), que esté formada por otras partículas, tiene una energía en reposo que es menor que la suma de las energías en reposo de sus partes. La diferencia es la energía de enlace de la partícula compuesta. Las energías de enlace de los átomos y moléculas son del orden de algunos electrón-voltios, lo que hace que la diferencia de masas entre la partícula compuesta y sus partes sea despreciable. Las energías de enlace de los núcleos son del orden de varios MeV, lo que origina una diferencia de masas observable. Algunos núcleos muy pesa-

dos, como el radio, son radiactivos y se desintegran en núcleos más ligeros, más una partícula alfa. En este caso, el núcleo original tiene una energía en reposo mayor que la de las partículas obtenidas en la desintegración. La energía en exceso aparece como energía cinética de los productos de dicha desintegración.

Ejemplo 34-11

En una reacción de fusión nuclear típica, un núcleo de tritio (${}^3\text{H}$) y un núcleo de deuterio (${}^2\text{H}$) se fusionan para formar un núcleo de helio (${}^4\text{He}$) más un neutrón. ¿Cuánta energía se libera en esta reacción de fusión?

La reacción se escribe así



Según la tabla 34-1, la energía en reposo de los núcleos de deuterio y tritio es $1875,628 \text{ MeV} + 2808,944 \text{ MeV} = 4684,572 \text{ MeV}$. La energía en reposo del núcleo de helio más el neutrón es $3727,409 + 939,573 = 4666,982 \text{ MeV}$. Es inferior al valor anterior en $4684,572 - 4666,982 = 17,59 \text{ MeV}$. La energía liberada en esta reacción es, pues, $17,59 \text{ MeV}$. Esta y otras reacciones de fusión tienen lugar en el Sol siendo responsables de la energía suministrada a la Tierra. Como el Sol emite energía, su masa en reposo está decreciendo continuamente.

Ejemplo 34-12

Un átomo de hidrógeno compuesto por un protón y un electrón tiene una energía de enlace de $13,6 \text{ eV}$. ¿En qué porcentaje es mayor la suma de las masas del protón más el electrón, con respecto a la masa del átomo de hidrógeno?

La energía en reposo de un protón más la de un electrón es $938,28 \text{ MeV} + 0,511 \text{ MeV} = 938,791 \text{ MeV}$. La suma de las masas de estas dos partículas es $938,791 \text{ MeV}/c^2$. La masa del átomo de hidrógeno es menor que este valor en $13,6 \text{ eV}/c^2$. La diferencia expresada en porcentaje es

$$\frac{13,6 \text{ eV}/c^2}{938,791 \times 10^6 \text{ eV}/c^2} = 1,45 \times 10^{-8} = 1,45 \times 10^{-6}\%$$

Esta diferencia de masa es tan pequeña que es difícilmente medible.

Ejemplo 34-13

Una partícula de masa en reposo $2 \text{ MeV}/c^2$ y energía cinética 3 MeV choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo $4 \text{ MeV}/c^2$. Después del choque, las dos partículas quedan unidas. Hallar (a) la cantidad de movimiento inicial del sistema, (b) la velocidad final del sistema de dos partículas y (c) la masa en reposo de dicho sistema.

(a) Puesto que la partícula en movimiento tiene una energía cinética de 3 MeV y una energía en reposo de 2 MeV , su energía total vale $E_1 = 5 \text{ MeV}$. Obtenemos su cantidad de movimiento con la ecuación 34-34

$$pc = \sqrt{E_1^2 - (m_1^0 c^2)^2} = \sqrt{(5 \text{ MeV})^2 - (2 \text{ MeV})^2} = \sqrt{21} \text{ MeV}$$

o bien

$$p = 4,58 \text{ MeV}/c$$

Como la otra partícula está en reposo, esta cantidad de movimiento es la total del sistema.

(b) Podemos hallar la velocidad final del sistema de dos partículas a partir de su energía total E y de su cantidad de movimiento p utilizando la ecuación 34-33. Por la conservación de la energía total, la energía final del sistema es igual a la energía total inicial de las dos partículas:

$$E_f = E_i = E_1 + E_2 = 5 \text{ MeV} + 4 \text{ MeV} = 9 \text{ MeV}$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento, la cantidad de movimiento final del sistema de dos partículas es igual a la inicial, $p = 4,58 \text{ MeV}/c$. Por tanto, la velocidad del sistema de dos partículas viene dada por

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{4,58 \text{ MeV}}{9 \text{ MeV}} = 0,509$$

(c) Podemos hallar la masa en reposo del sistema final de dos partículas a partir de la ecuación 34-34 utilizando $pc = 4,58 \text{ MeV}$ y $E = 9 \text{ MeV}$. Se tiene así

$$E^2 = (pc)^2 + (M_0c^2)^2$$

$$(9 \text{ MeV})^2 = (4,58 \text{ MeV})^2 + (M_0c^2)^2$$

$$M_0c^2 = \sqrt{81 - 21} \text{ MeV} = 7,75 \text{ MeV}$$

$$M_0 = 7,75 \text{ MeV}/c^2$$

Es instructivo comprobar nuestras respuestas calculando las energías cinéticas inicial y final. La energía cinética inicial es $E_{ci} = 3 \text{ MeV}$. La energía cinética final vale

$$E_{cf} = \bar{E} - M_0c^2 = 9 \text{ MeV} - 7,75 \text{ MeV} = 1,25 \text{ MeV}$$

La pérdida de energía cinética es

$$E_{ci} - E_{cf} = 3 \text{ MeV} - 1,25 \text{ MeV} = 1,75 \text{ MeV}$$

Como la energía en reposo inicial es $2 \text{ MeV} + 4 \text{ MeV} = 6 \text{ MeV}$ y la energía en reposo final es $M_0c^2 = 7,75 \text{ MeV}$, la ganancia en energía en reposo es $7,75 \text{ MeV} - 6 \text{ MeV} = 1,75 \text{ MeV}$.

34-11 Relatividad general

La generalización de la teoría de la relatividad a los sistemas de referencia no inerciales llevada a cabo por Einstein en 1916 se conoce con el nombre de teoría general de la relatividad. Desde el punto de vista matemático es más compleja que la teoría especial de la relatividad, y existen pocas situaciones en las que pueda comprobarse. Sin embargo su importancia requiere que veamos al menos una breve discusión cualitativa.

El fundamento de la teoría general de la relatividad es el **principio de equivalencia**:

Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la aparente identidad entre masa inercial y masa gravitatoria. En un campo gravitatorio uniforme, todos los objetos caen con la misma aceleración g independientemente de su masa ya que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa (gravitatoria) mientras que la aceleración varía inversamente con la masa (inercial). Supongamos un compartimento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración uniforme a , tal como se muestra en la figura 34-18a. No se puede llevar a cabo ningún experimento mecánico en el interior del compartimento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad uniforme) en presencia

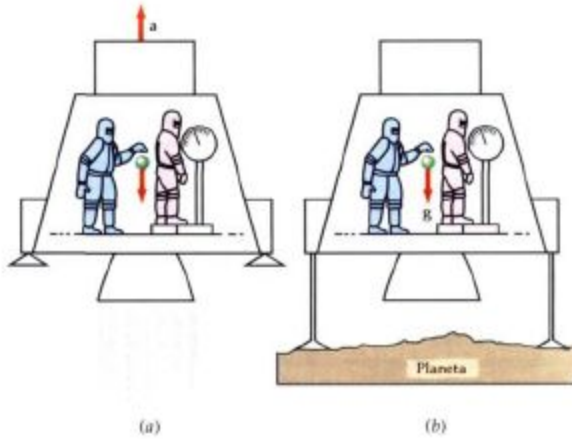


Figura 34-18 Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado (a) no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitacional uniforme (b) si la aceleración a y el campo gravitacional g tienen la misma magnitud.

de un campo gravitatorio uniforme $g = -a$, como se muestra en la figura 34-18b. Si dentro del compartimento se sueltan algunos objetos, caerán hacia el «suelo» con una aceleración $g = -a$. Si una persona está sobre una báscula de baño o de muelle, leerá que su «peso» tiene un valor ma .

Einstein supuso que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo a la mecánica. Supuso que no podía existir ningún experimento que distinguiese la presencia de un campo gravitatorio de un movimiento uniformemente acelerado. Vamos a estudiar ahora de forma cualitativa un pequeño número de las consecuencias que se derivan de esta suposición.

La primera de las consecuencias del principio de equivalencia que discutiremos, la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio, fue una de las primeras en comprobarse experimentalmente. En la figura 34-19 se muestra un haz de luz que entra en un compartimento que se está acelerando. Se muestran las diferentes posiciones del compartimento para intervalos de tiempo iguales, como se ve en la figura 34-19a. Como el compartimento se está acelerando, la distancia que recorre en cada intervalo de tiempo aumenta con el tiempo. Por tanto la trayectoria del haz de luz observada en el interior del compartimento es una parábola, como se muestra en la figura 34-19b. Pero de acuerdo con el principio de equivalencia, no es posible distinguir un compartimento en aceleración y otro con velocidad uniforme en un campo gravitatorio uniforme. Por tanto, concluimos, que un haz de luz, como un objeto masivo, se acelerará en un campo gravitatorio. Por ejemplo, en un lugar próximo a la superficie terrestre, la luz caerá con una aceleración de $9,81 \text{ m/s}^2$. Debido a la enorme velocidad de la luz este valor es difícil de observar. Así por ejemplo para una distancia de 3000 km, que la luz recorre aproximadamente en 0,01 s, un haz de luz caerá aproxima-

Figura 34-19 Haz de luz moviéndose en línea recta a través de un compartimento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del haz se muestra a intervalos iguales de tiempo t_1 , t_2 , t_3 , y t_4 . (b) En el sistema de referencia del compartimento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para dar mayor énfasis los desplazamientos verticales en (a) y (b) están muy exagerados.

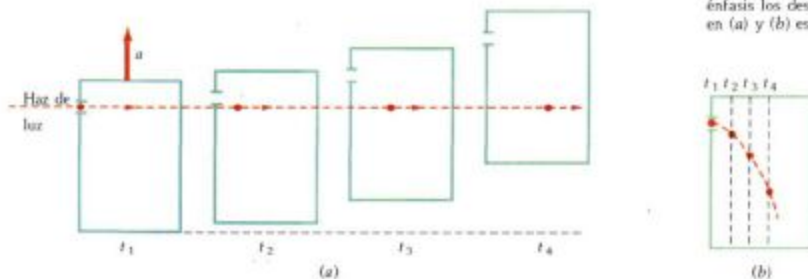




Figura 34-20 Desviación (muy exagerada) de un haz de luz debido a la atracción gravitacional del Sol.

damente 0,5 mm. Einstein dijo que la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio podría observarse cuando la luz procedente de las estrellas lejanas pasara cerca del Sol, como se muestra en la figura 34-20. Debido al brillo del Sol, esta estrella no puede observarse normalmente. Esta desviación fue observada durante un eclipse de Sol en 1919. Esta observación fue ampliamente divulgada y trajo fama mundial a Einstein.

Una segunda predicción de la teoría de la relatividad general de Einstein, que no discutiremos en detalle, es el exceso de precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, estimado aproximadamente en $0,01^\circ$ por siglo. Este efecto era conocido desde hacía tiempo, pero no había podido ser explicado; así pues, en cierto sentido, éste fue uno de los éxitos inmediatos de la teoría.

Una tercera predicción de la relatividad general se refiere a la variación de los intervalos de tiempo y de las frecuencias de la luz en un campo gravitatorio. En el capítulo 10, vimos que la energía potencial gravitatoria entre dos masas M y m separadas entre sí una distancia r es

$$U = - \frac{GMm}{r}$$

siendo G la constante universal de la gravitación, y habiéndose escogido como punto cero de la energía potencial cuando la separación de las masas es infinita. La energía potencial por unidad de masa cerca de una masa M se denomina *potencial gravitatorio* ϕ :

$$\phi = - \frac{GM}{r} \quad 34-38$$

De acuerdo con la teoría general de la relatividad, los relojes marchan más lentamente en las regiones de potencial gravitatorio bajo. (Como el potencial gravitatorio es negativo, como puede verse por la ecuación 34-38, el potencial gravitatorio bajo se presenta cerca de la masa en donde el *valor* del potencial es grande.) Si Δt_1 es un intervalo de tiempo entre dos sucesos medidos por un reloj en donde el potencial gravitatorio es ϕ_1 , y Δt_2 es el intervalo entre los mismos sucesos pero medidos por un reloj situado donde el potencial gravitatorio es ϕ_2 , la relatividad

(a) Esta esfera de cuarzo situada en la parte superior del recipiente es probablemente el objeto del mundo de más perfecta «redondez» o esfericidad. Está proyectada para girar sobre sí misma como un giroscopo en un satélite que orbita alrededor de la Tierra. La relatividad general predice que la rotación de la Tierra hará que el eje de rotación del giroscopo tenga un movimiento de precesión circular con una velocidad angular de aproximadamente 1 revolución cada 100 000 años. (b) Este reloj de máser de hidrógeno de extraordinaria exactitud fue lanzado dentro de un satélite en 1976, y sus medidas se comparaban con las de otro reloj idéntico en la Tierra. De acuerdo con lo que predice la teoría general de la relatividad, el reloj en la Tierra, donde el potencial gravitatorio es menor, «perdía» alrededor de $4,3 \times 10^{-10}$ s cada segundo en comparación con el reloj que está en el satélite a una altura de alrededor de los 10 000 km.



(a)



(b)

general predice que la diferencia relativa entre estos tiempos será aproximadamente

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} (\phi_2 - \phi_1) \quad 34-30$$

(Como normalmente este desplazamiento es muy pequeño, carece de importancia el intervalo por el que se divida el primer miembro de la ecuación.) Por tanto, un reloj situado en una región de potencial gravitatorio bajo irá más despacio que uno situado en un lugar de potencial elevado. Como se puede considerar a un átomo en vibración como un reloj, la frecuencia de vibración en una región de potencial bajo, como cerca del Sol, será inferior que la del mismo átomo situado sobre la Tierra. Este desplazamiento hacia las frecuencias bajas y por tanto hacia longitudes de onda largas recibe el nombre de **desplazamiento gravitatorio hacia el rojo**.

Como ejemplo final de las predicciones de la teoría general, mencionaremos los **agujeros negros**, predichos por primera vez por Oppenheimer y Snyder en 1939. De acuerdo con la teoría general de la relatividad, si la densidad de un objeto como una estrella es suficientemente grande, la atracción gravitatoria es tan enorme que una vez dentro del radio crítico, nada puede escapar a su acción, ni siquiera la luz o la radiación electromagnética. (El efecto que produce un agujero negro sobre los objetos que se encuentran fuera del radio crítico es el mismo que el de cualquier otra masa.) Una de las características de un objeto de este tipo es que nada de lo que ocurre en su interior puede ser comunicado al mundo exterior. Como ocurre con cierta frecuencia en física, un cálculo simple aunque incorrecto, permite calcular los valores correctos para la relación entre la masa y el radio crítico de un agujero negro. En mecánica newtoniana, el valor de la velocidad necesaria para que una partícula escape de la superficie de un planeta o estrella de masa M y radio R viene dada por la ecuación 10-24:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si hacemos la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz y despejamos el radio, obtenemos el radio crítico R_g , llamado **radio de Schwarzschild**:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad 34-40$$

Para que un objeto de masa igual a la de nuestro Sol fuese un agujero negro, su radio debería ser aproximadamente igual a 3 km. Como un agujero negro no emite radiación y su radio se espera que sea pequeño, la detección de este objeto no es fácil. Lo mejor que podría ocurrir para detectar un agujero negro es que éste fuese compañero de una estrella normal en un sistema binario de estrellas. El agujero negro podría afectar un cierto número de propiedades de su compañero visible. La medida del desplazamiento doppler de la luz procedente de la estrella normal nos permitiría llevar a cabo un cálculo de la masa de su compañero invisible con lo que determinaríamos si es lo suficientemente grande para ser un agujero negro. Actualmente existen varios candidatos excelentes —uno en la constelación Cygnus, uno en la Nube Magellanic, y quizás uno en nuestra propia galaxia— pero esta evidencia no es, por el momento, concluyente.



Esta antena, formada por un cilindro de aluminio de 1400 kg colgada libremente de un cable de acero, fue construida por Joseph Webber, David Zippy y Robert Foward en la Universidad de Maryland para detectar las ondas gravitatorias. En teoría, la antena debería vibrar cuando las ondas de gravedad pasaran por ella.

Resumen

1. La teoría especial de la relatividad está basada en dos postulados de Albert Einstein:

Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme.

Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento del foco. Una implicación importante de ambos postulados es

Postulado 2 (Alternativo). Todos los observadores miden el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo de los focos y de los observadores.

Todos los demás resultados de la relatividad especial pueden deducirse a partir de estos postulados.

- El experimento de Michelson-Morley fue un intento de medir la velocidad absoluta de la Tierra comparando la velocidad de la luz en la dirección del movimiento de la Tierra con la que debe poseer en una dirección perpendicular a dicho movimiento. El resultado nulo encontrado para la diferencia de estas velocidades es consistente con los postulados de Einstein.
- La transformación de Lorentz relaciona las coordenadas x , y y z y el tiempo t de un suceso visto en el sistema de referencia S con las coordenadas x' , y' y z' y el tiempo t' del mismo suceso visto en el sistema S' , que se está moviendo con velocidad V relativa a S :

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + Vt') & y &= y' & z &= z' \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right)\end{aligned}$$

en donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

La transformación inversa es

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt) & y' &= y & z' &= z \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de transformación para las velocidades son

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)}\end{aligned}$$

Las ecuaciones de transformación inversa de las velocidades son

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}\end{aligned}$$

- El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos que se producen en el mismo punto del espacio en un cierto sistema de referencia se denomina tiempo propio. En otro sistema de referencia en el que los sucesos tienen lugar en puntos diferentes, el intervalo de tiempo entre los sucesos mencionados es más largo

en un factor γ . Este resultado se conoce como dilatación del tiempo, mientras que existe un fenómeno relacionado con éste que es la contracción de longitudes. La longitud de un objeto, medida en un sistema en el cual dicho objeto se encuentra en reposo, se denomina su longitud propia L_p . Cuando se mide en otro sistema de referencia, la longitud del objeto es L_p/γ .

5. Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se está moviendo respecto al primero. Si dos relojes están sincronizados en el sistema en que se encuentran en reposo, estarán fuera de sincronización en otro sistema. En el sistema en que se están moviendo, el reloj «cazador» adelanta en una cantidad $\Delta t_s = L_p V/c^2$, siendo L_p la distancia propia entre los dos relojes.
6. La cantidad de movimiento o impulso relativista de una partícula está relacionada con su masa y su velocidad por

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partícula.

7. La energía cinética de una partícula viene dada por

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - E_0$$

en donde

$$E_0 = m_0 c^2$$

es la energía en reposo. La energía total es

$$E = E_c + E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

La velocidad de una partícula está relacionada con su cantidad de movimiento y con su energía total por

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$$

La energía total está relacionada con la cantidad de movimiento y la energía en reposo por

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

Cuando se trata de partículas con energías mucho mayores que sus energías en reposo, una aproximación útil es

$$E \approx pc \quad \text{para } E \gg m_0 c^2$$

Esta ecuación es exacta para el caso de partículas con masa en reposo nula, como los fotones.

8. La masa en reposo total de sistemas de partículas ligadas, como los núcleos y los átomos, es menor que la suma de las masas en reposo de las partículas que constituyen el sistema. La diferencia de masas multiplicada por c^2 es igual a la energía de enlace del sistema. La energía de enlace es la energía que debe adicionarse para descomponer el sistema en sus partes. Las energías de enlace de los electrones en los átomos son del orden de los eV o de los keV, lo que equivale a una diferencia despreciable de las masas en reposo. Las energías de enlace en los núcleos es del orden de varios MeV, y la diferencia de masas en reposo es observable.
9. La base de la teoría general de la relatividad es el principio de equivalencia: Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado. Algunas de las consecuencias importantes de esta teoría son la curvatura de la luz en un campo gravitatorio, la predicción de la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, el desplazamiento gravitatorio hacia el rojo y probablemente la existencia de agujeros negros.

Sugerencias bibliográficas

Bondi, Hermann: *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*, Doubleday, Garden City, Nueva York, 1964.

Este libro muestra cómo ciertos fenómenos familiares ayudan a ver lo lógico y sencillo que es comprender las ideas de la teoría especial de la relatividad.

Chafee, Frederick H., Jr.: «The Discovery of a Gravitational Lens», *Scientific American*, noviembre 1980, pág. 70.

La relatividad general predice que la luz debe ser desviada por concentraciones de materia. Este artículo describe cómo una galaxia elíptica puede actuar como una lente gigante en el espacio.

Gamow, George: «Gravity», *Scientific American*, marzo 1961, pág. 94.

Se explica la teoría general de la relatividad de Einstein de una forma entretenida y sin matemáticas.

Goldberg, Stanley: *Understanding Relativity: Origin and Impact of a Scientific Revolution*, Birkhaeuser, Boston, 1984.

En este libro se examina el contexto intelectual y social en que creció la teoría especial de Einstein y su aceptación inicial por las comunidades de científicos de cuatro países.

MacKeown, P.K.: «Gravity is Geometry», *The Physics Teacher*, vol. 22, 1984, pág. 557.

Este artículo es una exposición breve pero excelente de las ideas de la relatividad general.

Marder, L.: *Time and the Space Traveller*, George Allen and Unwin, Ltd., Londres, 1971.

Este libro presenta algunos de los argumentos que se han hecho en el largo y variado debate acerca de la paradoja de los gemelos. También examina algunas de las limitaciones prácticas de los viajes espaciales, las implicaciones de la dilatación del tiempo para el viajero espacial en distancias largas y la naturaleza de los relojes vivientes.

Mook, Delo E. y Thomas Vargish: *Inside Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 1987.

Es un libro para no científicos escrito por dos profesores, uno que trabaja en las ciencias físicas y el otro en humanidades. Proporciona un contexto histórico y científico para el trabajo de Einstein y explica las teorías especial y general con ayuda de dibujos y gráficos, pero sin matemáticas.

Schwinger, Julian: *Einstein's Legacy: The Unity of Space and Time*, Scientific American Books, Inc., Nueva York, 1986.

Exposición moderna y bien ilustrada de las teorías especial y general de la relatividad, y algunas de sus consecuencias.

Shankland, R.S.: «The Michelson-Morley Experiment», *Scientific American*, noviembre 1964, pág. 107.

Este artículo sitúa el experimento en su contexto histórico y considera su influencia sobre el desarrollo de la teoría de la relatividad.

Will, Clifford M.: *Was Einstein Right?: Putting General Relativity to the Test*, Basic Books, Inc., Nueva York, 1986.

Alrededor de 1960, nuevos descubrimientos en astronomía motivaron un renovado interés en comprobar experimentalmente las predicciones de la teoría de la relatividad general. Este libro, escrito por un físico que empezó su trabajo profesional durante este «renacimiento» de la relatividad, describe con gran entusiasmo los ensayos o tests de comprobación realizados.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseer-se los siguientes conocimientos:

1. Poder discutir el significado y los resultados del experimento de Michelson-Morley.
2. Ser capaz de enunciar los postulados de Einstein de la relatividad especial.
3. Poder utilizar la transformación de Lorentz para deducir expresiones que den la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes, y para resolver problemas en los que se comparen intervalos espaciales y temporales en diferentes sistemas de referencia.
4. Poder discutir la falta de sincronización de relojes en sistemas de referencia móviles.
5. Poder discutir la paradoja de los gemelos.
6. Ser capaz de enunciar la definición de cantidad de movimiento relativista y las ecuaciones que relacionan la

energía cinética y la energía cinética total de una partícula con su velocidad.

7. Ser capaz de discutir la relación entre masa y energía en la relatividad especial y de calcular la energía de diferentes sistemas a partir de las masas en reposo de sus constituyentes.

8. Ser capaz de enunciar el principio de equivalencia y de discutir tres de las predicciones que de él se derivan.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

- Sistema de referencia
- Sistema de referencia inercial
- Relatividad newtoniana
- Éter
- Experimento de Michelson-Morley
- Postulados de Einstein
- Transformación de Galileo
- Transformación de Lorentz

Tiempo propio
 Dilatación del tiempo
 Contracción de longitudes
 Longitud propia
 Contracción de Lorentz-FitzGerald
 Relojes sincronizados
 Simultaneidad
 Desplazamiento hacia el rojo
 Paradoja de los gemelos
 Cantidad de movimiento relativista
 Masa relativista
 Masa en reposo
 Energía en reposo
 Energía relativista
 Energía de enlace
 Principio de equivalencia
 Desplazamiento gravitatorio hacia el rojo
 Agujero negro
 Radio de Schwarzschild

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia.
2. El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto entre dos sucesos.
3. El movimiento absoluto puede determinarse mediante la contracción de longitudes.
4. El año-luz es una unidad de distancia.
5. Los sucesos simultáneos deben ocurrir en el mismo lugar.
6. Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema de referencia, no pueden ser simultáneos en ningún otro sistema.
7. Si dos partículas están estrechamente ligadas mediante fuerzas atractivas intensas, la masa del sistema es menor que la suma de las masas de las partículas individuales cuando se encuentran separadas.

Problemas

Nivel 1

34-1 Relatividad newtoniana

No se proponen problemas para esta sección.

34-2 El experimento de Michelson-Morley

1. En una serie de medidas de velocidad de la luz, Michelson utilizó una longitud de trayecto para el recorrido de la luz, L , de 27,4 km (22 mi). (a) ¿Cuál es el tiempo que necesita la luz para hacer el recorrido de ida y vuelta en una distancia de $2L$? (b) ¿Cuál es el término de corrección clásica en segundos en la ecuación 34-1 admitiendo que la velocidad de la Tierra es $v = 10^{-8} c$? (c) A partir de unas 1600 medidas, Michelson dio el resultado correspondiente a la velocidad de la luz como $299\,796 \pm 4$ km/s. ¿Es este experimento lo suficientemente exacto como para ser sensible al término de corrección de la ecuación 34-1?

2. Un avión vuela con velocidad u respecto al aire en reposo desde un punto A a otro B y regresa. Comparar el tiempo necesario para el viaje de ida y vuelta cuando el viento sopla desde A hasta B con velocidad v , respecto al tiempo que emplearía cuando el viento sopla perpendicularmente a la línea AB con velocidad v .

34-3 Postulados de Einstein

No se proponen problemas para esta sección.

34-4 La transformación de Lorentz

3. El período de vida propio de los piones es de $2,6 \times 10^{-8}$ s. Si un haz de estas partículas tiene una velocidad de $0,85c$, (a) ¿cuál deberá ser el período de vida media cuando se mida en el laboratorio? (b) ¿Qué distancia deberán recorrer en valor medio, antes de que se desintegren? (c) ¿Cuál será la respuesta a la parte (b) si se desprecia la dilatación del tiempo?

4. (a) En el sistema de referencia de los piones del problema 3, ¿cuánto ha recorrido el laboratorio en un período de vida típico de $2,6 \times 10^{-8}$ s? (b) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

5. El período de vida propio medio de un muón es $2 \mu\text{s}$. Un haz de estos muones se está moviendo a $0,999c$. (a) ¿Cuál es su período de vida medio en el laboratorio? (b) ¿Cuánta distancia recorrerán, en valor promedio, antes de desintegrarse?

6. (a) En el sistema de referencia del muón del problema 5, ¿qué espacio recorrerá el laboratorio en un período de vida típico de $2 \mu\text{s}$? ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

7. Una nave espacial de longitud propia 100 m pasa junto a nosotros a velocidad elevada, de forma que medimos 85 m para su longitud. ¿Cuál es su velocidad?

8. Una nave espacial parte de la Tierra hacia la estrella Alfa Centauri, que dista 4 años-luz, moviéndose con una velocidad de $0,75c$. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí (a) según se medirá en la Tierra y (b) según medirá un pasajero de la nave?

9. Una nave espacial viaja hacia una estrella alejada a 95 años-luz con una velocidad $2,2 \times 10^8$ m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí (a) según se medirá en la Tierra y (b) según medirá un pasajero de la nave?

10. El período de vida medio de un pión que se mueve a velocidad elevada resultar ser, al medirse, de $7,5 \times 10^{-8}$ s, mientras que si se mide en reposo es $2,6 \times 10^{-8}$ s. ¿Con qué velocidad se está moviendo el pión?

11. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un muón de modo que su período de vida medio sea $46 \mu\text{s}$, si en reposo el período vale $2 \mu\text{s}$?

12. Una regla métrica se mueve con velocidad $V = 0,8c$ respecto al observador en dirección paralela a la regla. (a) Hallar la longitud de la regla medida por el observador. (b) ¿Cuánto tiempo tarda en pasar la regla delante del observador?

13. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose una regla métrica respecto al observador en dirección paralela a la misma, si la longitud que mide el observador es 50 cm?

14. Utilizar el desarrollo del binomio (ecuación 34-2) para deducir los resultados siguientes en el caso en que V sea mucho

menor que c , y utilizar los resultados obtenidos cuando sean aplicables en los problemas que siguen:

$$(a) \gamma = 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \quad b) \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}$$

$$(c) \gamma - 1 \approx 1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}$$

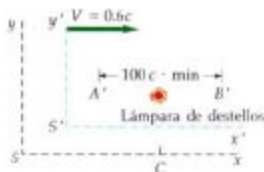
15. Los aviones supersónicos tienen unas velocidades máximas del orden de $(3 \times 10^{-3})c$. (a) ¿En qué porcentaje se verá contraído un avión de este tipo en longitud? (b) Durante un tiempo de 1 año $\approx 3,15 \times 10^8$ s en el reloj del observador, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido en el reloj del piloto? ¿Cuántos minutos se perderán en el reloj del piloto en 1 año del tiempo del observador?

16. ¿Cómo debe ser de grande la velocidad relativa de los observadores para que sus medidas de intervalos de tiempo difieran en el 1 por ciento? (Ver problema 14.)

34-5 Sincronización de relojes y simultaneidad

Los problemas 17 a 21 se refieren al siguiente caso. Un observador en S' marca una distancia $L' = 100$ minutos- c entre los puntos A' y B' y coloca una lámpara de destellos en el punto medio C' . Dispone que la lámpara produzca destellos y que los relojes A' y B' empiecen a marchar con el valor cero cuando la luz procedente de los destellos alcance a los relojes (ver figura 34-21). El sistema S se mueve hacia la derecha con velocidad $0,6c$ respecto a un observador C en S que está en el punto medio entre A y B cuando la lámpara lanza un destello y pone su reloj a cero en dicho instante.

Figura 34-21 Problemas 17 a 21.



17. ¿Cuál es la distancia de separación entre los relojes A' y B' de acuerdo con el observador en S ?

18. Cuando el pulso luminoso procedente de la lámpara de destellos se mueve hacia A' con velocidad c , A' se mueve hacia C con velocidad $0,6c$. Demostrar que el reloj en S lee 25 min cuando el destello alcanza A' . (Indicación: En el tiempo t la luz recorre una distancia ct y A' se mueve $0,6ct$. La suma de estas distancias debe ser igual a la distancia entre A' y la lámpara de destellos según se ve en S .)

19. Demostrar que el reloj en S lee 100 min cuando el destello luminoso alcanza B' , que se está moviendo alejándose de C con velocidad $0,6c$. (Ver la indicación del problema 18.)

20. El intervalo de tiempo entre la recepción de los destellos a A' y B' en los problemas 18 y 19 es 75 min de acuerdo con el observador en S . ¿Cuánto tiempo ha de esperarse que haya transcurrido en el reloj situado en A' durante estos 75 minutos?

21. El intervalo de tiempo calculado en el problema 20 es la cantidad que el reloj en A' adelanta respecto al de B' de acuerdo

con los observadores situados en S . Comparar este resultado con $L_p V/c^2$.

34-6 Efecto Doppler

22. ¿Con qué rapidez deberá moverse un observador hacia una luz roja ($\lambda = 650$ nm) para que parezca verde ($\lambda = 525$ nm)?

23. Una galaxia distante se está alejando de nosotros con una velocidad de $1,85 \times 10^8$ m/s. Calcular el desplazamiento relativo del rojo $(\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$ en la luz procedente de esta galaxia.

24. Demostrar que V es mucho menor que c , el desplazamiento de frecuencias del efecto doppler viene dado aproximadamente por $\Delta f/f \approx \pm V/c$.

25. Una galaxia distante se está alejando de la Tierra de modo que cada longitud de onda se desplaza en un factor de 2; es decir, $\lambda' = 2\lambda_0$. ¿Cuál es la velocidad de la galaxia respecto a la Tierra?

26. Una fuente luminosa que se está acercando a la Tierra con velocidad V emite luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. En el sistema de referencia de la Tierra el valor medido es de 620 nm. Hallar V .

27. Un estudiante en la Tierra oye una pieza musical en su radio que parece corresponder a un disco que está girando a mayor velocidad de la prevista. Dispone de un disco de la misma pieza de 33 rev/min y determina que la pieza que escucha en la radio suena igual que cuando hace girar su disco a 78 rev/min, es decir, que las frecuencias son todas más elevadas en un factor de $78/33$. Si la pieza se está tocando correctamente, pero la emite con una emisora situada en una nave espacial que se acerca a la Tierra con velocidad V , determinar V .

34-7 Paradoja de los gemelos

28. Un estudiante tiene un amigo de su misma edad que está viajando a $0,999c$ hacia una estrella situada a 15 años-luz. Permanece a 10 años en uno de los planetas de la estrella y luego regresa a $0,999c$. ¿Cuánto tiempo ha permanecido fuera (a) si lo mide el estudiante y (b) medido por el viajero?

34-8 Transformación de la velocidad

29. Dos naves espaciales se aproximan una a la otra. (a) Si la velocidad de cada una de ellas es $0,6c$ respecto a la Tierra, ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra? (b) Si la velocidad de cada una de ellas respecto a la Tierra es de $30\,000$ m/s (aproximadamente 100 veces la velocidad del sonido), ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra?

30. Un haz luminoso se mueve a lo largo del eje y' con una velocidad c en el sistema S' , que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S . (a) Hallar los componentes x e y de la velocidad del haz de luz en el sistema S . (b) Demostrar que el valor de la velocidad del haz de luz en S es c .

31. Una nave espacial se está moviendo hacia el este a una velocidad de $0,90c$ respecto a la Tierra. Otra nave espacial se está moviendo hacia el oeste también a una velocidad de $0,90c$ respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de una de las naves espaciales respecto a la otra?

32. Una partícula se mueve con velocidad $0,8c$ a lo largo del eje x'' del sistema S'' que se mueve con velocidad $0,8c$ a lo largo del eje x' respecto al sistema S' . El sistema S' se mueve con velocidad $0,8c$ a lo largo del eje x respecto al sistema S .

- (a) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S .
 (b) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S' .

34-9 Cantidad de movimiento relativista;

34-10 Energía relativista

33. ¿Cuánta masa en reposo debe convertirse en energía (a) para producir 1 J y (b) para mantener encendida una lámpara de 100 W durante 10 años?

34. Dibujar un gráfico de la cantidad de movimiento p de una partícula en función de su velocidad u .

35. (a) Calcular la energía en reposo de 1 g de polvo. (b) Si se pudiese convertir esta energía en energía eléctrica y venderla a 10 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuánto dinero se ganaría? (c) Si se pudiese aplicar esta energía a una lámpara de 100 W, ¿durante cuánto tiempo permanecería encendida?

36. Hallar el cociente entre la energía total y la energía en reposo con velocidad $u=0,2c$. Hallar su energía total, su energía cinética y su cantidad de movimiento.

37. Un electrón con energía en reposo de 0,511 MeV se mueve con velocidad $u=0,2c$. Hallar su energía total, su energía cinética y su cantidad de movimiento.

38. Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV. Calcular su masa en reposo en kilogramos.

39. Un protón con energía en reposo de 938 MeV tiene una energía total de 1400 MeV. (a) ¿Cuál es su velocidad? (b) ¿Cuál es su cantidad de movimiento?

40. La energía total de una partícula es el doble de su energía en reposo. (a) Hallar u/c para la partícula. (b) Demostrar que su cantidad de movimiento viene dada por $p=\sqrt{3}m_0c$.

41. En el caso de la reacción de fusión del ejemplo 34-11, calcular el número de reacciones por segundo que son necesarias para generar 1 kW de potencia.

42. Utilizando la tabla 34-1, hallar cuánta energía es necesaria para eliminar un neutrón del ${}^4\text{He}$, de forma que quede ${}^3\text{He}$ más el neutrón.

43. Un neutrón libre se desintegra en un protón más un electrón
- $$n \rightarrow p + e$$

Utilizar la tabla 34-1 para calcular la energía liberada en este proceso.

44. ¿Cuánta energía se requerirá para acelerar una partícula de masa m_0 desde el reposo hasta las velocidades de (a) 0,5c, (b) 0,9c, (c) 0,99c? Expresar los resultados como múltiplos de la energía en reposo.

45. Si la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo, ¿qué error se comete al utilizar $p=m_0u$ para su cantidad de movimiento?

46. En una reacción de fusión nuclear se combinan núcleos ${}^2\text{H}$ para producir ${}^4\text{He}$. (a) ¿Cuánta energía se libera en esta reacción? (b) ¿Cuántas reacciones de este tipo deben tener lugar por segundo para producir 1 kW de potencia?

34-11 Relatividad general

No se proponen problemas para esta sección.

Nivel II

47. Un observador tiene un amigo de su misma edad que viaja a la estrella Alfa Centauri, a 4 años-luz de la Tierra, y re-

gresa inmediatamente. Insiste en que el viaje entero duró 6 años exactamente. ¿Con qué velocidad realizó el viaje?

48. Utilizar las ecuaciones 34-28 y 34-32 para obtener la ecuación $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$.

49. Si un avión vuela a 2000 km/h, ¿durante cuánto tiempo deberá estar volando para que su reloj atrase 1 s debido a la dilatación del tiempo?

50. Utilizar el desarrollo del binomio (ecuación 34-2) y la ecuación 34-34, para demostrar que cuando $pc \ll m_0c^2$, la energía total viene dada aproximadamente por

$$E = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

51. Se coloca un reloj en un satélite que orbita la Tierra con un período de 90 min. ¿En qué intervalo de tiempo diferirá este reloj de otro idéntico en la Tierra al cabo de 1 año? (Suponer que se aplica la relatividad general.)

52. A y B son gemelos. A viaja 0,6c a Alfa Centauri (que está a 4 años-c de la Tierra, cuando se mide en el sistema de referencia de ésta) y regresa inmediatamente. Cada gemelo envía al otro una señal luminosa cada 0,01 años medido en su propio sistema de referencia. (a) ¿A qué ritmo o frecuencia recibirá B las señales cuando A se está alejando? (b) ¿Cuántas señales recibirá B a este ritmo? (c) ¿Cuántas señales en total recibirá B antes de que A haya regresado? (d) ¿Con qué frecuencia recibirá A las señales cuando B se está alejando de él? (e) ¿Cuántas señales recibe A a esta frecuencia? (f) ¿Cuántas señales en total son recibidas por A? (g) ¿Cuál de los gemelos es más joven al final del viaje y en cuántos años?

53. En el sistema S , del suceso B se produce 2 μs después del suceso A, que ocurre a $\Delta x = 1,5$ km del suceso A. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un observador a lo largo del eje $+x$ de modo que ambos sucesos A y B se verifiquen simultáneamente? ¿Es posible que para algún observador el proceso B preceda al suceso A?

54. Un observador en el sistema S de referencia ve una explosión localizada en $x_1 = 480$ m. Una segunda explosión se produce 5 μs más tarde en $x_2 = 1200$ m. En el sistema S' , que se está moviendo a lo largo del eje $+x$ con velocidad V , las explosiones se producen en el mismo punto del espacio. ¿Cuál es la diferencia de tiempos entre ambas explosiones, medidos en S' ?

55. Una nave espacial interestelar viaja desde la Tierra hasta un sistema estelar lejano a 12 años -c (medidas en el sistema de referencia terrestre). El viaje requiere 15 años, medidos en la nave. (a) ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto a la Tierra? (b) Cuando llega la nave, envía una señal a la Tierra. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido entre la partida de la nave y la llegada de la señal?

56. Demostrar que la velocidad u de una partícula m_0 y energía total E viene dada por

$$\frac{u}{c} = 1 - \left[\frac{(m_0c^2)^2}{E^2} \right]^{1/2}$$

y que, cuando E es mucho mayor que m_0c^2 , esta expresión puede aproximarse por

$$\frac{u}{c} = 1 - \frac{(m_0c^2)^2}{2E^2}$$

- Hallar la velocidad de un electrón con energía cinética de (b) 0,51 MeV y (c) 10 MeV.

57. Dos naves espaciales, de 100 m de longitud cada una cuando se miden en reposo, viajan una hacia la otra con velocidades de $0,85c$ relativas a la Tierra. (a) ¿Qué longitud de cada nave medirá un observador terrestre? (b) ¿Con qué rapidez se está moviendo cada nave, según los tripulantes de la otra? (c) ¿Qué longitud dirán que tiene? (d) En el instante $t=0$ en la Tierra, las proas de las naves están juntas al pasar una al lado de la otra. ¿En qué instante estarán juntas sus popas? (e) Dibujar un diagrama en el sistema de una de las naves que muestre el paso de la otra nave.

58. En el acelerador lineal de colisión de Stanford, se disparan pequeños paquetes de electrones y positrones unos contra otros. En el sistema de referencia del laboratorio, cada paquete tiene aproximadamente 1 cm de largo y $10 \mu\text{m}$ de diámetro. En la región de colisión, cada partícula tiene una energía de 50 GeV, y los electrones y los positrones se mueven en sentidos opuestos. (a) ¿Qué longitud y qué anchura tiene cada paquete en su propio sistema de referencia? (b) ¿Cuál debe ser la longitud propia mínima del acelerador para que un paquete tenga sus dos extremos simultáneamente dentro del acelerador en su propio sistema de referencia? (La longitud real del acelerador es menor de 1000 m.) (c) ¿Cuál es la longitud de un paquete de positrones en el sistema de referencia de los paquetes de electrones?

59. Un electrón con energía en reposo de 0,511 MeV tiene una energía total de 5 MeV. (a) Hallar su cantidad de movimiento en unidades de MeV/c a partir de la ecuación 33-34. (b) Hallar el cociente entre su velocidad u y la velocidad de la luz.

60. La energía en reposo de un protón es próxima a 938 MeV. Su energía cinética es también 938 MeV. Hallar (a) su cantidad de movimiento y (b) su velocidad.

61. ¿Qué porcentaje de error se comete al utilizar $\frac{1}{2} m_0 u^2$ como energía cinética de una partícula si su velocidad es (a) $0,1c$ y (b) $0,9c$?

62. Un cohete con longitud propia de 1000 m se mueve en la dirección $+x$ a $0,6c$ respecto a un observador en el suelo. Un astronauta situado en la parte trasera del cohete dispara un proyectil hacia la parte delantera del mismo a $0,8c$ respecto al cohete. ¿Cuánto tardará el proyectil en alcanzar la proa del cohete (a) medido en el sistema del cohete, (b) medido en el sistema del suelo y (c) medido en el sistema del proyectil?

63. Un cohete con longitud propia de 700 m se está moviendo hacia la derecha con una velocidad $0,9c$. Lleva dos relojes, uno en la proa y el otro en la popa que han sido sincronizados en el sistema de referencia del cohete. Un reloj en el suelo y el reloj de proa marcan ambos $t=0$ al pasar uno junto al otro. (a) Cuando $t=0$, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo? (b) Cuando el reloj de popa pasa junto al reloj en el suelo, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo? (c) ¿Qué señala el reloj de proa, según aprecia el mismo observador? (d) ¿Qué señala el reloj de proa visto por un observador en el cohete? (e) En el instante $t=1$ h, medido en el cohete, se envía una señal luminosa desde la proa del cohete a un observador situado en el suelo. ¿Qué señala el reloj en el suelo cuando el observador recibe esta señal? (f) Cuando el observador en el suelo recibe la señal, envía una señal hacia la proa del cohete. ¿Cuándo se recibirá esta señal en la proa del cohete, visto desde este mismo?

64. Deducir la ecuación 34-24a correspondiente a la frecuencia recibida por un observador que se mueve con velocidad V hacia una fuente estacionaria de ondas electromagnéticas.

65. Los sistemas S y S' se mueven relativamente entre sí a lo largo de los ejes x y x' . Sitúan sus relojes en $t=0$ cuando coinciden sus orígenes. En el sistema S , el suceso 1 se produce en $x_1=1,0$ años- c y $t_1=1$ año y el suceso 2 en $x_2=2,0$ años- c y $t_2=0,5$ año. Estos sucesos se verifican simultáneamente en el sistema S' . (a) Hallar el valor y la dirección de la velocidad en S' respecto a S . (b) ¿En qué instante se producen estos sucesos medidos en S' ?

66. Un observador en el sistema S situado en el origen, observa dos destellos de luz de color separados espacialmente por $\Delta x=2400$ m. Primero se produce un destello azul, seguido 5 μs después por un destello rojo. Un observador en S' que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad V relativa a S observa también los destellos separados entre sí 5 μs y con una separación de 2400 m, pero se observa primero el destello rojo. Hallar el valor y sentido de V .

67. El Sol radia energía a un ritmo de 4×10^{26} W aproximadamente. Suponer que esta energía se produce por una reacción cuyo resultado neto es la fusión de 4 núcleos de H para formar un núcleo de He, liberándose de 24 MeV por cada núcleo de He formado. Calcular la pérdida de masa en reposo diaria del Sol.

68. Una nave espacial de 10^6 kg está navegando por el espacio cuando súbitamente resulta necesario acelerar. La nave expulsa 10^3 kg de combustible en un tiempo muy corto con una velocidad $c/2$ respecto a la misma. (a) Despreciando cualquier variación de la masa en reposo del sistema, calcular la velocidad de la nave en el sistema en que estaba inicialmente en reposo. (b) Calcular la velocidad de la nave utilizando la mecánica clásica, newtoniana. (c) Utilizar los resultados de (a) para estimar la variación de la masa en reposo de la nave.

69. El sistema de referencia S' se está moviendo a lo largo del eje x' a $0,6c$ respecto al sistema S . Una partícula está originalmente en $x'=10$ m para $t'_1=0$ se acelera repentinamente y luego se mueve a una velocidad constante de $c/3$ en el sentido $-x'$ hasta el instante $t'_2=60$ m/ c , cuando repentinamente queda en reposo. Según se observa en el sistema S , hallar (a) la velocidad de la partícula, (b) la distancia y dirección del trayecto seguido por la partícula desde t'_1 a t'_2 y (c) el tiempo el cual la partícula se ha estado moviendo.

70. Demostrar que

$$d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} du$$

71. Dos protones se aproximan frontalmente a $0,5c$ respecto al sistema de referencia S . (a) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema S' . (b) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema de referencia S , que se mueve con velocidad $0,5c$ respecto a S' de forma que uno de los protones está en reposo.

72. Una partícula de masa en reposo $1 \text{ MeV}/c^2$ y energía cinética 2 MeV choca con una partícula estacionaria de masa en reposo $2 \text{ MeV}/c^2$. Después de la colisión, las partículas quedan adheridas. Hallar (a) la velocidad de la primera partícula antes del choque, (b) la energía total de la primera partícula antes del choque, (c) la cantidad de movimiento total inicial del sistema, (d) la energía cinética total después del choque, y (e) la masa en reposo del sistema después del choque.

73. El radio de la órbita de una partícula cargada en un campo magnético está relacionado con la cantidad de movimiento de la misma por

$$p = BqR$$

Esta ecuación es válida clásicamente si se hace $p = mu$, y en relatividad si hacemos $p = m_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2}$. Un electrón con una energía cinética de 1,50 MeV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético uniforme $B = 5 \times 10^{-3}$ T. (a) Hallar el radio de la órbita. (b) ¿Qué resultado se obtendría si se utilizasen las relaciones clásicas $p = mu$ y $E_c = p^2/2m$?

74. Prescindiendo de la economía y de la política, los físicos proponen construir un acelerador circular a lo largo de la circunferencia terrestre utilizando imanes que curven la trayectoria creando un campo magnético de valor 1,5 T. (a) ¿Cuál deberá ser la energía cinética de los protones que orbiten dentro de este campo en una circunferencia de radio R_1 ? (Ver problema 73.) (b) ¿Cuál será el periodo de rotación de estos protones?

75. En un experimento mental sencillo, Einstein demostró que existe una masa asociada con la radiación electromagnética. Consideremos una caja de longitud L y masa M apoyada sobre una superficie sin rozamiento. En la pared izquierda de la caja existe una fuente luminosa que emite radiación de energía E , que es absorbida en la pared de la derecha de la caja. De acuerdo con la teoría clásica del electromagnetismo, esta radiación transporta una cantidad de movimiento de valor $p = E/c$ (ecuación 29-24). (a) Hallar la velocidad de retroceso de la caja de forma que se conserve dicha cantidad de movimiento cuando se emite la luz. (Como p es pequeño y M es grande, se puede utilizar la mecánica clásica.) (b) Cuando la luz es absorbida en la pared de la derecha de la caja, ésta se para, de modo que sigue siendo nula la cantidad de movimiento total. Si despreciamos la velocidad extremadamente pequeña de la caja, el tiempo que emplea la luz en atravesar la caja es $\Delta t = L/c$. Hallar la distancia que se ha estado moviendo la caja en este tiempo. (c) Demostrar que si el centro de masa del sistema ha de permanecer fijo en el mismo sitio, la radiación debe poseer una masa $m = E/c^2$.

76. Un antiprotón \bar{p} tiene la misma energía en reposo que un protón. Se crea en la reacción $p + \bar{p} \rightarrow p + p + \bar{p} + \bar{p}$. En un experimento, los protones que se encuentran en reposo en el laboratorio son bombardeados con protones de energía cinética E_{c1} que debe ser lo suficientemente grande como para que pueda convertirse una energía cinética igual a $2m_0c^2$ en la energía en reposo de las dos partículas. En el sistema de referencia del laboratorio, la energía cinética total no puede convertirse en energía en reposo debido a la conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, en el sistema de referencia de cantidad de movimiento cero en el que los dos protones se están moviendo el uno hacia el otro con la misma velocidad u , la energía cinética total puede convertirse en energía en reposo. (a) Hallar la velocidad de cada protón u de modo que la energía total cinética en este último sistema de referencia sea $2m_0c^2$. (b) Transformar al sistema del laboratorio en el que un protón está en reposo y hallar la velocidad u' del otro protón. (c) Demostrar que la energía cinética del protón móvil en el sistema de referencia del laboratorio es $E_{c1} = 6m_0c^2$.

Nivel III

77. Una regla tiene una longitud propia L_0 y forma un ángulo θ con el eje x en el sistema S . Demostrar que el ángulo θ' formado con el eje x' del sistema S' que se mueve a lo largo del eje $+x$ con velocidad V , es dado por $\text{tg } \theta' = \gamma \text{ tg } \theta$ y que la longitud de la regla en S' es

$$L' = L_0 \left[\frac{1}{\gamma^2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

78. Demostrar que si una partícula se mueve formando un ángulo θ con el eje x y con la velocidad u en el sistema S , se moverá formando un ángulo θ' con el eje x' en S' dado por

$$\text{tg } \theta' = \frac{\text{sen } \theta}{\gamma (\cos \theta - Vu/c)}$$

en donde el sistema S' se mueve con velocidad V respecto a S .

79. En el caso especial de una partícula que se mueve con velocidad u a lo largo del eje y en S , demostrar que la cantidad de movimiento y la energía en el sistema S' están relacionadas con la cantidad de movimiento y la energía S por las ecuaciones de transformación

$$p'_y = \gamma \left(p_y - \frac{VE}{c^2} \right) \quad p'_x = p_x \quad p'_z = p_z$$

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - Vp_y \right)$$

Comparar estas ecuaciones con la transformación de Lorentz correspondiente a x', y', z' y t' . Estas demuestran que las magnitudes p_x, p_y, p_z y E/c se transforman del mismo modo que x, y, z y ct .

80. La ecuación correspondiente a un frente de onda esférico de un pulso luminoso que empieza en el origen en el instante $t=0$, es $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$. Utilizando las ecuaciones de transformación de Lorentz demostrar que dicho pulso luminoso también tiene un frente de onda esférico en el sistema S' demostrando que $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$ en S' .

81. En el problema 80 se demostró que la magnitud $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ tiene el mismo valor (0) tanto en S como en S' . Dicha magnitud se denomina *invariante*. A partir de los resultados del problema 79, la magnitud $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (E/c)^2$ debe ser también invariante. Demostrar que esta magnitud tiene el valor $-m_0c^2$ tanto en el sistema de referencia S como en el S' .

82. Dos sucesos en S están separados por una distancia $D = x_2 - x_1$ y un tiempo $T = t_2 - t_1$. (a) Utilizar las ecuaciones de transformación de Lorentz para demostrar que en el sistema S' móvil con velocidad V respecto al sistema S la separación de tiempos es $t'_2 - t'_1 = \gamma(T - VD/c)$. (b) Demostrar que los sucesos pueden ser simultáneos en el sistema S' sólo si D es mayor que cT . (c) Si uno de los sucesos es la causa del otro, la separación D debe ser menor que cT , puesto que D/c es el tiempo más pequeño que puede tardar una señal en recorrer el espacio que va desde x_1 hasta x_2 en el sistema S . Demostrar que si D es menor que cT , t'_2 es mayor que t'_1 en todos los sistemas de referencia. Esto demuestra que la causa debe preceder al efecto en todos los sistemas de referencia (admitiendo que lo hace en uno de ellos). (d) Suponer que si se pudiese enviar una señal con velocidad $c' > c$ de modo que en el sistema S la causa precediese al efecto en el tiempo $T = D/c'$. Demostrar que entonces existe un sistema de referencia que se mueve con una velocidad V menor que c en la cual el efecto precede a la causa.

83. Dos partículas idénticas poseen la misma masa en reposo m_0 . Las dos partículas se acercan entre sí con una velocidad u en un sistema de referencia S . Las partículas chocan inelásticamente con un muelle que se comprime y se cierra (figura 34-22) alcanzando el reposo en S , con su energía cinética inicial transformada en energía potencial. En este problema se pide demostrar que la conservación de la cantidad de movimiento en un sistema de referencia S' , en el cual una de las partículas se

encuentra inicialmente en reposo, requiere que la masa total en reposo del sistema después de la colisión sea $2m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$. (a) Demostrar que la velocidad de la partícula que no se encuentra en reposo en el sistema de referencia S' es

$$u' = \frac{2u}{1+u^2/c^2}$$

utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2}$$

(b) Demostrar que la cantidad de movimiento inicial en el sistema S' es $p' = 2m_0u/(1-u^2/c^2)$. (c) Después del choque, las dos masas se mueven con velocidad u en el sistema S' (puesto que están en reposo en S). Expresar la cantidad de movimiento total después del choque en S' en función de la masa M_0 del sistema y demostrar que la conservación del movimiento implica que $M_0 = 2m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$. (d) Demostrar que la energía total está conservada en cada sistema de referencia.

84. El plato de un tocadiscos horizontal gira con una velocidad angular ω . Se sitúa un reloj en el centro del plato giratorio y otro a una distancia r del centro. En un sistema de referencia inercial el reloj a la distancia r se mueve con velocidad $u = r\omega$. (a) Demostrar que, según la dilatación del tiempo de la relatividad especial, los intervalos de tiempo Δt_0 para el reloj en reposo y Δt , para el reloj en movimiento están relacionados por

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}} \quad \text{si } r\omega \ll c$$

(b) En un sistema de referencia ligado al plato giratorio, ambos relojes se encuentran en reposo. Demostrar que el reloj a distancia r experimenta una pseudofuerza (centrífuga) $F_c = mr\omega^2$ en este sistema acelerado. Demostrar que ésta es

equivalente a una diferencia en potencial gravitatorio entre r y el origen de ϕ , $-\phi_0 = \frac{1}{2}r^2\omega^2$. Utilizar esta diferencia de potencial y la ecuación 34-39 para demostrar que en este sistema la diferencia entre los intervalos de tiempo es la misma que la existente en el sistema inercial.

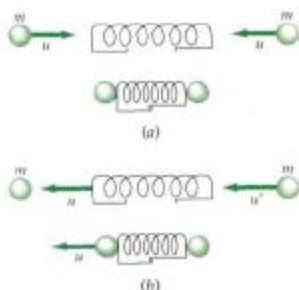
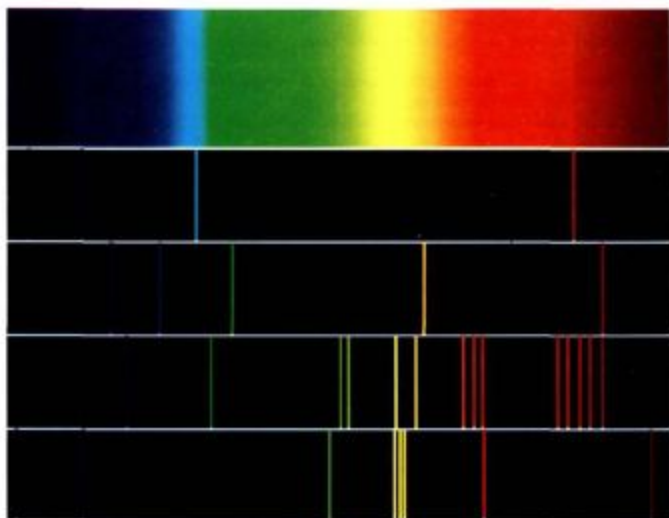


Figura 34-22 Problema 83. Choque inelástico entre dos objetos idénticos (a) en el sistema de referencia de centro de masa S o cantidad de movimiento nula y (b) en el sistema S' , que se está moviendo hacia la derecha con velocidad $V = u$ respecto al sistema S , de modo que una de las partículas está inicialmente en reposo. El muelle, que se supone carece de masa, es simplemente un dispositivo que sirve para hacer patente el almacenamiento de energía potencial.

Capítulo 35

Los orígenes de la Teoría Cuántica



El espectro visible continuo (*parte superior*) junto con los espectros de líneas características (*de arriba hacia abajo*) emitidos por el hidrógeno, el helio, el sodio, el mercurio, y el bario. El modelo de Niels Bohr del átomo de hidrógeno, que pudo utilizarse para predecir las longitudes de onda del espectro observado del hidrógeno, fue uno de los grandes triunfos de la física del siglo xx y fue un paso muy importante para el desarrollo de nuestra actual comprensión del mundo microscópico.

En el capítulo 34 vimos que las leyes de Newton deben modificarse cuando se aplican a objetos que se mueven a velocidades que son comparables con la velocidad de la luz. En los últimos 20 años del siglo XIX y en los primeros 30 del siglo XX, muchos descubrimientos innovadores, tanto experimentales como teóricos, demostraron que también dejan de cumplirse las leyes de la física clásica cuando se aplican a sistemas microscópicos, como las partículas que constituyen los átomos. Estos fallos son tan drásticos como los de la mecánica newtoniana si se aplica a velocidades elevadas. El interior del átomo sólo puede describirse en función de la *teoría cuántica* (a veces denominada *mecánica cuántica* o *mecánica ondulatoria*), que requiere la modificación de algunas de nuestras ideas fundamentales acerca de la relación existente entre la teoría física y el mundo físico. En la tabla 35-1 se relacionan las fechas aproximadas de algunos experimentos importantes realizados junto con las teorías propuestas para su explicación entre los años 1881 y 1932.

El desarrollo de la teoría cuántica fue muy diferente del seguido por la teoría de la relatividad. En cierto sentido, la relatividad especial fue presentada como una teoría completa en 1905 (y la teoría general en 1916) por un solo científico, Albert Einstein. Mientras que, por el contrario, la teoría cuántica fue desarrollada a lo largo de un período de tiempo largo y por muchos científicos diferentes. Gran parte de los descubrimientos realizados parecían inicialmente sin relación entre sí y no fue hasta finales de la década de los años 1920 que empezó a emerger una teoría consistente. Esta teoría es ahora la base de nuestra comprensión del mundo microscópico. Ha tenido grandes éxitos aunque todavía se sigue deba-

Tabla 35-1 Fechas aproximadas de algunas teorías y experimentos, 1881-1932

1881	Michelson obtiene un resultado nulo para la velocidad absoluta de la Tierra
1884	Balmer halla una fórmula empírica para las líneas espectrales del hidrógeno
1887	Hertz produce ondas electromagnéticas, comprobando la teoría de Maxwell y descubre accidentalmente el efecto fotoeléctrico
1887	Michelson repite su experimento con Morley, obteniendo de nuevo resultados nulos
1895	Röntgen descubre los rayos X
1896	Becquerel descubre la radiactividad nuclear
1897	J.J. Thomson mide el cociente e/m de los rayos catódicos, demostrando que los electrones son constituyentes fundamentales de los átomos.
1900	Planck explica la radiación del cuerpo negro utilizando la cuantización de la energía en la que interviene una nueva constante h
1900	Lenard investiga el efecto fotoeléctrico y halla que la energía de los electrones es independiente de la intensidad luminosa
1905	Einstein propone la teoría especial de la relatividad
1905	Einstein explica el efecto fotoeléctrico sugiriendo la cuantización de la radiación
1907	Einstein aplica la cuantización de la energía para explicar la dependencia de las capacidades térmicas de los sólidos con la temperatura
1908	Rydberg y Ritz generalizan la fórmula de Balmer para que se ajuste a los espectros de muchos elementos
1909	El experimento de la gota de aceite de Millikan muestra la cuantización de la carga eléctrica
1911	Rutherford propone el modelo nuclear del átomo basado en los experimentos de Geiger y Marsden de dispersión de partículas alfa
1912	Friedrich y Knipping y von Laue hacen una demostración de la difracción de los rayos X en cristales, comprobando que los rayos X son ondas y que los cristales son estructuras regulares
1913	Bohr propone el modelo del átomo de hidrógeno
1914	Moseley analiza los espectros de rayos X utilizando el modelo de Bohr para explicar la tabla periódica en función del número atómico
1914	Franck y Hertz realizan un experimento demostrando la cuantización de la energía atómica
1915	Duane y Hunt demuestran que el límite de onda corta de los rayos X se determina mediante la teoría cuántica
1916	Wilson y Sommerfeld proponen reglas para la cuantización de los sistemas periódicos
1916	Millikan comprueba la ecuación fotoeléctrica de Einstein
1923	Compton explica la dispersión de los rayos X por los electrones como un choque de un fotón y un electrón y comprueba experimentalmente los resultados
1924	De Broglie propone que las ondas correspondientes a los electrones tienen una longitud de onda h/p
1925	Schrödinger desarrolla las matemáticas de la mecánica ondulatoria del electrón
1925	Heisenberg inventa la mecánica matricial
1925	Pauli establece el principio de exclusión
1927	Heisenberg formula el principio de indeterminación
1927	Davison y Germer observan la difracción de la onda de los electrones en un monocristal
1927	G.P. Thomson observa la difracción de las ondas de los electrones en una lámina metálica
1928	Gamow y Condon y Garney aplican la mecánica cuántica para explicar los períodos de desintegración alfa
1928	Dirac desarrolla la mecánica cuántica relativista y predice la existencia del positrón
1932	Chadwick descubre el neutrón
1932	Anderson descubre el positrón

tiendo acerca de sus interpretaciones filosóficas. Como sucede con la teoría de la relatividad, la teoría cuántica se reduce a la física clásica cuando se aplica a sistemas macroscópicos (a gran escala), es decir a los objetos de nuestro mundo cotidiano y familiar.

Los orígenes de la teoría cuántica no tuvieron lugar, aunque pueda parecer extraño, en los descubrimientos de la radiactividad o de los rayos X o de los espectros atómicos, sino en la termodinámica. En sus estudios acerca del espectro de radiación del cuerpo negro, Max Planck se dio cuenta de que podía reconciliar la teoría y los experimentos si suponía que la energía radiante se emitía y absorbía no de forma continua, sino en forma de paquetes discretos o cuantos. Fue Einstein el primero que se dio cuenta de que esta cuantización de la energía radiante no era simplemente un truco de cálculo, sino que era realmente una propiedad general de la radiación. Luego Niels Bohr aplicó las ideas de Einstein de la cuantización de la energía a la energía de un átomo, y propuso un modelo del átomo de hidrógeno cuyo éxito a la hora de realizar los cálculos de las longitudes de onda de la radiación emitida por el hidrógeno fue totalmente espectacular. En este capítulo examinaremos cualitativamente los orígenes de la cuantización de la energía.

35-1 El origen de la constante cuántica: Radiación del cuerpo negro

Uno de los fenómenos más complejos y enrevesados estudiados al final del siglo pasado fue la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro*. Un cuerpo negro es un sistema ideal que absorbe toda la radiación que incide sobre él. Puede tenerse una muy buena aproximación de un cuerpo negro mediante una cavidad con un orificio muy pequeño, como se ilustra en la figura 35-1. Las características de la radiación en el interior de dicha cavidad depende únicamente de la temperatura de sus paredes. A temperaturas ordinarias (por debajo de unos 600°C), la radiación térmica emitida por un cuerpo negro no es visible porque la energía se concentra en la región infrarroja del espectro electromagnético. Al irse calentando el cuerpo, aumenta la cantidad de energía radiada (de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación 16-21) y la concentración de la energía se desplaza hacia las longitudes de onda más cortas. Entre 600 y 700°C, aparece ya suficiente cantidad de energía en el espectro visible como para que el cuerpo brille con un color rojo oscuro. A temperaturas aún más elevadas, se hace rojo brillante, e incluso «rojo blanco».

La figura 35-2 muestra la potencia radiada por un cuerpo negro en función de la longitud de onda para tres temperaturas diferentes. Se conocen estas curvas con el nombre de curvas de distribución espectral. La magnitud P en esta figura es la potencia radiada por unidad de longitud de onda. Es una función tanto de la longitud de onda λ como de la temperatura T y se denomina función de distribución espectral. Esta función $P(\lambda, T)$ tiene un máximo para una longitud de onda λ_{max} , que varía de forma inversa con la temperatura de acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien (ecuación 16-25) estudiada ya en la sección 16-3:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2.898 \text{ mm}\cdot\text{K}}{T}$$

La función de distribución espectral $P(\lambda, T)$ puede calcularse de una forma directa a partir de la termodinámica clásica, y el resultado obtenido ha de compararse con las curvas obtenidas experimentalmente de la figura 35-2. El resultado del cálculo clásico, conocido como ley de Rayleigh-Jeans, es

$$P(\lambda, T) = 8\pi k T \lambda^{-4} \quad 35-1$$

en donde k es la constante de Boltzmann. Este resultado concuerda con los valores experimentales en la región de longitudes de onda largas, pero está en total desacuerdo cuando se trata de las longitudes de onda cortas. Cuando λ tiende

* Los cuerpos negros se estudiaron brevemente en la sección 16-3. Parte de dicho estudio se repite ahora.

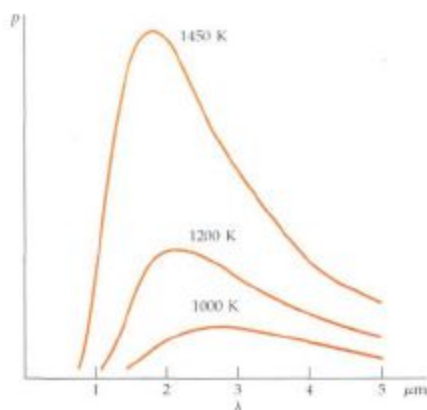


Figura 35-2 Distribución espectral de la radiación desde un cuerpo negro correspondiente a tres temperaturas diferentes.



Figura 35-1 Cavidad con la que puede aproximarse un cuerpo negro ideal. La radiación que entra en la cavidad tiene una probabilidad muy pequeña de salir de la misma. Normalmente se absorbe por completo.



Retrato de Max Planck (1858-1947).

a cero el $P(\lambda, T)$ determinado experimentalmente también tiende a cero, pero la función calculada se acerca a infinito porque es proporcional a λ^{-5} . Así pues, de acuerdo con el cálculo clásico, los cuerpos negros radian una cantidad infinita de energía concentrada en las longitudes de onda muy cortas. Este resultado se conoce como **catástrofe del ultravioleta**.

En 1900, el físico alemán Max Planck anunció que realizando una inusitada modificación en los cálculos clásicos podía deducir una función $P(\lambda, T)$ que concordaba con los datos experimentales para todas las longitudes de onda. En la figura 35-3 se indica el resultado de Planck junto con los datos experimentales y la ley de Rayleigh-Jeans. Planck encontró en primer lugar una función empírica que ajustaba perfectamente los datos experimentales y luego buscó un procedimiento de modificar el cálculo usual para reobtener su fórmula. Así encontró que podía «deducir» esta función si realizaba la sorprendente hipótesis de que la energía emitida y absorbida por el cuerpo negro no era continua sino que, por el contrario, era emitida o absorbida en paquetes discretos o **cuantos**. Planck dedujo que el tamaño de un cuanto de energía era proporcional a la frecuencia de la radiación:

Cuantización de la energía de radiación

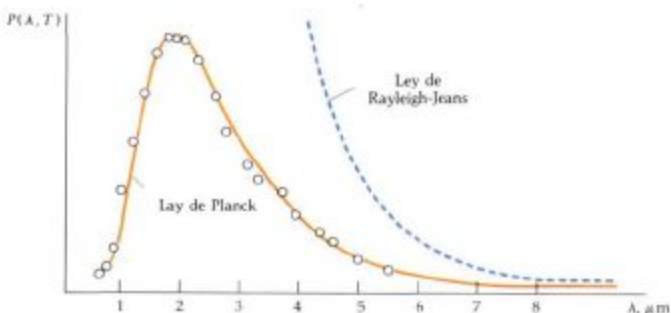
$$E = hf$$

35-2

en donde h es la constante de proporcionalidad conocida actualmente como **constante de Planck**. Planck determinó el valor de h ajustando su función a los datos obtenidos experimentalmente. El valor aceptado de esta constante se toma ahora como

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s} \quad 35-3$$

Figura 35-3 Distribución espectral de la radiación del cuerpo negro en función de la longitud de onda a $T = 1600 \text{ K}$. El cálculo teórico clásico de la ley de Rayleigh-Jeans, concuerda con los resultados experimentales a longitudes de onda muy largas, pero difiere totalmente para longitudes de onda cortas.



Planck fue incapaz de encajar la constante h dentro del esquema de la mecánica clásica. La importancia fundamental de su hipótesis sobre la cuantización de la energía, implicada en la ecuación 35-2, no fue generalmente apreciada hasta que Einstein aplicó ideas semejantes al efecto fotoeléctrico y sugirió que la cuantización es una propiedad fundamental de la radiación electromagnética.

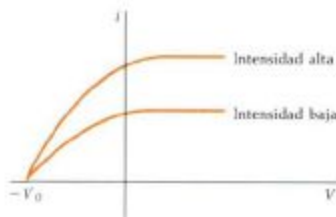
35-2 El efecto fotoeléctrico

En 1905, Einstein utilizó la idea de Planck de la cuantización de la energía para explicar el efecto fotoeléctrico. (Su artículo sobre este efecto apareció en la misma revista que había publicado su teoría especial de la relatividad.) El trabajo

de Einstein señaló el principio de la teoría cuántica y por él recibió el Premio Nobel de Física. Mientras que Planck utilizaba la cuantización de la energía en su teoría acerca de la radiación del cuerpo negro como un truco de cálculo, Einstein hizo la atrevida sugerencia de que la cuantización de la energía es una propiedad fundamental de la energía electromagnética. Tres años después, aplicó la idea de la cuantización de la energía a las energías moleculares con objeto de resolver otro misterioso problema de la física — la discrepancia entre los calores específicos calculados a partir del teorema de equipartición y los observados experimentalmente a bajas temperaturas. Posteriormente, las ideas de la cuantización de la energía fueron aplicadas a las energías atómicas por Niels Bohr en la primera explicación satisfactoria de los espectros atómicos.

El efecto fotoeléctrico fue descubierto por Hertz en 1887 y estudiado por Lenard en 1900. La figura 35-4 muestra un diagrama esquemático del aparato básico. Cuando la luz incide sobre una superficie metálica limpia, el cátodo C, se emiten electrones. Si alguno de ellos choca contra el ánodo A, existe una corriente en el circuito externo. El número de electrones emitidos que alcanzan el ánodo puede aumentarse o disminuirse haciendo el ánodo positivo o negativo respecto al cátodo. Sea V la diferencia de potencial del cátodo al ánodo. La figura 35-5 muestra los valores de la corriente en función de V para dos valores de la intensidad de la luz que incide sobre el cátodo. Cuando V es positivo, los electrones son atraídos por el ánodo. Para un valor suficientemente grande de V , todos los electrones emitidos alcanzan el ánodo y la corriente alcanza su máximo valor. Un aumento adicional de V no influye en la corriente. Lenard observó que la corriente máxima es proporcional a la intensidad de la luz. Cuando V es negativo, los electrones son repelidos por el ánodo. Sólo aquellos electrones que tienen una energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv^2$ mayor que $|eV|$, pueden alcanzar entonces el ánodo. En la figura 35-5 se ve que si V es menor que $-V_0$, ningún electrón alcanza el ánodo. Dicho potencial V_0 se denomina **potencial de detención** y está relacionado con la energía cinética máxima de los electrones emitidos por

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{máx}} = eV_0$$



El resultado experimental de que V_0 es independiente de la intensidad de la luz incidente fue sorprendente. Aparentemente, al aumentar la energía por unidad de tiempo que cae sobre el cátodo no se aumenta la energía cinética máxima de los electrones emitidos. En 1905 Einstein demostró que este resultado experimental puede entenderse si la energía luminosa no está distribuida continuamente en el espacio sino cuantizada en paquetes pequeños llamados **fotones**. La energía de cada fotón es hf , siendo f la frecuencia y h la constante de Planck. Un electrón emitido desde una superficie metálica expuesta a la luz recibe su energía de un solo fotón. Cuando se aumenta la intensidad de la luz de una frecuencia determinada, inciden más fotones sobre la superficie en una unidad de tiempo, pero la energía absorbida por cada electrón resulta inalterada. Si la energía nece-

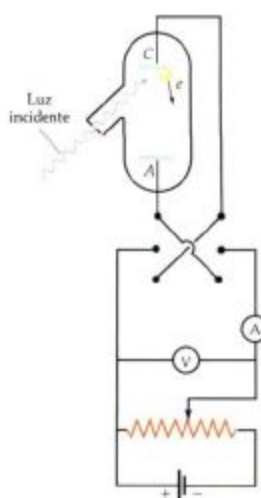


Figura 35-4 Esquema del aparato utilizado para observar el efecto fotoeléctrico. La luz incide en el cátodo C y expulsa electrones. El número de electrones que alcanzan el ánodo A se mide por la corriente que circula por el amperímetro. El ánodo puede hacerse positivo o negativo respecto al cátodo para atraer o repeler los electrones.

Figura 35-5 Corriente fotoeléctrica i en función de la tensión V para dos valores de intensidad luminosa. No hay corriente cuando V es menor que $-V_0$. La corriente de saturación observada para valores grandes de V es proporcional a la luz incidente.

sería para que se desprenda un electrón de la superficie de un metal es ϕ , la energía cinética máxima de los electrones emitidos será

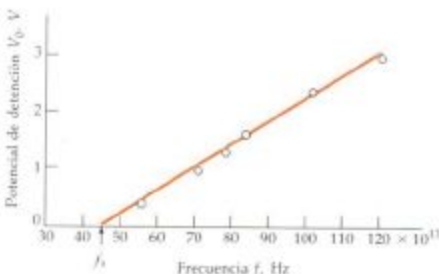
Ecuación fotoeléctrica de Einstein

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{máx}} = eV_0 = hf - \phi \quad 35-4$$

La magnitud ϕ , denominada **función trabajo**, es una característica del metal particular. Algunos electrones tendrán energías cinéticas menores que $hf - \phi$ debido a la pérdida de energía sufrida al atravesar el metal. La ecuación 35-4 se conoce como **ecuación fotoeléctrica de Einstein**. A partir de ella, vemos que la pendiente de V_0 en función de f debe ser igual a h/e .

La ecuación de Einstein fue una anticipación atrevida porque en aquella época no había pruebas de que la constante de Planck tuviese aplicaciones aparte de la radiación electromagnética y no existían datos experimentales sobre la relación existente entre el potencial de detención V_0 y la frecuencia. La comprobación experimental de la teoría de Einstein era muy difícil. Experimentos cuidadosos realizados por Millikan en 1914 y con más detalle en 1916, demostraron que la ecuación de Einstein es correcta y que las medidas de h coincidían con el valor encontrado por Planck. La figura 35-6 muestra una representación de los datos de Millikan.

Figura 35-6 Datos de Millikan para el potencial de detención V_0 en función de la frecuencia f para el efecto fotoeléctrico. Los datos caen sobre una recta que tiene una pendiente h/e según predijo Einstein un decenio antes del experimento.



Los fotones con frecuencias menores que una **frecuencia umbral** f_0 , y por tanto con longitudes de onda mayores que una **longitud de onda umbral** λ_0 , no tienen energía suficiente para expulsar un electrón de un metal particular. La frecuencia umbral y la correspondiente longitud de onda umbral, se relacionan con la función trabajo ϕ poniendo la energía cinética máxima de los electrones igual a cero en la ecuación 35-4. Entonces

$$\phi = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \quad 35-5$$

Los valores típicos de la función trabajo de los metales son del orden de algunos electrón-voltios. Como las longitudes de onda se dan normalmente en nanómetros y las energías en electrón-voltios, es útil disponer del valor de hc en electrón-voltios-nanómetros:

$$hc = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1,24 \times 10^{-6} \text{ eV}\cdot\text{m}$$

o bien

$$hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm} \quad 35-6$$

Ejemplo 35-1

Calcular la energía de los fotones correspondientes a la luz de 400 nm de longitud de onda (violeta) y de 700 nm (rojo). Estas longitudes de onda son aproximadamente los valores extremos correspondientes al espectro visible.



Colección de tubos fotomultiplicadores utilizados para detectar luz muy débil. La cara de cada tubo es un área fotoeléctrica que emite electrones, mediante el efecto fotoeléctrico, cuando inciden fotones sobre ella. Cada electrón es acelerado y va a caer sobre un electrodo metálico, dando como resultado la emisión de varios electrones más —los cuales, a su vez, son acelerados e inciden sobre otros electrodos. El haz de electrones crece y se acelera en cascada a lo largo del tubo hasta que llega al ánodo y produce una corriente eléctrica medible.

Utilizando la ecuación 35-2, se tiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3,1 \text{ eV}$$

para $\lambda = 400 \text{ nm}$. En el caso en que $\lambda = 700 \text{ nm}$, la energía de los fotones es $4/7$ de la correspondiente a $\lambda = 400 \text{ nm}$, o sea $1,77 \text{ eV}$. Podemos ver a partir de estos cálculos que la luz visible contiene fotones dentro de un margen que va desde $1,8$ hasta $3,0 \text{ eV}$, aproximadamente.

Ejemplo 35-2

La intensidad de la luz del Sol en la superficie de la Tierra es aproximadamente 1400 W/m^2 . Suponiendo que la energía media de los fotones es de 2 eV (lo que corresponde a una longitud de onda del orden de 600 nm), calcular el número de fotones que inciden sobre un área de 1 cm^2 cada segundo.

Como 1 vatio es 1 julio por segundo, la energía que incide sobre la Tierra en un segundo es 1400 J/m^2 . La energía por segundo y por centímetro cuadrado es, pues,

$$\frac{1400 \text{ J}}{\text{m}^2} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(100 \text{ cm})^2} = 0,14 \text{ J/cm}^2$$

Si N es el número de fotones de 2 eV , que en conjunto tienen una energía total de $0,14 \text{ J}$, tendremos

$$\begin{aligned} N(2 \text{ eV}) &= 0,14 \text{ J} \\ N &= \frac{0,14 \text{ J}}{2 \text{ eV}} \times \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \\ &= 4,38 \times 10^{17} \text{ fotones} \end{aligned}$$

Este número es enorme. En la mayoría de los casos ordinarios, el número de los fotones involucrados es tan grande que no se aprecia si hay algunos pocos más o menos. Es decir, la cuantización es inobservable.

Ejemplo 35-3

La longitud de onda umbral para el potasio es 564 nm. (a) ¿Cuál es la función de trabajo del potasio? (b) ¿Cuál es el potencial de detención cuando incide sobre este metal luz de 400 nm de longitud de onda?

(a) A partir de la ecuación 35-5, tenemos para la función trabajo

$$\phi = hf_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{564 \text{ nm}} = 2,20 \text{ eV}$$

(b) La energía de un fotón con una longitud de onda de 400 nm fue calculada en el ejemplo 35-1 y valía 3,1 eV. La energía cinética máxima de los electrones emitidos es entonces

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{max}} = eV_0 = hf - \phi = 3,10 \text{ eV} - 2,20 \text{ eV} = 0,90 \text{ eV}$$

El potencial de detención es, por tanto, 0,90 V.

Ejercicio

Hallar la energía de un fotón correspondiente a la radiación electromagnética en la banda de radio de FM de longitud de onda 3 m. (Respuesta: $4,13 \times 10^{-7}$ eV)

Ejercicio

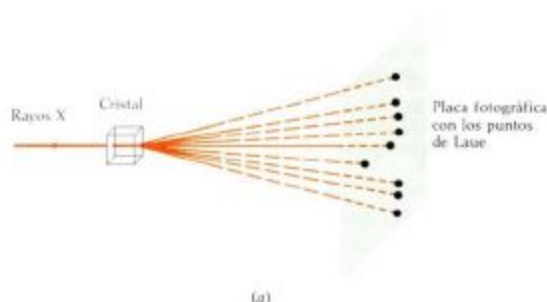
Hallar la longitud de onda de un fotón cuya energía es (a) 0,1 eV, (b) 1 keV, y (c) 1 MeV. [Respuestas: (a) 12,4 μm , (b) 1,24 nm, (c) 1,24 pm]

Otra interesante característica del efecto fotoeléctrico es la ausencia de cualquier retraso entre el tiempo en que la luz incide sobre el metal por primera vez y el tiempo en que aparece el electrón. En la teoría clásica, conocida la intensidad de la radiación (la potencia por unidad de área), puede calcularse el tiempo que se tarda en que caiga sobre el área cubierta por un átomo la energía necesaria para que sea expulsado un electrón. Sin embargo, aun cuando la intensidad sea tan pequeña que un cálculo de este tipo dé un retraso de horas, no se observa esencialmente ningún retraso. La explicación de este resultado es bien simple. Cuando la intensidad es baja, el número de fotones que inciden sobre el metal por unidad de tiempo es muy pequeño, pero cada fotón tiene energía suficiente como para expulsar un electrón. Por consiguiente, la probabilidad de que un fotón sea absorbido inmediatamente, es muy alta. El cálculo clásico da el número medio correcto de electrones expulsados por unidad de tiempo.

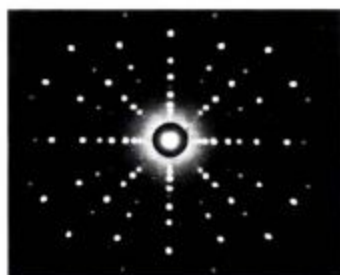
35-3 Rayos X

Mientras estaba trabajando con un tubo de rayos catódicos en 1895, W. Röntgen descubrió que ciertos «rayos» procedentes del tubo podían atravesar materiales que eran opacos a la luz y que activaban una pantalla fluorescente o una película fotográfica. Estos rayos se originaban en un punto en donde los electrones del interior del tubo chocaban contra un objeto, o «blanco», dentro del mismo o sobre el propio vidrio del tubo. Röntgen no fue capaz de hacer desviar estos rayos en un campo magnético, como hubiese sido de esperar si estuviese compuesto por partículas cargadas, ni pudo observar difracción o interferencia, como sería de esperar si fuesen ondas. Por consiguiente, les dio el misterioso nombre de rayos X. Röntgen investigó exhaustivamente estos rayos y encontró que todos los materiales eran transparentes en mayor o menor grado a los mismos, y que el grado de transparencia decrecía al aumentar la densidad del material. Este hecho condujo a la aplicación médica de los rayos X apenas habían transcurrido unos meses desde que Röntgen publicase sus primeros descubrimientos. Röntgen fue el primero que recibió el Premio Nobel de Física en 1901.

Como la teoría electromagnética clásica predice que las cargas eléctricas deben radiar ondas electromagnéticas cuando se aceleran (o deceleran), fue natural



(a)



(b)

suponer que los rayos X eran ondas electromagnéticas producidas cuando los electrones son decelerados al ser detenidos por un blanco. Algunos años después se observó un ligero ensanchamiento de un haz de rayos X después que pasase a través de rendijas de algunas micras de anchura. Se admitió que esto se debía a la difracción, y entonces se estimó que la longitud de onda de los rayos X debía ser del orden de 0,1 nm. En 1912, M. Laue sugirió que, puesto que las longitudes de onda de los rayos X eran del mismo orden de magnitud que el espaciado de los átomos en un cristal, la disposición regular de los átomos en una red cristalina podía actuar como una red de difracción tridimensional para los rayos X. Animados por esta sugerencia, W. Friedrich y P. Knipping hicieron pasar un haz colimado de rayos X a través de un cristal que luego se hizo incidir sobre una placa fotográfica (figura 35-7a). Además del haz central, observaron una distribución regular de puntos como los indicados en la figura 35-7b. Mediante un análisis de las posiciones de los puntos, fueron capaces de calcular que su haz de rayos X tenía longitudes de onda en el intervalo de entre 0,01 y 0,05 nm aproximadamente. Este importante experimento confirmó dos importantes hipótesis: (1) los rayos X son radiación electromagnética y (2) los átomos del cristal están dispuestos siguiendo una distribución regular.

La figura 35-8 muestra un gráfico de la intensidad en función de la longitud de onda correspondiente al espectro emitido por un tubo de rayos X típico, en el que se bombardea con electrones un blanco adecuado (molibdeno en este caso). El espectro se compone de una serie de líneas agudas que se denomina **espectro característico**, superpuesto a un espectro continuo o **espectro bremsstrahlung** (del alemán «radiación de frenado»). El espectro discontinuo de líneas es característico del material del blanco y varía de un elemento a otro. De modo semejante a como el espectro óptico de los elementos se justifica mediante las transiciones de los electrones atómicos más exteriores, en el espectro característico se involucran las transiciones de los electrones más interiores de los átomos, como se explica en el capítulo 37 de la versión ampliada de esta obra. Por el contrario, el espectro bremsstrahlung continuo se produce debido a la rápida deceleración de los electrones que bombardean el blanco cuando se estrellan materialmente en él. Si la tensión aplicada a lo largo del tubo es V , la energía cinética máxima de los electrones es eV cuando inciden sobre el blanco. Es frecuente que se emitan varios fotones durante el proceso de deceleración de un electrón. Sin embargo, a veces se emite precisamente un solo fotón con la energía máxima eV del electrón. Como la longitud de onda de un fotón varía en razón inversa de su energía ($\lambda = hc/hf = hc/E$), la longitud de onda mínima del espectro bremsstrahlung corresponde a un fotón con la máxima energía eV . La longitud de onda mínima se denomina **longitud de onda de corte** y se ha denominado λ_m en la figura. La longitud de onda de corte está relacionada con la tensión del tubo de rayos X por

$$\lambda_m = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{eV} \quad 35-7$$

Figura 35-7 (a) Diagrama esquemático del experimento de Laue. El cristal actúa como una red tridimensional que difracta el haz de rayos X y produce un espectro o distribución regular de puntos denominado *diagrama de Laue* sobre una placa fotográfica. (b) Diagrama de difracción moderno de Laue obtenido a través de un cristal de diboruro de niobio con rayos X procedentes de un blanco de molibdeno.

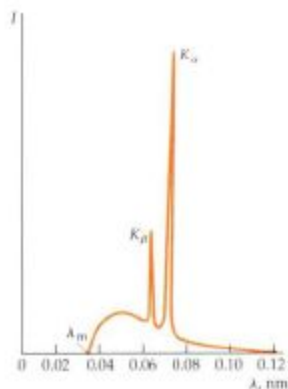


Figura 35-8 Espectro de rayos X del molibdeno. Los picos agudos marcados con K_α y K_β son característicos del elemento utilizado como blanco. La longitud de onda de corte λ_m es independiente de dicho elemento y está relacionada con la tensión del tubo de rayos X mediante la expresión $\lambda_m = hc/eV$.

Ejemplo 35-4

¿Cuál es la longitud de onda mínima de los rayos X emitidos por un tubo de televisión con una tensión de 2000 V?

La energía cinética máxima de los electrones es 2000 eV, de modo que esta será la energía máxima de los fotones del espectro de rayos X. La longitud de onda de un fotón de esta energía es la longitud de onda de corte, que según la ecuación 35-7 vale

$$\lambda_m = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{2000 \text{ eV}} = 0,62 \text{ nm}$$

Ejercicio

Un tubo de rayos X funciona a un potencial de 30 kV. ¿Cuál es la longitud de onda mínima del espectro de rayos X continuo de este tubo? (Respuesta: 0,041 nm)

35-4 Efecto Compton

Una prueba adicional sobre la validez del concepto de fotón la proporcionó Arthur H. Compton, quien midió la dispersión de rayos X por electrones libres. De acuerdo con la teoría clásica, cuando una onda electromagnética de frecuencia f_1 incide sobre un material que contiene cargas, éstas oscilarán con dicha frecuencia y volverán a radiar ondas electromagnéticas de la misma frecuencia. Compton señaló que si se consideraba el proceso de dispersión como un choque entre un fotón y un electrón, este último debería absorber la energía debida al retroceso y el fotón dispersado tendría menos energía y, por lo tanto, menor frecuencia que el fotón incidente.

De acuerdo con la teoría clásica, la energía y la cantidad de movimiento de una onda electromagnética están relacionados por la expresión

$$E = pc \quad 35-8$$

Este resultado está de acuerdo con la expresión relativista que relaciona la energía y cantidad de movimiento de una partícula (ecuación 34-34),

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$$

si se admite que la masa m del fotón es nula. La figura 35-9 muestra la geometría de un proceso de choque entre un fotón de longitud de onda λ_1 y un electrón en reposo. Compton relacionó el ángulo de dispersión θ con las longitudes de onda incidente y dispersada λ_1 y λ_2 considerando la dispersión como un problema de mecánica relativista y utilizando la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Sea \mathbf{p}_1 la cantidad de movimiento del fotón incidente, \mathbf{p}_2 la del fotón dispersado y \mathbf{p}_e la del electrón de retroceso. La conservación de la cantidad de movimiento se expresa en la forma

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_e \quad 35-9$$



Figura 35-9 Dispersión de Compton de un rayo X por un electrón. El fotón dispersado tiene menos energía y, por tanto, una longitud de onda mayor que el fotón incidente debido a la energía de retroceso del electrón. Se encuentra la variación de longitud de onda a partir de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

o bien

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2$$

Multiplicando cada miembro escalarmente por sí mismo, se obtiene

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2^2 - 2\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2$$

o bien

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta \quad 35-10$$

La energía antes del choque es $p_1 c + mc^2$, en donde mc^2 es la energía en reposo del electrón. Después de la colisión el electrón tiene una energía $\sqrt{(mc^2)^2 + p_2'^2 c^2}$. La conservación de la energía nos da entonces

$$p_1 c + mc^2 = p_2 c + \sqrt{(mc^2)^2 + p_2'^2 c^2} \quad 35-11$$

Compton eliminó la cantidad de movimiento del electrón p_2 entre las ecuaciones 35-10 y 35-11 y expresó las cantidades de movimiento del fotón en función de las longitudes de onda para obtener una ecuación que relacionara los longitudes de onda incidente y dispersada λ_1 y λ_2 y el ángulo θ . Se dejan como problema (véase problema 60) los detalles algebraicos. El resultado de Compton es

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad 35-12$$

La variación de la longitud de onda es independiente de la longitud de onda original. La magnitud h/mc depende solamente de la masa del electrón. Tiene dimensiones de una longitud y se denomina **longitud de onda de Compton**. Su valor es

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5,11 \times 10^5 \text{ eV}} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \text{ pm} \quad 35-13$$

Debido a que $\lambda_2 - \lambda_1$ es pequeño, resulta difícil de observar a menos que λ_1 sea tan pequeño que resulte apreciable la variación relativa $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$. Compton utilizó rayos X de longitud de onda 71,1 pm. La energía de un fotón de esta longitud de onda es $E = hc/\lambda = (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})/(0,0711 \text{ nm}) = 17,4 \text{ keV}$. Como este valor es mucho mayor que la energía de enlace de los electrones de valencia en átomos (el cual es del orden de unos pocos eV), estos electrones pueden considerarse como esencialmente libres. Los resultados experimentales de Compton para $\lambda_2 - \lambda_1$ en función del ángulo de dispersión θ concordaban con la ecuación 35-12, confirmando así la validez del concepto de fotón.

Ejemplo 35-5

Calcular la variación porcentual en la longitud de onda observada en una dispersión de Compton de fotones de 20 keV a $\theta = 60^\circ$.

La variación de la longitud de onda a $\theta = 60^\circ$ viene dada por la ecuación 35-12:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C (1 - \cos \theta) = (2,43 \text{ pm})(1 - \cos 60^\circ) = 1,22 \text{ pm}$$

La longitud de onda de los fotones incidentes de 20 keV es

$$\lambda_1 = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{20\,000 \text{ eV}} = 0,062 \text{ nm} = 62 \text{ pm}$$

Por tanto, la variación en tanto por ciento de la longitud de onda es:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1,22 \text{ pm}}{62 \text{ pm}} \times 100 \% = 1,97 \%$$

35-5 Cuantización de energías atómicas: Modelo de Bohr

La aplicación más famosa de la cuantización de la energía a sistemas microscópicos fue la que llevó a cabo Niels Bohr, quien propuso en 1913 un modelo del átomo de hidrógeno que tuvo un éxito espectacular al calcular las longitudes de onda de las líneas del espectro conocido del hidrógeno y al predecir nuevas líneas (posteriormente halladas experimentalmente) en el espectro infrarrojo y ultravioleta.

Al final del siglo se habían reunido muchos datos sobre la emisión de la luz por los átomos de un gas al ser excitados por una descarga eléctrica. Observada a través de un espectroscopio con una abertura en forma de rendija estrecha, esta luz adquiere el aspecto de una serie discreta de líneas de diferentes colores o longitudes de onda; la separación e intensidades de las líneas son características de cada elemento. Fue posible determinar las longitudes de onda de estas líneas con exactitud y se había realizado un gran esfuerzo para encontrar regularidades en los espectros. En 1884, un profesor suizo, Johann Balmer, halló que las longitudes de onda de algunas de las líneas del espectro del hidrógeno pueden representarse por la fórmula

$$\lambda = (364,6 \text{ nm}) \frac{m^2}{m^2 - 4} \quad 35-14$$

en donde m es un número entero variable que toma los valores $m = 3, 4, 5, \dots$. La figura 35-10 muestra el conjunto de líneas espectrales del hidrógeno, conocido ahora como **serie de Balmer**, cuyas longitudes de onda vienen dadas por la ecuación 35-14.

Figura 35-10 Serie de Balmer para la luz emitida desde el hidrógeno. Las longitudes de onda de estas líneas vienen dadas por la ecuación 35-14 para diferentes valores del número entero m .



Balmer sugirió que su fórmula podría ser un caso especial de una expresión más general aplicable a los espectros de otros elementos. Dicha ecuación, encontrada por Johannes R. Rydberg y Walter Ritz, expresa la longitud de onda de la forma siguiente, conocida como **fórmula de Rydberg-Ritz**,

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad n_1 > n_2 \quad 35-15$$

Esta fórmula es válida no sólo para el hidrógeno, de número atómico $Z = 1$, sino también para átomos más pesados con carga nuclear Ze , en los cuales todos los electrones excepto uno han sido eliminados. R , denominada **constante de Rydberg**, o simplemente **Rydberg**, es la misma para todas las series del mismo elemento y varía sólo ligeramente y de modo regular de un elemento a otro. En el caso de elementos de gran masa R tiende al valor

$$R_\infty = 10,97373 \mu\text{m}^{-1} \quad 35-16$$

Si tomamos el valor inverso de la ecuación 35-14 para la serie de Balmer, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{m^2 - 4}{m^2} \right) = \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{1}{1} - \frac{4}{m^2} \right) \\ &= \frac{4}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) = 10,97 \mu\text{m}^{-1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Puede verse así que la fórmula de Balmer es realmente un caso especial de la fórmula de Rydberg-Ritz (ecuación 35-15) para el hidrógeno con $n_2 = 2$ y $n_1 = m$.

La fórmula de Rydberg-Ritz y algunas modificaciones de la misma han tenido mucho éxito a la hora de predecir otros espectros. Por ejemplo, fueron previstas y encontradas otras líneas del espectro del hidrógeno que caían fuera del espectro óptico visible. Haciendo $n_2=1$ en la ecuación 35-15 se obtiene una serie en la región ultravioleta denominada *serie de Lyman*, mientras que si se pone $n_2=3$ se obtiene la *serie de Paschen*, en la región infrarroja.

Se hicieron muchos intentos para construir un modelo de átomo que cumpliera con estas fórmulas en su espectro de radiación. El más popular, debido a J.J. Thomson, consideraba diversas distribuciones de electrones embebidos en una cierta clase de fluido que contenía la mayor parte de la masa del átomo y contenía una carga positiva suficiente para hacer que el átomo fuese eléctricamente neutro. El modelo de Thomson, llamado modelo de «budín de pasas», se ilustra en la figura 35-11. Como la teoría electromagnética clásica predecía que una carga que oscila con frecuencia f debería radiar luz de la misma frecuencia, Thomson buscaba configuraciones de electrones que fuesen estables y tuviesen modos normales de vibración con frecuencias iguales a las del espectro del átomo. Una dificultad existente en este modelo y en todos los demás consistía en que las fuerzas eléctricas solas no pueden producir un equilibrio estable. Thomson no pudo encontrar una configuración de electrones que predijese las frecuencias observadas para cualquier átomo.

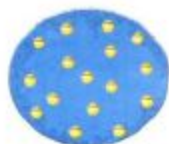


Figura 35-11 Modelo del átomo de J.J. Thomson (denominado a veces modelo de «budín de pasas»). En este modelo los electrones negativos están embebidos en un fluido de carga positiva. Para una configuración determinada de electrones en dicho sistema, pueden calcularse las frecuencias de resonancia de las oscilaciones de los electrones. De acuerdo con la teoría clásica, el átomo radiará luz con una frecuencia igual a la de oscilación de los electrones. Thomson no pudo encontrar ninguna configuración de electrones que diese frecuencias que estuviesen de acuerdo con las frecuencias medidas del espectro de cualquier átomo.

El modelo de Thomson fue descartado después de una serie de experimentos realizados por Geiger y Marsden bajo la supervisión de Rutherford en 1911 y en los cuales, las partículas alfa procedentes del radio radiactivo fueron dispersadas por los átomos de una hoja de oro. Rutherford demostró que el número de partículas alfa dispersadas con ángulos grandes no podía ser justificado por un átomo en el que la carga positiva se distribuyese por todo su volumen atómico (cuyo diámetro conocido era del orden de 0,1 nm), sino que exigía que la carga positiva y la mayor parte de la masa del átomo estuviese concentrada en una región muy pequeña, ahora denominada núcleo, cuyo diámetro es del orden de 10^{-14} nm = 1 fm. (Antes del establecimiento del sistema de medidas SI, el femtómetro, $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, se llamaba un *fermi* en honor del físico italiano Enrico Fermi.)

Niels Bohr, que trabajaba en el laboratorio de Rutherford en aquella época, propuso un modelo de átomo de hidrógeno que combinaba los trabajos de Planck, Einstein y Rutherford y que tuvo éxito al predecir los espectros observados. Bohr supuso que el electrón del átomo de hidrógeno se movía bajo la influencia de la atracción coulombiana del núcleo positivo de acuerdo con la mecánica clásica, que predice órbitas circulares o elípticas cuando las fuerzas son centrales, dirigidas hacia el foco, como sucede en el caso del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Para mayor sencillez escogió una órbita circular como se muestra en la figura 35-12. Aunque se obtiene estabilidad mecánica porque la fuerza atractiva de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que el electrón permanezca en su órbita, dicho átomo es inestable eléctricamente de acuerdo con la teoría clásica, porque el electrón debe acelerarse cuando se mueve en una circunferencia y, por consiguiente, debe radiar energía electromagnética de una frecuencia igual a la de su movimiento. De acuerdo con dicha teoría clásica electromagnética, este tipo de átomo se destruirá rápidamente, pues el electrón se movería en órbitas en espiral cada vez más cerradas hasta caer sobre el núcleo, según radiaba energía.



Figura 35-12 Electrón de carga $-e$ moviéndose en una órbita circular de radio r alrededor de la carga nuclear $+Ze$. La fuerza eléctrica atractiva kZe^2/r^2 proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al electrón en su órbita.

Primer postulado de Bohr:
estados estacionarios

Bohr «resolvió» esta dificultad, modificando las leyes del electromagnetismo y postulando que el electrón puede moverse en ciertas órbitas sin radiar energía y denominó a estas órbitas estables **estados estacionarios**. El átomo radia sólo cuando de una forma u otra realiza una transición de un estado estacionario a otro. La frecuencia de la radiación no es la frecuencia del movimiento en ninguna de las órbitas estables, sino que está relacionada con las energías asociadas a las mismas por la expresión

Segundo postulado de Bohr:
frecuencia de los fotones a partir
de la conservación de energía

$$f = \frac{E_1 - E_2}{h} \quad 35-17$$

en donde h es la constante de Planck y E_1 y E_2 son las energías totales en las órbitas inicial y final. Esta hipótesis, que es equivalente a la de conservación de energía con emisión de un fotón, es básica en la teoría de Bohr, porque se separa de la teoría clásica, que exige que la frecuencia de la radiación sea la del movimiento de la partícula cargada.

Si la carga nuclear es $+Ze$ y la del electrón $-e$, la energía potencial a una distancia r es (ver ecuación 20-8)

$$U = -\frac{kZe^2}{r}$$

siendo k la constante de Coulomb. (En el caso del hidrógeno, $Z=1$, pero de momento conviene no especificar el valor de Z para que puedan aplicarse los resultados a otros átomos.) La energía total del electrón móvil en una órbita circular con velocidad v es entonces

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r}$$

Puede obtenerse la energía cinética en función de r utilizando la ley de Newton $F=ma$. Igualando la fuerza de atracción de Coulomb con el producto de la masa por la aceleración centripeta se obtiene

$$\frac{kZe^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

o bien

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} \quad 35-18$$

Cuando la órbita es circular la energía cinética vale la mitad de la energía potencial, resultado que es válido en el caso del movimiento circular sometido a un campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La energía total vale entonces

$$E = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r} \quad 35-19$$

Utilizando la ecuación 35-17 para la frecuencia de la radiación cuando el electrón pasa de la órbita 1 de radio r_1 a la órbita 2 de radio r_2 , obtenemos

$$f = \frac{E_1 - E_2}{h} = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{h}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad 35-20$$

Para obtener la fórmula de Rydberg-Ritz, $f = c/\lambda = cR(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$, es evidente que los radios de las órbitas estables deben ser proporcionales a los cuadrados de números enteros. Bohr buscó una condición cuántica para los radios de las órbitas estables que condujese a este resultado. Después de muchos intentos, vio que se podían obtener resultados correctos si postulaba que en una órbita estable el momento angular del electrón es igual a un número entero multiplicado por

la constante de Planck dividida por 2π . Como el momento angular de una órbita circular vale precisamente mvr , este postulado afirma que

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad 35-21$$

Tercer postulado de Bohr:
momento angular cuantizado

en donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

(Suele ser más conveniente utilizar la constante $\hbar = h/2\pi$, que se lee «h barra», que la propia h , del mismo modo que resulta más conveniente utilizar la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ en lugar de la frecuencia f .) Podemos determinar r eliminando v entre las ecuaciones 35-18 y 35-21. Despejando v de la ecuación 35-21 y elevando al cuadrado obtenemos, utilizando la ecuación 35-18:

$$v^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2} = \frac{kZe^2}{mr}$$

Despejando r , se obtiene

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad 35-22$$

en donde

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0,0529 \text{ nm} \quad 35-23$$

Radio de Bohr

se denomina primer **radio de Bohr**. Combinando las ecuaciones 35-22 y 35-20 tenemos

$$f = Z^2 \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad 35-24$$

Comparando esta expresión para $f = c/\lambda$ con la fórmula empírica de Rydberg-Ritz (ecuación 35-15) se obtiene para la constante de Rydberg

$$R = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} \quad 35-25$$

Utilizando los valores de m , e y \hbar conocidos en 1913, Bohr calculó R y halló que su resultado concordaba (dentro de los límites de los errores de las constantes) con el valor obtenido a partir de la espectroscopía. La figura 35-13 ilustra el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno.

Los valores posibles de la energía del átomo de hidrógeno predichos por el modelo de Bohr vienen dados por la ecuación 35-19, con el valor de r dado por la ecuación 35-22, son

$$E_n = -\frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -Z^2 \frac{E_0}{n^2} \quad 35-26$$

en donde

$$E_0 = \frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV} \quad 35-27$$

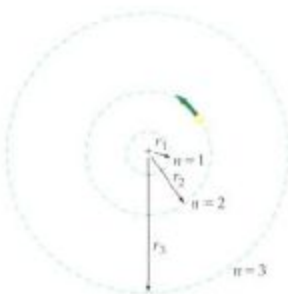


Figura 35-13 Órbitas estables en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno. Los radios de las órbitas estables vienen dados por $r_n = n^2 a_0$, en donde n es un número entero y a_0 es el radio menor.

Niveles energéticos

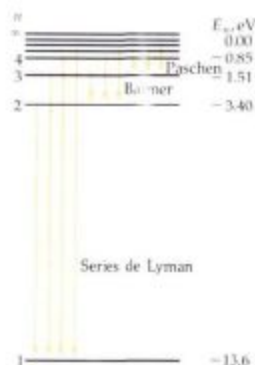


Figura 35-14 Diagrama de niveles energéticos del hidrógeno mostrando algunas transiciones en cada una de las series de Lyman, Balmer y Paschen. Las energías de los niveles vienen dadas por la ecuación 35-26.

Es a veces conveniente representar estas energías en un **diagrama de niveles de energía**, como en la figura 35-14. El nivel más bajo de energía se denomina estado fundamental. La energía del átomo de hidrógeno en el estado fundamental es $-13,6$ eV. El estado de energía más elevado se alcanza cuando $n \rightarrow \infty$ o $r \rightarrow \infty$, como puede verse a partir de las ecuaciones 35-26 y 35-22. Este proceso de extraer o eliminar el electrón de un átomo se denomina **ionización**. La energía de ionización del átomo de hidrógeno se ha medido y vale $13,6$ eV. Esta energía es, pues, la que mantiene ligado el electrón al átomo.

Se indican varias series de transiciones radiativas en la figura 35-14 mediante flechas verticales entre los niveles de energía. La frecuencia de la luz emitida en una de estas transiciones es la diferencia de energía dividida por h (ecuación 35-17). En la época del descubrimiento de Bohr (1913), se conocía la serie de Balmer correspondiente a $n_2=2$, y $n_1=3, 4, 5, \dots$, y la serie de Paschen correspondiente a $n_2=3$ y $n_1=4, 5, 6, \dots$. En 1916 T. Lyman halló la serie correspondiente a $n_2=1$, y en 1922 y 1924, F. Brackett y H. A. Pfund, respectivamente, hallaron las series correspondientes a $n_2=4$ y $n_2=5$. Como puede determinarse calculando las longitudes de onda de estas series, sólo la de Balmer está incluida en la parte visible del espectro electromagnético.

En nuestro estudio hemos supuesto que el electrón gira alrededor de un núcleo estacionario. Esto equivale a suponer que el núcleo tiene una masa infinita. Como la masa del núcleo de hidrógeno no es infinita, sino sólo 2000 veces aproximadamente la del electrón, debe realizarse una corrección para tener en cuenta el movimiento del núcleo. Esta corrección conduce a una dependencia muy pequeña de la constante de Rydberg, dada por la ecuación 35-25, con la masa nuclear, concordando de modo preciso con las variaciones observadas.

Ejemplo 35-6

Hallar la energía y la longitud de onda de la línea de mayor longitud de la serie de Lyman.

En la figura 35-14, vemos que la serie de Lyman corresponde a transiciones que terminan en el estado fundamental de energía $E_1 = E_\infty = -13,6$ eV. Como λ varía de modo inverso a la energía, la transición de longitud de onda más larga es la de menor energía que corresponde a la transición desde el primer estado excitado $n=2$ hasta el estado fundamental $n=1$. El primer estado excitado tiene una energía $E_2 = (-13,6 \text{ eV})/4 = -3,40$ eV. Como este valor corresponde a $10,2$ eV por encima del estado fundamental de energía, la energía del fotón emitido es $10,2$ eV. La longitud de onda de este fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{10,2 \text{ eV}} = 121,6 \text{ nm}$$

Este fotón está en el ultravioleta, fuera del espectro visible. Como todas las demás líneas de la serie de Lyman poseen energías aún mayores y longitudes de onda más cortas, la serie de Lyman está contenida totalmente en la región del ultravioleta.

Ejercicio

Hallar la longitud de onda más corta para una línea de la serie de Lyman. (Respuesta: $91,2$ nm)

Cuestiones

- Si un electrón se traslada a una órbita mayor, ¿aumenta o disminuye su energía total? ¿Aumenta o disminuye su energía cinética?
- ¿Cómo varía la separación de los niveles energéticos adyacentes cuando n aumenta?
- ¿Cuál es la energía del fotón de longitud de onda más corta emitido por el átomo de hidrógeno?

35-6 Ondas de electrones y Teoría Cuántica

En 1924, un estudiante francés, L. De Broglie, sugirió en su disertación de Licenciatura que los electrones pueden tener propiedades ondulatorias. Su razonamiento se basaba en la simetría de la naturaleza. Como se sabe que la luz tiene propiedades tanto ondulatorias como de partículas, quizás la materia —especialmente los electrones— pueden tener también características ondulatorias y de partículas. Esta sugerencia fue altamente especulativa, porque en esa época no había ninguna prueba de que los electrones tuviesen algún aspecto ondulatorio. Para encontrar la frecuencia y la longitud de onda de las ondas de electrones, De Broglie escogió las ecuaciones

$$f = \frac{E}{h} \quad 35-28$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad 35-29$$

en donde p es la cantidad de movimiento y E la energía del electrón. La ecuación 35-28 es la misma que la ecuación de Planck-Einstein correspondiente a la energía de un fotón. La ecuación 35-29 es válida también para los fotones, como puede verse a partir de

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{E}$$

Como la cantidad de movimiento o impulso de un fotón está relacionado con su energía por la expresión $E=pc$, tenemos

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{h}{p}$$

Hoy día se considera que las ecuaciones que propuso De Broglie se aplican a toda la materia. Sin embargo, en el caso de objetos macroscópicos, las longitudes de onda calculadas con la ecuación 35-29 son tan pequeñas que es imposible observar las propiedades normales ondulatorias de interferencia y difracción. Incluso una partícula tan pequeña como 1 μg posee una masa demasiado grande como para poder observarse alguna característica ondulatoria, como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 35-7

Hallar la longitud de onda de De Broglie de una partícula de 10^{-6} g de masa moviéndose con una velocidad de 10^{-6} m/s.

Según la ecuación 35-29, tendremos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(10^{-6} \text{ kg})(10^{-6} \text{ m/s})} \\ &= 6,63 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

Como la longitud de onda obtenida en el ejemplo anterior es mucho menor que cualquier posible abertura u obstáculo (el diámetro del núcleo de un átomo es del orden de 10^{-15} m, aproximadamente 10 000 veces esta longitud de onda), no puede observarse la difracción ni la interferencia de estas ondas. Como hemos visto, la propagación de ondas de longitud de onda muy pequeña es indistinguible de la propagación de partículas. Obsérvese que la cantidad de movimiento en el ejemplo 35-7 es extremadamente pequeña. Una partícula macroscópica con una cantidad de movimiento mayor tendría una longitud de onda aún más pequeña. Por consiguiente, no se observan las propiedades ondulatorias de objetos macroscópicos del tipo de pelotas de billar o de tenis.

Ejercicio

Hallar la longitud de onda de De Broglie de una pelota de masa 0,17 kg moviéndose a 100 km/h. (Respuesta: $1,4 \times 10^{-34}$ m)

La situación es diferente en el caso de electrones de baja energía. Consideremos un electrón con energía cinética E_c . Si el electrón es no relativista, se obtiene su impulso o cantidad de movimiento a partir de

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

o bien

$$p = \sqrt{2mE_c}$$

Su longitud de onda es entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E_c}}$$

Haciendo uso de $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$ y $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$, se obtiene

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2(0,511 \times 10^6 \text{ eV}) E_c}}$$

o bien

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{E_c}} \text{ nm} \quad E_c \text{ en electrón-voltios} \quad 35-30$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que los electrones con energías del orden de decenas de electrón-voltios tienen longitudes de onda de De Broglie del orden de los nanómetros. Este es el orden de magnitud del tamaño de los átomos y del espaciado de los átomos en un cristal. Así pues, cuando inciden sobre un cristal electrones del orden de 10 eV, se ven difundidos de una forma totalmente semejante a como lo hacen los rayos X de la misma longitud de onda.

Ejercicio

Hallar la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 10 eV. (Respuesta: 0,388 nm)

La prueba crucial para demostrar la existencia de las propiedades ondulatorias de los electrones fue la observación de la difracción y de la interferencia de las ondas de los electrones. Este test se realizó primeramente de forma accidental en 1927 por C.J. Davisson y L.H. Germer cuando estaban estudiando la dispersión o *scattering* de los electrones en un blanco de níquel en los Laboratorios de la Bell Telephone. Después de calentar el blanco para eliminar un recubrimiento de óxido que se había acumulado durante una interrupción accidental del sistema de vacío, Davisson y Germer encontraron que la intensidad de los electrones dispersados expresada en función del ángulo de dispersión mostraba máximos y mínimos. Su blanco había cristalizado y por accidente habían observado la difracción de los electrones. Entonces prepararon un blanco compuesto por un solo cristal de níquel e investigaron exhaustivamente este fenómeno. En la figura 35-15 se muestra una ilustración de su experimento. Los electrones procedentes de un cañón de electrones se dirigen hacia un cristal y luego se detectan en cierto ángulo ϕ que puede variarse a voluntad. En la figura 35-16 se muestra uno de los diagramas típicos observados, y en él se observa un intenso máximo de dispersión a un ángulo de 50° . El ángulo correspondiente a la intensidad máxima de la dispersión de las ondas por un cristal depende de su longitud de onda y del espaciado de los átomos en el cristal. Utilizando el espaciado conocido de los átomos de su cristal, Davisson y Germer calcularon la longitud de onda que podía producir dicho máximo y encontraron que concordaba con la obtenida a partir de la ecuación de De Broglie (ecuación 35-29) correspondiente a la energía de los electrones que estaban utilizando. Variando la energía de los electrones incidentes, pudieron modificar las longitudes de onda de los electrones y producir máximos y mínimos en diferentes posiciones en los diagramas de difracción. En todos los casos, las longitudes de onda medidas estaban de acuerdo con la hipótesis propuesta por De Broglie.

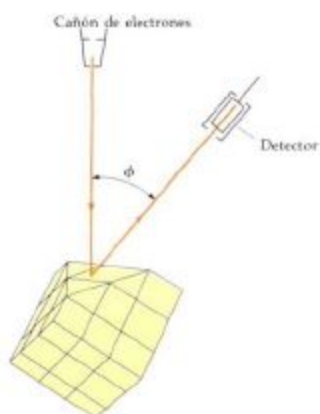


Figura 35-15 Experimento de Davisson-Germer. Los electrones procedentes de un cañón de electrones que inciden sobre un cristal son dispersados hacia un detector en una dirección angular ϕ que puede variarse a voluntad.

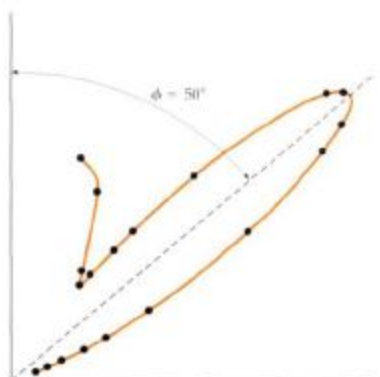


Figura 35-16 Representación gráfica de la intensidad en función del ángulo correspondientes a los electrones dispersados en el experimento de Davisson-Germer. Si se supone que este diagrama corresponde a un proceso de difracción-interferencia, puede calcularse la longitud de onda de los electrones a partir de la separación conocida de los átomos en el cristal y de la posición del máximo. El resultado concuerda con la hipótesis de De Broglie sobre la longitud de onda de un electrón.

En el mismo año, G.P. Thomson (hijo de J.J. Thomson) observó también la difracción de electrones en su transmisión a través de hojas delgadas de metal. Una hoja de metal está compuesta por cristales diminutos orientados al azar. El diagrama de difracción resultante de una hoja de este tipo es un conjunto de circunferencias concéntricas. Desde que Thomson realizó su experimento, se ha observado la difracción correspondiente a los neutrones, protones y otras partículas. La figura 35-17a a c muestra el diagrama de difracción correspondiente a los rayos X, a los electrones y a los neutrones con longitudes de onda semejantes transmitidos a través de hojas delgadas de metal. En la figura 35-17d se ve un diagrama de difracción producido por electrones que inciden sobre dos rendijas estrechas. Este experimento es análogo al famoso experimento de Young de difracción-interferencia por doble rendija con luz. El diagrama es idéntico al que se observa con fotones de la misma longitud de onda.

Poco después de que se demostraran las propiedades ondulatorias del electrón, se sugirió que podían utilizarse éstos en lugar de la luz, para «ver» objetos pequeños. En la actualidad, el microscopio electrónico es una importante herra-

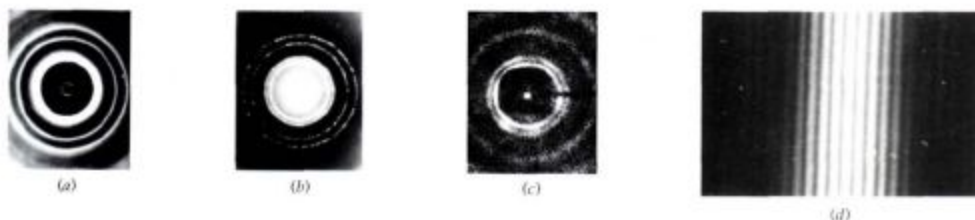


Figura 35-17 Espectro de difracción producido por (a) rayos X y (b) electrones incidentes sobre un blanco que es una hoja de aluminio y (c) neutrones que inciden sobre un blanco de cobre policristalino. Obsérvese la semejanza de los diagramas

producidos. (d) Diagrama de difracción-interferencia producido por electrones en un sistema de doble rendija. Este diagrama es el mismo que el obtenido con fotones.

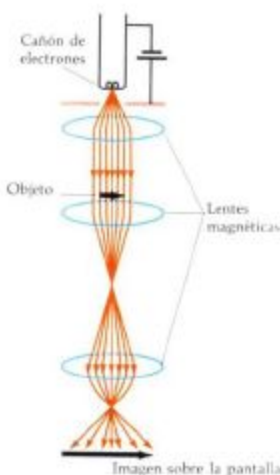


Figura 35-18 Microscopio electrónico. Los electrones procedentes de un filamento caliente (cañón de electrones) se ven acelerados por una gran diferencia de tensión en el tubo. El haz de electrones se hace paralelo mediante lentes de enfoque magnético. Los electrones inciden sobre un blanco muy delgado y luego se enfocan mediante una segunda lente magnética que es equivalente a la lente objetivo de un microscopio ordinario. La tercera lente magnética juega el papel del ocular de un microscopio. Proyecta el haz de electrones sobre una pantalla fluorescente donde se realiza la observación de la imagen.

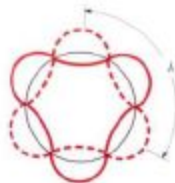


Figura 35-19 Ondas estacionarias a lo largo de una circunferencia.

mienta de investigación. En la figura 35-18 pueden verse las características esenciales de un microscopio de esta clase. El haz de electrones se hace paralelo y se enfoca mediante electroimanes especialmente diseñados que actúan como lentes. La energía de los electrones es típicamente del orden de 100 keV, lo que da como resultado una longitud de onda de 0,004 nm aproximadamente. La muestra que actúa como blanco debe ser muy delgada de modo que el haz transmitido no se frene ni si dispersa demasiado. La imagen final se proyecta sobre una pantalla fluorescente o sobre una película. Diversos tipos de distorsiones, que resultan de problemas de enfoque con las lentes magnéticas, limitan la resolución a algunas décimas de nanómetro, valor que es aproximadamente mil veces mejor que los que pueden obtenerse con luz visible.

Ondas estacionarias y cuantización de la energía

De Broglie señaló que la condición cuántica de Bohr (ecuación 35-21) para el momento angular del electrón de un átomo de hidrógeno es equivalente a una condición de onda estacionaria. Esta condición establece que

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

Sustituyendo la cantidad de movimiento mv por h/λ se tiene

$$\frac{h}{\lambda} r = n \frac{h}{2\pi}$$

o bien

$$n\lambda = 2\pi r = C \quad 35-31$$

en donde C es la circunferencia de la órbita de Bohr. Así pues, la condición cuántica de Bohr es equivalente a decir que en la circunferencia de la órbita circular debe ajustarse un número entero de ondas del electrón, como se ve en la figura 35-19.

Ejemplo 35-8

La energía cinética del electrón en el estado fundamental (de menor energía) del átomo de hidrógeno es 13,6 eV. (Su energía potencial es $-27,2$ eV y su energía total es $-13,6$ eV, lo que lleva a una energía de enlace de 13,6 eV.) Hallar la longitud de onda de De Broglie para este electrón.

Utilizando $E_k = 13,6$ eV en la ecuación 35-30, se tiene

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{13,6}} \text{ nm} = 0,332 \text{ nm} = 2\pi(0,0529 \text{ nm})$$

Esta es la circunferencia de la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno.

El ajuste de un número entero de ondas electrónicas en la circunferencia de una órbita de Bohr es semejante al ajuste de un número entero de semilongitudes de onda en la longitud de una cuerda o de un tubo de órgano, como sucede con las ondas estacionarias en cuerdas o en las ondas sonoras. En la teoría ondulatoria clásica, las ondas estacionarias llevan a la cuantización de la frecuencia. Por ejemplo, en el caso de ondas estacionarias en una cuerda de longitud L que está fija por ambos extremos (figura 35-20), la condición de onda estacionaria es

$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

En el caso de ondas que se mueven con velocidad v , la frecuencia de estas ondas estacionarias sobre una cuerda viene dada entonces por

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}$$

Si la energía está asociada con la frecuencia de una onda estacionaria, como en la ecuación 35-28, entonces las ondas estacionarias implican energías cuantizadas.

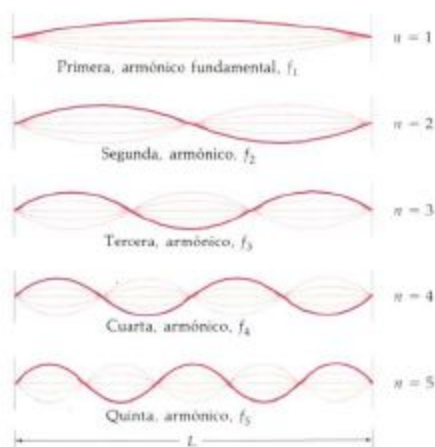


Figura 35-20 Ondas estacionarias en una cuerda fija por ambos extremos. Las frecuencias de estas ondas están cuantizadas; es decir, pueden tener sólo ciertos valores dados por $f_n = nf_1$, en donde f_1 es la frecuencia fundamental.

La idea de explicar los estados discretos de energía de la materia mediante ondas estacionarias condujo al desarrollo de una teoría, conocida como **teoría cuántica**, **mecánica cuántica** o **mecánica ondulatoria**. Se describe el electrón mediante una función de onda ψ que obedece a una ecuación de onda que se parece a la ecuación de onda clásica para el sonido y las ondas luminosas. La frecuencia y longitud de onda de las ondas de los electrones están relacionadas con la energía y la cantidad de movimiento del electrón de la misma forma que la frecuencia y la longitud de onda de la luz están relacionadas con la energía y el impulso de los fotones. Schrödinger resolvió el problema de la onda estacionaria correspondiente al átomo de hidrógeno, al oscilador armónico simple, y a otros sistemas de interés. Así obtuvo que las frecuencias permitidas combinadas con la relación de De Broglie $E = hf$ conducían al conjunto de niveles de energía correspondiente al átomo de hidrógeno encontrado por Bohr (ecuación 35-26) demostrando, por tanto, que la teoría cuántica proporciona un método general para hallar los niveles energéticos cuantizados de un sistema determinado. La teoría cuántica es la base de nuestro conocimiento y comprensión actual del mundo moderno, desde el comportamiento interno del núcleo atómico hasta el espectro de radiación de las galaxias distantes en cosmología.

Resumen

1. La energía de la radiación electromagnética no es continua sino que se encuentra en cuantos, con energías dadas por

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

en donde f es la frecuencia, λ la longitud de onda y h la constante de Planck, que tiene el valor

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

La cantidad hc aparece frecuentemente en los cálculos y vale

$$hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$$

La naturaleza cuántica de la luz se muestra claramente en el efecto fotoeléctrico, en donde un átomo absorbe un fotón con la emisión de un electrón, y en el proceso de dispersión Compton, en el cual un fotón choca contra un electrón libre y emerge con su energía reducida y, por tanto, con una mayor longitud de onda.

2. Se emiten rayos X cuando se deceleran los electrones al estrellarse contra un blanco en el interior de un tubo de rayos X. Un espectro de rayos X se compone de una serie de líneas nítidas denominado espectro característico superpuesto al espectro continuo bremsstrahlung. La longitud de onda mínima viene dada entonces por

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}$$

3. Las longitudes de onda de los rayos X son típicamente de algunos nanómetros, lo que coincide aproximadamente con el espaciado de los átomos de un cristal. Se observan máximos de difracción cuando los rayos X son dispersados por cristal, indicándose así que los rayos X son ondas electromagnéticas y que los átomos de un cristal están dispuestos siguiendo una distribución regular.
4. Con objeto de deducir la fórmula de Balmer correspondiente al espectro del átomo de hidrógeno, Bohr propuso los siguientes postulados:

Postulado 1: El electrón del átomo de hidrógeno puede moverse únicamente en ciertas órbitas circulares no radiativas denominadas estados estacionarios.

Postulado 2: El átomo radia un fotón cuando el electrón realiza una transición desde una órbita estacionaria a otra. La frecuencia del fotón viene dada por:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h}$$

en donde E_i y E_f son las energías inicial y final del átomo.

Postulado 3: El radio (y, por tanto, la energía) de una órbita correspondiente a un estado estacionario queda determinado por la física clásica junto con la condición cuántica de que el momento angular del electrón debe ser igual a un número entero multiplicado por la constante de Planck dividida por 2π :

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

en donde $\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

Estos postulados exigen que los niveles de energía permitidos en el átomo de hidrógeno vengan dados por

$$E_n = -\frac{k^2 e^4 m}{2h^2} \frac{Z^2}{n^2} = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

en donde n es un número entero y

$$E_0 = \frac{k^2 e^4 m}{2h^2} \approx 13,6 \text{ eV}$$

Los radios de las órbitas estacionarias vienen dados por

$$r = n^2 \frac{h^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z}$$

en donde

$$a_0 = \frac{h^2}{mke^2} \approx 0,0529 \text{ nm}$$

es el primer radio de Bohr.

5. La naturaleza ondulatoria de los electrones fue sugerida por De Broglie, quien postuló las ecuaciones

$$f = \frac{E}{h} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

para la frecuencia y la longitud de onda de las ondas de electrones. Con estas ecuaciones, puede comprenderse la condición cuántica de Bohr como una condición de onda estacionaria. La naturaleza ondulatoria de los electrones fue observada experimentalmente por primera vez por Davisson y Germer y posteriormente por G.P. Thomson, quien midió la difracción e interferencia de los electrones.

6. La teoría matemática de la naturaleza ondulatoria de la materia se conoce como teoría cuántica. En esta teoría, el electrón se describe mediante una función de onda que obedece a una ecuación de onda. La cuantización de la energía surge como consecuencia de la aplicación a los electrones de los diversos sistemas de las condiciones de onda estacionaria. La teoría cuántica es la base para nuestra comprensión de la naturaleza física del mundo moderno.

Sugerencias bibliográficas

Feinberg, Gerald: «Light», *Scientific American*, setiembre 1968, pág. 50.

Este artículo constituye una introducción a nuestra presente comprensión de la luz como un fenómeno con propiedades tanto ondulatorias como corpusculares, como se manifiesta por la difracción, la interferencia por dos rendijas, el efecto fotoeléctrico y la radiación del cuerpo negro.

Moran, Paul R., R. Jerome Nickles, y James A. Zagzebski: «The Physics of Medical Imaging», *Physics Today*, vol. 36, n° 7, 1983, pág. 36.

Este artículo describe brevemente nuevas técnicas para obtener imágenes médicas, como la angiografía por sustracción digital, la tomografía computarizada (TAC), la resonancia magnética nuclear, la tomografía por emisión de positrones, y la ecografía.

Wheeler, John Archibald: «Niels Bohr, the Man», *Physics Today*, vol. 38, n° 10, 1985, pág. 66.

El enfoque muy personal de Bohr sobre la ciencia es vuelto a contar por uno de sus primeros colaboradores, que a su vez es un físico muy reconocido. Este artículo aparece como parte de un número especial de la revista en conmemoración del centenario del nacimiento de Bohr.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Poder dibujar aproximadamente la curva de distribución espectral correspondiente a la radiación del cuerpo negro y la curva predicha por la ley de Rayleigh-Jeans.
2. Poder estudiar el efecto fotoeléctrico y escribir la ecuación de Einstein que lo describe.
3. Poder comentar cómo el concepto de fotón explica todas las características del efecto fotoeléctrico y la dispersión por efecto Compton de los rayos X.
4. Poder dibujar un espectro típico de rayos X y relacionar la longitud de onda mínima del mismo, con la tensión del tubo de rayos X.
5. Poder enunciar los postulados de Bohr y describir el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.
6. Poder dibujar un diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, indicando sobre él las transiciones en que interviene la emisión de un fotón y utilizarlo para calcular las longitudes de onda de los fotones emitidos.
7. Poder enunciar las relaciones de De Broglie para la frecuencia y la longitud de onda de los electrones y utilizarlas junto con la condición de onda estacionaria para deducir la condición de Bohr correspondiente a la cuantización del momento angular del átomo de hidrógeno.
8. Poder comentar las pruebas experimentales de la existencia de las ondas de electrones.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Radiación del cuerpo negro	Fotones
Ley de Rayleigh-Jeans	Función de trabajo
Catástrofe ultravioleta	Ecuación de Einstein
Cuantos	del efecto fotoeléctrico
Constante de Planck	Frecuencia umbral
Efecto fotoeléctrico	Longitud de onda umbral
Potencial de detención	Rayos X

Espectro característico
Espectro bremsstrahlung
Longitud de onda de corte
Longitud de onda de Compton
Serie de Balmer
Fórmula de Rydberg-Ritz
Rydberg

Estados estacionarios
Radio de Bohr
Diagrama de niveles energéticos
Ionización
Teoría cuántica
Mecánica cuántica
Mecánica ondulatoria

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro depende únicamente de la temperatura del cuerpo.
2. En el efecto fotoeléctrico, la corriente máxima es proporcional a la intensidad de la luz incidente.
3. La función de trabajo de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente.
4. La energía cinética máxima de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.
5. La energía de un fotón es proporcional a su frecuencia.
6. Una de las hipótesis de Bohr es que los átomos nunca radian luz.
7. En el modelo de Bohr, la energía de un átomo de hidrógeno está cuantizada.
8. En el estado fundamental del átomo de hidrógeno, la energía potencial es $-27,2$ eV.
9. La longitud de onda de De Broglie de un electrón varía en razón inversa con su cantidad de movimiento o impulso.
10. Los electrones pueden difractarse.
11. Los neutrones pueden difractarse.
12. Un microscopio electrónico se utiliza para examinar electrones.

Problemas

Nivel I

35-1 El origen de la constante cuántica: Radiación del cuerpo negro

No se proponen problemas para esta sección.

35-2 El efecto fotoeléctrico

1. Hallar la energía en julios y electrón-voltios de los fotones correspondientes a una onda electromagnética en la banda de radio de FM de frecuencia 100 MHz.
2. Repetir el problema 1 para una onda electromagnética en una banda de radio de AM y frecuencia 900 kHz.
3. ¿Cuál es la frecuencia de un fotón de energía (a) 1 eV, (b) 1 keV y (c) 1 MeV?

4. Hallar la energía de los fotones correspondientes a luz de longitud de onda (a) 450 nm, (b) 550 nm, y (c) 650 nm.
5. Hallar el intervalo de energías de los fotones del espectro visible, que se extiende desde las longitudes de onda de 400 a 700 nm.
6. Hallar la energía de los fotones si la longitud de onda es (a) 0,1 nm (aproximadamente 1 diámetro atómico) y (b) 1 fm (1 fm = 10^{-15} m, aproximadamente un diámetro nuclear).
7. La función de trabajo del tungsteno es 4,58 eV. (a) Hallar la frecuencia umbral y la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico. Hallar el potencial de detención si la longitud de onda de la luz incidente es (b) 200 nm y (c) 250 nm.
8. Cuando incide sobre el potasio luz de 300 nm de longitud de onda, los electrones emitidos tienen una energía cinética

máxima de 2,03 eV. (a) ¿Cuál es la energía del fotón incidente? (b) ¿Cuál es la función trabajo del potasio? (c) ¿Cuál sería el potencial de detención si la luz incidente tuviese una longitud de onda de 430 nm? (c) ¿Cuál es la longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico con el potasio?

9. La longitud de onda umbral de la plata para el efecto fotoeléctrico es 262 nm. (a) Hallar la función trabajo de la plata. (b) Hallar el potencial de detención si la radiación incidente tiene una longitud de onda de 175 nm.

10. La función trabajo del cesio es 1,9 eV. (a) Hallar la frecuencia umbral y la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico. Hallar el potencial de detención si la longitud de onda de la luz incidente es (b) 250 nm y (c) 350 nm.

11. Un haz de luz de longitud de onda 400 nm tiene una intensidad de 100 W/m². (a) ¿Cuál es la energía de cada fotón del haz? (b) ¿Cuánta energía incide sobre un área de 1 cm² perpendicular al haz en 1 s? (c) ¿Cuántos fotones inciden en dicha área en 1 s?

35-3 Rayos X

12. Un tubo de rayos X funciona a un potencial de 460 kV. ¿Cuál es la mínima longitud de onda del espectro continuo de rayos X desde este tubo?

13. La longitud de onda mínima del espectro continuo de rayos X desde un tubo de televisión es 0,134 nm. ¿Cuál es la tensión aplicada al tubo?

14. ¿Cuál es la longitud de onda mínima del espectro continuo de rayos X desde un tubo de televisión que funciona a 2500 V?

35-4 Efecto Compton

15. Hallar el desplazamiento de la longitud de onda de los fotones dispersados a $\theta = 60^\circ$.

16. Cuando los fotones son dispersados por los electrones del carbono, el desplazamiento de la longitud de onda es 0,33 pm. Hallar el ángulo de dispersión.

17. Hallar la cantidad de movimiento de un fotón en eV/c y en kg m/s si la longitud de onda es (a) 400 nm, (b) 2 nm, (c) 0,1 nm, y (d) 3 cm.

18. La longitud de onda de los fotones dispersados por efecto Compton se mide a $\theta = 90^\circ$. Si $\Delta\lambda/\lambda$ ha de ser el 1,5 por ciento, ¿cuál deberá ser la longitud de onda de los fotones incidentes?

19. Compton utilizó fotones de 0,0711 nm de longitud de onda. (a) ¿Cuál es la energía de estos fotones? (b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón dispersado a $\theta = 180^\circ$? (c) ¿Cuál es la energía del fotón dispersado a este ángulo?

20. En el caso de los fotones utilizados por Compton, hallar la cantidad de movimiento del fotón incidente y la del fotón dispersado a 180° , y utilizar la conservación de la cantidad de movimiento para hallar la cantidad de movimiento del electrón de retroceso en este experimento (ver problema 19).

35-5 Cuantización de energías atómicas: Modelo de Bohr

21. Utilizar los valores conocidos de las constantes de la ecuación 35-22 para demostrar que a_0 vale aproximadamente 0,0529 nm.

22. La longitud de onda más larga de la serie de Lyman se calculó en el ejemplo 35-6. Hallar las longitudes de onda para las transiciones (a) $n_1 = 3$ a $n_2 = 1$ y (b) $n_1 = 4$ a $n_2 = 1$. (c) Hallar la longitud de onda más corta en esta serie.

23. Hallar la energía de los fotones correspondientes a las tres longitudes de onda más largas de la serie de Balmer y calcular sus longitudes de onda.

24. (a) Hallar la energía y longitud de onda de los fotones correspondientes al límite de la serie (longitud de onda más corta) en la serie de Paschen ($n_1 = 3$). (b) Calcular las longitudes de onda correspondientes a las tres longitudes de onda más largas de esta serie e indicar sus posiciones sobre una escala horizontal lineal.

25. Repetir el problema 24 para la serie de Brackett ($n_1 = 4$).

26. Un átomo de hidrógeno está en su décimo estado excitado de acuerdo con el modelo de Bohr ($n = 11$). (a) ¿Cuál es la energía cinética del electrón? (d) ¿Cuál es la energía potencial del electrón? (e) ¿Cuál es la energía total del electrón?

35-6 Ondas de electrones y Teoría Cuántica

27. Utilizar la ecuación 35-30 para calcular la longitud de onda de De Broglie de un electrón de energía cinética (a) 2,5 eV, (b) 250 eV, (c) 2,5 keV, y (d) 25 keV.

28. Un electrón se está moviendo a $v = 2,5 \times 10^6$ m/s. Hallar su longitud de onda de De Broglie.

29. Un electrón tiene una longitud de onda de 200 nm. Hallar (a) su cantidad de movimiento y (b) su energía cinética.

30. ¿Con qué potencial debe acelerarse un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea (a) 5 nm y (b) 0,01 nm?

31. Un neutrón térmico en un reactor tiene una energía cinética próxima a 0,02 eV. Calcular su longitud de onda de De Broglie a partir de

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}}$$

en donde $mc^2 = 940$ MeV es la energía en reposo del neutrón.

32. Hallar la longitud de onda de De Broglie de un protón (energía en reposo $mc^2 = 938$ MeV) que tiene una energía cinética de 2 MeV. (Ver problema 31.)

33. Un protón se está moviendo a $v = 0,003c$, siendo c la velocidad de la luz. Hallar su longitud de onda de De Broglie.

34. ¿Cuál es la energía cinética de un protón cuya longitud de onda de De Broglie es (a) 1 nm y (b) 1 fm?

35. Hallar la longitud de onda de De Broglie de una pelota de 0,145 kg de masa moviéndose a 30 m/s.

36. La energía de un haz de electrones en el experimento de Davisson y Germer era 54 eV. Calcular la longitud de onda de estos electrones.

37. La distancia entre los iones de Li^+ y Cl^- en un cristal de LiCl es 0,257 nm. Hallar la energía de los electrones que tienen longitudes de onda igual a esta distancia.

38. Un microscopio electrónico utiliza electrones de 70 keV de energía. Hallar la longitud de onda de estos electrones.

Nivel II

39. Un rayo X sufre una dispersión de Compton y emerge con una longitud de onda de 0,20 nm a un ángulo de dispersión de 100° . ¿Cuál era la energía inicial del fotón de rayos X?

40. Cuando la energía cinética de un electrón es mucho mayor que su energía en reposo, es aceptable la aproximación relativista $E = pc$. (a) Demostrar que en este caso los fotones

y los electrones de la misma energía tienen la misma longitud de onda. (b) Hallar la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 200 MeV de energía.

41. Suponer que un foco de 100 W radia luz de 600 nm de longitud de onda uniformemente en todas direcciones, y que el ojo puede detectar esta luz si como mínimo entran 20 fotones por segundo en un ojo adaptado a la oscuridad con una pupila de 7 mm de diámetro. ¿A qué distancia del foco puede detectarse la luz en estas condiciones bastante extremas?

42. Los datos de los potenciales de detención en función de la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico utilizando sodio son

λ , nm	200	300	400	500	600
V_s , V	4,20	2,06	1,05	0,41	0,03

Representar estos datos de modo que se obtenga una recta y a partir de ella hallar (a) la función trabajo, (b) la frecuencia umbral, y (c) el cociente h/e .

43. El diámetro de la pupila del ojo es del orden de 5 mm. (Puede variar entre 1 y 8 mm aproximadamente.) Hallar la intensidad de la luz de 600 nm de longitud de onda tal, que sólo entre en el ojo por la pupila 1 fotón por segundo.

44. Demostrar que la velocidad de un electrón en la n -ésima órbita de Bohr del hidrógeno viene dada por $v_n = e^2/2\epsilon_0 h n$.

45. Una lámpara radia 90 W de luz uniformemente en todas direcciones. (a) Hallar la intensidad a una distancia de 1,5 m. (b) Si la longitud de onda es de 650 nm, hallar el número de fotones por segundo que inciden sobre 1 cm² de área orientada de modo que su normal esté alineada con la lámpara.

46. ¿Cuántos procesos de dispersión de Compton frontales son necesarios para duplicar la longitud de onda de un fotón que tiene una longitud de onda inicial de 200 pm?

47. Un fotón de rayos X, cuya longitud de onda es 6 pm, tiene una colisión frontal con un electrón, de manera que sufre una dispersión con un ángulo de 180°. (a) ¿Que cambio se produce en la longitud de onda del fotón? (b) ¿Cuál es la pérdida de energía del fotón? (c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón dispersado?

48. Un fotón de 0,200 pm sufre dispersión desde un electrón libre que está inicialmente en reposo, ¿para qué ángulo de dispersión del fotón será la energía cinética de retroceso del electrón igual a la energía del fotón dispersado?

49. La energía de enlace de un electrón es la energía mínima que se necesita para llevar al electrón desde su estado fundamental hasta una gran distancia del núcleo. (a) ¿Cuál es la energía de enlace del átomo hidrógeno? (b) ¿Cuál es la energía de enlace del He⁺? (c) ¿Cuál es la energía de enlace del Li²⁺?

50. Un átomo de hidrógeno tiene su electrón en su estado $n=2$. El electrón realiza una transición al estado fundamental. (a) ¿Cuál es la energía del fotón de acuerdo con el modelo de Bohr? (b) Si se conserva el momento angular, ¿cuál es el momento angular del fotón? (c) El momento lineal o cantidad de movimiento del fotón emitido es E/c . Si admitimos la conservación de la cantidad de movimiento, ¿cuál es la velocidad de retroceso del átomo? (d) Hallar la energía cinética de retroceso del átomo en eV. ¿En qué tanto por ciento habrá de corregirse la energía del fotón calculada en la parte (a) para tener en cuenta esta energía de retroceso?

51. Una partícula de masa m se mueve dentro de una caja monodimensional de longitud L . (Considerar que la energía potencial de la partícula dentro de la caja se toma como cero, de modo que su energía total sea su energía cinética $p^2/2m$). Su energía está cuantizada mediante la condición $n(\lambda/2)=L$, siendo λ la longitud de onda de De Broglie de la partícula y n es un número entero. (a) Demostrar que las energías permitidas vienen dadas por

$$E_n = n^2 E_1 \quad \text{en donde } E_1 = h^2/8mL^2$$

(b) Calcular E_n en el caso de un electrón en una caja de tamaño $L=0,1$ nm y hacer un diagrama de niveles de energía para los estados desde $n=1$ hasta $n=5$. Utilizar el segundo postulado de Bohr $f = \Delta E/h$ para calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el electrón realiza una transición desde (c) $n=2$ a $n=1$, (d) $n=3$ a $n=2$, y (e) $n=5$ a $n=1$.

52. (a) Utilizar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ($n=1$) y de los dos primeros estados excitados de un protón en una caja monodimensional de longitud $L=10^{-15}$ m = 1 fm. (Los valores son del orden de magnitud de las energías nucleares.) Calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el protón realiza una transición desde (b) $n=2$ a $n=1$, (c) $n=3$ a $n=2$, y (d) $n=3$ a $n=1$.

53. (a) Utilizar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ($n=1$) y de los dos primeros estados excitados de un protón en una caja monodimensional de longitud 0,2 nm (del orden del diámetro de la molécula de H₂). Calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el protón realiza una transición desde (b) $n=2$ a $n=1$, (c) $n=3$ a $n=2$, y (d) $n=3$ a $n=1$.

54. (a) Hallar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ($n=1$) y de los dos primeros estados excitados de una pequeña partícula de masa 1 μ g confinada en una caja monodimensional de longitud 1 cm. (b) Si la partícula se mueve con una velocidad de 1 mm/s, calcular su energía cinética y hallar el valor aproximado del número cuántico n .

55. En el sistema de referencia de centro de masas del electrón y el núcleo de un átomo, el electrón y el núcleo tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas de valor p . (a) Demostrar que la energía cinética total del electrón y el núcleo puede escribirse

$$E_c = \frac{p^2}{2\mu}$$

en donde

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+m/M}$$

se denomina la masa reducida, m_e es la masa del electrón y M es la masa del núcleo. Puede demostrarse que el movimiento del núcleo se puede explicar sustituyendo la masa del electrón por la masa reducida. (b) Utilizar la ecuación 33-25 sustituyendo m por μ para calcular el Rydberg correspondiente al hidrógeno ($M=m_e$) y para un núcleo de gran masa ($M=\infty$). (c) Hallar la corrección en porcentaje de la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno debida al movimiento del protón.

56. La energía cinética de rotación de una molécula diatómica puede escribirse $E_r = L^2/2I$, siendo L su momento angular e I su momento de inercia. (a) Suponiendo que el momento

angular está cuantizado como en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, demostrar que la energía viene dada por $E_{n_i} = n^2 E_{c_i}$, en donde $E_{c_i} = \hbar^2/2I$. (b) Construir un diagrama de niveles energéticos para esta molécula. (c) Estimar E_{c_i} para la molécula de hidrógeno suponiendo que la separación entre los átomos es $r = 0,1$ nm y considerando que la rotación tiene lugar alrededor de un eje que pasa por el centro de masas y es perpendicular a la línea que une los átomos. Expresar la respuesta en eV. (d) Cuando E_{c_i} es mayor que kT (donde k es la constante de Boltzmann), las colisiones moleculares no producen rotación y por tanto la energía rotacional no contribuye a la energía interna del gas. Utilizar el resultado de (c) para hallar la temperatura crítica $T_c = E_{c_i}/k$.

Nivel III

57. Este problema pretende estimar el retraso de tiempo del efecto fotoeléctrico (esperado clásicamente pero no observado). Sea $0,01 \text{ W/m}^2$ la intensidad de la radiación incidente. (a) Si el área del átomo es $0,01 \text{ nm}^2$, hallar la energía por segundo que incide sobre el átomo. (b) Si la función trabajo es 2 eV , ¿cuánto tiempo se tardará, según la teoría clásica, en que esta energía caiga sobre un átomo?

58. Un fotón no puede transferir toda su energía a un sólo electrón libre. Demostrar este hecho considerando el problema de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

59. Un electrón y un positrón se están acercando mutuamente con velocidades iguales a $3 \times 10^6 \text{ m/s}$. Las dos partículas se aniquilan entre sí y producen dos fotones de la misma energía. (a) ¿Cuáles son las longitudes de onda de De Broglie del electrón y del positrón? Hallar (b) la energía, (c) la cantidad de movimiento, y (d) la longitud de onda de cada fotón.

60. (a) Despejar p_1^z en la ecuación 35-11 hasta obtener $p_1^z = p_1^z + p_2^z - 2p_1 p_2 + 2mc(p_1 - p_2)$. (b) Eliminar p_1^z entre este resultado en la parte (a) y la ecuación 35-10 para obtener $mc(p_1 - p_2) = p_1 p_2 (1 - \cos \theta)$. (c) Multiplicar ambos miembros del resultado de la parte (b) por $h/mc p_1 p_2$ y utilizar la relación de De Broglie $h/p = \lambda$ para obtener la fórmula de Compton (ecuación 35-12).

61. La densidad de energía total de radiación de un cuerpo negro viene dada por

$$u = \int f(\lambda, T) d\lambda$$

en donde $f(\lambda, T)$ viene dada por la fórmula de Planck

$$f(\lambda, T) = \frac{8\pi h c \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Poner como variable $x = hc/\lambda kT$ y demostrar que la densidad de energía total puede escribirse entonces

$$u = \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 8\pi h c \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \alpha T^4$$

en donde α es una cierta constante independiente de T . Esto demuestra que la densidad de energía de un cuerpo negro es proporcional a T^4 .

62. La frecuencia de revolución de un electrón en una órbita circular de radio r es $f_{\text{rot}} = v/2\pi r$, siendo v la velocidad. (a) Demostrar que en el estado estacionario n -ésimo

$$f_{\text{rot}} = \frac{k^2 Z^2 e^4 m}{2\pi h^3} \frac{1}{n^3}$$

(b) Demostrar que cuando $n_1 = n$, $n_2 = n - 1$, y n es mucho mayor que 1,

$$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \approx \frac{2}{n^3}$$

(c) Utilizar el resultado de (b) en la ecuación 35-24 para demostrar que en este caso la frecuencia de radiación emitida es igual a la frecuencia del movimiento. Este resultado es un ejemplo del principio de correspondencia de Bohr: cuando n es grande, de modo que la diferencia de energías entre estados adyacentes es una pequeña fracción de la energía total, la física clásica y cuántica deben dar los mismos resultados.

Índice alfabético

- Aberración**
 astigmatismo, 1034
 coma, 1034
 corrección de, 1034
 cromática, 1034-1035
 distorsión, 1034
 esférica, 1016, 1034
- Acción a distancia**, 607
- Aceleración**
 cargas puntuales en campos eléctricos, 614
- Acomodación**, 1042
- Agujeros negros**, 1135
- Aislante**, eléctrico, 601
- Akasohu, Syun-ichi**, 866-870
- Aletas de enfriamiento**, fotos, 726
- Altavoz**, foto, 820
- Amortiguamiento crítico**, 911
- Ampère, André-Marie**, 782, 811, 815, 826, 879, 965
- Amperímetro**, 767-769, 900
 calibración, 827
- Amperio (A)**, unidad de corriente, 600, 717
 definición, 826-827
- Amplificación**, 926, 1021, 1023-1024
 angular, 1046-1047, 1050, 1052
 lateral, 1018-1020, 1050
 microscopio simple, 1046-1047
- Amplitud (A)**, 951, 1173
- Análisis de Fourier**, 899
- Ångström, Anders Jonas**, 866
- Ángulo crítico**, 987-988
- Ángulo sólido**, 649
- Anillos de Newton**, 1064
- Antena**
 dipolar eléctrica, 959, 961
 en forma de espira, 961
 para ondas gravitatorias, foto, 1135
 de seguimiento, foto, 943
 de televisión, foto, 959
- Antenas de televisión**, foto, 959
- Año luz**, unidad de distancia, 980
- Aproximación de rayos**, 976, 1012
- Arco iris**, 992-994, 1004-1007
 ángulo de mínima desviación, 993-994
- arcos supernumerarios, 1005
 foto, 974
- infrarrojo, 1004-1007
- radio angular del, 993-994
- secundario, 994
- Astigmatismo**, 1034, 1042
- Aston, Francis Williams**, 794-795
- Atmósfera**
 velocidad de escape, en, 1135
- Átomo de hidrógeno**
 modelo de Bohr, 1156-1160
 niveles energéticos, 1159-1160, 1165
 problema de onda estacionaria, 1165
- Auroras**, 866-870
 llamarada solar, 870
 magnetosfera, 868
 viento solar, 868, 870
- Autoinducción**, 857-858
 definición, 857
 de un solenoide, 857
- Bainbridge, Kenneth**, 794
- Balanza de corriente**, 827, foto, 827
- Balanza de torsión**, 603
- Balmer, Johann**, 1156
- Bardeen, John**, 724
- Bastones y conos**, 1041-1085
- Batería**,
 de acumuladores, *esquema*, 730
 cable de empalme, 733
 especificación de amperios-hora, 731
 y fem, 726-731
 ideal, 727
 plata-zinc, foto, 730
 pila seca, *esquerra*, 730
 polímero-litio, foto, 730
 potencia de entrada, 727, 729
 potencia de salida, 727, 729
 real, 727-728
 reglas de Kirchhoff y, 751-753
 resistencia de carga, 729
 resistencia interna, 728-729, 752
 tensión en bornes, 727
- BCS teoría de la superconductividad**, 724
- Bequerel, Antoine Henri**, 1100
- Biot, Jean Baptiste**, 811, 823
- Birrefringencia**, 1001-1003
 eje óptico, 1001
 lámina de cuarto de onda, 1002
 lámina de media onda, 1002-1003
 rayo extraordinario, 1001-1002
 rayo ordinario, 1001-1002
- Bobina balística**, 845
- Bobina de ignición**, foto, 920
- Bobinas de Helmholtz**, fotos, 811, 838
- Bohr, Niels**, 975, 1100, 1146, 1149, 1157-1059, 1165
- Boltzmann, Ludwig**, 964, 967
- Botella de Leyden**, 690
 magnética, 790
- Brackett, F.**, 1160
- Brewster, David**, 1000
- Budín de pasas-**, modelo del átomo, 1157
- Cable coaxial**
 capacidad del, 693-694
 foto, 693
- Cálculo diferencial**, AP-15-19
- Calibrador por deformación**, 771
- Calor de Joule**, 726, 729, 751, 765-766, 847, 851, 898, 901, 917, 920
- Cámara fotográfica**, 1047-1050
 número de ASA, 1048
 número DIN, 1048
 número *f*, 1048-1049
 distancia focal de una lente, 1047-1050
 foto, 1049
- Campo eléctrico (E)**, 607-611, 624-655, 625-631
 cálculo mediante la ley de Coulomb, 625-631
 cálculo mediante la ley de Gauss, 635-644
 de un cilindro sólido de carga, 640-642
 de una corteza cilíndrica de carga, 638-639
 de una corteza esférica de carga, 640-642
 creado por una carga puntual, 609, 635-636
 definición, 607
 dentro del conductor, 644, 674
 dirección del, 612-613
 de un dipolo, 611-613
 discontinuidad del, 643-644
 distribuciones continuas de carga, 624-649
 en el eje de un disco uniformemente cargado, 629-630
 de una esfera sólida, 642-643
 fuera de un conductor, 646-647
 líneas, 612-614, 658, 671
 en la naturaleza, *tabla*, 608
 potencial eléctrico y, 671-673
 en las proximidades de un plano infinito de carga, 630-631, 636-637
 próximo a una carga lineal infinita, 627-628, 637-638
 reglas para dibujar las líneas, 613
 de un sistema de cargas puntuales, 609-611
 sobre el eje de una carga anular, 629
 sobre el eje de una carga lineal, 625-631

- sobre la mediatriz de una carga
lineal finita, 626-627
en la superficie de los conductores,
644-648
superposición de, 608, 662
trabajo realizado por, 661
unidad SI del, 608, 658
- Campo magnético**, (B), 781-804
aspectos direccionales, 815-816
campo de un dipolo magnético, 818
creado por cargas puntuales
móviles, 812-815
creado por corrientes, 815-825
debido a una espira de corriente,
816-818
debido a una corriente en un
conductor rectilíneo, 822-825
debido a una corriente en un
solenoides, 819-821
definición, 783
efecto Hall, 801-804
frecuencia del ciclotrón, 788-797
fuentes del, 811-832
fuerza ejercida por, 782-787
fuerza magnética y la conservación
del momento lineal, 813-815
líneas de, 786
movimiento de una carga puntual
en un, 787, 798
no uniforme, 790-791
par de fuerza sobre espiras de
corriente e imanes, 798-801
periodo del ciclotrón, 788-789, 796
regla de la mano derecha, 783, 823
selector de velocidades, 791-795
tesla, unidad SI, 783-784
de la tierra, 781-782, 784-785
unidad cgs, gauss, 784
- Campo magnético de saturación**, 888
tabla, 889
- Campo remanente**, 888-889
- Campos cruzados**, 791
- Cantidad de movimiento**
en ondas electromagnéticas, 954-957
relativista, 1124-1125, 1127-1128,
1131-1132
- Capacidad**
de un condensador cilíndrico, 693
del condensador de placas
paralelas, 692-693
definición, 691
dieléctricas y, 694-696
equivalente, 702-706
unidad SI de, 691
- Carga de ensayo**, 607-608
- Carga eléctrica**, 599-601
atracción y repulsión, 599
conservación de, 600
cuantización de, 599
culombio, SI unidad de, 600
movimiento y campo eléctrico,
614-615
movimiento y campo magnético,
787-798
movimiento y corriente eléctrica,
716-720
producción de pares, 600
unidad fundamental e, 599-600
- Carga ligada**, 695-696
- Carga por inducción**, 600-602
- Carlson**, Charles, 683
- Carrete de Tesla**, foto, 859
- Catástrofe del ultravioleta**, 1148
- Células fotovoltaicas**, foto, 770
receptoras sensoriales, fotos, 770-771
- Ciclotrón**, 788, 795-797, fotos, 796
- Cinta magnetofónica**, foto, 887
- Cinturones de Van Allen**, 791
- Circuito con un interruptor general**,
901-902
- Circuitos LC**
analogía de una masa unida a un
muelle, 908-909
energía eléctrica y magnética, 909-
910
frecuencia, 909-910
- Circuitos LCR**
analogía de un oscilador armónico
amortiguado, 911
analogía de un oscilador forzado,
912
con un generador, 912-919
diagrama de un fasor, 913
factor de potencia, 914-915
factor Q, 915-917
impedancia, 912-919
en paralelo, 919
reactancia total, 912-913
resonancia, 914-918
serie, 912-913, 916
sin generador, 910-911
valor del amortiguamiento crítico,
911
- Circuitos LR**, 859-862
constante de tiempo, 860-862
producción de calor, 862
- Circuitos RC**, 760-766
carga de un condensador, 762-766
constante de tiempo, 761, 763-764
descarga de un condensador, 760-
762, 765-766
diagrama para un fasor, 919
filtro pasa baja, 918
- Circuitos de corriente continua**, 749-771
circuitos RC, 760-766
reglas de Kirchhoff, 750-759
- Circuitos eléctricos**
energía en los, 725-731
LC, 908-910
LCR, 910-919
LR, 859-862
pérdida de energía potencial, 725
RC, 760-766, 918-919
- Circuitos integrados**, foto, 749
- Coherencia**, 1061-1063
- Coma**, 1034
- Cometa Mrkos**, foto, 956
- Compton**, Arthur H., 1054
- Condensadores**
botella de Lyden, foto, 703
caída de tensión en función de la
corriente, 905, 907
carga de, 762-766
cerámicos, fotos, 690, 697
cilíndricos, 693-694
en un circuito impreso, foto, 703
constante de tiempo, 761, 763-764
corriente alterna en, 902, 904-907
corriente en función de la
frecuencia, 906
- descarga de, 760-762, 765-766
ideal, 906
en paralelo, 702-703, 706-707
de placas paralelas, 691-693
reactancia capacitiva, 905-906
en serie, 704-706
usos de, 690
variable con espaciado de aire,
foto, 703
- Condición de resonancia**, 914
- Conducción eléctrica**
modelo clásico, 735-737
modelo microscópico, 735-738
teoría mecánico-cuántica, 738
- Conducción en células nerviosas**, 740-
743
potencial de acción, 742
potencial en reposo, 741
propagación del impulso nervioso,
742-743
- Conductividad**, 721-722, 735
- Conductor, eléctrico**, 601-602
carga y campo en la superficie, 644-
648
carga por inducción, 601-602
conectado a tierra, 602, 752
electrones en libertad, 601-602,
644, 717-719
en equilibrio electrostático,
644-648
- Conexión a tierra**, 602
- Conos y bastones**, 1041, 1085
- Conservación de la carga**, 600, 750
- Conservación de la energía**, 730,
1129, 1158
ley de Lenz, 846-847
- Conservación del momento lineal**,
fuerza magnética y, 813-815
- Constante de Boltzmann**, 1147
- Constante de Coulomb**, valor de, 604
- Constante de Planck**, 883, 975, 1148, 1158
- Constante de Rydberg**, 1156,
1159-1160
- Constante de tiempo**
en circuitos LR, 860-862
en circuitos RC, 761, 763-764
condensadores, 761, 763-764
- Constante de von Klitzing**, 804
- Constante dieléctrica**, 694-695
tabla, 697
- Constantes físicas**, tabla, AP-23
- Construcción de Huygens**, 981
- Contracción de longitudes**, 1111-1113,
1115
- Contracción de Lorentz FitzGerald**, 1112
- Conversión de potencia**, foto, 898
- Cooper**, Leon, 724
- Córnea**, 1041-1042
- Corriente alterna**, 898-936
en bobinas, 902-904
circuitos LCR, 908-919
en condensadores, 904-907
rectificación y amplificación, 923-
926
en resistencias, 899-902
transformadores, 920-923
ventajas de, 898, 922
- Corriente continua**, alto voltaje, 898
- Corriente de desplazamiento de Maxwell**, 943-946, 965

- Corriente de placa, 924
- Corriente eléctrica, 716-748
 amperio, unidad SI, 717
 definición, 716
 dirección de, 717
 electrones libres en un alambre conductor, 717-719
 fórmula para, 718
 movimiento de cargas y, 716-720
 resistencia y ley de Ohm, 720-724
- Corriente
 amperiana, 880
 eléctrica generalizada, 945-946
 inducida, 840, 846-847
 magnetizante, 920-921
 turbillonarias o de Foucault, 852-854, 920
 valores eficaces, 900-903, 905
- Cosmología, 1101
- Coulomb, Charles Augustin de, 603, 676, 782
- Cristal birrefringente, *foto*, 1003
- Cristal líquido
 color de la capa de, 726
 sistema de representación o display, *foto*, 1001
- Criterio de Rayleigh para la resolución, 1084, 1087
- Citrón, *foto*, 766
- Cuantización
 de la carga eléctrica, 599
 condición ondas estacionarias, 1164-1165
 de la energía, 1146, 1148-1149, 1164-1165
 de la energía atómica, 1156-1160
 del momento angular, 1159, 1164
- Cuantos, 1148
- Culombio (C), unidad de carga, 600, 626
- Curie, Pierre, 886
- Curvas de distribución espectral, 1147
- Datos astronómicos, *tabla*, AP-22
- Datos terrestres, *tabla*, AP-22
- Davison, C.J., 975, 1162
- De Broglie, Louis Victor, 1100, 1161, 1164
- De Forest, Lee, 925
- Decrecimiento exponencial, 761
- Densidad de carga lineal, 625
- Densidad de carga superficial, 624
- Densidad de carga volumétrica, 624
- Densidad de energía
 de un campo electrostático, 701, 862, 953
 magnética, 863-864, 953
 de una onda electromagnética, 953-954
- Dentler, John, 929-936
- Derivadas, AP-15-19
- Descarga eléctrica, *foto*, 624, 677, 901
- Descarga en arco, 678, *foto*, 678
- Descarga en corona, *foto*, 628
- Descartes, René, 986, 992
- Desplazamiento hacia el rojo, 1119
- gravitatorio, 1135
- Deuterón, 1130
- Diabillio de Maxwell, 966
- Diagrama de interferencia de dos rendijas, 1068-1071
- espejo de Lloyd, 1070
- franjas, 1069-1071
- máximos, 1068-1070
- mínimos, 1068-1070
- Diagrama de rayos
 para espejos, 1018-1020
- para lentes, 1029-1031
- Diagrama de tensiones, 972, 999
- Diamagnetismo, 879, 881, 890-892
- estimación de los momentos magnéticos inducidos, 891-892
- superconductores, 890-891
- Diámetro y secciones de alambres de cobre, *tabla*, 722
- Dielectricas, 694-698
- dentro de un campo eléctrico, 695
- funciones del, 696
- permitividad del, 695
- Diferencia de fase
 coherencia y, 1061-1063
- Diferencia de potencial, 667
- definición, 657-658, 698
- potencial eléctrico y, 657-660
- unidad SI para, 658
- Difracción, 974-975, 1076-1089
- de abertura circular, *foto*, 1083, 1084
- central, máximo de, 1077-1079, 1081
- Fraunhofer, 1082-1084
- Fresnel, 1082-1083, *fotos*, 1082, 1083
- intensidad de, una sola rendija, 1079-1080
- interferencia, de dos rendijas, 1080-1081
- de la luz, *foto*, 1061
- máximo secundario, 1080
- primer mínimo, 1079, 1081, 1084
- puntos de intensidad cero, 1077-1079
- redes de, 1085-1089, *foto*, 1087
- y resolución, 1083-1085
- una sola rendija, 1076-1080, *foto*, 1076
- Difracción de Fraunhofer, 1082-1084
- Difracción de Fresnel, 1082-1083
- Difracción de rayos X, 1153
- Difracción del neutrón, 1163
- Difracción del protón, 1163
- Difracción electrónica, 1162-1163
- Difracción electrónica, 1162-1163
- Diodo PIN, *foto*, 925
- Diodo
 semiconductor, 923
- de vacío, 923
- Dioptría (D), unidad de potencia de la lente, 1033, 1043-1045
- Dipolo eléctrico, 611, 616-617, 632
- debido a un campo eléctrico, 611
- en campos eléctricos, 616-617
- momento, 611
- momento del par, 616-617
- potencial de, 656
- Disco duro de un ordenador, *foto*, 889
- Discos compactos, *fotos*, 984
- Dispersión, 991, *foto*, 991
- arco iris, 992-994
- Dispersión de la luz, 1000
- Distancia focal
 de la lente de una cámara, 1047-1050
- de la lente-córnea, 1042-1043
- para espejos esféricos, 1017
- para lentes delgadas, 1026-1028
- Distorsión, 1034
- Distribución de Fermi-Dirac, 738
- Distribución de Maxwell-Boltzmann, 738, 967
- Dominio magnético, 886-887, *foto*, 878
- Drude, P., 735
- Ecuación de la transformación relativista, 1108-1109
- Ecuación de las lentes delgadas, 1026, 1044-1045
- Perihelio, 1134
- Ecuación de onda
 para ondas en una cuerda, 947-948
- para ondas electromagnéticas, 947-953
- Ecuación del constructor de lentes, 1026, 1029
- Ecuación del espejo, 1016-1017
- Ecuación fotoeléctrica de Einstein, 1150
- Ecuaciones de Maxwell, 943, 947, 965, 975, 1103
- Edison, Thomas, 898, 923
- Efecto Compton, 1154-1155
- Efecto Doppler, 1106
- relativístico, 1118-1119, 1121
- Efecto fotoeléctrico, 975, 1148-1152
- ecuación de Einstein, 1150, 1152
- experimentos de Millikan, 1150
- frecuencia umbral, 1150
- función trabajo, 1150-1152
- longitud de onda umbral, 1150-1152
- potencial de detención, 1149, 1152
- Efecto Hall, 801-804, 825
- cuántico, 803-804
- fraccional, 804
- Einstein, Albert, 975, 1100, 1106, 1129, 1157
- cuantización de la energía, 1146, 1148-1149
- efecto fotoeléctrico, 1148-1152
- foto*, 1100
- relatividad especial, 1100-1101, 1106, 1145
- relatividad general, 1100-1101, 1132-1135, 1145
- sucesos simultáneos en un tren, 1114-1116
- El ojo, 1041-1046
- acomodación, 1042
- astigmatismo, 1042
- distancia focal, 1042, 1043
- conos y bastones, 1041, 1085, *foto*, 1044
- foto*, 1044
- gafas de lectura, 1044-1045
- hipermetropía, 1042, 1044
- luz visible, 975
- miope, 1042
- partes del, 1041
- punto próximo, 1042-1044
- resolución del, 1085
- Electrólisis, 717
- Electromigración, *foto*, 735
- Electrón-voltio (eV), unidad de energía, 659-660, 1129

- Electrón
 difracción, 1162-1163
 libre, en conductores, 601-602, 644, 717-719
 longitud de ondas, 1162
 microscopio, 1084, 1164
 momento magnético, 878, 883
 movimiento en campos eléctricos, 614-615
 Electroscopio, 609
 Electrostática y xerografía, 682-684
 Elemento de corriente, 780
 Emisión de campo, 645
 Emisión termoiónica, 923
 Energía cinética (E_c)
 relatividad y, 1126-1132
 Energía de enlace, 1130-1131
 Energía del campo electrostático, 701
 Energía en reposo, 1127-1132
tabla, 1130
 Energía magnética, 862-864
 almacenada en un inductor, 863
 densidad, 863-864, 953
 Energía potencial (U)
 electrostática, 658, 664-665, 698-702, 707-708
 Energía
 en circuitos eléctricos, 725-731, 909-910
 en condensador, 698-702
 conservación de la, 730, 846-847, 1129, 1158
 cuantización de la, 1146, 1148-1149, 1164-1165
 relativista, 1126-1132
 térmica, 884-885
 Equilibrio electrostático, 644-645
 Erupción solar, *foto*, 790
 Espectro característico, 1153
 Espectro electromagnético, 957-962
 Espectro de hidrógeno, 1156
 serie de Balmer, 1119, 1156, 1160
 serie de Lyman, 1157, 1160
 serie de Paschen, 1157, 1160
 Espectro de líneas, *fotos*, 1145
 Espectro de rayos X
 espectro bremsstrahlung, 1153
 espectro característico, 1153
 longitud de onda de corte, 1153-1154
 Espectrómetro de masa, 788, 794-795, *foto*, 794
 Espectroscopio, 1086-1088, 1156, *fotos*, 1086
 Espejismo, 990, *foto*, 990
 Espejo de Lloyd, 1062, 1070
 Espejo parabólico, 1034
 Espejos esféricos, 1015-1021
 aberración esférica, 1016
 cóncavo, 1015-1017
 convexo, 1017, 1020-1021
 ecuación del espejo, 1016-1017
 imagen real, 1015-1016, 1019-1020
 longitud focal de los, 1017
 rayos no-paraxiales, 1016
 rayos paraxiales, 1016
 Espejos planos, 1012-1015, 1020
 imagen puntual, 1012-1017
 imagen virtual, 1012, 1015-1016, 1019-1022
 imágenes múltiples, 1014-1015
 inversión en profundidad, 1013, 1015
 Espejos
 amplificación lateral, 1018-1020
 convenio de signos para la reflexión, 1019-1020
 diagrama de rayos para, 1018-1020
 parabólico, 1034
 rayo principal para, 1018
 Estados estacionarios, 1158
 Estereorradian, unidad de un ángulo sólido, 649
 Éter, 1103
 Everitt, C.W.F., 964-967
 Experimento de Cavendish, 603
 Experimento de la gota líquida, 966
 Experimento de Michelson-Morley, 1103-1106, 1107, 1112
 Experimento de Oersted, *foto*, 815
 Explosión de una supernova, 980
 Exposición mundial de Chicago, 898
 Faraday, Michael, 691, 843
 descubrimiento del diamagnetismo, 890
 dieléctricos en condensadores, 694
 fem inducida, 782, 840, 843
 influencia sobre Maxwell, 964
 Faradio (F), unidad de capacidad, 691
 Fasores, 907-908
 diagrama para circuitos LCR, 913, 918-919
 diagrama para circuitos RC, 919
 suma de ondas armónicas, 1071-1075, 1078-1080
 Fem de movimiento, 848-852
 definición, 849
 ley de Faraday y, 850
 Fem
 autoinducida, 848
 y baterías, 726-731
 definición, 843
 eficaz (ϵ), 901, 903, 905
 fuerza contraelectromotriz, 848
 inducida, 840, 843-845, 848
 unidad de la, 726
 voltaje Hall, 802-803
 Fernet, Pierre de, 995
 Fermi, Enrico, 1157
 Fermi, unidad de longitud, 1157
 Ferromagnetismo, 879, 881, 886-889, 892
 campo remanente, 888-889
 definición, 886
 histéresis, 888
 material magnéticamente blando, 888
 material magnéticamente duro, 889
 temperatura de Curie, 887
 Fibras ópticas, 975, 988-989, *fotos*, 989
 Filtro pasa hoja, 918, 925
 FitzGerald, George Francis, 1112
 Fitzau, A.H.L., 978-979
 Fleming, John, 923
 Flujo eléctrico
 definición, 632-633
 ley de Gauss y, 634
 neto, a través de una superficie
 cerrada, 633-634
 unidades de, 634
 Flujo magnético
 definición, 841-842
 ley de Faraday y, 843-845
 ley de Lenz y, 846-848
 weber, unidad de, 841
 Focos coherentes, 1062
 Fonocaptor magnético de una guitarra eléctrica, *foto*, 840
 Forbes, James David, 964
 Fórmula de Balmer, 1156
 Fórmula de Rydberg-Ritz, 1156-1159
 Fotoconductividad, 683-684
 Fotomultiplicador, *fotos*, 1151
 Fotón, 975, 1128, 1150
 efecto Compton o scattering, 1154-1155
 energía del, 1149, 1151-1152
 velocidad de la luz, 1123
 Foucault, Jean, 975, 978
 Franjas, 1064-1071, 1081
 Franklin, Benjamin, 599, 690
 Frecuencia (f)
 del ciclotrón, 788, 797
 circuito LC, 909-910
 en la relación Einstein, 975, 1148
 de resonancia, 914-918
 Frecuencia natural, 914
 Frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico, 1150
 Freno magnético, 853-854
 Frente de ondas, 983, 986
 Fresnel, Augustin, 975, 981, 1082
 Friedrich, W., 1153
 Fuerza conservativa
 fuerza eléctrica, 656
 Fuerza contraelectromotriz, 848, 855-856, 902-903
 Fuerza eléctrica, 604-607, 617, 656
 campo eléctrico y, 608
 conservativa, 656
 superposición de, 606
 Fuerza magnética
 sobre una carga móvil, 783, 813-815
 sobre un elemento de corriente, 786
 sobre un segmento de alambre portador de corriente, 785-787
 Fuerza
 acción a distancia, 607
 debida a un campo magnético, 782-787, 813-815
 electromotriz, 843
 Función de distribución espectral, 1147
 Función trabajo, 1150, 1152
 Fusión, 830
 Fusión, nuclear, 791
 Galileo, Galilei, 976, 1102
 Galvani, Luigi, 740
 Galvanómetro, 767-768, 840
 Gauss (G), unidad del campo magnético, 784
 Geiger, H. W., 1157
 Generador, 841, 854-855, 868, 890, 901, 904
fotos, 855, 856
 Generador de Van de Graaff, 677, 679, *foto*, 641, 677
 Germer, L., 975, 1162
 Gilbert, William, 781

- Giróscopo, foto, 1134
 Gradiente, 671
 Greenler, Robert, 1004-1007
 Halo del sol, foto, 994
 Heisenberg, Werner, 1100
 Henrio (H), unidad de inductancia, 857
 Henry, Joseph, 782, 840, 843, 848
 Hertz, Heinrich, 944, 975, 1140
 Hipermetropía, 1042, 1044
 Histéresis, 888, 920
 curva, 888
 Hologramas, 976, 1088, fotos, 1088-1089
 Hooke, Robert, 974
 Hoover Dam, foto, 856
 Hopkins, William, 964
 Huygens, Christian, 974
 Imagen de radar, foto, 952
 Imagen puntual, 1012-1017
 Imagen real, 1015-1016, 1019-1020, 1022
 Imagen virtual, 1012, 1015-1016, 1019-1022, 1030-1031
 Imagen
 por reflexión, 983
 por refracción, 1022-1025
 Imán sextupolar, foto, 821
 Imán superconductor, foto, 821
 Imantación (M), 879-881, 886, 888-889
 Imantación de saturación, 883-884
 Impedancia, 912-919
 igualación de, 729
 Índice de refracción, 982-983, 985-987, 1034
 dispersión, 991
 medición con interferómetro, 1067
 tabla, 991
 Inducción electrostática, 602
 Inducción magnética, 840-870
 circuitos LR, 859-862
 corrientes turbiliosarias o de Foucault, 852-854
 energía magnética, 862-864
 fem de movimiento, 848-852
 flujo magnético, 841-842
 inductancia, 857-859
 ley de Faraday, 841, 843-845, 850, 853, 858
 ley de Lenz, 846-848
 motores y generadores, 854-856
 Inductancia
 autoinducción, 857-858
 mutua, 858-859
 en un transformador, 920
 unidad SI del henrio, 857
 Inductor, 859-862
 caída de tensión en función de la corriente, 903, 907
 en corriente alterna, 902-904
 energía almacenada en un, 863
 foto, 859
 potencia mediante un generador, 904
 reactancia inductiva, 904
 Instrumentos ópticos, 1041-1056
 cámara fotográfica, 1047-1050
 microscopio compuesto, 1050-1051
 microscopio simple, 1046-1047
 potencia de resolución, 1084
 telescopio, 1052-1056
 Integrador de corriente, 845
 Intensidad de polo magnético, 799-800
 Intensidad
 amplitud e, 1173
 difracción, 1077-1080
 de luz reflejada, 982
 de ondas electromagnéticas, 953-956, 1062
 Interferencia
 anillos de Newton, 1064
 condiciones para la, 1063-1064
 constructiva, 1062-1063, 1073
 destruictiva, 1062-1063, 1073
 diferencia de fase y coherencia, 1061-1063
 y difracción de dos rendijas, 1080-1081
 franjas, 1064-1067
 intensidad de onda, 1062
 láminas ópticamente planas, 1065
 máximo principal, 1074-1076
 máximo secundario, 1074-1076
 de ondas electromagnéticas, 975, 1061-1076, 1080-1081
 en películas delgadas, 1063-1066
 trayectos de dos rendijas, 1068-1071
 de tres o más focos, 1073-1076
 Interferómetro de Michelson, 1062, 1066-1067, 1104
 Inversa del cuadrado de la distancia, 604
 Inversión en profundidad, 1013, 1015
 Io, eclipse de, 977
 Ion, 601
 Ionización, 1160
 Isótopos, medición de masas, 794
 Kelvin, Lord, 964-966
 Kirchhoff, Gustav Robert, 975, 981
 Knipping, P., 1153
 Kohlrausch, G., 966
 Lámina de cuarto de onda, 1002
 Láminas de media onda, 1002-1003
 Land, E.H., 997
 Láser, 976, 1062, 1088, fotos, 976-977
 Laué, M., 1153
 Lawrence, E.O., 795
 Lenard, P.E., 1149
 Lente gravitatoria, foto, 1101
 Lente objetivo, 1050-1052, 1054
 Lentes de Fresnel, foto, 1033
 Lentes delgadas, 1025-1034
 ecuación, 1026, 1044-1045
 ecuación del constructor de lentes, 1026-1029
 distancia focal, 1026-1028, 1028
 distancia imagen, 1030-1031
 lentes múltiples, 1031-1034
 objeto virtual, 1025, 1032
 plano focal, 1028
 primer punto focal, 1028
 segundo punto focal, 1028
 Lentes
 convergente, 1027, 1029, 1044, 1046
 cristalina, 1041-1045, 1085
 diagrama de rayo para, 1029-1031
 divergente, 1027, 1029
 negativa, 1027
 negativa, rayos principales para, 1029
 positiva, 1027
 positiva, rayos principales para, 1029
 potencia de las, dioptría, 1033
 Levitación, foto, 597, 781
 Ley de Ampère, 811, 812, 828-832
 conductor largo y rectilíneo, 828-829
 forma generalizada, 945, 947
 inconsistencia en, 943-945
 limitaciones de, 831
 simetría, 828
 solenoides estrechamente arrollado, 830-831
 toroide estrechamente arrollado, 829-830
 Ley de Biot y Savart, 815, 831-832
 Ley de Brewster, 1001
 Ley de Coulomb, 603-607, 625-631, 634, 673, 947
 Ley de Curie, 886
 Ley de desplazamiento de Wien, 1147
 Ley de Faraday, 841, 843-845, 858, 945
 corrientes turbiliosarias, 853
 ecuación de onda y, 948-950
 ecuaciones de Maxwell y, 947
 fem de movimiento, 850
 generador, 854
 Ley de Gauss, 631-635, 828, 945, 947
 cálculo del campo eléctrico mediante, 635-644
 deducción matemática, 649
 enunciado cualitativo de la, 632
 ley de Coulomb y, 635
 Ley de la reflexión, 982, 995, 1013
 Ley de la refracción, 986
 Ley de Lenz, 846-848, 853, 861, 890
 Ley de Malus, 998
 Ley de Newton de la gravedad, 604
 Ley de Ohm, 720-723, 735, 737
 Ley de Rayleigh-Jeans, 1147-1148
 Ley de Snell, 986, 993, 995-996, 1000, 1022-1023
 Ley de Stefan-Boltzmann, 1147
 Línea espectral, 1087
 Líneas de campo magnético, 786, 818-819
 Líneas de fuerza
 eléctrica, 612-614, 658, 671
 gravitatoria, 614
 Lista de tablas, AP-24
 Livingston, M.S., 795
 Longitud de onda de Compton, 1155
 Longitud de onda de De Broglie, 1161-1162, 1164
 Longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico, 1150, 1152
 Longitud de onda
 de De Broglie, 1161-1162, 1164
 de Compton, 1155
 de corte, para un espectro de rayos X, 1153-1154
 de un electrón, 1162
 umbral, para el efecto fotoeléctrico, 1150, 1152
 Longitud propia, 1111-1112
 Lorentz, Hendrik A., 735, 1112
 Luna, medición de la distancia de, 1015

- Luz, 974-1089
 difracción, 974-975, 1076-1089
 espectro electromagnético, 958
 interferencia, 975, 1061-1076, 1080-1081
 onda en función de la partícula, 974-975
 polarización, 997-1003
 polarización por dispersión o «scattering», 1000
 principio de Huygens, 981
 propagación de la, 982-984
 velocidad de la, 944, 950, 975-980, 1102-1103
- Luz visible, 957
- Lyman, T., 1160
- Magnetismo, modelo teórico del, 782, 879
- Magnetita, 781, *foto*, 886
- Magneton de Bohr, 883, 885, 892
- Magnetron, *foto*, 962
- Malus, E.L., 998
- Maricourt, Pierre de, 781
- Marsden, E., 1157
- Masa (m)
 energía y, 1129
 gravitatoria y masa inercial, 1132
 relativística, 1125
- Masa en reposo, 1125, 1129, 1131
- Masas atómicas, AP-28
- Matemáticas, revisión de, AP-1-20
- Materiales anisotrópicos, 1001
- Materiales isotrópicos, 1001
- Materiales magnéticamente duros, 889
- Materiales no óhmicos, 721
- Materiales óhmicos, 721
- Maxwell, James Clerk, 782, 831, 943, 964-967
 su esposa como co-experimentadora, 966
 retrato, 967
 teorema de la equipartición, 966-967
Treatise on Electricity and Magnetism, 966
- Maxwell, Katherine Mary, 966-967
- Megaelectrón-voltios (MeV), unidad de energía, 1129
- Metro (m), definición, 979
- Michell, John, 781
- Michelson, Albert, 978, 1067, 1103-1105
- Michelson, interferómetro, 1062, 1066-1067, 1104
- Micrófono, *foto*, 770
- Microondas, 957-958, 962
 horno, 617
- Microprocesador, *foto*, 906
- Microscopio compuesto, 1050-1051, 1084
 amplificación angular, 1050
 amplificación lateral, 1050
 objetivo, 1050
 ocular, 1050
 longitud del tubo, 1050
- Microscopio electrónico, 1084, 1164
- Microscopio simple, 1046-1047
- Microscopio
 de campo próximo, *foto*, 1051
 electrónico, 1084, 1164
 ultravioleta, 1084
- Millikan, Robert A., 966, 1100, 1150
- Minuto luz (c-min), unidad de distancia, 980
- Miopia, 1042
- Modelo de Bohr, 1156-1160
- Molécula de agua, *modelo*, 617
- Moléculas no polares, 616
- Moléculas polares, 616-617
- Momento angular
 cuantizado, 1159, 1164
 momento magnético y, 882
 orbital, 882
 spin, 882-883
- Momento dipolar
 eléctrico, 611-616-617
 inducido, 616
 magnético, 799
 unidad para, 617
- Momento magnético
 de un átomo, 878, 882-884
 definición, 799
 del electrón, 883
 de una espira de corriente, 799, 818
 del imán, 799-801
 inducido, 846, 891-892
 momento angular y, 882
 unidad SI del, 799
- Momentos magnéticos atómicos
 y momento angular, 882
 spin electrónico, 882
 periodo del movimiento, 882
- Muón, 1112-1113
- Morley, Edward M., 1067, 1103, 1105
- Motores, eléctricos, 855-856, 929-936
 armadura, 931, 933-934
 ca y cc, 935
 característica de funcionamiento, 930, 934, 936
 conmutador de escobillas, 931
 ecuación de la velocidad en función de la carga, 930, 934
 máquina lineal, 929-930, 935
 motor de inducción, 935
 motor rotativo, 930-931
 motor universal, 935
 polo conformado, 935-936
- Multímetro, 767, *foto*, 767
- Músculos ciliares, 1041-1042
foto, 1044
- Neutrino, 1128
- Newton, Isaac, 1102
 teoría corpuscular de la luz, 974-975
- Nickles, Elizabeth Pflieg, 740-743
- Niveles energéticos, 1159-1160
- Núcleo, 1157
- Número atómico (Z), 599, AP-28
- Número de orden, 1086
- Ocular, 1047, 1050, 1052
- Oersted, Hans Christian, 782, 811, 826
- Ohm (Ω), unidad de resistencia, 720, 804
- Ohm, George Simon, 722
- Ohmímetro, 767, 769-770
- Onda plana, 948
- Ondas armónicas
 utilizando fasores, suma de, 1071-1075, 1078-1080
- Ondas de electrones, 1161-1165
- Ondas de radio, 957, 959
- Ondas electromagnéticas
 cantidad de movimiento, 954-957
 densidad de energía de, 953-954
 dirección de propagación, 951
 ecuación de onda para, 947-953
 intensidad de, 953-956
 polarizadas circularmente, 952
 polarizada linealmente, 951
 presión de radiación, 955-956
 velocidad de, 944, 950
- Ondas elementales de Huygens, 984
- Ondas estacionarias
 para el átomo de hidrógeno, 1165
 cuantización de la energía y, 1164-1165
- Ondas ultrasónicas, *foto*, 982
- Ondas
 difracción, 1076-1089
 electromagnéticas, 944, 947-957
 ecuación de, 947-953
 de electrones, 1161-1165
 interferencia de, 975, 1061-1076, 1080-1081
 planas, 948
 reflexión, 982-984, 987-989, 1013, 1019-1020
 refracción, 982-987, 991-996, 1022-1025
 reversibilidad, 1018
- Onnes, H. Kamerlingh, 724
- Oppenheimer, J. Robert, 1135
- Óptica geométrica, 1012-1035
 aberración, 1034-1035
 espejos esféricos, 1015-1021
 espejos planos, 1012-1015
 imágenes formadas por reflexión, 983
 imágenes formadas por refracción, 1022-1025
 lentes delgadas, 1025-1034
- Óptica
 física, 974-975, 1076-1089
 geométrica, 1012-1035
- Órbita de Bohr, 1164
- Oscilaciones forzadas
 en circuitos LCR, 912-919
- Oscilaciones
 en circuitos LC, 908-910
 en circuitos LCR, 910-919
- Oscilador armónico amortiguado en un circuito LCR, 910-911
- Osciloscopio, 614
- Par, 798
- Paradoja de los gemelos, 1119-1121
- Paramagnetismo, 879, 881, 884-886, 887, 892
 definición, 884
 dependencia de la temperatura, 884-886
 ley de Curie, 886
- Pararrayos, 679, *foto*, 603
- Pares de fuerzas
 sobre un dipolo eléctrico, 616-617
 sobre espiras de corriente, 798-799
 sobre imanes, 799-800
- Película antirreflejante, *foto*, 1066
- Películas delgadas, interferencia en, 1063-1066
- Perihelio, 1134

- Período (T)
de un ciclotrón, 788, 796
para un movimiento circular, 788, 882
- Período del ciclotrón, 788, 796
- Permeabilidad del espacio libre, 812, 827, 944, 1103
- Permeabilidad, magnética, 888
- Permeabilidad relativa, magnética, 888-889
tabla, 889
- Permitividad de un dieléctrico, 695
- Permitividad del espacio libre, 634-635, 692, 944, 979, 1103
- Pfund, H.A., 1160
- Piedra imán, *foto*, 886
- Pistola de corriente, *foto*, 825
- Planck, Max, 1100, 1146, 1148-1149, 1157, *foto*, 1147
- Plano focal para lentes delgadas, 1028
- Plasma, 791
- Poisson, S.D., 1082
- Polarización de la luz, 997-1003
por absorción, 997-999
análizador, 998
por birrefringencia, 1001-1003
circular, 997
ejes de transmisión, 997
lineal, 997
polarizador, 998
por reflexión, 1000-1001
por scattering o dispersión, 1000
- Polarización del dieléctrico, 694, 697
- Polarizadores cruzados, 999, 1000
- Polaroid, 997
- Polos magnéticos, 781-782, 786
- Postulados de Bohr, 1158-1159
- Postulados de la relatividad especial de Einstein, 1106-1110, 1123-1124
- Potencia
del circuito LCR, 914-915
disipada en una resistencia, 900
de las lentes, 1033
media, cedida por un generador, 901
pérdida de, en un circuito
Potencial de detención, 1149
- Potencial eléctrico, 656-689, 698-702, 707-708, 721, 725, 726, 731, 733
campo eléctrico y, 671-673
cero a una distancia infinita, 660-661
continuidad de V , 667-669
de una corteza esférica de carga, 669-670
debido a un sistema de cargas puntuales, 660-664
diferencia de potencial y, 657-660
para distribuciones continuas de carga, 665-671
próximo a una carga lineal infinita, 670-671
próximo a un plano infinito de carga, 667-669
sobre el eje de un anillo cargado, 665-666
sobre el eje de un disco uniformemente cargado, 666-667
- Potencial gravitatorio, 1134
- Poynting, John, 954
- Premio Nobel, 724, 804, 1149, 1152
- Presión de radiación, 955-956, *foto*, 956
- Primera ley de Newton del movimiento, ley de la inercia, 1101
- Principio de equivalencia, 1132-1133
- Principio de Fermat, 995-996
ley de la reflexión, 995
ley de la refracción, 995-996
- Principio de Huygens, 981, 983-984, 986, 995, 1061
- Principio de Huygens-Fresnel, 981
- Prisma, 988
- Prismáticos, 988
- Producción de pares, 598
- Profundidad aparente, 1024, *foto*, 1025
- Punto del campo, 609
- Punto focal para espejos esféricos, 1017
- Punto próximo, 1042, 1044
- Pupila del ojo, 1041-1043
- Q, factor
para un circuito LCR, 915-917
- Radiación del cuerpo negro, 1147-1148
- Radiación del sincrotrón, *foto*, 962
- Radiación dipolar eléctrica, 960
- Radio, *foto*, 916
- Radio de Bohr, 1159
- Radio de Schwarzschild, 1135
- Radio telescopio, *foto*, 943, 959
- Radiactividad, 1100
- Radiotelescopio «Very Large Array» (VLA), *foto*, 1087
- Rayo cósmico, *foto*, 1126
- Rayo extraordinario, 1001-1002
- Rayo ordinario, 1001-1002
- Rayos gama, 957
- Rayos infrarrojos, 958
- Rayos no-paraxiales, 1016
- Rayos paraxiales, 1016
- Rayos ultravioleta, 957
- Rayos X, 957-958, 1152-1154
difracción, 1153
efecto Compton, 1154-1155
- Reactancia capacitiva, 905-906, 914, 918-919
- Reactancia inductiva, 904, 914, 918-920
- Reactancia total, 912-913
- Receptores de radio, 916
- Rectificación, 923-925
convertidores ca-cc, 923
media onda, 924
onda completa, 924
rizado, 924
- Recubrimiento de películas delgadas, *fotos*, 1066
- Red, 601
- Redes de difracción, 1085-1089
espectroscopio, 1086-1088
hologramas, 1088
número de orden, 1086
poder de resolución, 1087-1088
- Reflexión difusa, 983, *foto*, 983
- Reflexión total interna, 987-989
fibra óptica, 988-989
fotos, 987, 988, 989
- Reflexión
ángulo de incidencia, 982
- especular, 983, *foto*, 982, 985, 1012, 1013, 1015, 1017, 1020, 1021
- intensidad reflejada, 982
- ley de la, 982-983
de la luz, 982-984
plano de incidencia, 982
principio de Fermat, 995
principio de Huygens, 983-984
telescopio reflector, 1054-1055
- Refracción
ángulo de, 985-987
ángulo de incidencia, 985
arco iris, 992-994, 1004-1007
definición, 985
dispersión, 991
doble, 1001-1003
espejismo, 990
foto, 985, 1012
imágenes formadas por, 1022-1025
índice de, 982-983, 985-987, 991
ley de Snell, 986
principio de Fermat, 995-996
profundidad aparente del objeto, 1024
rayo refractado, 985
telescopio refractor, 1054
- Regla de la mano derecha, 783, 823
- Regla de las mallas, 750-751, 754-757, 760, 762, 764, 860-861, 899, 903, 908-913, 920
- Regla de los nudos, 750, 753-755, 758
- Reglas de Kirchhoff, 750-759
análisis de los circuitos por simetría, 758-759
circuitos de múltiples mallas, 753-758
regla de los mallas, 750-751, 754-757, 760, 762, 764, 860-861, 899, 903, 908-913, 920
regla de los nudos, 750, 753-755, 758
- Rejilla, 925-926
- Relación de Einstein, 975, 1148
- Relámpago, *foto*, 678
- Relatividad, 1100-1135
cantidad de movimiento relativista, 1124-1125, 1127-1128, 1131-1132
efecto doppler para la luz, 1118-1119, 1124
energía relativista, 1126-1132
experimento de Michelson-Morley, 1103-1107, 1112
newtoniana, 1101-1102, 1106
paradoja de los gemelos, 1119-1121
postulados de Einstein, 1106-1110
sincronización de relojes y simultaneidad, 1113-1118
teoría general, 1100-1101, 1132-1035
teoría especial, 1100-1101, 1106, 1121
transformación de Lorentz, 1107-1113, 1116
transformación de la velocidad, 1122-1124
- Relatividad general, 1100-1101, 1132-1135
agujero negro, 1135

- desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio, 1133-1134
- frecuencias de la luz en un campo gravitatorio, 1134-1135
- perihelio de la órbita de Mercurio, 1134
- Reparto de carga, 676
- Resistencia (*R*)
- eléctrica, definición, 720
 - equivalente para resistencias en paralelo, 732-734, 769
 - equivalente para resistencias en serie, 731
 - unidad SI, ohmio, 720, 804
- Resistencia de carga, 729, 920
- Resistencia dieléctrica, 677-679, 696-697
- Resistencia interna de la batería, 728-729
- Resistencia shunt, 768
- Resistencias, 723
- código de color, *foto*, 723
 - corriente alterna en una, 899-902
 - sobre un panel de circuito, *foto*, 723
 - en paralelo, 732-734
 - en serie, 731
- Resistividad, 721-723, 735-738
- coeficientes de temperatura, *tabla*, 722
- Resolución
- criterio de Rayleigh, 1084, 1087
 - difracción y, 1083-1085
 - del ojo, 1085
- Resonancia
- anchura de, 915, 917
 - un circuito LCR, 914-918, 919
 - frecuencia de, 914-918
- Retina, 1041-1043, 1085
- Retraso de fase, 985
- Reversibilidad de ondas, 1018
- Ritz, Walter, 1056
- Rizado, 925
- Römer, Ole, 977-978
- Röntgen, W., 1152
- Ruptura del dieléctrico, 677-679, 697, 848
- Rutherford, Ernest, 975, 1100, 1157
- Rydberg, Johannes R., 1056
- Savart, Felix, 811, 823
- Schrieffer, Robert, 724
- Schrödinger, Erwin, 975, 1100, 1165
- Segunda ley del movimiento de Newton, 1158
- Selector de velocidad, 791, 795
- Semiconductor, 923
- Separación de carga, 676, 801
- Serie de Balmer, 1119, 1156, 1160
- Serie de Lyman, 1157, 1160
- Serie de Paschen, 1157, 1160
- Signos convencionales
- para la reflexión, 1019-1020
 - para la refracción, 1023
- Silicio, *foto*, 1098
- Símbolos matemáticos, *tabla*, AP-1
- Simultaneidad, 1113-1118
- Sincronización de relojes, 1113-1118
- Sistema de referencia inercial, 1102
- Snell, Willebrord, 986
- Snyder, 1135
- Solenoide
- autoinducción, 857
 - campo magnético de un, 819-821, 830-831
 - en energía almacenada, 863
 - flujo magnético a través de un, 842
 - foto*, 859
 - en un timbre de puerta, 820
- Spin electrónico, 782, 878, 882-883
- Stokes, G.G., 964-965
- Superconductividad
- diamagnetismo y, 890-891
 - mecánica cuántica y, 724
 - superconductores de altas temperaturas, 724
 - temperatura crítica, 724
 - teoría BCS de la, 724
- Superconductor, *foto*, 597, 724, 891
- Superficie equipotencial, 671, 674, 679
- Superficie gaussiana, 635, 645-646
- Superposición
- del campo eléctrico, 608-662
 - de fuerzas eléctricas, 606
- Susceptibilidad magnética, 881
- materiales diamagnéticos, 890
 - materiales ferromagnéticos, 886
 - materiales paramagnéticos, 884
 - tabla*, 881
- Tabla periódica, AP-28
- Telescopio, 1052-1056, *fotos*, 1053, 1054
- astronómico, 1052-1056, 1084
 - capacidad de recoger la luz, 1054
 - espacial Hubble, *foto*, 1056
 - Keck, *foto*, 1054
 - monte Palomar, 1055
 - objetivo de la lente, 1052, 1054
 - observatorio Yerkes, 1054
 - ocular, 1052
 - poder de resolución, 1084
 - reflector, 1054-1055
 - refractor, 1054
- Telescopio espacial Hubble, *foto*, 1056
- Temperatura crítica (T_c)
- superconductividad, 724
- Temperatura de Curie, 887
- Tensión en bornes, 727-729, 752
- Teorema de equipartición, 735, 966-967, 1149
- Teorema de Stokes, 964-965
- Teoría corpuscular de la luz, 974-975
- Teoría cuántica, 1100
- de la conducción eléctrica, 738
 - cuantización de la energía atómica, 1156-1160
 - efecto Compton, 1154-1155
 - efecto fotoeléctrico, 975, 1148-1152
 - emisión y absorción de la luz, 975
 - fechas de los experimentos y teorías, *tabla*, 1146
 - modelo de Bohr, 1156-1160
 - ondas de electrones, 1161-1165
 - radiación del cuerpo negro, 1147-1148
 - superconductividad, 724
- Teoría especial de la relatividad, 1100-1101, 1106, 1121, 1145
- Teoría ondulatoria de la luz, 974-975, 1068, 1082
- Tercera ley del movimiento de Newton
- fuerza magnética y, 813-815
- Tesla (T), unidad de campo magnético, 783-784
- Tesla, Nikola, 898
- Thompson, G.P., 975, 1163
- Thomson, J.J., 614, 792-793, 1157, *foto*, 792
- Thomson, William, 964-966
- Tiempo de colisión, 736-737
- Tiempo de la dilatación, 1109-1111, 1116
- Tiempo propio, 1109, 1111, 1113
- Tierra
- conductor eléctrico, 602, 732
 - imán natural, 781-782, 784
 - timbre de puerta, *foto*, 820
 - Tokamak, *foto*, 830
 - Toroide, 829-830, *foto*, 830
 - Trabajo, carga en un condensador, 698-701
- Transductores
- calibrador por deformación, *foto*, 771
 - células fotovoltaicas, *foto*, 771
 - células receptoras auditivas, *foto*, 770
 - corpúsculo de Meissner, *foto*, 771
 - cristales piezoeléctricos, *foto*, 771
 - micrófono, *foto*, 770
- Transformación de Galileo, 1107-1108
- Transformación de la velocidad, 1122-1124
- Transformación de Lorentz, 1107-1113, 1116, 1122
- contracción de longitudes, 1111-1113, 1115
 - dilatación del tiempo, 1109-1111, 1116
- Transformador, 852, 898, 920-923, *fotos*, 921
- bobinas primarias y secundarias, 920-922
 - corriente magnetizante, 920-921
 - elevador o de alta, 921-922
 - rectificador y, *foto*, 923
 - reductor o de baja, 921-922
 - uso en líneas de transmisión, 922-923
- Tren Maglev, *foto*, 781
- Triodo, 925-926
- Tubo de imágenes de un televisor, 614
- Tubo de rayos catódicos, 792, *foto*, 615
- Tubo triodo de vacío, *foto*, 925
- Tubos de vacío
- miniaturizado, *foto*, 926
 - triodo, *foto*, 925
- Unidad fundamental de carga (*e*), 599-600
- Unidades SI, AP-21
- Valores eficaces (*ef*)
- corrientes ef, 900-903, 905
 - fem ef, 901, 903, 905
- Vatio (W), unidad de potencia, 725
- Vector Poynting, 954
- Velocidad de desplazamiento, 717-718, 725, 735-736, 785, 802, 851
- Velocidad de onda, 1026

- Velocidad térmica, 717, 736
- Velocidad
- de escape, 1135
 - de la luz, 944, 950, 975-980, 1102-1103
 - media, 738
 - de ondas electromagnéticas, 944, 950, 1026
 - transformación de la, 1122-1124
- Vidrios de Franklin, 690
- Voltage de Hall, 802-803
- Voltaje, 657-658
- Voltímetro, 767-769, 900
- Voltio (V), unidad de potencial eléctrico, 658, 720, 725, 726, 843
- Volumen equipotencial, 674-675
- Von Klintzing, Klaus, 803-804
- Weber (Wb), unidad de flujo magnético, 841, 843
- Weber, Wilhelm, 965-966
- Westinghouse, George, 898
- Whewell, William, 964
- Xrografía, 682-684
- Young, Thomas
- experimento de interferencia de dos rendijas, 1068, 1163
 - teoría ondulatoria de la luz, 975, 1068
- Zallen, Richard, 682-684

Algunos factores de conversión

1 m	= 39,37 pulg = 3,281 pies = 1,904 yardas
1 m	= 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^9 nm
1 km	= 0,6215 millas (mi)
1 mi	= 5280 pies = 1,609 km
1 año luz	= 1 c · a = $9,461 \times 10^{15}$ m
1 pulgada	= 2,540 cm
1 L	= 10^3 cm ³ = 10^{-3} m ³ = 1,057 qt
1 h	= 3,6 ks
1 a	= 365,24 d = $3,156 \times 10^7$ s
1 km/h	= 0,278 m/s = 0,6215 mi/h
1 pie/s	= 0,3048 m/s = 0,6818 mi/h
1 rev	= 2π rad = 360°
1 rad	= $57,30^\circ$
1 rev/min	= 0,1047 rad/s
1 slug	= 14,59 kg
1 tonelada	= 10^3 kg = 1 Mg
1 atm	= 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/pulg ²
1 N	= 10^5 dinas = 0,2248 lb
1 lb	= 4,448 n
1 Pa·s	= 10 poise
1 J	= 10^7 erg = 0,7373 pie·lb = $9,869 \times 10^{-3}$ L·atm
1 kW·h	= 3,6 MJ
1 cal	= 4,184 J = $4,129 \times 10^{-2}$ L·atm
1 L·atm	= 101,3 J = 24,22 cal
1 eV	= $1,602 \times 10^{-19}$ J
1 Btu	= 778 pie·lb = 252 cal = 1054 J
1 caballo de vapor	= 550 pie·lb/s = 746 W
1 W/m·K	= 6,938 Btu·pulg/h·pie ² ·°F
1 T	= 10^4 G
1 kg	pesa aproximadamente 2,205 lb

Algunas constantes físicas			
Número de Avogadro	N_A		$6,022\ 137 \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann	k		$1,380\ 658 \times 10^{-23}$ J/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$		$9,274\ 015\ 4 \times 10^{-24}$ J/T
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$		$8,987\ 551\ 788 \times 10^9$ N·m ² /C ²
Long. de onda de Compton	$\lambda_C = h/2e$		$2,426\ 310\ 58 \times 10^{-12}$ m
Carga elemental	e		$1,602\ 177 \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases ideales	$R = N_A k$		$8,314\ 51$ J/mol·K = $1,987\ 22$ cal/mol·K $= 8,205\ 78 \times 10^{-2}$ L·atm/mol·K
Constante de gravitación	G		$6,672\ 6 \times 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
Masa del electrón	m_e		$9,109\ 390 \times 10^{-31}$ kg $= 510,999\ 1$ keV/c ²
Masa del protón	m_p		$1,672\ 623 \times 10^{-27}$ kg $= 938,272\ 3$ MeV/c ²
Masa del neutrón	m_n		$1,674\ 929 \times 10^{-27}$ kg $= 939,565\ 6$ MeV/c ²
Permeabilidad del espacio libre	μ_0		$4\pi \times 10^{-7}$ N/A ²
Constante de Planck	h		$6,626\ 076 \times 10^{-34}$ J·s $= 4,135\ 669 \times 10^{-15}$ eV·s
	\hbar		$1,054\ 573 \times 10^{-34}$ J·s $6,582\ 112 \times 10^{-16}$ eV·s
Velocidad de la luz	c		$2,997\ 924\ 58 \times 10^8$ m/s
Unidad de masa unificada	u		$1,660\ 540 \times 10^{-27}$ kg $= 931,494\ 32$ MeV/c ²

Símbolos matemáticos			
=	es igual a	Δx	incremento de x
\neq	es distinto a	$ x $	valor absoluto de x
\approx	es aprox. igual a	$n!$	$n(n-1)(n-2)\dots 1$
\sim	es del orden de	Σ	suma o sumatorio
\propto	es proporcional a	lim	límite
$>$	es mayor que	$\Delta t \rightarrow 0$	Δt tiende a 0
\geq	es mayor o igual que	$\frac{dx}{dt}$	derivada de x respecto a t
\gg	es mucho mayor que	$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x respecto a t
$<$	es menor que	\int	integral
\leq	es menor o igual que		
\ll	es mucho menor que		

Apéndice A

Revisión de Matemáticas

En este apéndice se revisarán algunos de los resultados básicos del álgebra, de la geometría, de la trigonometría y del cálculo diferencial e integral. En muchos casos, sólo se enunciarán los resultados sin demostrarlos. En la tabla A-1 se relacionan algunos símbolos matemáticos.

Ecuaciones

Para facilitar la resolución de las ecuaciones matemáticas, pueden realizarse las operaciones siguientes:

1. A cada miembro de la ecuación puede sumársele o restársele la misma cantidad.
2. Cada miembro de la ecuación puede multiplicarse o dividirse por la misma cantidad.
3. Ambos miembros de la ecuación pueden elevarse a la misma potencia.

Es importante darse cuenta de que las reglas precedentes se aplican a cada *miembro* de la ecuación y no a cada *término* de la misma.

Tabla A-1. Símbolos matemáticos

=	es igual a
≠	no es igual a
≈	es aproximadamente igual a
~	es del orden de
∝	es proporcional a
>	es mayor que
≥	es mayor o igual que
≫	es mucho mayor que
<	es menor que
≤	es menor o igual que
≪	es mucho menor que
Δx	variación o incremento de x
$ x $	valor absoluto de x
$n!$	$(n - 1)(n - 2) \dots 1$
Σ	suma
lim	límite
$\Delta t \rightarrow 0$	Δt tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x respecto a t
\int	integral

Ejemplo A-1

Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación:

$$(x - 3)^2 + 7 = 23$$

Primero restamos 7 de cada miembro de la ecuación para obtener $(x - 3)^2 = 16$. Extrayendo la raíz cuadrada de cada miembro, que es lo mismo que elevar cada miembro de la potencia $\frac{1}{2}$, se obtiene $\pm (x - 3) = \pm 4$. Hemos incluido el signo más-menos porque tanto $(+4)^2 = 16$ como $(-4)^2 = 16$. No es necesario escribir \pm en ambos miembros porque todas las posibilidades de signos se incluyen en $x - 3 = \pm 4$. Podemos ahora obtener x sumando 3 a cada miembro. Existen dos soluciones: $x = 4 + 3 = 7$ y $x = -4 + 3 = -1$. Pueden comprobarse estos valores sustituyéndolos en la ecuación original.

Ejemplo A-2

Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Este tipo de ecuación se presenta tanto en óptica geométrica como en los análisis de los circuitos eléctricos. Aunque es fácil de resolver, suelen cometerse errores. La resolveremos restando en primer lugar $\frac{1}{4}$ de cada miembro para obtener

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Luego se multiplica cada miembro por $12x$ para obtener $x = 12$. Obsérvese que esto último es equivalente a tomar el recíproco de cada miembro de la ecuación. Un error típico que se comete en este tipo de ecuación, es el de tomar el recíproco de cada término primeramente, obteniéndose así $x + 4 = 3$. Esta operación no es correcta; cambia los valores relativos de cada miembro de la ecuación y conduce a resultados incorrectos.

Proporción directa e inversa

Las relaciones existentes que afectan tanto a las proporciones directas como a las proporciones inversas son tan importantes en física que merecen una consideración especial. Es frecuente que puedan evitarse ciertas manipulaciones algebraicas sólo mediante el conocimiento de estas relaciones. Supóngase, por ejemplo, que después de trabajar durante 5 días con un jornal se ha ganado 40 000 ptas. ¿Cuánto se ganaría con el mismo jornal si se trabajase 8 días? En este problema el dinero ganado es *directamente proporcional* al tiempo trabajado. Puede escribirse una ecuación que relacione el dinero ganado M con el tiempo t trabajado utilizando una constante de proporcionalidad R :

$$M = Rt$$

En este caso la constante de proporcionalidad es el jornal diario. Puede expresarse R en pesetas por día. Como 40 000 ptas fue lo que se ganó en 5 días, el valor de R es 40 000 ptas/(5d) = 8000 ptas/día. Por tanto, en 8 días la cantidad que se ganaría sería

$$M = (8000 \text{ ptas/d}) (8 \text{ d}) = 64 \text{ 000 ptas}$$

Sin embargo, no es preciso hallar explícitamente el jornal para resolver el problema. Como la cantidad ganada en 8 días debe ser $\frac{8}{5}$ veces de la ganada en 5 días, esta cantidad es

$$M = \frac{8}{5} (40 \text{ 000 ptas}) = 64 \text{ 000 ptas}$$

Podemos utilizar un ejemplo semejante para ilustrar la proporción inversa. Si se consigue una subida del jornal del 25 por ciento, ¿cuánto tiempo será necesario trabajar para ganar 40 000 ptas? Consideremos ahora que R es una variable y deseamos obtener t :

$$t = \frac{M}{R}$$

En esta ecuación, el tiempo t es *inversamente proporcional* al jornal R . Así pues, si el nuevo jornal es $\frac{3}{4}$ veces el antiguo, sólo se necesitará trabajar un tiempo igual a $\frac{4}{3}$ veces del tiempo anterior, o sea 4 días.

Existen algunos casos en los que una magnitud varía como el cuadrado o alguna otra potencia de otra magnitud y entonces las ideas de proporcionalidad son también de gran utilidad. Supóngase, por ejemplo, que una pizza de 20 cm de diámetro cuesta 425 ptas. ¿Cuánto costará otra de 24 cm de diámetro? Es de suponer que el coste de una pizza sea proporcional aproximadamente a la cantidad de su contenido, que es proporcional al área de la misma. Como este área es a su vez proporcional al cuadrado del diámetro, el costo será proporcional al cuadrado del diámetro. Si aumentamos el diámetro en un factor de $24/20$, el área aumenta en un factor de $(24/20)^2 = 1,44$, de modo que el costo deberá ser de $(1,44)(425 \text{ ptas}) = 612 \text{ ptas}$.

Ejemplo A-3

La intensidad de la luz procedente de un foco puntual varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco. Si a 5 m de éste la intensidad es de $3,20 \text{ W/m}^2$, ¿cuál será a 6 m del mismo?

La ecuación que expresa el hecho de que la intensidad varía inversamente con el cuadrado de la distancia puede escribirse

$$I = \frac{C}{r^2}$$

en donde C es una cierta constante. Entonces, si $I_1 = 3,20 \text{ W/m}^2$ a $r_1 = 5 \text{ m}$ e I_2 es la intensidad desconocida a $r_2 = 6 \text{ m}$, se tendrá

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{C/r_2^2}{C/r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,694$$

La intensidad a 6 m del foco es, pues,

$$I_2 = 0,694(3,20 \text{ W/m}^2) = 2,22 \text{ W/m}^2$$

Ecuaciones lineales

Una ecuación en donde las variables aparecen elevadas sólo a la primera potencia se dice que es lineal. Una ecuación lineal que relacione x e y puede ponerse siempre en la forma estándar

$$y = mx + b \quad \text{A-1}$$

en donde m y b son constantes que pueden ser positivas o negativas. En la figura A-1 se ve un gráfico de los valores de x y y que satisfacen la ecuación A-1. La constante b , denominada **ordenada en el origen**, es el valor que toma y para $x=0$. La constante m es la **pendiente** de la línea, que es igual al cociente entre la variación de y y la variación correspondiente de x . En la figura se han indicado dos puntos en la recta, x_1, y_1 y x_2, y_2 y las variaciones $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. La pendiente m es entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

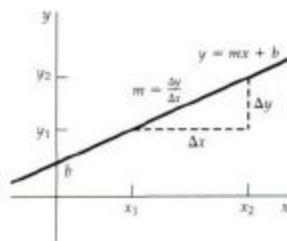


Figura A-1 Representación gráfica de la ecuación lineal $y = mx + b$, en donde b es la ordenada en el origen y $m = \Delta y/\Delta x$ es la pendiente.

Si se desconocen tanto x como y , no hay una solución única para sus valores. Cualquier par de valores x_1, y_1 de la línea de la figura A-1 satisfará la ecuación. Si tenemos dos ecuaciones, con las mismas incógnitas x y y , pueden resolverse mutuamente ambas para hallar simultáneamente las incógnitas.

Ejemplo A-4

Hallar los valores de x e y que satisfacen simultáneamente

$$y \quad 3x - 2y = 8 \quad \text{A-2}$$

$$y - x = 2 \quad \text{A-3}$$

La figura A-2 muestra ambas ecuaciones en un solo gráfico. En el punto en que se cortan ambas líneas, los valores de x e y satisfacen a la vez ambas ecuaciones. Podemos resolver dos ecuaciones simultáneas despejando primero en una de ellas una de las variables en función de la otra, y sustituyendo luego el resultado en la otra ecuación. A partir de la ecuación A-3, se tiene

$$y = x + 2$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuación A-2, obtenemos

$$3x - 2(x + 2) = 8$$

$$3x - 2x - 4 = 8$$

$$x = 12$$

Entonces

$$y = x + 2 = 14$$

Otro método alternativo, que a veces es más sencillo, consiste en multiplicar una de las ecuaciones por una constante tal que se elimine uno de los

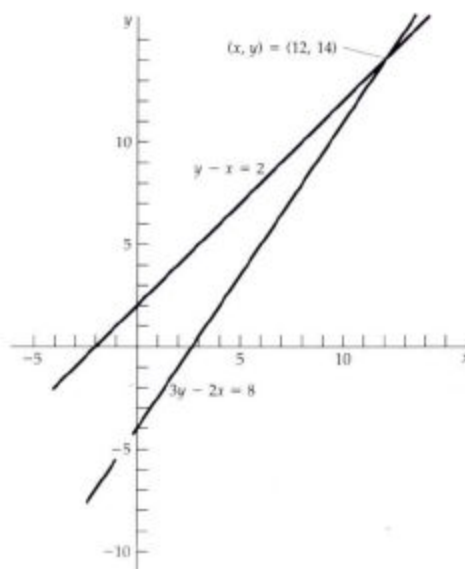


Figura A-2 Representación gráfica de las ecuaciones A-2 y A-3. En el punto de corte de ambas rectas, los valores de x e y satisfacen ambas ecuaciones.

términos incógnita cuando luego se sumen o resten las ecuaciones. Si multiplicamos la ecuación A-3 por 2, podemos sumar la ecuación resultante a A-2 y eliminar y :

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 2y - 2x &= 4 \end{aligned}$$

Sumando, se obtiene $3x - 2x = 12$, o sea $x = 12$, como antes.

Factorización

A menudo es posible simplificar las ecuaciones factorizando. Los tres ejemplos siguientes son importantes

1. Factor común: $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$
2. Cuadrado perfecto: $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
3. Diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

La ecuación de segundo grado

Una ecuación que contiene la incógnita elevada al cuadrado se denomina *ecuación de segundo grado*. La forma estándar de esta ecuación es

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{A-4}$$

siendo a , b y c , constantes. La solución general de esta ecuación es

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{A-5}$$

Cuando b^2 es mayor que $4ac$, existen dos soluciones correspondientes a los signos $+$ y $-$. En la figura A-3 se ve un gráfico de y en función de x en donde $y = ax^2 + bx + c$. La curva, llamada **parábola**, corta al eje x dos veces. Los valores de x para los que $y = 0$ son las soluciones de la ecuación A-4. Cuando $b^2 < 4ac$, la curva de y en función de x no corta al eje x , como se ve en la figura A-4, y no existen soluciones reales de la ecuación A-4. Cuando $b^2 = 4ac$, la curva de y en función de x es tangente al eje x en el punto $x = -b/2a$.

Exponentes

La notación x^n indica la cantidad que se obtiene al multiplicar x por sí mismo n veces. Por ejemplo, $x^2 = x \cdot x$ y $x^3 = x \cdot x \cdot x$. La cantidad n se denomina la **potencia**, o el **exponente**, de x . Cuando dos potencias de x se multiplican, los exponentes se suman:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \quad \text{A-6}$$

Esto puede comprobarse fácilmente con un ejemplo:

$$x^2 x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$$

Por definición, todo número elevado a la potencia 0 es la unidad:

$$x^0 = 1 \quad \text{A-7}$$

Entonces,

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{A-8}$$

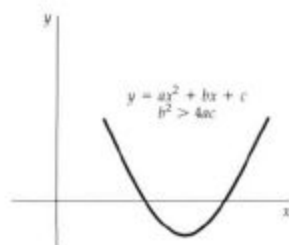


Figura A-3 Representación de y en función de x cuando $y = ax^2 + bx + c$ en el caso en que $b^2 > 4ac$. Los dos valores de x en los que $y = 0$ satisfacen la ecuación de segundo grado (ecuación A-4).

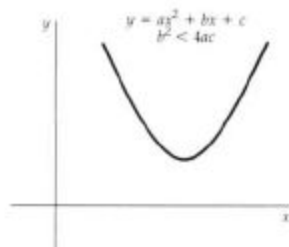


Figura A-4 Representación gráfica de y en función de x cuando $y = ax^2 + bx + c$ y se tiene que $b^2 < 4ac$. En este caso no existen valores (reales) de x para los que $y = 0$.

Cuando dos potencias se dividen, los exponentes se restan

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \quad \text{A-9}$$

Con estas reglas se tiene

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

de modo que

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican:

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad \text{A-10}$$

Logaritmos

Cuando y está relacionado con x mediante la expresión $y = a^x$, se dice que el número x es el logaritmo de y en base a y se escribe

$$x = \log_a y$$

Si $y_1 = a^n$ e $y_2 = a^m$, entonces

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

y

$$\log_a y_1 y_2 = n + m = \log_a y_2 + \log_a y_1 \quad \text{A-11}$$

Se deduce entonces que

$$\log_a y^n = n \log_a y \quad \text{A-12}$$

Como $a^1 = a$ y $a^0 = 1$,

$$\log_a a = 1 \quad \text{A-13}$$

y

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{A-14}$$

Existen dos bases de uso común: base 10, y entonces se llaman **logaritmos comunes** o **decimales** y base e ($e = 2,728\dots$), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos**. Cuando no se especifica la base, se sobreentiende que es 10. Así, $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$, puesto que $100 = 10^2$.

Para los logaritmos naturales se utiliza el símbolo \ln . Así

$$y = \ln x \quad \text{A-15}$$

implica

$$x = e^y \quad \text{A-16}$$

Los logaritmos pueden transformarse de una base a otra. Supongamos que

$$z = \log x \quad \text{A-17}$$

Entonces

$$10^z = x \quad \text{A-18}$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de la ecuación A-18, se obtiene

$$z \ln 10 = \ln x$$

o bien

$$\ln x = (\ln 10) \log x \quad \text{A-19}$$

La función exponencial

Cuando el ritmo de cambio de una cantidad es proporcional a la propia cantidad, ésta aumenta o disminuye exponencialmente. Un ejemplo del *decrecimiento exponencial* es la desintegración nuclear. Si el número de núcleos radiactivos en un cierto instante es N , entonces su variación dN en un determinado intervalo de tiempo dt muy pequeño será proporcional a N y a dt :

$$dN = -\lambda N dt$$

en donde la constante de proporcionalidad λ es la constante de desintegración. La función N que satisface esta ecuación es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{A-20}$$

en donde N_0 es el número en el instante $t=0$. La figura A-5 muestra N en función de t . Una característica del decrecimiento exponencial es que N disminuye en un factor constante en un intervalo de tiempo determinado. El intervalo de tiempo necesario para que N disminuya hasta su mitad se denomina su vida media $t_{1/2}$, que se relaciona con la constante de desintegración por

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad \text{A-21}$$

Un ejemplo de *crecimiento exponencial* es el aumento de población. Si el número de organismos vivos es N , la variación de N al cabo de un intervalo de tiempo pequeño dt viene dado por

$$dN = + \lambda N dt$$

en donde λ es una constante que caracteriza el ritmo de crecimiento. La función N satisfaciendo esta ecuación es

$$N = N_0 e^{\lambda t} \quad \text{A-22}$$

En la figura A-6 se muestra un gráfico de esta función. Un crecimiento exponencial se caracteriza por un tiempo de duplicación T_2 , que está relacionado con λ por

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad \text{A-23}$$

Si el ritmo de crecimiento λ se expresa como un porcentaje, $r = \lambda/100\%$, el tiempo de duplicación es

$$T_2 = \frac{69,3}{r} \quad \text{A-24}$$

Por ejemplo, si la población aumenta en un 2 por ciento cada año, la población se duplicará $69,3/2 = 35$ años. En la tabla A-2 se relacionan algunas propiedades útiles de las funciones exponenciales y logarítmicas.

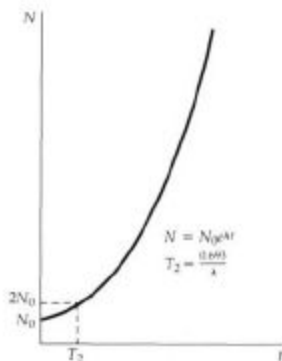


Figura A-6 Representación de N en función de t cuando N crece exponencialmente. El tiempo T_2 es el tiempo que emplea N en duplicarse.

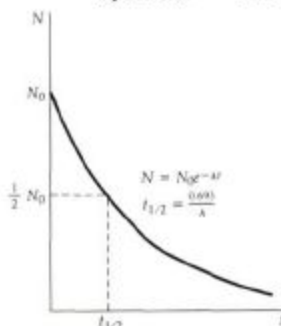


Figura A-5 Gráfico de N en función de t cuando N decrece exponencialmente. El tiempo $t_{1/2}$ es el tiempo que se tarda en que N disminuya a la mitad.

Tabla A-2 Funciones exponenciales y logarítmicas

$e = 2,71828$	$e^0 = 1$
Si $y = e^x$, entonces $x = \ln y$.	
$e^{a+b} = e^a e^b$	
$e^{a-b} = e^a / e^b$	
$(e^a)^b = e^{ab}$	
$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$
$\ln xy = \ln x + \ln y$	
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	
$\ln e^x = x$	$\ln a^x = x \ln a$
$\ln x = (\ln 10) \log x$	
	$= 2,3026 \log x$
$\log x = \log e \ln x = 0,43429 \ln x$	
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	



Área del paralelogramo
 $A = bh$

Figura A-7 Área del paralelogramo.



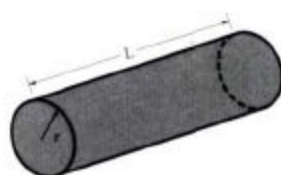
Área del triángulo
 $A = \frac{1}{2}bh$

Figura A-8 Área del triángulo.



Área de la superficie esférica
 $A = 4\pi r^2$
 Volumen de la esfera
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Figura A-9 Área de la superficie esférica y volumen de la esfera.



Área de la superficie cilíndrica
 $A = 2\pi rL$
 Volumen del cilindro
 $V = \pi r^2L$

Figura A-10 Área superficial (sin incluir las caras extremas) y volumen del cilindro.

Geometría

El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es un número irracional π que tiene el valor aproximado de

$$\pi = 3,141592$$

Así pues, la longitud de la circunferencia C está relacionada con el diámetro d y su radio r por

$$C = \pi d = 2\pi r \quad \text{longitud de la circunferencia} \quad \text{A-25}$$

El área del círculo es

$$A = \pi r^2 \quad \text{área del círculo} \quad \text{A-26}$$

El área de un paralelogramo es el producto de la longitud de su base b por la altura h (figura A-7), y la de un triángulo es la mitad de su base por la altura (figura A-8). Una esfera de radio r (figura A-9) tiene una superficie cuya área viene dada por

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{área de la superficie esférica} \quad \text{A-27}$$

y un volumen dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{volumen de una esfera} \quad \text{A-28}$$

Un cilindro de radio r y longitud L (figura A-10) tiene un área de su superficie lateral (sin incluir las caras extremas) de

$$A = 2\pi rL \quad \text{superficie lateral de un cilindro} \quad \text{A-29}$$

y un volumen de

$$V = \pi r^2L \quad \text{volumen del cilindro} \quad \text{A-30}$$

Trigonometría

El ángulo formado por dos rectas que se cortan se mide de la forma siguiente. Se dibuja una circunferencia con su centro en la intersección o vértice de ambas rectas, y se divide el arco de la circunferencia en 360 partes iguales llamadas **grados**. El número de grados abarcado por el arco comprendido entre las rectas o lados, es la medida del ángulo que forman ambas. Para ángulos muy pequeños, el grado se divide en minutos ($'$) y segundos ($''$) con $1' = 1^\circ/60$ y $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$. En el trabajo científico, una unidad más útil para los ángulos es el radián (rad), que se define como la longitud del arco circular comprendido entre los lados, dividida por el radio de la circunferencia (figura A-11). Si la longitud del arco es s y el radio de la circunferencia vale r , el ángulo θ medido en radianes es

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{A-31}$$

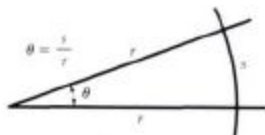


Figura A-11 Se define el ángulo θ en radianes como el cociente s/r , siendo s la longitud del arco interceptado sobre una circunferencia de radio r .

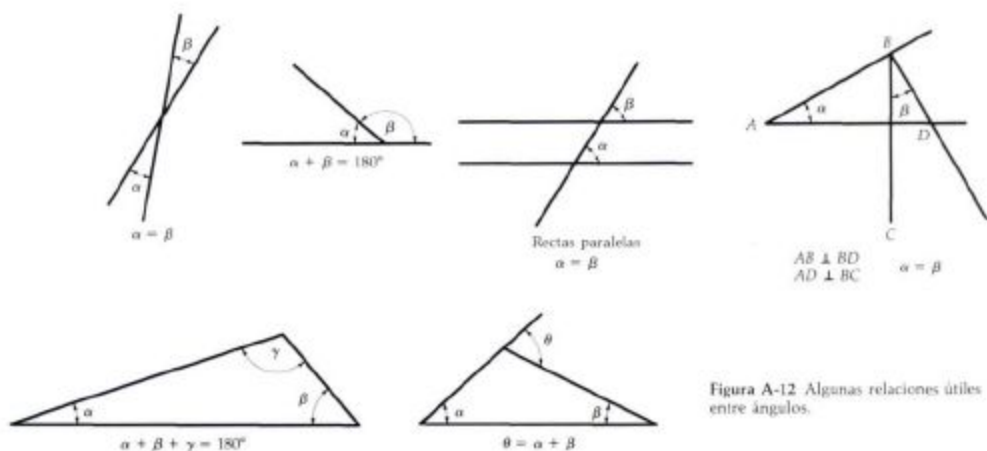


Figura A-12 Algunas relaciones útiles entre ángulos.

Como el ángulo medido en radianes es el cociente de dos longitudes, es adimensional. La relación entre radianes y grados es

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

o sea

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ \quad \text{A-32}$$

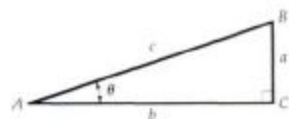
En la figura A-12 se muestran algunas relaciones útiles entre ángulos.

En la figura A-13 se ha dibujado un triángulo rectángulo trazando la recta BC perpendicular a AC . Las longitudes de los lados se denominan a , b y c . Se definen las funciones trigonométricas $\text{sen } \theta$, $\text{cos } \theta$ y $\text{tg } \theta$ de un ángulo agudo θ como

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{A-33}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{A-34}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \quad \text{A-35}$$


 Figura A-13 Triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b e hipotenusa de longitud c .

Existen otras tres funciones trigonométricas inversas de las anteriores:

$$\text{sec } \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{cos } \theta} \quad \text{A-36}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad \text{A-37}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg } \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} \quad \text{A-38}$$

El teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{A-39}$$

nos permite obtener algunas identidades útiles. Si dividimos cada término de esta ecuación por c^2 , se obtiene

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

o bien, a partir de las definiciones de $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{cos} \theta$,

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad \text{A-40}$$

Análogamente, se puede dividir cada término de la ecuación A-39 por a^2 o b^2 y obtener

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{A-41}$$

y

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \operatorname{sec}^2 \theta \quad \text{A-42}$$

En la tabla A-3 se relacionan éstas y otras fórmulas trigonométricas de interés.

Tabla A-3 Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad \operatorname{sec}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1 \quad \operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{cotg}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \operatorname{cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{2}} \quad \operatorname{cos} \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \theta}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{cos} \theta}}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \operatorname{cos} \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right]$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \operatorname{cos} \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$$

$$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(B - A) \right]$$

$$\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen}(A \pm B)}{\operatorname{cos} A \operatorname{cos} B}$$

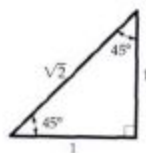


Figura A-14 Triángulo isósceles recto correspondiente al ejemplo A-5.

Ejemplo A-5

Utilizar el triángulo rectángulo isósceles de la figura A-14 para hallar el seno, el coseno y la tangente de 45° .

En la figura es evidente que los dos ángulos agudos son iguales. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180° y el ángulo recto mide 90° , cada ángulo agudo debe medir 45° . Si multiplicamos cada lado de un triángulo cualquiera por un factor común, se obtiene otro triángulo semejante con los mismos ángulos que el primero. Como en las funciones trigonométricas intervienen los cocientes de sólo dos lados de un triángulo, podemos escoger una longitud conveniente cualquiera para uno de los lados. Hagamos igual a 1 unidad la longitud de los dos catetos iguales. Ahora puede calcularse la longitud de la hipotenusa a partir del teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades}$$

Entonces se tienen el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 45° aplicando las ecuaciones A-33, A-34, y A-35, respectivamente:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo A-6

El seno de 30° vale exactamente $\frac{1}{2}$. Hallar las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo de ángulos 30° y 60° .

Este triángulo se ve en la figura A-15. Escojamos una longitud de 1 unidad para el cateto opuesto al ángulo de 30° . Se obtiene entonces la hipotenusa mediante la expresión:

$$c = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{0,5} = 2$$

La longitud del lado opuesto al ángulo de 60° se halla mediante el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Con estos resultados se pueden obtener las siguientes funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y de 60° :

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \sin 30^\circ = 0,500$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1,732$$

En el caso de ángulos pequeños, la longitud a es casi igual a la longitud s del arco, como puede verse en la figura A-16. Por tanto, el ángulo $\theta = s/c$ es casi igual a $\sin \theta = a/c$:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{para valores pequeños de } \theta \quad \text{A-43}$$

Análogamente, las longitudes c y b son casi iguales, de forma que $\operatorname{tg} \theta = a/b$ es también casi igual tanto a θ como a $\sin \theta$ para valores pequeños de θ :

$$\operatorname{tg} \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad (\text{para valores pequeños de } \theta) \quad \text{A-44}$$

Las ecuaciones A-43 y A-44 son válidas únicamente si θ se mide en radianes. Como $\cos \theta = b/c$ y estas longitudes son prácticamente iguales para valores pequeños de θ , tenemos

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{para valores pequeños de } \theta \quad \text{A-45}$$

Ejemplo A-7

¿En cuánto difieren entre sí el $\sin \theta$, la $\operatorname{tg} \theta$ y θ cuando $\theta = 15^\circ$?

El valor de este ángulo en radianes es

$$\theta = 15^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,262 \text{ rad}$$

Utilizando una calculadora o una tabla de funciones trigonométricas se obtiene

$$\sin 15^\circ = 0,259$$

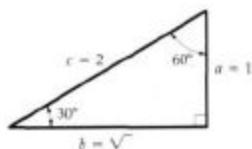


Figura A-15 Triángulo rectángulo de ángulos 30° - 60° del ejemplo A-6.



Figura A-16 En el caso de ángulos pequeños, $\sin \theta = a/c$, $\operatorname{tg} \theta = a/b$ y el ángulo $\theta = s/c$ son todos ellos aproximadamente iguales.

y

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 0,268$$

Así pues, el $\operatorname{sen} \theta$ y θ (en radianes) difieren en 0,003, es decir aproximadamente el 1 por ciento, y la $\operatorname{tg} \theta$ y θ difieren en 0,006, o sea cerca del 2 por ciento. En el caso de ángulos menores, la aproximación $\theta \approx \operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta$ es incluso más exacta.

El ejemplo A-7 muestra que si se necesita una aproximación del orden de algunas unidades por ciento o menos, pueden utilizarse las aproximaciones de los ángulos pequeños solamente para ángulos inferiores a 15° . En la figura A-17 puede verse un gráfico de θ , $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{tg} \theta$ para valores pequeños de θ .

Figura A-17 Gráficos de $\operatorname{tg} \theta$, θ y $\operatorname{sen} \theta$ en función de θ para pequeños valores de θ .

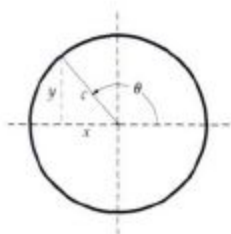
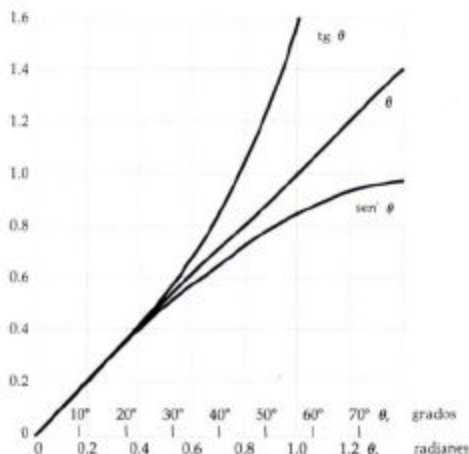


Figura A-18 Diagrama para definir las funciones trigonométricas en un ángulo obtuso.

En la figura A-18 se ha indicado un ángulo obtuso con su vértice en el origen y un lado sobre el eje x . Se definen las funciones trigonométricas correspondientes a un ángulo genérico como este en la forma

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{c} \quad \text{A-46}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{c} \quad \text{A-47}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{A-48}$$

En la figura A-19 se han representado estas funciones en función de θ . Todas las funciones trigonométricas tienen un período de 2π . Es decir, cuando un ángulo varía en 2π rad, las funciones vuelven a tener su valor original. Así, $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen} \theta$ y así sucesivamente. Otras relaciones útiles son

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta \quad \text{A-49}$$

$$\operatorname{cos}(\pi - \theta) = -\operatorname{cos} \theta \quad \text{A-50}$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \operatorname{cos} \theta \quad \text{A-51}$$

$$\operatorname{cos}(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sen} \theta \quad \text{A-52}$$

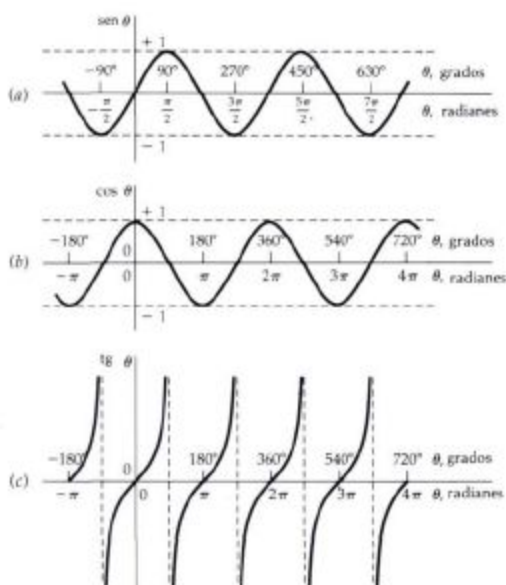


Figura A-19 Funciones trigonométricas $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ en función de θ .

Las funciones trigonométricas pueden expresarse en series de potencias de θ . Las series para el $\sin \theta$ y el $\cos \theta$ son

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad \text{A-53}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad \text{A-54}$$

Cuando θ es pequeño, se obtienen buenas aproximaciones utilizando sólo los primeros términos de las series.

Desarrollo del binomio

El teorema del binomio es de gran utilidad para hacer aproximaciones. Una forma del mismo es

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^4 + \dots \end{aligned} \quad \text{A-55}$$

Si n es un número entero positivo, existen $n+1$ términos en esta serie. Si n es un número real diferente que un entero positivo, el número de términos es infinito. La serie es válida para cualquier valor de n si x^2 es menor que 1. También es válida para $x^2=1$ si n es positivo. La serie resulta particularmente útil si $|x|$ es mucho menor que 1. Entonces cada término es mucho menor que el anterior y podemos despreciar todos ellos, excepto los dos o tres primeros términos. Si $|x|$ es mucho menor que 1, se tiene

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad |x| \ll 1 \quad \text{A-56}$$

Ejemplo A-8

Utilizar la ecuación A-56 para hallar un valor aproximado de la raíz cuadrada de 101.

En primer lugar pongamos el problema en la forma $(1+x)^n$ con x mucho menor que 1:

$$(101)^{1/2} = (100+1)^{1/2} = (100)^{1/2} (1+0.01)^{1/2} = 10(1+0.01)^{1/2}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación A-56 con $n = \frac{1}{2}$ y $x = 0.01$:

$$(1+0.01)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.01) = 1.005$$

Entonces

$$(101)^{1/2} \approx 10(1.005) = 10.05$$

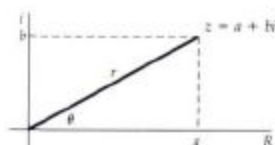
Podemos hacernos una idea de la exactitud de esta aproximación examinando el primer término de la ecuación A-55 que se ha despreciado. Este término es

$$\frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Como x es 0.01, x^2 vale 0.0001 y

$$\frac{n(n-1)}{2} x^2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} (0.0001) = -\frac{0.0001}{8} = -0.0000125 = -0.001\%$$

Por consiguiente, es de esperar que la respuesta sea correcta dentro de un 0.001 por ciento aproximadamente. El valor de $(101)^{1/2}$ con ocho cifras significativas es 10.049876, que difiere de nuestro valor aproximado de 10.05 en 0.000124 o sea aproximadamente el 0.001% de 10.05.



$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r \cos \theta + (r \sin \theta)i \\ &= r \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Figura A-20 Representación de un número complejo en un plano. La parte real del número complejo se representa a lo largo del eje horizontal y la parte imaginaria a lo largo del eje vertical.

Números complejos

Un número complejo z , en general, puede escribirse como

$$z = a + bi \quad \text{A-57}$$

en donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. La cantidad a se llama la parte real e ib la parte imaginaria de z . Podemos representar un número complejo en un plano como se ve en la figura A-20, en donde el eje x es el eje real y el eje y es el imaginario. Pueden utilizarse las relaciones $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$ de la figura A-20 para escribir el número complejo z en coordenadas polares:

$$z = r \cos \theta + (r \sin \theta)i \quad \text{A-58}$$

en donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, se denomina el módulo o magnitud de z .

Cuando se han de sumar o restar números complejos, han de sumarse o restarse por separado sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad \text{A-59}$$

Sin embargo, cuando se han de multiplicar dos números complejos, se deben multiplicar cada parte de un factor por cada parte de otro:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \end{aligned} \quad \text{A-60}$$

en donde hemos utilizado $i^2 = -1$.

El complejo conjugado de un número complejo z^* es aquel número que se obtiene sustituyendo i por $-i$:

$$z^* = (a + bi)^* = a - bi \quad \text{A-61}$$

El producto de un número complejo por su complejo conjugado es igual al cuadrado del módulo de dicho número:

$$z z^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \text{A-62}$$

Una función de un número complejo particularmente útil es el exponencial $e^{i\theta}$. Utilizando el desarrollo e^x dado en la tabla A-2, se tiene

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

Utilizando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, y así sucesivamente y separando las partes reales de las imaginarias, este desarrollo puede escribirse como

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)$$

Comparando este resultado con las ecuaciones A-53 y A-54, podemos ver que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{A-63}$$

Utilizando este resultado, podemos expresar un número complejo en general como un exponencial

$$z = a + bi = r \cos \theta + (r \sin \theta)i = r e^{i\theta} \quad \text{A-64}$$

en donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cálculo diferencial

Cuando decimos que x es una función de t , queremos significar que para cada valor de t existe un valor correspondiente de x . Un ejemplo es $x = At^2$, siendo A una constante. Para indicar que x es función de t a veces escribimos simplemente $x(t)$. La figura A-21 muestra un gráfico de x en función de t para una función típica $x(t)$. Para un valor particular $t = t_1$, x tiene el valor x_1 , como está indicado; y para otro valor t_2 , x tiene el valor x_2 . La variación o incremento de t , $t_2 - t_1$, se escribe $\Delta t = t_2 - t_1$ y el correspondiente a x , se escribe $\Delta x = x_2 - x_1$. El cociente $\Delta x / \Delta t$ es la pendiente de la recta que une los puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2) . Si hacemos a Δt cada vez menor, la recta que acabamos de mencionar tiende a convertirse en la tangente a la curva en el punto (x_1, t_1) . La pendiente de esta recta tangente se denomina la derivada de x respecto a t y se escribe dx/dt :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{A-65}$$

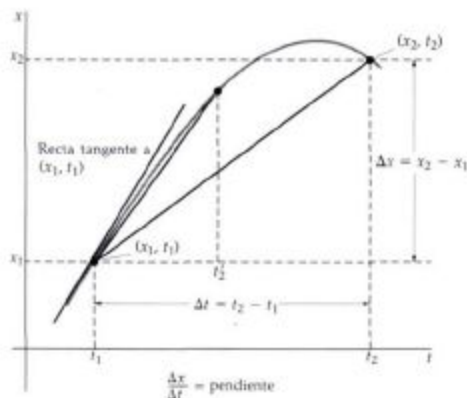


Figura A-21 Representación gráfica de una función típica $x(t)$. Los puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2) están unidos por una recta, cuya pendiente es $\Delta x / \Delta t$. Cuando disminuye el intervalo de tiempo que comienza en t_1 , la pendiente de dicho intervalo se aproxima a la pendiente de la tangente a la curva en el instante t_1 , que es la derivada de x respecto a t .



Figura A-22 Representación de la función lineal $x = Ct$. Esta función tiene una pendiente constante C .

La derivada de una función de t es otra función de t . Si x es una constante, la gráfica de x en función de t es una recta horizontal con pendiente cero. La derivada de una constante es, por tanto, nula. En la figura A-22, x es proporcional a t :

$$x = Ct$$

Esta función tiene una pendiente constante igual a C . Por tanto, la derivada de Ct es C . En la tabla A-4 se relacionan algunas propiedades de las derivadas de ciertas funciones particulares que suelen encontrarse en física. Están seguidas de ciertos comentarios que pretenden hacer estas propiedades y reglas más claras. Puede encontrarse un estudio más detallado en cualquier libro de cálculo.

Tabla A-4 Propiedades de las derivadas y derivadas de funciones particulares

Linealidad

1. La derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función:

$$\frac{d}{dt} [Cf(t)] = C \frac{df(t)}{dt}$$

2. La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones:

$$\frac{d}{dt} [f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Regla de la cadena.

3. Si f es función de x y a su vez x es función de t , la derivada de f respecto a t es igual al producto de la derivada de f respecto a x por la derivada de x respecto a t :

$$\frac{d}{dt} f(x) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Derivada de un producto

4. La derivada de un producto de funciones $f(t)g(t)$ es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera:

$$\frac{d}{dt} [f(t)g(t)] = f(t) \frac{dg(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt} g(t)$$

Derivada inversa

5. La derivada de t respecto a x es la recíproca de la derivada de x respecto a t , admitiendo que ninguna de ellas sea nula:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Derivadas de funciones particulares

6. $\frac{dC}{dt} = 0$ siendo una constante

9. $\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t$

7. $\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$

10. $\frac{d}{dt} e^{bt} = be^{bt}$

8. $\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t$

11. $\frac{d}{dt} \ln bt = \frac{1}{t}$

Ejemplo A-9

Hallar la derivada de $x = at^2 + bt + c$, siendo a , b y c constantes.

A partir de la regla 2, podemos derivar cada término por separado y sumar los resultados. Utilizando las reglas 1 y 7 se tiene

$$\frac{d(at^2)}{dt} = 2at^2 = 2at$$

Análogamente, $d(bt)/dt = b$ y $dc/dt = 0$. Sumando estos resultados, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b$$

Comentarios a las reglas de 1 a 5

Las reglas 1 y 2 se siguen del hecho de que el proceso de límite es lineal. Podemos comprender la regla 3, la regla de la cadena, multiplicando $\Delta f/\Delta t$ por $\Delta x/\Delta x$ y observando que, puesto que x es una función de t , tanto Δx como Δf tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Como el límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites, se tiene

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

La regla 4 no es evidente de forma inmediata. La derivada de un producto de funciones es el límite del cociente

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Si sumamos y restamos la cantidad $f(t + \Delta t)g(t)$ en el numerador, podemos escribir este cociente como

$$\begin{aligned} \frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t) + f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t} \\ = f(t + \Delta t) \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] + g(t) \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

Cuando Δt tiende a cero, los términos entre corchetes se convierten en $dg(t)/dt$ y $df(t)/dt$, respectivamente, y el límite de esta expresión es

$$f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}$$

La regla 5 se deduce directamente de la definición:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1}$$

Comentarios a la regla 7

Podemos obtener este importante resultado utilizando el desarrollo del binomio. Se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n \\ f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t)^n = t^n \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^n \\ &= t^n \left[1 + n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

Entonces

$$f(t - \Delta t) - f(t) = t^n \left[n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \dots \right]$$

y

$$\frac{f(t - \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{n-2} \Delta t + \dots$$

El término siguiente que se ha omitido de la última suma es proporcional a $(\Delta t)^2$, el siguiente lo es $(\Delta t)^3$, y así sucesivamente. Todos los términos excepto el primero tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Así pues,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1}$$

Comentarios a las reglas 8 y 9

Escribiremos $\omega t = \text{sen } \theta$ siendo $\theta = \omega t$ y utilizaremos la regla de la cadena,

$$\frac{d \text{sen } \theta}{dt} = \frac{d \text{sen } \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d \text{sen } \theta}{d\theta}$$

Luego emplearemos la fórmula trigonométrica correspondiente al seno de la suma de dos ángulos θ y $\Delta\theta$:

$$\text{sen } (\theta + \Delta\theta) = \text{sen } \Delta\theta \cos \theta + \cos \Delta\theta \text{sen } \theta$$

Como $\Delta\theta$ ha de tender a cero, podemos utilizar las aproximaciones correspondientes a ángulos pequeños

$$\text{sen } \Delta\theta \approx \Delta\theta \quad \text{y} \quad \cos \Delta\theta \approx 1$$

Entonces

$$\text{sen } (\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos \theta + \text{sen } \theta$$

y

$$\frac{\text{sen } (\theta + \Delta\theta) - \text{sen } \theta}{\Delta\theta} \approx \cos \theta$$

Puede aplicarse un razonamiento semejante a la función coseno para obtener la regla 9

Comentarios a la regla 10

Una vez más utilizamos la regla de la cadena

$$\frac{de^{\theta}}{dt} = b \frac{de^{\theta}}{d\theta} \quad \text{con} \quad \theta = bt$$

y el desarrollo en serie de la función exponencial:

$$e^{\theta + \Delta\theta} = e^{\theta} e^{\Delta\theta} = e^{\theta} \left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \dots \right]$$

Entonces

$$\frac{e^{\theta + \Delta\theta} - e^{\theta}}{\Delta\theta} = e^{\theta} + e^{\theta} \frac{\Delta\theta}{2!} + e^{\theta} \frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \dots$$

Cuando $\Delta\theta$ tiende a cero, el segundo miembro de la ecuación anterior tiende a e^{θ} .

Comentarios a la regla 11

Sea

$$y = \ln bt$$

Entonces

$$e^{y} = bt \quad \text{y} \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{b} e^{y} = t$$

Entonces utilizando la regla 5, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

Cálculo integral

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. Es también la operación inversa de la derivación. La figura A-23 muestra una función $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i \Delta t_i$, en donde f_i se evalúa en un punto cualquiera del intervalo Δt_i . Esta aproximación mejora si Δt_i es muy pequeño. Se halla el área total desde t_1 hasta t_2 sumando todos los elementos de área desde t_1 a t_2 y tomando el límite cuando cada Δt_i tiende a cero. Este límite se denomina la integral de f respecto a t y se escribe

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = \text{Área} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta t_i$$

Si integramos una cierta función $f(t)$ desde t_1 hasta cierto valor genérico de t , se obtiene otra función de t . Llamemos y a esta nueva función:

$$y = \int_{t_1}^t f dt$$

La función y es el área bajo la curva de f en función de t desde t_1 hasta un cierto valor general t . En el caso de un intervalo Δt pequeño, la variación en el área Δy es aproximadamente $f \Delta t$.

$$\Delta y \approx f \Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

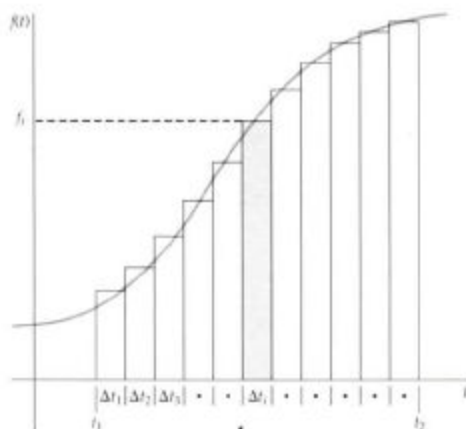


Figura A-23 Función general $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i \Delta t_i$, en donde f_i se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

Si tomamos el límite cuando Δt tiende a cero, podemos ver que f es la derivada de y :

$$f = \frac{dy}{dt}$$

La relación entre y y f suele escribirse

$$y = \int f dt$$

en donde $\int f dt$ se denomina **integral indefinida**. Para calcular una integral indefinida, se halla la función y cuya derivada es f . La integral definida de f desde t_1 hasta t_2 es $y(t_2) - y(t_1)$, en donde $df/dt = y$:

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = y(t_2) - y(t_1)$$

Ejemplo A-10

Hallar la integral indefinida de $f(t) = t$.

La función cuya derivada es t es $\frac{1}{2}t^2$ más una constante. Así pues,

$$\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

en donde C es una constante cualquiera.

En la tabla A-5 se relacionan algunas fórmulas integrales importantes. Pueden encontrarse unas listas más extensas de fórmulas de derivadas e integrales en manuales como el de Herbert Dwight, «*Tables of Integrals and Other Mathematical Data*», 4ª edición, Macmillan Publishing Company, Inc., Nueva York, 1961.

Tabla A-5 Fórmulas de integración[†]

1. $\int A dt = At$	5. $\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at}$
2. $\int At dt = \frac{1}{2}At^2$	6. $\int \cos at dt = \frac{1}{a} \sin at$
3. $\int At^n dt = A \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$	7. $\int \sin at dt = -\frac{1}{a} \cos at$
4. $\int At^{-1} dt = A \ln t$	

[†] En estas fórmulas, A , b y ω son constantes. A todos los segundos miembros de estas ecuaciones puede sumárseles una constante arbitraria C .

Apéndice B

Unidades SI

Unidades básicas	
Longitud	El metro (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ s
Tiempo	El segundo (s) es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo ^{133}Cs
Masa	El kilogramo (kg) es la masa del cuerpo considerado como patrón internacional que se conserva en Sèvres, Francia
Corriente	El amperio (A) es la corriente que al circular por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos separados 1 m entre sí da origen a una fuerza magnética por unidad de longitud de 2×10^{-7} N/m
Temperatura	El kelvin (K) es $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua
Intensidad luminosa	La candela (cd) es la intensidad luminosa, en la dirección perpendicular, de la superficie de $1/600\,000$ m ² de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a la presión de 1 atm

Unidades derivadas		
Fuerza	newton (N)	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$
Trabajo, energía	joule (J)	$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$
Potencia	vatio (W)	$1 \text{ W} = 1 \text{ J} / \text{s}$
Frecuencia	hertz (Hz)	$1 \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$
Carga	culombio (C)	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$
Potencial	voltio (V)	$1 \text{ V} = 1 \text{ J} / \text{C}$
Resistencia	ohmio (Ω)	$1 \Omega = 1 \text{ V} / \text{A}$
Capacidad	faradio (F)	$1 \text{ F} = 1 \text{ C} / \text{V}$
Campo magnético	tesla (T)	$1 \text{ T} = 1 \text{ N} / \text{A} \cdot \text{m}$
Flujo magnético	weber (Wb)	$1 \text{ Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$
Inductancia	henry (H)	$1 \text{ H} = 1 \text{ J} / \text{A}^2$

Apéndice C

Datos numéricos

Datos terrestres	
Aceleración de la gravedad g	9,80665 m/s ²
Valor estándar	32,1740 pies/s ²
A nivel del mar, en el ecuador†	9,7804 m/s ²
A nivel del mar, en los polos‡	9,8322 m/s ²
Masa de la Tierra, M_1	$5,98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra R_T , medio	$6,37 \times 10^6$ m
	3960 millas
Velocidad de escape $\sqrt{2R_T g}$	$1,12 \times 10^4$ m/s
	6,95 millas/s
Constante solar‡	1,35 kW/m ²
Temperatura y presión normales (C.N.):	
Temperatura	273,15 K
Presión	101,325 kPa
	1,00 atm
Peso molecular del aire	28,97 g/mol
Densidad del aire (C.N.), ρ_{aire}	1,293 kg/m ³
Velocidad del sonido (C.N.)	331 m/s
Calor de fusión del H ₂ O (0°C, 1 atm)	333,5 kJ/kg
Calor de vaporización del H ₂ O (100°C, 1 atm)	2,257 MJ/kg

† Medida respecto a la superficie de la Tierra.

‡ Potencia media incidente normalmente sobre 1 m² en el exterior de la atmósfera terrestre y a la distancia media de la Tierra al Sol.

Datos astronómicos	
Tierra	
Distancia a la Luna†	$3,844 \times 10^8$ m
	$2,389 \times 10^5$ millas
Distancia al Sol, media†	$1,496 \times 10^{11}$ m
	$9,30 \times 10^7$ millas
	1,00 AU
Velocidad orbital, media	$2,98 \times 10^4$ m/s
Luna	
Masa	$7,35 \times 10^{22}$ kg
Radio	$1,738 \times 10^6$ m
Periodo	27,32 d
Aceleración de la gravedad en su superficie	1,62 m/s ²
Sol	
Masa	$1,99 \times 10^{30}$ kg
Radio	$6,96 \times 10^8$ m

† De centro a centro.

Constantes físicas		
Constante de la gravitación	G	$6,672\ 6 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Velocidad de la luz	c	$2,997\ 924\ 58 \times 10^8\ \text{m/s}$
Carga del electrón	e	$1,602\ 177 \times 10^{19}\ \text{C}$
Número de Avogadro	N_A	$6,022\ 137 \times 10^{23}\ \text{partículas/mol}$
Constante de los gases	R	$8,314\ 51\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$
		$1,987\ 22\ \text{cal/mol}\cdot\text{K}$
		$8,205\ 78 \times 10^{-2}\ \text{L}\cdot\text{atm/mol}\cdot\text{K}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1,380\ 658 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
		$8,617\ 385 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$
Unidad de masa unificada	$u = (1/N_A)g$	$1,660\ 540 \times 10^{-24}\ \text{g}$
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	$8,987\ 551\ 788 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	$8,854\ 187\ 817 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2$
		$1,256\ 637 \times 10^{-6}\ \text{N/A}^2$
Constante de Planck	h	$6,626\ 076 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$
		$4,135\ 669 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$
		$\hbar = h/2\pi$
		$1,054\ 573 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$
Masa del electrón	m_e	$9,109\ 380 \times 10^{-31}\ \text{kg}$
		$510,999\ 1\ \text{keV}/c^2$
Masa del protón	m_p	$1,672\ 623 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
		$938,272\ 3\ \text{MeV}/c^2$
Masa del neutrón	m_n	$1,674\ 929 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
		$939,565\ 6\ \text{MeV}/c^2$
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$	$9,274\ 015\ 4 \times 10^{-24}\ \text{J/T}$
		$5,788\ 382\ 63 \times 10^{-5}\ \text{eV/T}$
Magnetón nuclear	$m_N = e\hbar/2m_p$	$5,050\ 786\ 6 \times 10^{-27}\ \text{J/T}$
		$3,152\ 451\ 66 \times 10^{-8}\ \text{eV/T}$
Cuanto de flujo magnético	$\phi_0 = h/2e$	$2,067\ 834\ 6 \times 10^{-15}\ \text{T}\cdot\text{m}^2$
Resistencia Hall cuantizada	$R_H = h/e^2$	$2,581\ 280\ 7 \times 10^4\ \Omega$
Constante de Rydberg	R_H	$1,097\ 373\ 153\ 4 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$
Cociente frecuencia-tensión Josephson	$2e/h$	$4,835\ 979 \times 10^4\ \text{Hz/V}$
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \hbar/m_e c$	$2,426\ 310\ 58 \times 10^{-12}\ \text{m}$

Para datos adicionales ver las contraportadas y las tablas siguientes en el texto.

- Tabla 18-1 Algunos campo eléctricos en la naturaleza, pág. 608
- Tabla 21-1 Constantes dieléctricas y rigidez de diversos materiales, pág. 697
- Tabla 22-1 Resistividades y coeficientes de temperatura, pág. 722
- Tabla 22-2 Diámetros de los hilos y áreas de sus secciones rectas para los hilos de cobre comúnmente utilizados, pág. 722
- Tabla 27-1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20 °C, pág. 881
- Tabla 27-2 Valores máximo de $\mu_r M$ y de K_m Para diversos materiales ferromagnéticos, pág. 889
- Tabla 29-1 Espectro electromagnético, pág. 958
- Tabla 30-1 Índices de refracción para la luz amarilla del sodio ($\lambda = 589 \text{ nm}$), pág. 991
- Tabla 34-1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros, pág. 1130
- Tabla 35-1 Fechas aproximadas de algunos experimentos y teorías importantes, 1881-1932, pág. 1146

Apéndice D

Factores de conversión

Los factores de conversión se escriben en forma de ecuaciones para mayor sencillez.
Las relaciones marcadas con un asterisco son exactas.

Longitud

- 1 km = 0,6215 millas
- 1 milla = 1,609 km
- 1 m = 1,0936 yd = 3,281 pies = 39,37 pulgadas
- *1 pulgada = 2,54 cm
- *1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm
- *1 yd = 3 pie = 91,44 cm
- 1 año-luz = 1 c · a = $9,461 \times 10^{15}$ m
- *1 Å = 0,1 nm

Área

- *1 m² = 10⁴ cm²
- 1 km² = 0,3861 mi² = 247,1 acres
- *1 pulg² = 6,4516 cm²
- 1 pie² = $9,29 \times 10^{-2}$ m²
- 1 m² = 10,76 pie²
- *1 acre = 43 560 pie²
- 1 milla² = 640 acres = 2,590 km²

Volumen

- *1 m³ = 10⁶ cm³
- *1 L = 1000 cm³ = 10⁻³ m³
- 1 gal = 3,786 L
- 1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 pulg³
- 1 pulg³ = 16,39 cm³
- 1 pie³ = 1728 pulg³ = 28,32 L = $2,832 \times 10^4$ cm³

Tiempo

- *1 h = 60 min = 3,6 ks
- *1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks
- 1 a = 365,24 d = 31,56 Ms

Velocidad

- 1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 milla/h
- 1 milla/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h
- 1 milla/h = 1,467 pie/s

Ángulo y velocidad angular

- *π rad = 180°
- 1 rad = 57,30°
- 1° = $1,745 \times 10^{-2}$ rad
- 1 rev/min = 0,1047 rad/s
- 1 rad/s = 9,549 rev/min

Masa

- *1 kg = 1000 g
- *1 tonelada = 1000 kg = 1 Mg
- 1 u = $1,6606 \times 10^{-27}$ kg
- 1 kg = $6,022 \times 10^{23}$ u
- 1 slug = 14,59 kg
- 1 kg = $6,852 \times 10^{-3}$ slug
- 1 u = 931,50 MeV/c²

Densidad

- *1 g/cm³ = 1000 kg/m³ = 1 kg/L
- (1 g/cm³)g = 62,4 lb/pie³

Fuerza

- 1 N = 0,2248 lb = 10⁵ dina
- 1 lb = 4,4482 N
- (1 kg)g = 2,2046 lb

Presión

- *1 Pa = 1 N/m²
- *1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bars

$$1 \text{ atm} = 14,7 \text{ lb/pulg}^2 = 760 \text{ mmHg}$$

$$= 29,9 \text{ pulgHg} = 33,8 \text{ pieH}_2\text{O}$$

$$1 \text{ lb/pulg}^2 = 6,895 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg} = 133,32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$$

Energía

$$*1 \text{ kW}\cdot\text{h} = 3,6 \text{ MJ}$$

$$*1 \text{ cal} = 4,1840 \text{ J}$$

$$1 \text{ pie}\cdot\text{lb} = 1,356 \text{ J} = 1,286 \times 10^{-3} \text{ Btu}$$

$$*1 \text{ L}\cdot\text{atm} = 101,325 \text{ J}$$

$$1 \text{ L}\cdot\text{atm} = 24,217 \text{ cal}$$

$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ pie}\cdot\text{lb} = 252 \text{ cal} = 1054,35 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u}\cdot c^2 = 931,50 \text{ MeV}$$

$$*1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$$

Potencia

$$1 \text{ caballo de vapor} = 550 \text{ pie}\cdot\text{lb/s} = 745,7$$

W

$$1 \text{ Btu/min} = 17,58 \text{ W}$$

$$1 \text{ W} = 1,341 \times 10^{-3} \text{ 1 caballo de vapor}$$

$$= 0,7376 \text{ pie}\cdot\text{lb/s}$$

Campo magnético

$$*1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

$$*1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$$

Conductividad térmica

$$1 \text{ W/m}\cdot\text{K} = 6,938 \text{ Btu}\cdot\text{pulg/h}\cdot\text{pie}^2\cdot^\circ\text{F}$$

$$1 \text{ Btu}\cdot\text{pulg}^2/\text{h}\cdot\text{pie}^2\cdot^\circ\text{F} = 0,1441 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

Apéndice E Tabla Periódica

1	18																
H	He																
1.00797	4.003																
3	4	2															
Li	Be	Ne															
6.941	9.012	20.179															
11	12	18															
Na	Mg	Ar															
22.990	23.41	39.948															
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ce	As	Se	Br	Kr
39.102	40.08	44.96	47.88	50.94	52.00	54.94	55.85	58.93	58.69	63.55	65.38	69.72	72.59	74.92	78.96	79.90	83.80
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
85.47	87.62	88.906	91.22	92.91	95.94	(98)	101.1	102.905	106.4	107.870	112.41	114.82	118.69	121.75	127.60	126.90	131.29
55	56	57-71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	Tierras raras	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
132.905	137.33	178.49	178.49	180.95	183.85	186.2	190.2	192.2	195.08	196.97	200.59	204.37	207.19	208.98	(210)	(210)	(222)
87	88	89-103	104	105	106	107	108	109									
Fr	Ra	Actinidos	Rf	Ha													
(223)	(226)	(281)	(281)	(280)	(263)	(262)	(265)	(266)									
Tierras raras (Lantánidos)																	
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71			
La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu			
138.91	140.12	140.91	144.24	(147)	150.36	152.0	157.25	158.92	162.50	164.93	167.26	168.93	171.04	174.97			
Actinidos																	
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103			
Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr			
227.03	232.04	231.04	238.03	237.05	(244)	(243)	(247)	(247)	(251)	(252)	(257)	(258)	(259)	(260)			

La designación del grupo 1-18 ha sido recomendada por la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC).

Números atómicos y masas atómicas

Actinio	Ac	89	227,03	Lawrencio	Lr	103	(260)
Aluminio	Al	13	26,98	Litio	Li	3	6,941
Americio	Am	95	(243)	Lutecio	Lu	71	174,97
Antimonio	Sb	51	121,75	Magnesio	Mg	12	24,31
Argón	Ar	18	39,948	Manganeso	Mn	25	54,94
Arsénico	As	33	74,92	Mendelevio	Md	101	(258)
Astato	At	85	(210)	Mercurio	Hg	80	200,59
Azufre	S	16	32,064	Molibdeno	Mo	42	95,94
Bario	Ba	56	137,3	Neodimio	Nd	60	144,24
Berilio	Be	4	9,012	Neón	Ne	10	20,179
Berkelio	Bk	97	(247)	Neptunio	Np	93	237,05
Bismuto	Bi	83	208,98	Niobio	Nb	41	92,91
Boro	B	5	10,81	Niquel	Ni	28	58,69
Bromo	Br	35	79,90	Nitrógeno	N	7	14,007
Cadmio	Cd	48	112,41	Nobelio	No	102	(259)
Calcio	Ca	20	40,08	Oro	Au	79	196,97
Californio	Cf	98	(251)	Osmio	Os	76	190,2
Carbón	C	6	12,011	Oxígeno	O	8	15,9994
Cerio	Ce	58	140,12	Paladio	Pd	46	106,4
Cesio	Cs	55	132,905	Plata	Ag	47	107,870
Cinc	Zn	30	65,38	Platino	Pt	78	195,09
Circonio	Zr	40	91,22	Plomo	Pb	82	207,19
Cloro	Cl	17	35,453	Plutonio	Pu	94	(244)
Cobalto	Co	27	58,93	Polonio	Po	84	(210)
Cobre	Cu	29	63,55	Potasio	K	19	39,102
Cromo	Cr	24	52,00	Praseodimio	Pr	59	140,91
Curio	Cm	96	(247)	Prometio	Pm	61	(147)
Disprobio	Dy	66	162,50	Protactinio	Pa	91	231,04
Einsteinio	Es	99	(252)	Radio	Ra	88	(226)
Erbio	Er	68	167,26	Radón	Rn	86	(222)
Escandio	Sc	21	44,96	Renio	Re	75	186,2
Estaño	Sn	50	118,69	Rodio	Rh	45	102,905
Estroncio	Sr	38	87,62	Rubidio	Rb	37	85,47
Eurospio	Eu	63	152,00	Rutenio	Ru	44	101,1
Fermio	Fm	100	(257)	Rutherfordio	Rf	104	(261)
Flúor	F	9	19,00	Samario	Sm	62	150,36
Fósforo	P	15	30,974	Selenio	Se	34	78,96
Francio	Fr	87	(223)	Silicio	Si	14	28,09
Gadolinio	Gd	64	157,25	Sodio	Na	11	22,990
Galio	Ga	31	69,72	Talio	Tl	81	204,37
Germanio	Ge	32	72,59	Tántalo	Ta	73	180,95
Hafnio	Hf	72	178,49	Tecnecio	Tc	43	(98)
Hadnio	Ha	105	(260)	Telurio	Te	52	127,60
Helio	He	2	4,003	Terbio	Tb	65	158,92
Hidrógeno	H	1	1,00797	Titanio	Ti	22	47,88
Hierro	Fe	26	55,85	Torio	Th	90	232,04
Holmio	Ho	67	164,93	Tulio	Tm	69	168,93
Indio	In	49	114,82	Uranio	U	92	238,03
Iridio	Ir	77	192,2	Vanadio	V	23	50,94
Iterbio	Yb	70	173,04	Volframio	W	74	183,85
Ytrio	Y	39	88,906	Xenón	Xe	54	131,29
Kriptón	Kr	36	83,80	Yodo	I	53	126,90
Lantano	La	57	138,91				

Origen de las ilustraciones

Comienzo de cada parte

Parte 4 pág. XIX, 596-597 © 1988 Richard Megna/Fundamental Photos.

Parte 5 pág. XXII, 972-973 Courtesy AT and T Archives.

Parte 6 pág. XXIII, 1098-1099 Courtesy AT and T Archives.

Capítulo 18

Inicio pág. 598 Lawrence Berkeley Laboratory Science Photo Library/Photo Researchers; **Figura 18-1** PSSC Physics, 2da. ed., 1965, D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; pág. 600 (arriba) Por cortesía del National Institute of Standards and Technology; (margin) Bruce Terris/IBM Almaden Research Center; pág. 603 (arriba izquierda) © Grant Heilman; (arriba derecha) Ann Ronan Picture Library; (margin) Burndy Library, Norwalk, Connecticut; **Figura 18-16** (b) Harold M. Waage; **Figura 18-17** (b) Harold M. Waage; **Figura 18-18** (b) Harold M. Waage; pág. 615 Por cortesía de Hulon Forrester/Video Display Corporation, Tucker, Georgia; **Figura 18-25** Por cortesía de Tripos-Evans y Sutherland Corporation.

Capítulo 19

Inicio pág. 624 © Dagmar Hailer-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **Figura 19-4** (b) Ben Damsky Electric Power Research Institute; **Figura 19-22** (b) Runk Schoenberger from Grant Heilman; pág. 645 Harold M. Waage.

Capítulo 20

Inicio pág. 656 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 659 © Mark Antman The Image Works; **Figura 20-19** (b) © Karen R. Preuss; (c) © Hank Morgan Rainbow; pág. 678 (a) Stanford Linear Accelerator Center Science Photo Library/Photo Researchers; (b) © 1986 Wetmore/Photo Researchers; **Figura 20-20** (a) Harold M. Waage; pág. 683 Por cortesía de Ohio Company; pág. 684 Por cortesía de Xerox Corporation.

Capítulo 21

Inicio pág. 690 Por cortesía de Tucson, Arizona; **Figura 21-2** (b) Harold M. Waage; pág. 693 © Mark Antman The Image Works; pág. 697 (a,b) © Bruce Iverson; (c) © Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.; pág. 700 © Lawrence Livermore National Laboratory; pág. 703 (a) © Picturepoint Ltd., London; (b) © Paul Brierly; (c) © Lenman Connell The Stock Market; (d) © Robert Essel The Stock Market; pág. 707 Por cortesía de Lockheed Corporation.

Capítulo 22

Inicio pág. 716 © Rabbit System, Santa Monica, California. Photo caption by kind cooperation of Larry Albright; pág. 719 Por cortesía de Sandia National Laboratories; pág. 723 © Chris Rogers The Stock Market; pág. 724 Por cortesía de AT&T Archives; pág. 726 (a) © 1985 Bob O'Shaughnessy The Stock Market; (b) Por cortesía de EG&G Wakefield; (c) Por cortesía de Liquid Crystal Applications, Inc.; **Figura 22-11** © Paul Siverman/Fundamental Photographs; pág. 730 (a) © Popular Science, Junio 1990; (b) Paul Brierly; (c) © Coco McCoy Rainbow; (f) Ann Ronan Picture Library; pág. 735 Donald Calabrese Rome Air Development Center, Crittiss AFB, New York; pág. 740 **Figura 1** (b) Carolina Biological Supply Company; pág. 743 **Figura 6** (d) y (derecha) © Lennart Nilsson.

Capítulo 23

Inicio pág. 749 Por cortesía de AT&T Archives; pág. 766 UPI The Bettmann Archive; pág. 767 (a,b) Por cortesía de Central Scientific Company; pág. 770 (a) © Lennart Nilsson; (b) © Bruce Iverson; pág. 771 (c) Por cortesía de Sandia National Laboratories; (d) © Joel E. Arem; (e) © Lennart Nilsson; (f) Por cortesía de Omega Engineering, Inc.

Capítulo 24

Inicio pág. 781 © Stadler GmbH, Por cortesía de Transrapid International, Munich; **Figura 24-1** Fred Weiss; **Figura 24-8** (b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 788 (a) Larry Langrill; (b) © Lawrence Berkeley Laboratory Science Photo Library; **Figura 24-10** (b) Carl E. Nielsen; pág. 790 (a) © N.A.S.A. (74-HC-260); (b) Por cortesía de NRAO/AUI; **Figura 24-14** (b) Por cortesía de Cavendish Laboratory, University of Cambridge; pág. 793 Por cortesía de Central Scientific Company; **Figura 24-16** (b) © Stephen Cohen, Rockefeller University; pág. 796 (a) © 1980 Smithsonian Institution; (b) Por cortesía de Scanditronix Inc., Essex, Massachusetts.

Capítulo 25

Inicio pág. 811 Bob Williamson, Oakland University, Rochester, Michigan; pág. 815 (a,b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 25-8** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 25-11** (b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 820 (a,b) © Bruce Iverson; pág. 821 (a) Por cortesía de CERN; (b) Por cortesía de Brookhaven National

Laboratory; Figura 25-15 (b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 825 Por cortesía de F.W. Bell Co.; Figura 25-20 Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; pág. 830 (a,b) Por cortesía de Princeton University Plasma Physics Laboratory.

Capítulo 26

Inicio pág. 840 © Bruce Iverson; **Figura 26-1** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 843 Por cortesía de National Portrait Gallery, London; pág. 855 Sun Yihons, **China Reconstructs**, octubre, 1985; pág. 856 (a,c) Por cortesía del U.S. Dept. of the Interior, Dept. of Reclamation; (b) © Lee Langum/Photo Researchers; **Figura 26-25 (b)** © Michael Holford, Collection of the Science Museum, London; pág. 859 (abajo) Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; pág. 866 (abajo izquierda) Y. Yoshida; **Figura 1** Prof. Neal Brown, Geophysical Institute, University of Alaska, Fairbanks; **Figura 2 (a)** N.A.S.A. (85-HC-148); **Figura 3 pág. 867** Por cortesía del Prof. Syun-ichi Akasofu; **Figura 2 (b)** Por cortesía del Prof. Lou Frank, University of Iowa.

Capítulo 27

Inicio pág. 878 Robert J. Celotta, National Institute of Standards and Technology; pág. 885 J. F. Allen, St. Andrews University, Scotland; pág. 886 © Paul Silverman/Fundamental Photographs; pág. 887 (a) © Akira Tonomura, Hitachi Advanced Research Laboratory, Hatoyama, Japan; (b,c) © Bruce Iverson; pág. 889 (a) © Seagate Technologies; (b) John Mamin, IBM Almaden Research Center; pág. 891 © Bill Pierce Time.

Capítulo 28

Inicio pág. 898 © 1990 C.J. Allen/New England Hydro Transmission Corporation; pág. 906 (a) Por cortesía de Intel Corporation; (b) Por cortesía de Sperry Corporation; pág. 916 © George A. Clark Radioana Collection-Archive Center, National Museum of American History; pág. 920 (a) Por cortesía de Champion Spark Plug Co; (b) © Bruce Iverson; pág. 921 (a) © Yoav/Phototake; (b) © Daniel S. Brody Stock, Boston; pág. 923 Lana Berkovich; pág. 925 (a) Photo by Jolin Petit/Por cortesía de J.W. Petit, The Vestal Press Ltd.; (b) © Bruce Iverson; pág. 926 Por cortesía del Dr. H.H. Busta, Amoco Research Center, Naperville, Illinois; **Figura 6 pág. 932 (a-d)** © Lloyd Wolf; **Figura 7 pág. 933** © Bruce Iverson.

Capítulo 29

Inicio pág. 943 N.A.S.A. (70-HC-220); pág. 948 © Doug Johnson SFL Science Source; pág. 952 NOAA-N.A.S.A./JPL; pág. 955 Dave Cooke, University of Chicago; pág. 956 (a) Por cortesía de AT&T Archives; (b) Hale Observatories; pág. 959 (a) © 1984 Frank Zullo; (b) © Galen Powell/Peter Arnold, Inc.; pág. 962 (izquierda) Alistair Steyn-Ross, University of Waikato, New Zealand/Por cortesía de *The Physics Teacher*; (derecha) Por cortesía de Brookhaven National Laboratory; pág. 967 Por cortesía de Cavendish Laboratory, University of Cambridge; **Figura 29-13** Por cortesía de Central Scientific Company.

Capítulo 30

Inicio pág. 974 Robert Greenler; pág. 976 (a) Por cortesía de Optical Coating Laboratory, Inc. (OCLI); (b) © Chuck G'Rear/West Light; pág. 977 (c) © William James Warren/West Light; (d,e) © Chuck G'Rear/West Light; pág. 980 (a) M.A. Dugaay y A.T. Mattick, Bell Telephone

Laboratories, Murray Hill, New Jersey; (b) © 1989 Anglo-Australian Telescope Board; **Figura 30-8 (a)** Por cortesía de Battelle-Northwest Laboratories; (b) © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; **Figura 30-10 (b)** © 1987 Pete Saloutos *The Stock Market*; pág. 984 (a) Por cortesía de *Audio Magazine*; (b) Demetrios Zangos, with kind cooperation of Photographic Sciences Corporation, Webster, New York; (c) © Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc.; (d) Por cortesía de University of Miami, Music Engineering; (e) Por cortesía de Digital Instruments, Santa Barbara, California; **Figura 30-13 (b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 30-16 PSSC Physics**, 2da ed., 1965, D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; **Figura 30-17 (b)** © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; **Figura 30-19 (b)** © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; pág. 989 (a) © Lawrence Manning/West Light; (b) © Dan Boyd/Por cortesía de Naval Research Laboratory; **Figura 30-20 (b)** Por cortesía de AT&T Archives; (c) © 1983 C. Falco/Photo Researchers; **Figura 30-21 (c)** © Robert Greenler; **Figura 30-23 (b)** © Paul Silverman/Fundamental Photographs; pág. 994 (a) © Robert Greenler; (b) © Giovanni DeAmici; **Figura 30-35 (a,b)** Larry Langrill; pág. 999 (a,b) Glen A. Izett, U.S. Geological Survey, Denver, Colorado; (c,d) Dr. Anthony J. Gow, Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire; (e) © Sepp Seitz/Woodfin Camp and Associates, Inc.; pág. 1001 (a) © 1970 Fundamental Photographs; (b) © 1990 PAR/NYC, Inc./Photo by Elizabeth Algieri; pág. 1003 © 1987 Paul Silverman/Fundamental Photographs; **Figura 2 pág. 1005** Robert Greenler; **Figura 3,4 pág. 1006** Robert Greenler.

Capítulo 31

Inicio pág. 1012 © Dagmar Hailer-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **Figura 31-2** Demetrios Zangos; pág. 1015 © 1982 Jon Brenneis/Photo; **Figura 31-12 (c)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 1020 (a,b) A.G.E. FotoStock/ © Peter Arnold, Inc.; pág. 1021 (a,b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 1025 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 31-26 (b)** Nils Abramson; (d) © 1974 Fundamental Photographs; **Figura 31-27 (c)** © Fundamental Photographs; pág. 1032 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 1033 © Bohdan Hrynewych Stock, Boston.

Capítulo 32

Inicio pág. 1041 Robert Parshall, Biomedical Visualization Laboratories, University of Illinois at Chicago; pág. 1044 (a,b) © Lennart Nilsson; pág. 1045 (c) © Lennart Nilsson; (d) Por cortesía de IMEC y University of Pennsylvania, Dept. of Electrical Engineering; pág. 1049 (arriba) Por cortesía de Nikon, Inc.; (margin) © Chuck G'Rear/West Light; **Figura 32-8 (a)** © 1983 Jonathan Levine; pág. 1051 (a) Cornell University; (b) M. Issacson, M. Barshatsky, J. Cline Cornell University; pág. 1053 (a) AIP Niels Bohr Library; (b) © Royal Astronomical Society Library; (c) © Lick Observatory, U.C. Regents; (d) Hale Observatories; (e) © 1980 Gary Ladd; pág. 1054 (a,b,d) © California Association for Research in Astronomy; (c) © Ray Ellis/Photo Researchers, Inc.; pág. 1056 (a) N.A.S.A. (531-76-026); (b) N.A.S.A. (531-76-0390); pág. 1057 (c,d,e) N.A.S.A. (90-HC-508).

Capítulo 33

Inicio pág. 1061 © Ken Kay/Fundamental Photographs;

pág. 1063 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 33-3 (a)** Por cortesía de Bausch & Lomb; **Figura 33-5 (a,b)** Por cortesía de T.A. Wiggins; **pág. 1066 (a,b)** Optical Coating Laboratory, Inc. (OCLI); **Figura 33-7** PSSC Physics, 2da ed., 1965, D.C. Heath & Co. and Education Development Center, Newton, Massachusetts; **Figura 33-9 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-18 (a,b,c)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-19 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-27 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-29 (a,b)** M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*, **Figura 30-30 (a)** Por cortesía de Battelle-Northwest Laboratories; **Figura 33-31** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-32** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-34 (a,b)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-36 (a)** The Bettmann Archive; (b) Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; (c) Por cortesía de Holotek Ltd., Rochester, New York; (d) NRAO/AUI Science Photo Library; **pág. 1088** Por cortesía de Lawrence Livermore National Laboratory, Laser Program; **pág. 1089 (a)** © Philippe Plailly Science Photo Library; (b,c) © Ronald R. Erickson, 1981. Hologram by

Nicklaus Phillips, 1978, for Digital Equipment Corporation; (d) © 1983 Ronald R. Erickson; (e) © Chuck G'Rear/West Light.

Capítulo 34

Inicio **pág. 1100** The Hebrew University of Jerusalem Por cortesía de AIP Niels Bohr Library; **pág. 1101** Por cortesía de NRAO/AUI; **pág. 1126** C. Powell, F. Fowler & D. Perkins Science Photo Library/Photo Researchers; **pág. 1134 (a)** © Michael Freeman; (b) N.A.S.A. (76-HC-612); **pág. 1135** © Michael Freeman.

Capítulo 35

Inicio **pág. 1145** Adapted from Eastman Kodak and Wabash Instrument Corporation; **pág. 1147** Max Planck Institute, Berlin; **pág. 1151** Por cortesía de Thorn EMI Electron Tubes Ltd.; **Figura 35-7 (b)** Por cortesía de General Electric Company; **Figura 35-10** From G. Herzberg, *Annalen de Physik*, Vol. 84, **pág. 565**, 1927; **Figura 35-17 (a,b)** PSSC Physics, 2da ed., 1965, D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Newton, Massachusetts; (c) © C.G. Shull; (d) © Claus Jonsson.

Respuestas

Estas respuestas se han calculado utilizando $g=9,81 \text{ m/s}^2$, a no ser que se especifique otra cosa en el ejercicio o problema. Los resultados normalmente se han redondeado a sólo tres cifras significativas. Si se obtienen diferencias en la última cifra, puede fácilmente ser consecuencia de ligeras diferencias a la hora de redondear los datos de partida, y carecen de importancia.

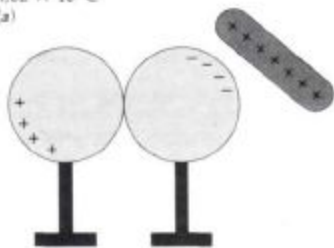
Capítulo 18

Verdadero o falso

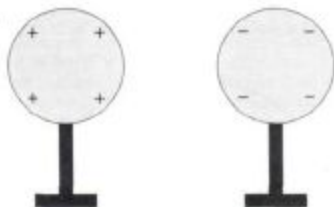
1. Falso; señala hacia una carga negativa 2. Verdadero (excepto las cargas que poseen los quarks que son $e/3$ o $2e/3$, aunque no se ha encontrado ningún quark aislado) 3. Falso; divergen desde las cargas puntuales positivas 4. Verdadero 5. Verdadero

Problemas

1. 5×10^{12} electrones
3. $4,82 \times 10^7 \text{ C}$
5. (a)



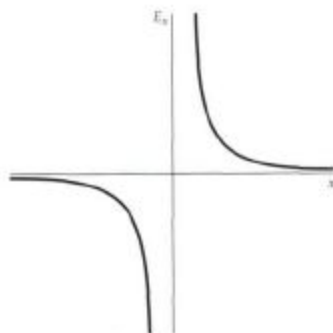
(b)



7. $(1,50 \times 10^2 \text{ N})\hat{i}$
9. $2,09 \times 10^{-3} \text{ N}$ a lo largo de la diagonal, alejándose de la carga -3 nC

11. (a) $(999 \text{ N/C})\hat{i}$ (b) $(-360 \text{ N/C})\hat{j}$

(c)

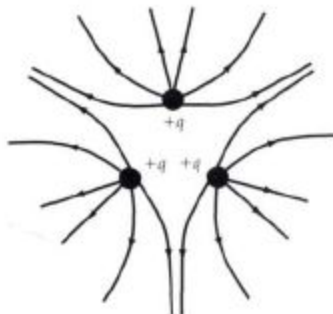


13. (a) $(3,45 \times 10^6 \text{ N/C})\hat{i}$ (b) $(6,90 \times 10^{-7} \text{ N})\hat{i}$

15. $8,18 \times 10^9 \text{ N/C}$, hacia arriba

17. (a) La partícula de la izquierda tiene la carga mayor en un factor de 4 (b) Las partículas a izquierda y derecha son positiva y negativa, respectivamente (c) El campo es intenso por encima y por debajo de la partícula a la izquierda; el campo es débil a la derecha y a la izquierda de las dos partículas.

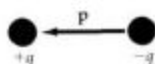
19.



21. (a) $1,76 \times 10^{10} \text{ C/kg}$ (b) $1,76 \times 10^{11} \text{ m/s}^2$, en sentido opuesto a \hat{E} (c) $0,171 \mu\text{s}$ (d) $25,6 \text{ cm}$
23. (a) $7,03 \times 10^{11} \text{ m/s}^2$ (b) $5 \times 10^{-8} \text{ s}$ (c) $8,78 \text{ cm}$ en el sentido de las y negativas.

25. (a) 8×10^{-18} C·m

(b)



27. (a) $3,3 \times 10^{-7}$ por ciento (b) 32,4 N

29. (a) $E = 1,90 \times 10^5$ N/C, $\theta = 235^\circ$ (b)

$F = 3,04 \times 10^{-11}$ N, $\theta = 235^\circ$

31. (a) $3,21 \times 10^5$ N/C (b) $-5,88 \times 10^6$ N/C

33. (a) 6,4 mm por debajo del eje del tubo (b) $17,7^\circ$ por debajo del eje del tubo (c) 4,48 cm por debajo del eje del tubo

35. (a) 4 μ C y 2 μ C (b) +7,12 μ C y -1,12 μ C

37. (c) En el caso de valores grandes de x , el sistema es esencialmente el mismo que si fuese un sistema con una carga $2q$ situada en el origen

39. $E = -\frac{2kqa}{y(y^2 + a^2)}\hat{j} + \frac{kp}{y^2}\hat{i}$

41. (b) 0,241 μ C

43. (a) El equilibrio es inestable para los desplazamientos a lo largo del eje x y estable para los desplazamientos a lo largo del eje y (b) El equilibrio es inestable para los desplazamientos a lo largo del eje y y estable para los desplazamientos a lo largo del eje x (c) $-q/4$ (d) Si las cargas $+q$ están fijas en su lugar, el sistema es estable a los desplazamientos a lo largo del eje y , como en la parte (b). Si las tres cargas están libres para moverse, el sistema es inestable a cualquier desplazamiento

45. (a) Para $+q$, $F = (q)C(x_1 + a)\hat{i}$, para $-q$,

$F = (-q)C(x_1 - a)\hat{i}$

47. (a) $E = (-3kqa^2/x^3)\hat{i}$ (b) $E = (6kq/y^3)\hat{j}$

Capítulo 19**Verdadero o falso**1. Falso; el flujo que atraviesa la superficie debe ser cero, pero E no es necesario que sea cero en todas partes. 2. Falso; es válido para cualquier distribución de cargas, pero para hallar E es útil únicamente en las distribuciones con simetrías. 3. Verdadero. 4. Verdadero. 5. Falso. 6. Falso; puede ser positivo en algunas regiones y negativo en otras. 7. Falso; por ejemplo, E es continuo en el límite de una carga de volumen esférica. E es discontinuo en los puntos en donde existe una densidad superficial de carga σ . 8. Verdadero.**Problemas**1. (a) 17,5 nC (b) 26,2 N/C (c) 4,37 N/C (d) $2,57 \times 10^3$ N/C (e) En el caso de una carga puntual $E_1 = 2,52 \times 10^{-3}$ N/C, aproximadamente un 2 por ciento más bajo que el resultado correcto en el caso de una carga lineal.

3. (a) $4,69 \times 10^9$ N/C (b) $1,13 \times 10^9$ N/C

(c) $1,54 \times 10^9$ N/C (d) $1,55 \times 10^9$ N/C, aproximadamente el 0,07 por ciento mayor que el resultado para el anillo de carga

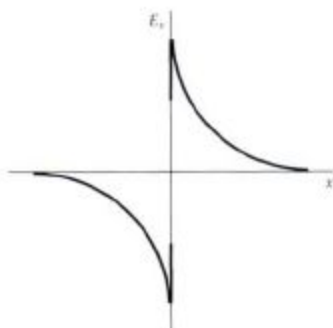
5. (a) $2,00 \times 10^9$ N/C (b) 2,54 N/C

7. a/(3)^{1/2}

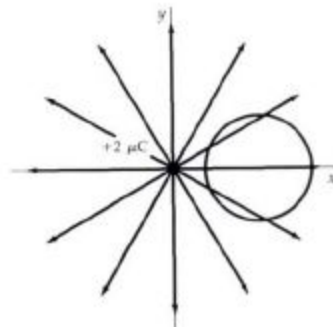
9. (a) (0,804)(2 π k σ) (b) (0,553)(2 π k σ) (c) (0,427)(2 π k σ)

(d) (0,293)(2 π k σ) (e) (0,106)(2 π k σ)

(f)



11. (a)

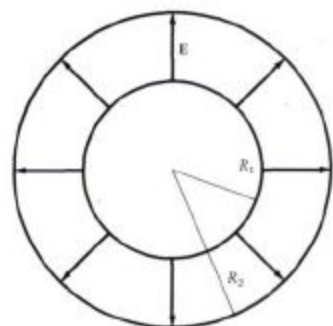


Estas son las líneas que entran y salen de la superficie.

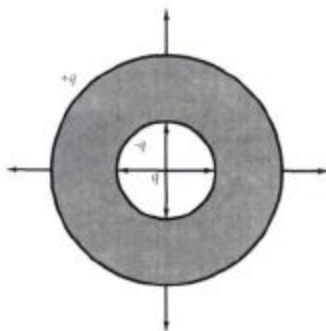
(b) cero (c) cero

13. (a) N (b) N/6 (c) q/ϵ_0 (d) $q/6\epsilon_0$ (e) Deberían cambiar las partes (b) y (d)15. (a) 3,14 m² (b) $7,19 \times 10^4$ N/C (c) $2,26 \times 10^5$ N·m²/C (d) No (e) $2,26 \times 10^5$ N·m²/C

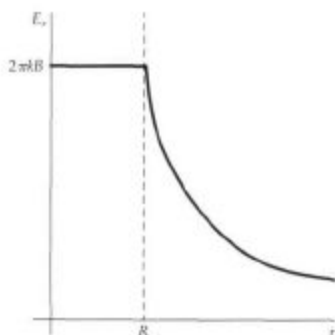
17. (a) 0,407 nC (b) 0 (c) 0 (d) 984 N/C (e) 366 N/C

19. (a) Q = 40,7 nC (b) $E_1 = 0$ (c) $E_1 = 0$ (d) $E_1 = 999$ N/C (e) $E_1 = 610$ N/C21. (a) $E = 0$ para $r < R_1$, $E = kq_1/r^2$ para $R_1 < r < R_2$, $E = k(q_1 + q_2)/r^2$ para $r > R_2$ (b) $q_1/q_2 = 1$, y los signos de q_1 y de q_2 son opuestos (c) Las líneas de campo eléctrico correspondientes a la parte (b) para $q_1 > 0$ son

23. $1.15 \times 10^5 \text{ N/C}$
 25. $9.41 \times 10^5 \text{ N/C}$
 27. (a) Para $r < a$, $E = kq/r^2$; para $a < r < b$, $E = 0$; para $r > b$, $E = kq/r^2$ (b) Las líneas del campo eléctrico son



- (c) Sobre la superficie interior, $\sigma = -q/4\pi a^2$; sobre la superficie exterior, $\sigma = q/4\pi b^2$
 29. $-1.18 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$
 31. (a) $E = (9.41 \times 10^5 \text{ N/C})i$ (b) $E = (3.36 \times 10^6 \text{ N/C})j$ (c) $E = (1.56 \times 10^8 \text{ N/C})(2i - 3j)/\sqrt{13}$
 33. (a) En el centro de la esfera de carga electrónica (b) La posición de equilibrio está a una distancia $d = E_p R^2 / kZe$ del centro de la esfera de electrones (c) $E_p R^2 / k$
 35. (a) En el caso de la superficie interna la carga inducida es $-2.5 \mu\text{C/m}^2$ y la densidad superficial de cargas es $-0.553 \mu\text{C/m}^2$; en el caso de la superficie exterior, la carga inducida es $2.5 \mu\text{C}$, y la densidad de carga superficial es $0.246 \mu\text{C/m}^2$ (b) Para $r < r_1$, $E = kq_1/r^2$; para $r_1 < r < r_2$, $E = 0$; para $r > r_2$, $E = kq_2/r^2$ (c) Los resultados para la superficie interna no cambian. En la superficie exterior, la carga total es $6 \mu\text{C}$, y la densidad superficial de carga es $0.589 \mu\text{C/m}^2$; para $r < r_1$, $E = kq_1/r^2$; para $r_1 < r < r_2$, $E = 0$; para $r > r_2$, $E = k(q_1 + q_2)/r^2$
 37. La respuesta se da en el problema
 39. (a) $E = 2.04 \times 10^5 \text{ N/C}$, $\theta = 56.3^\circ$ en sentido antihorario desde el sentido positivo del eje x (b) $E = 2.63 \times 10^5 \text{ N/C}$, $\theta = 153^\circ$ en sentido antihorario desde el sentido positivo del eje x
 41. Carga total $q = \pi(b^2 - a^2)$; para $r < a$, $E = 0$; para $a < r < b$, $E = k_0^2 \pi \rho (r^2 - a^2)/r^2$; para $r > b$, $E = kq/r^2 = k_0^2 \pi \rho (b^2 - a^2)/r^2$
 43. (a) $q_1 (q_2 = r_2/r_1)$; el elemento s_1 da el mayor campo (b) Cada elemento produce un campo cuyo sentido es de alejamiento del mismo, a lo largo de una línea desde su centro hasta el punto P_1 ; el campo total señala alejándose de s_1 (c) 0 (d) $q_1/q_2 = r_1^2/r_2^2$, cada elemento produce un campo del mismo valor y señalando hacia el exterior; el campo total es nulo; para $E \propto 1/r$, el campo total señalaría en el sentido de alejarse de s_2
 45. $E_x = -k\lambda/y$, $E_y = k\lambda/y$
 47. Para $r < a$, $E = 0$; para $a < r < b$, $E = 2\pi k(r^2 - a^2)/r$; para $r > b$, $E = 2\pi k(b^2 - a^2)/r$
 49. (a) $Q = 2\pi BR^2$ (b) para $r < R$, $E = 2\pi kB$; para $r \geq R$, $E = 2\pi kBR^2/r^2 = kQ/r^2$



51. $F = kQq/[R(R + d)]$
 53. $E = kQx/(x^2 + L^2/4)(x^2 + L^2/2)^{-3/2}$, en donde anillo de radio $r = L/2$, $E = kQx/(x^2 + L^2/4)^{3/2}$
 55. (b) La mitad del campo junto al exterior de un conductor se debe a la carga del área ΔA , y la otra mitad se debe a todas las demás cargas; sólo esta última mitad contribuye a la fuerza (c) 14.3 N/m^2

Capítulo 20

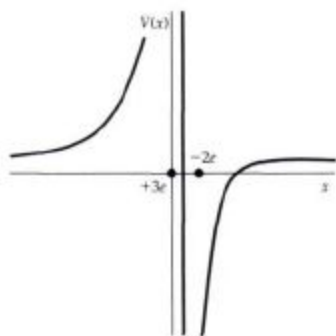
Verdadero o falso

1. Falso; si $E = 0$ en una cierta región, V es constante en la misma, pero no necesariamente cero. 2. Verdadero; si $V = \text{constante}$, $-dV/dx = 0$. 3. Falso, E depende de la variación espacial de V y no de su valor en un punto determinado. 4. Verdadero. 5. Verdadero. 6. Verdadero. 7. Falso; la ruptura del dieléctrico depende del valor del campo eléctrico E y no del valor del potencial. Se produce en el aire cuando $E = 3 \text{ MV/m}$

Problemas

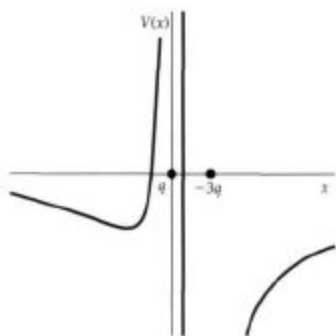
1. (a) $2.4 \times 10^{-11} \text{ J}$ (c) -8000 V
 (d) -2 kV/m (e) $4000 \text{ V} - (2 \text{ kV/m})x$
 (f) $2000 \text{ V} - (2 \text{ kV/m})x$
 3. (a) Positivo (b) 25 000 V/m
 5. (a) $\text{N/C} \cdot \text{m} = \text{kg/C} \cdot \text{s}^2 = \text{V/m}^2$ (b) $q_1 \mu\text{s}^2/2$ (c) $V(x) = -ax^2/2$
 7. (a) $1.29 \times 10^4 \text{ V}$ (b) $7.55 \times 10^5 \text{ V}$ (c) $4.44 \times 10^5 \text{ V}$
 9. (a) $2.68 \times 10^5 \text{ V}$ (b) $1.91 \times 10^5 \text{ V}$
 11. (a) 0.0487 J (b) 0 J (c) -0.0232 J (d) -0.0127 J
 13. 0.190 J (b) -0.0634 J (c) -0.0634 J
 15. (a) En el exterior y junto a la corteza, $E = 6.24 \times 10^5 \text{ V/m}$; justo en el interior, $E = 0$ (b) $V = 749 \text{ V}$, tanto junto al interior como al exterior de la corteza (c) $V = 749 \text{ V}$, $E = 0$
 17. (a) $6.02 \times 10^5 \text{ V}$ (b) $-1.27 \times 10^6 \text{ V}$ (c) $-4.23 \times 10^6 \text{ V}$
 19. (a) $Ax = 3 \text{ m}$, $V(x) = 8.99 \times 10^5 \text{ V}$; $ax = 3.01 \text{ m}$, $V(x) = 8.96 \times 10^5 \text{ V}$ (b) El potencial disminuye cuando x aumenta: $-\Delta V/\Delta x = 2.97 \times 10^5 \text{ V/m}$ (c) $E = 2.997 \times 10^5 \text{ V/m}$ (d) $Ax = 3 \text{ m}$, $y = 0.01 \text{ m}$, $V = 8.99 \times 10^5 \text{ V}$; V tiene casi el mismo valor en los dos puntos porque se encuentran aproximadamente sobre una superficie equipotencial
 21. (a) -3000 V/m (b) -3000 V/m (c) 3000 V/m (d) Cero

23. 0,506 mm
 25. (a) $\pm 8,54 \mu\text{C}$ (b) $\pm 4,80 \times 10^5 \text{ V}$
 27. $26,6 \mu\text{C}/\text{m}^2$
 29. 250 W
 31. (a) $E_x = 2\sqrt{2} kq/a'$, $E_y = 0$ (b) $3\sqrt{2} kq/a$
 (c) $v = q(\sqrt{2} k/ma)^{1/2}$
 33. $V(x = 2 \text{ m}) - V(x = 1 \text{ m}) = -7500 \text{ V}$
 35. (a) $3,10 \times 10^7 \text{ m/s}$ (b) $2,5 \times 10^6 \text{ V/m}$
 37. (a) 234 MeV (b) $2,67 \times 10^{16}$ fisiones por segundo
 39. (a) 30 000 eV (b) $4,8 \times 10^{-11} \text{ J}$ (c) $1,03 \times 10^9 \text{ m/s}$
 41. $kq(1/a - 1/b)$
 43. $V_e - V_o = (2kq/L) \ln(b/a)$
 45. (a)



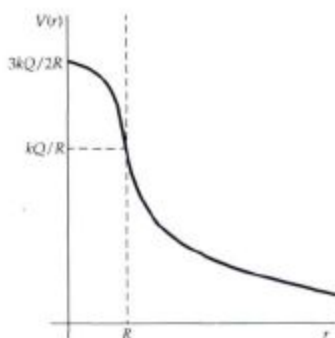
- (b) $x = 3a/5$, $x = 3a$, $x = +\infty$, $x = -\infty$ (c) $2ke^2/a$
 47. (a) $V(x) = kq(1/|x| - 3/|x - 1|)$
 (b) $x = -0,5 \text{ m}$, $x = 0,25 \text{ m}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$
 (c) A $x = -0,5 \text{ m}$, $E_x = -8kq/3$; at $x = 0,25 \text{ m}$, $E_x = 64kq/3$; $E_y = 0$ a $x = \pm\infty$

(d)



49. $1,45 \times 10^{-9} \text{ J} - 9,03 \times 10^{11} \text{ eV}$
 51. (a) $kQ^2(4 + \sqrt{2})/2L$ (b) $kQ^2(2 + \sqrt{2})/2L$
 (c) kQ^2/L (d) 0
 53. $\sigma_1 = 9 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $\sigma_2 = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$
 55. (a) $V(x) = kQ/(x^2 + a^2)^{3/2} + kQ'/|x + 2a|$ (b) Para $x < 2a$, $E_x = kQx/(x^2 + a^2)^{3/2} - kQ'/(x - 2a)^2$; para $x > 2a$, $E_x = kQx/(x^2 + a^2)^{3/2} + kQ'/(x - 2a)^2$
 57. $E_x = -8 \text{ V/m}$, $E_y = -2 \text{ V/m}$, $E_z = -1 \text{ V/m}$

59. (a) $V(r) = kQ/r$ (b) $V(r) = (kQ/2R)(3 - r^2/R^2)$
 (c) $3kQ/2R$ (d)



61. (b) $E_x = 3kpxz/r^3$, $E_y = 3kpyz/r^3$, $E_z = -kz/r^3 + 3kpx^2/r^3$
 63. (a) $V(a) = kQ(1/b - 1/c) = V(b)$, $V(c) = 0$
 (b) $V(a) = V(c) = 0$, $V(b) = -kQa(b - a)/ba = kQ(c - b)(b - a)/(c - a)b^2$; $Q_a = -Q(a/b)(c - b)/(c - a)$, $Q_c = -Q(c/b)(b - a)/(c - a)$; $Q_b = Q$
 65. (a) $v(x) = [(kQ^2/2m)(1/x - 1/a)]^{1/2}$
 (b) $t = (\pi/2)(2ma^2/kQ^2)^{1/2}$

Capítulo 21

Verdadero o falso

1. Falso; C es el cociente entre la carga y la tensión. 2. Falso; depende únicamente del área y separación de las placas. 3. Falso; aunque $C = Q/V$, V es proporcional a Q de modo que dicho cociente no depende de Q . 4. Verdadero. 5. Verdadero. 6. Verdadero. 7. Verdadero.

Problemas

1. (a) $1,69 \times 10^7 \text{ m}^2$ (b) 4117 m o 2,56 mi
 3. $8 \times 10^{-4} \text{ F}$
 5. 22,1 μF
 7. 2,71 nF
 9. (a) 2,08 (b) 45,2 cm^2 (c) 5,2 nC
 11. $2,22 \times 10^{-5} \text{ J}$
 13. (a) 0,625 J (b) 1,875 J
 15. (a) 10^5 V/m (b) 0,0443 J/m^3 (c) $8,85 \times 10^{-3} \text{ J}$
 (d) $1,77 \times 10^{-8} \text{ F}$ (e) $8,85 \times 10^{-3} \text{ J}$
 17. (a) 30 μF (b) 6V (c) La carga del condensador de 10 μF es 60 μC y la del condensador de 20 μF es 120 μC
 19. (a) 24 μC (b) 4 μF
 21. 2 μF
 23. $C_{\text{eq}} = (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3)/(C_1 + C_2)$
 25. (a) 0,05 mm (b) 235 cm^2
 27. (a) 7,91 m^2 (b) 22,9 V (c) $3,66 \times 10^{-4} \text{ J}$ (d) 210 μC
 29. (a) 15,2 μF (b) El condensador de 12 μF tiene una carga de 2400 μC ; los condensadores de 4 μF y 15 μF ambos tienen cargas de 632 μC (c) 0,303 J
 31. (a) La carga del condensador de 20 pF es $1,71 \times 10^{-8} \text{ C}$; la carga del condensador de 50 pF es $4,29 \times 10^{-8} \text{ C}$ (b) La energía inicial es de $9 \times 10^{-5} \text{ J}$, la energía final es $2,57 \times 10^3 \text{ J}$, de modo que se pierde energía al conectar los condensadores
 33. (a) Se consigue la máxima capacidad equivalente

cuando se conectan en paralelo los condensadores, de modo que la combinación apropiada es de tres condensadores de $5\mu\text{F}$ en paralelo (b) Las otras capacidades equivalentes posibles son $10/3\mu\text{F}$, $7,5\mu\text{F}$, y $5/3\mu\text{F}$

35. (a) 6 V (b) Las energías inicial y final son $1,15 \times 10^{-2}$ J y $2,88 \times 10^{-4}$ J, respectivamente

37. (a) 1200 V (b) $6,4 \times 10^{-4}$ J

39. (a) $1,67 \times 10^{-9}$ F (b) $1,17 \times 10^{-9}$ C (c) 7×10^6 V/m

41. (a) $5\mu\text{F}$ (b) 133 V

43. (a) $2,28 \times 10^{-9}$ F (b) $6,67 \times 10^{-9}$ C

45. Conectar cuatro de los condensadores en serie para obtener una capacidad equivalente de $0,5\mu\text{F}$ y una tensión de ruptura de 400 V; a continuación, conectar cuatro de estos grupos de cuatro condensadores en paralelo para conseguir la capacidad final de $2\mu\text{F}$

47. (a) $C_{eq} = \epsilon_0 b[(x-1)x + a]/d$ (b) Para $x = 0$, $C_{eq} = \epsilon_0 ba/d$; para $x = a$, $C_{eq} = \epsilon_0 ba/d$

49. (a) $2C_0$ (b) $11C_0$

51. (a) $3,33 \times 10^{-4}$ m (b) $3,77$ m²

53. (a) 40 V (b) $1,49 \times 10^{-3}$ m² (c) 6

55. (a) $2,51 \times 10^3$ m³ (b) $5,02 \times 10^{-2}$ m³

57. (a) Sea c el valor en faradios de C_1 y C_2 ; entonces las cargas en coulombios son $200c = Q_1$ y $200xc = Q_2$

(b) La energía en julios es $U = 20\,000(1+x)c$

(c) $U_f = 10\,000(1+x)^2c$ (d) $V = (100\text{ V})(1+x)$

59. (a) 0,255 J (b) El condensador sin ningún dieléctrico tiene una carga de 10^{-3} C, y el condensador con el dieléctrico tiene una carga de $3,5 \times 10^{-3}$ C (c) Los dos condensadores tienen ahora la misma carga, $2,25 \times 10^{-3}$ C

(d) 0,506 J

61. (a) 0,001 J (b) El condensador sin dieléctrico tiene una carga de $47,6\mu\text{C}$; el condensador con el dieléctrico tiene una carga de $152\mu\text{C}$ (c) $4,76 \times 10^{-4}$ J

63. $2,55 \times 10^{-4}$ J

65. (a) $E = 2kQ/rL$, $\eta = 2\epsilon_0 k^2 q^2 / r^2 L^2$ (b) $(kQ^2/rL) dr$

(c) $(kQ^2/L) \ln(R_2/R_1)$

67. (a) $(Q/2\pi\epsilon_0 xL) \ln(b/a)$ (b) $Q/2\pi aL$ (c) $-Q/2\pi aL$

(d) $-Q(x-1)/2\pi aLx$ (e) $Q(x-1)/2\pi aLx$

(f) $(kQ^2/Lx) \ln(b/a)$ (g) $(kQ^2/Lx)(x-1) \ln(b/a)$

69. (a) $3\epsilon_0 A/(y_x \ln 4)$ (b) $\sigma_{exta} = -3\sigma/4$, $\sigma_{extb} = 0$

(c) $(3\sigma/y_x)(1 + 3y/y_x)^{-1}$

Capítulo 22

Verdadero o falso 1. Falso; $R = V/I$ es la definición de resistencia. La ley de Ohm establece que R es independiente de I o de V 2. Falso; se desplazan en sentido opuesto 3. Verdadero 4. Verdadero 5. Verdadero 6. Falso

Problemas

1. (a) 600 C (b) $3,75 \times 10^{13}$

3. 0, 4 A

5. (a) $v/2\pi r$ (b) $vq/2\pi r$

7. (a) $3,21 \times 10^{13}$ protones/m³ (b) $3,75 \times 10^{17}$

(c) $q = It = (10^3 \text{ C/s})t$

9. (a) 1 V (b) 0,1 V/m

11. (a) $V_{Ca} = I\ell\rho_{Ca}/A$, $V_{Fe} = I\ell\rho_{Fe}/A$, $V_{Fe}/V_{Ca} = 5,88$

(b) E es mayor en el hilo de hierro

13. (a) 0,0275 Ω (b) 0,030 Ω

15. 0,182 Ω

17. 45,6 $^\circ\text{C}$

19. 250 W

21. (a) 5 mA (b) 50 V

23. (a) 0,707 A (b) 7,07 V

25. 180 J

27. (a) 240 W (b) 228 W (c) $4,32 \times 10^4$ J (d) 2160 J

29. $\$77,76$

31. (a) 4,5 Ω (b) $I_1 = 2,67$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 2/3$ A

33. (a) 6 Ω (b) Las dos resistencias superiores transportan ambas una corriente de $2/3$ A; las dos resistencias en paralelo de 6 Ω transportan una corriente de $2/3$ A cada una, y por la resistencia aislada de 6 Ω de la parte inferior circula una corriente de $4/3$ A

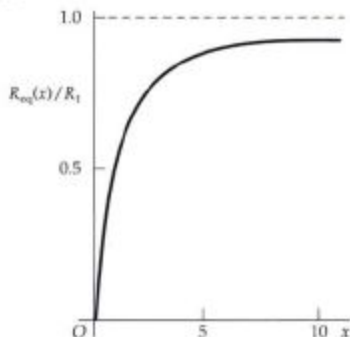
35. (b) Sin efecto

37. (a) $I_1 = 30/19$ A, $I_2 = 12/19$ A, $I_3 = 6/19$ A

(b) 9,47 W

39. 0,0314 Ω

41. (b)



43. (a) 0,05 A (b) 5000 W

45. (a) $E_{Ca} = 0,0433$ V/m, $E_{Fe} = 0,255$ V/m (b) $V_{Ca} = 3,46$ V, $V_{Fe} = 12,5$ V (c) $R_{eq} = 7,97$ Ω , $R_{Ca} = 1,73$ Ω , $R_{Fe} = 6,24$ Ω

47. 382 $^\circ\text{C}$

49. (a) $\$150,77$ (b) 3,79 centavos/kW-h

51. (a) $6,91 \times 10^4$ J (b) 12,8 h

53. (a) 3×10^3 kW-h (b) $\$2663$ por kW-h (c) 0,027 centavos

55. (a) 0,03 Ω (b) 0,3 por ciento (c) 7,5 $^\circ\text{C}$

57. (a) 79,6 Ω (b) 318 Ω

59. (a) 15 A (b) 11,2 Ω (c) 1,28 kW

61. (a) $5,14 \times 10^5$ V (b) 0,462 V (c) 41,6 W

63. (b) $L_{Ca} = 264L_{Fe}$

65. $R = \pi r^2 / t \ln(b/a)$

67. (a) $R = (\rho/2\pi L) \ln(b/a)$ (b) 2,05 A

69. $R = \rho L/\pi ab$

Capítulo 23

Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Falso; es el tiempo necesario para que la carga se reduzca en e^{-1} 3. Falso; el voltímetro se coloca en paralelo con la resistencia

Problemas

1. (a) $I = 1,13$ A, $P = 6,79$ W (b) $I = 0,583$ A, $P = 3,50$ W

3. (a) 3 V (b) 1 Ω

5. (a) 1 A (b) 12 W para la fem de la izquierda; 6 W para la fem de la derecha (c) 2 W para la resistencia de 2 Ω ; 4 W para la resistencia de 4 Ω

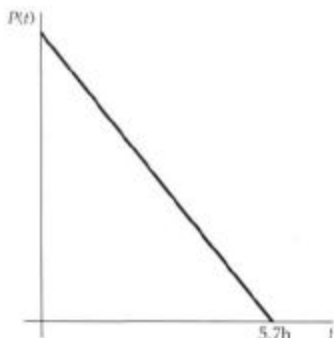
7. (a) $I_1 = 2/3$ A, $I_2 = 8$ A, $I_3 = 14/9$ A

(b) $V_1 - V_2 = -28/3$ V (c) 8 W suministrados por la fem de la izquierda, 32/3 W por la fem de la derecha

9. (a) 6×10^{-4} C (b) 0,2 A (c) 3×10^{-5} s

(d) $8,12 \times 10^{-3}$ C

11. $4,81 \times 10^7 \Omega$
 13. (a) $5,69 \mu\text{C}$ (b) $1,10 \mu\text{C/s}$ (c) $1,10 \mu\text{A}$
 (d) $0,62 \times 10^{-4} \text{ W}$ (e) $2,44 \times 10^{-4} \text{ W}$
 (f) $4,19 \times 10^4 \text{ J/s}$
 15. (a) $0,0841 \Omega$ (b) 4027Ω
 17. (a) $0,168 \Omega$ (b) $0,168 \Omega$ (c) $2,14 \times 10^6 \Omega$
 19. (a) 910Ω (b) 1000Ω (c) 9000Ω
 21. $R_1 = 7582 \Omega$, $R_2 = 69\,231 \Omega$, $R_3 = 692\,308 \Omega$
 23. (a) La conexión en paralelo suministra una potencia más elevada (b) La conexión en serie suministra una potencia más elevada
 25. (a) Las corrientes en las resistencias de 1Ω y 6Ω son 2 A y 1 A , respectivamente; la corriente en la resistencia horizontal de 2Ω es 2 A ; la corriente en la resistencia vertical de 2Ω es 1 A (b) La fem de 8 V suministra 16 W , la fem de 4 V superior suministra 8 W y la fem de 4 V inferior absorbe 4 W (c) La potencia disipada en las resistencias es 4 W , 6 W , 8 W y 2 W , siendo el orden el mismo del apartado (a)
 27. (b) $9,65 \text{ h}$
 29. (a) La conexión de las baterías en paralelo proporciona la corriente más elevada para R pequeño; si se conectan en serie funcionan mejor para R grande (b) $10,7 \text{ A}$ (c) $6,67 \text{ A}$ (d) $5,45 \text{ A}$ (e) $4,44 \text{ A}$
 31. (a) Conectar el galvanómetro en serie con una resistencia de $R = 999,800 \Omega$ (b) Conectar el galvanómetro en paralelo con una resistencia de $R = 10^{-5} \Omega$
 33. (a) $I_{1 \rightarrow 2} = 2 \text{ A}$; $I_{2 \rightarrow 3} = 1,5 \text{ A}$; $I_{3 \rightarrow 4} = 0,5 \text{ A}$; $I_{4 \rightarrow 5} = 1,5 \text{ A}$; $I_{5 \rightarrow 6} = 0,5 \text{ A}$; $I_{6 \rightarrow 7} = 1,5 \text{ A}$ (b) $V_1 = 0 \text{ V}$, $V_2 = 24 \text{ V}$, $V_3 = 21 \text{ V}$, $V_4 = 15 \text{ V}$, $V_5 = 15 \text{ V}$, $V_6 = 5 \text{ V}$, $V_7 = 0 \text{ V}$, $V_8 = 12 \text{ V}$
 35. (a) $30/3 \Omega$ (b) En el caso de las tres resistencias superiores y de las tres inferiores, cada una de ellas transporta una corriente de $2/5 \text{ A}$; en el caso de las tres resistencias de la parte intermedia, por la primera y la última circula una corriente de $4/5 \text{ A}$, y por la resistencia del medio la corriente vale $2/5 \text{ A}$
 37. $\mathcal{E} = 7 \text{ V}$, $R = 14 \Omega$
 39. (a) $3,42 \text{ A}$ (b) $0,962 \text{ A}$ (c) $Q_{10} = 260 \mu\text{C}$, $Q_5 = 130 \mu\text{C}$
 41. (a) 10^{-4} A (b) $6,67 \times 10^{-4} \text{ A}$ (c) 40 V
 43. (a) $43,9 \Omega$ (b) 300Ω (c) 3800Ω
 45. (a) La corriente en la batería del coche es $-57,0 \text{ A} + (10 \text{ A/h})t$, en donde el signo menos significa que la corriente está entrando en la batería; la corriente en la segunda batería es $63,0 - (10 \text{ A/h})t$ (b)



47. (a) El caso *a* es preferible para R pequeño y el caso *b* para R grande; el caso *a* es la configuración correcta para un voltímetro ideal con R_v infinitamente grande; si R es comparable con R_v , entonces el caso *b* compensa por el hecho de que por el voltímetro circula una corriente finita (b) Caso *a*, $R = 0,498 \Omega$; caso *b*, $R = 0,6 \Omega$ (c) Caso *a*, $R = 2,91 \Omega$; caso *b*, $R = 3,10 \Omega$ (d) Caso *a* $R = 44,4 \Omega$; caso *b*, $R = 80,1 \Omega$

49. Las respuestas se dan en el problema

51. Las respuestas se dan en el problema

53. $R_{eq} = 1/3R$

55. $1/3R$

57. $R_{eq} = (1 + \sqrt{3})R$

59. $I_{10} = 104,4/141 \text{ A}$, $I_{20} = 66,6/141 \text{ A}$, $I_{30} = 54/141 \text{ A}$

$I_{40} = 50,4/141 \text{ A}$, $I_{50} = 120,6/141 \text{ A}$

61. (a) $4,17 \times 10^{-3} \text{ A}$ (b) $2,78 \times 10^{-3} \text{ A}$

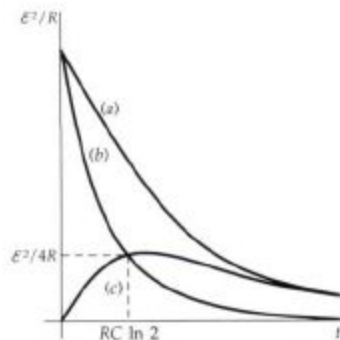
(c) $I(t) = (2,78 \times 10^{-3} \text{ A}) e^{-t/0,13 \text{ s}}$

63. (a) $I(t) = (V_0/R)e^{-t/RC}$, donde $C = C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ (b) $P(t) = (V_0^2/R)e^{-2t/RC}$

(c) $U = \frac{1}{2} C_{eq} V_0^2$

65. (a) $\mathcal{E}I(t) = \mathcal{E}^2/R e^{-t/RC}$ (b) $I(t)R = (\mathcal{E}^2/R)e^{-t/RC}$

(c) $dU/dt = (\mathcal{E}^2/R)e^{-t/RC} - (\mathcal{E}^2/R)e^{-t/RC}$



(d) $(dU/dt)_{max} = \mathcal{E}^2/4R$, $t = RC \ln 2$

Capítulo 24

Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Verdadero 3. Verdadero 4. falso; es independiente del radio 5. Verdadero

Problemas

1. $-1,25 \times 10^{-11} \text{ N j}$
 3. (a) $-7,17 \times 10^{-13} \text{ N j}$ (b) $5,12 \times 10^{-13} \text{ N i}$ (c) 0
 (d) $8,19 \times 10^{-13} \text{ N i} - 6,14 \times 10^{-13} \text{ N j}$
 5. 1 N
 7. $14,0 \text{ N/m k}$
 9. (a) $2,20 \text{ mm}$ (b) $f = 9,08 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $T = 1,10 \times 10^{-9} \text{ s}$
 11. (a) $-1,05 \times 10^6 \text{ N/C k}$ (b) No
 13. (a) $1,42 \text{ km}$ (b) $28,5 \text{ m}$
 15. (a) $2,13 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ (b) $46,0 \text{ MeV}$ (c) Tanto la frecuencia como la energía cinética se reducirá en un factor 2
 17. (a) $0,302 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ (b) $0,131 \text{ N}\cdot\text{m}$
 19. $2,83 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$
 21. (a) 0 (b) $2,7 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$
 23. (a) $2,125 \text{ N}\cdot\text{m/T i}$ (b) $-3,40 \text{ N}\cdot\text{m j} + 5,31 \text{ N}\cdot\text{m k}$
 25. (a) $1,07 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ (b) $5,85 \times 10^{10} \text{ electrones/m}^3$
 27. (a) $3,69 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ (b) $1,48 \mu\text{V}$

29. $1,02 \times 10^{-4} \text{ V}$
 31. $0,0864 \text{ N} \cdot \text{i} - 0,0648 \text{ N} \cdot \text{j}$
 33. (a) $7,35 \text{ mm}$ (b) $6,64 \times 10^{-3} \text{ T}$
 35. (a) Los puntos normales a 37° por debajo del eje x
 (b) $\hat{n} = 0,799 \text{ i} - 0,602 \text{ j}$ (c) $m = 0,335 \text{ A} \cdot \text{m}^2 - 0,253 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{j}$ (d) $0,503 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{k}$
 37. Las respuestas se dan en el problema
 39. $r_1/r_2 = \sqrt{2}$, $r_1/r_3 = 1$
 41. (a) $v_1/v_2 = 2$ (b) $E_{1p}/E_{2p} = 1$ (c) $L_1/L_2 = 1/2$
 43. $J = Mg/\pi RB_1$
 45. La respuesta se da en el problema
 47. Las respuestas se dan en el problema
 49. (a) $1,6 \times 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{j}$ (b) $10 \text{ V/m} \cdot \text{j}$ (c) 20 V
 51. (a) $\vec{B} = (Mg/IL) \text{tg } \theta$ (b) $a = g \text{ sen } \theta$, colina arriba
 53. $T = 2\pi(M/\pi IB)^{1/2}$
 55. La respuesta se da en el problema
 57. La respuesta se da en el problema
 59. La respuesta se da en el problema
 61. La respuesta se da en el problema

Capítulo 25

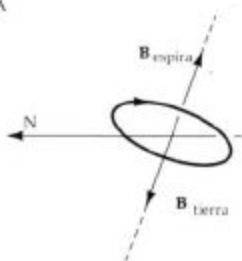
Verdadero o falso 1. Falso 2. Verdadero 3. Falso; varía en razón inversa con la distancia 4. Falso; es útil para hallar \vec{B} únicamente si existe simetría, pero es válida para cualquier corriente continua 5. Verdadero

Problemas

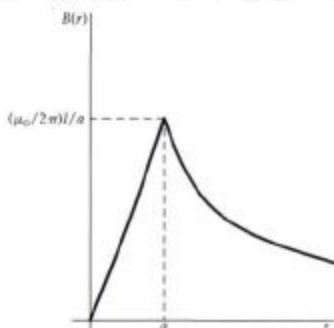
1. (a) $\vec{B} = -9 \times 10^{-12} \text{ T} \cdot \text{k}$ (b) $\vec{B} = -3,6 \times 10^{-11} \text{ T} \cdot \text{k}$
 (c) $\vec{B} = 3,6 \times 10^{-11} \text{ T} \cdot \text{k}$ (d) $\vec{B} = 9 \times 10^{-12} \text{ T} \cdot \text{k}$
 3. (a) 0 (b) $-3,56 \times 10^{-23} \text{ T} \cdot \text{k}$ (c) $4 \times 10^{-23} \text{ T} \cdot \text{k}$
 5. $12,5 \text{ T}$
 7. $-9,6 \times 10^{-12} \text{ T} \cdot \text{j}$
 9. $11,1 \text{ A}$



11. $6,98 \times 10^{-4} \text{ T}$
 13. (a) $x = \pm 5,72 \text{ cm}$ (b) $x = \pm 13,6 \text{ cm}$
 (c) $x = \pm 29,8 \text{ cm}$
 15. (a) $-8,89 \times 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{k}$ (b) 0 (c) $8,89 \times 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{k}$
 (d) $-1,6 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{k}$
 17. (a) $-1,78 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{k}$ (b) $-1,33 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{k}$
 (c) $-1,78 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{k}$ (d) $1,07 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{k}$
 19. (a) $6,4 \times 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{j}$ (b) $-4,8 \times 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{k}$
 21. Los campos producidos por los segmentos de conductor, que van de izquierda a derecha, son 0; $56,6 \mu\text{T}$; $113 \mu\text{T}$; $56,6 \mu\text{T}$, y 0; todos los campos tienen sentido dirigido hacia el papel; el campo total es $226 \mu\text{T}$ hacia el papel.
 23. $9,47 \text{ A}$



25. (a) Antiparalelo (b) $39,3 \text{ mA}$
 27. 28 A
 29. (a) $4,5 \times 10^{-4} \text{ N/m}$ hacia la derecha (b) $30 \mu\text{T}$ hacia abajo
 31. (a) C_1 , $(8 \text{ A})\mu\text{C}$; C_2 , 0; C_3 , $(-8 \text{ A})\mu\text{C}$ (b) Ninguno de ellos
 33. (a) $8 \times 10^{-4} \text{ T}$ (b) $4 \times 10^{-3} \text{ T}$ (c) $2,86 \times 10^{-3} \text{ T}$ (d)



35. (a) $0,0273 \text{ T}$ (b) $0,0200 \text{ T}$
 37. (a) $3,2 \times 10^{-10} \text{ N}$, en sentido opuesto a la corriente
 (b) $3,2 \times 10^{-10} \text{ N}$, alejándose del conductor (c) 0
 39. (a) $\pi(\mu_0 J/L) = 3,14(\mu_0 J/L)$ (b) $(8\sqrt{2}/\pi)(\mu_0 J/L) = 3,60(\mu_0 J/L)$ (c) $(27/2\pi)(\mu_0 J/L) = 4,30(\mu_0 J/L)$
 41. (a) $3\sqrt{2} \mu_0 I^2/4\pi a$, a lo largo de la diagonal hacia la esquina opuesta (b) $\sqrt{2} \mu_0 I^2/4\pi a$, a lo largo de la diagonal alejándose de la esquina opuesta
 43. (a) $2,26 \times 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{m}$ (b) $1,13$ (c) $10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}$ (d) 0
 45. $\tau = \pi r^2 \mu_0 N_1 I_1 I_2 / 2r_2 = 1,97 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$, en donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la bobina grande y pequeña, respectivamente
 47. $3,18 \text{ cm}$
 49. (a) 80 A , en el sentido positivo de z
 (b) $-2,4 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{j}$
 51. (a)

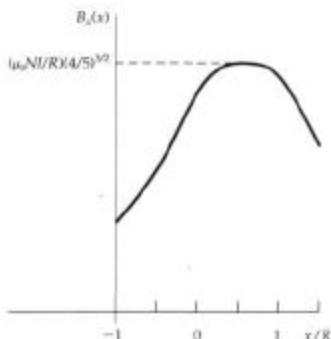
$$B = \frac{\mu_0 J}{2\pi R}, \text{ sen } \theta,$$

siendo R la distancia perpendicular desde el punto P al hilo (b) En el caso de un polígono de N lados,

$$B = \frac{N\mu_0 J}{2\pi R} \text{sen } (\pi/N);$$

para valores grandes de N , el campo tiende a $\mu_0 I/2R$

53. (a) $x = 5 \text{ cm}$, $B = 0,540 \text{ T}$; $x = 7 \text{ cm}$, $B = 0,0539$; $x = 9 \text{ cm}$, $B = 0,0526 \text{ T}$; $x = 11 \text{ cm}$, $B = 0,0486 \text{ T}$ (b)



55. (a) La fuerza sobre cada uno de los segmentos horizontales es $0,501 \times 10^{-4}$ N, hacia abajo en el segmento superior y hacia arriba en el segmento inferior; la fuerza sobre el segmento vertical izquierdo es 2×10^{-4} N hacia la derecha; y la fuerza sobre el segmento vertical de la derecha es $0,571 \times 10^{-4}$ N hacia la izquierda (b) $1,43 \times 10^{-4}$ N hacia la derecha
 57. $B_z = (\mu_0 I L^2 / 2\pi x^2)(1 + L^2/4x^2)^{-1/2}(1 + 2L^2/4x^2)^{-1/2}$

$$59. (a) B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)} \left[\frac{R}{2} - \frac{a^2}{2R - b} \right]$$

$$(b) B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi(R^2 - a^2)} \left[\frac{a^2 R}{4R^2 + b^2} - \frac{R}{4} \right]$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2 b}{2\pi(R^2 - a^2)(4R^2 + b^2)}$$

$$61. (c) B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \omega [(R^2 + 2x^2)/(x^2 + R^2)^{3/2} - 2x]$$

63. La respuesta se da en el problema

$$65. (a) dm = (N/L) \pi R^2 dx = nIA dx$$

Capítulo 26

Verdadero o falso 1. Falso; depende únicamente de la variación del flujo respecto al tiempo 2. Verdadero 3. Verdadero 4. Falso 5. Verdadero

Problemas

$$1. (a) 5 \times 10^{-4} \text{ Wb} \quad (b) 4,33 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$(c) 2,5 \times 10^{-4} \text{ Wb} \quad (d) 0$$

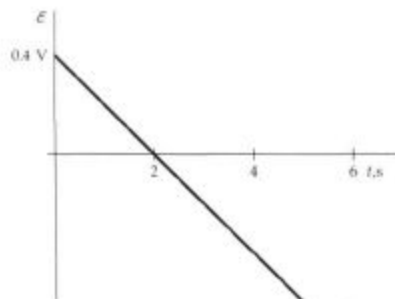
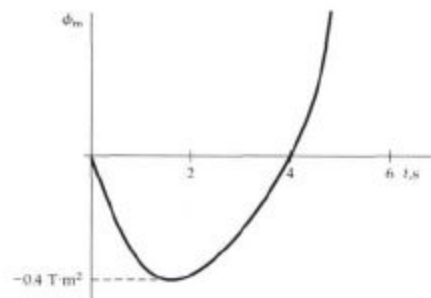
$$3. 7,58 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$5. (a) 8,48 \times 10^{-2} \text{ Wb} \quad (b) 7,97 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

$$7. (a) 8,48 \times 10^{-2} \text{ Wb} \quad (b) 133 \text{ vueltas}$$

$$9. 109 \text{ T/s}$$

$$11. (a)$$



(b) Para $t = 2$ s, ϕ_m tiene su máximo valor negativo; ϕ_m aumenta indefinidamente cuando t tiende a infinito

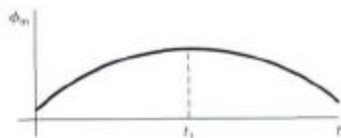
(c) $\phi_m = 0$ a $t = 0$ y $t = 4$ s; para $t = 0$ s, $\mathcal{E} = 0,4$ V, y para $t = 4$ s, $\mathcal{E} = -0,4$ V

$$13. 2,8 \times 10^{-3} \text{ C}$$

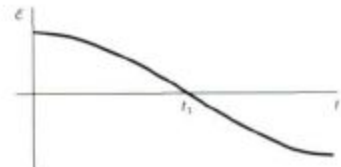
$$15. (a) 7,07 \times 10^{-5} \text{ V} \quad (b) 6,64 \times 10^{-5} \text{ V}$$

$$17. (a) 3,1 \times 10^{-3} \text{ Wb} \quad (b) 2,21 \times 10^{-3} \text{ V}$$

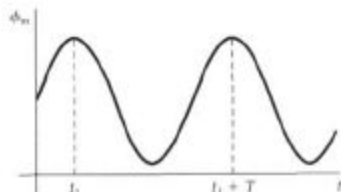
19. (a)



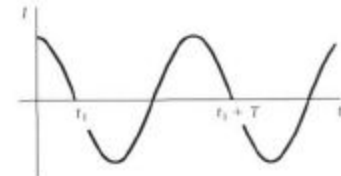
(b)



21. (a)



(b)



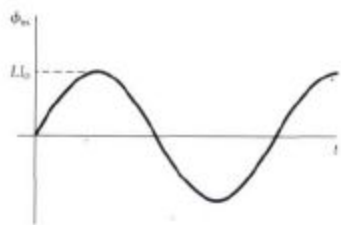
$$23. 400 \text{ m/s}$$

$$25. (a) 3,6 \text{ V} \quad (b) 3 \text{ A} \quad (c) 1,8 \text{ N} \quad (d) 10,8 \text{ W} \quad (e) 10,8 \text{ W}$$

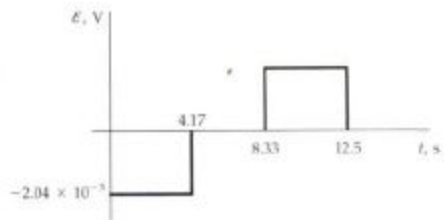
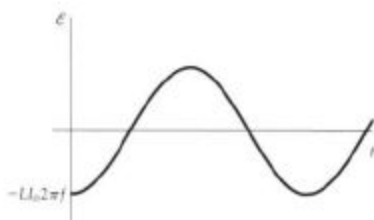
$$27. 0,332 \text{ T}$$

$$29. 0,707 \text{ T}$$

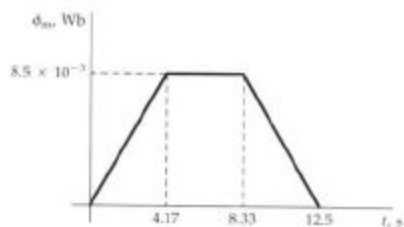
$$31. \phi_m = L I_0 \sin 2\pi ft$$



$$\mathcal{E} = -LI_0 2\pi f \cos 2\pi ft$$



33. 1.89 mH
 35. (a) $t = 0$ A, $di/dt = 25$ A/s (b) $I = 2.27$ A, $di/dt = 20.5$ A/s (c) $I = 7.90$ A, $di/dt = 9.20$ A/s (d) $I = 10.8$ A, $di/dt = 3.38$ A/s
 37. (a) 13.5 mA (b) 7.44×10^{-4} A
 39. (a) $t = 0$ s, $P = 47.7$ W; $t = 100$ s, $P = 48.0$ W (b) $t = 0$ s, $FR = 47.4$ W; $t = 100$ s, $FR = 48.0$ W (c) $t = 0$ s, $dI_{av}/dt = 0.321$ W; $t = 100$ s, $dI_{av}/dt = 0$ W
 41. (a) 3.98×10^3 J (b) 4.43×10^{-4} J (c) 3.98×10^3 J
 43. $B\pi R^2$
 45. (a) $\mu_0 I N \pi R^2$ (b) $\mu_0 I N \pi R^2$
 47. (b) 275 rad/s
 49. (a) 13.9 Ω (b) 214 V
 51. (a) 88.1 ms (b) 35.2 mH
 53. (a) 2.41 s (b) 20.1 s
 55. La respuesta se da en el problema
 57. (a) $I_0 = I_{av} = I_1 = 1$ A, $I_{av} = 0$ A (b) $I(t) = (1 \text{ A}) e^{-t/2}$
 59. (a) En el caso de la resistencia, $di/dt = 9000$ A/s; en las bobinas, $di_1/dt = 3000$ A/s y $di_2/dt = 6000$ A/s, en donde 1 y 2 se refieren a las bobinas de 8mH y 4mH, respectivamente (b) 1.6 A
 61. (a) 0.0536 J (b) 447 J/m³ (c) 0.0335 T (d) 447 J/m³
 63. (a) $E = \frac{1}{2} \mu_0 n I^2 \cos \omega t$
 (b) $E = \frac{1}{2} \mu_0 n (R^2/r) I^2 \cos \omega t$
 65. (a) $0 \text{ s} \leq t \leq 4.17$ s, $\phi_m = (2.04 \times 10^{-3} \text{ Wb/s})t$; $4.17 \text{ s} \leq t \leq 8.33$ s, $\phi_m = 8.5 \times 10^{-3}$ Wb; $8.33 \text{ s} \leq t \leq 12.5$ s, $\phi_m = 8.5 \times 10^{-3}$ Wb — $(2.04 \times 10^{-3} \text{ Wb/s})(t - 8.33)$; $t > 12.5$ s, $\phi_m = 0$



- (b) $0 \text{ s} \leq t \leq 4.17$ s, $\mathcal{E} = -2.04 \times 10^{-3}$ V;
 $4.17 \text{ s} \leq t \leq 8.33$ s, $\mathcal{E} = 0$ V; $8.33 \text{ s} \leq t \leq 12.5$ s,
 $\mathcal{E} = 2.04 \times 10^{-3}$ V; $t > 12.5$ s, $\mathcal{E} = 0$

67. (a) $F = (\mathcal{E} - Blv)Bl/R = m dv/dt$ (b) $v_1 = \mathcal{E}/Bl$
 (c) 0
 69. Las respuestas se dan en el problema
 71. (a) 1.38×10^{-4} V/m (b) 5.51×10^{-8} V
 73. Las respuestas se dan en el problema
 75. (a) $(\mu_0 J/\pi) \ln [(d-a)/a]$ (b) $(\mu_0 J/\pi) \ln [(d-a)/a]$
 77. (c) $\frac{1}{2} I^2 B \theta$
 79. 12 mH
 81. $(\mu_0 I^2/2\pi) \ln (r_2/r_1)$

Capítulo 27

Verdadero o falso 1. Verdadero teóricamente, pero resulta enmascarado por el paramagnetismo o el ferromagnetismo en los materiales cuyas moléculas tienen momentos dipolares permanentes 2. Verdadero 3. Falso 4. Verdadero 5. Falso

Problemas

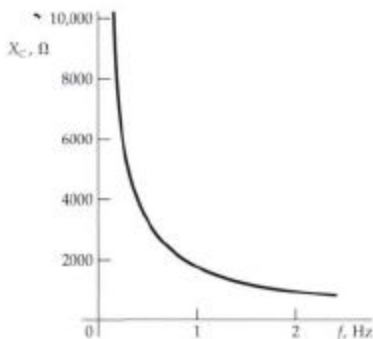
1. (a) $B_{av} = 0.0101$ T, $B = 0.0101$ T (b) $B_{av} = 0.0101$ T, $B = 1.52$ T
 3. $B_{av} = 0.0101$ T, $M = 0.183$ A/m, $B = 0.0101$ T
 5. (a) El campo disminuye en un 6.8×10^{-3} por ciento (b) La autoinducción también disminuye en un 6.8×10^{-3} por ciento
 7. (a) 0.0628 T (b) 0.0628 T hasta tres cifras, aunque mayor que (a) en un 2.3×10^{-3} por ciento (c) 0.0628 T hasta tres cifras, pero menor que (a) en un 2.3×10^{-3} por ciento
 9. $m = 1.69 m_p$
 11. (a) $M_1 = 5.58 \times 10^6$ A/m, $\mu_0 M_1 = 0.701$ T (b) 5.23×10^{-3} (c) Se han despreciado los efectos diamagnéticos y estos efectos tienden a reducir la susceptibilidad
 13. $M = 6.87 \times 10^6$ A/m, $B = 0.864$ T
 15. (a) 0.0126 T (b) 1.36×10^6 A/m (c) 137
 17. (a) 0.0603 T (b) 24 A
 19. (a) 8.12×10^6 A/m (b) 1.62×10^{20} electrones (c) 24.4 A
 21. (a) 6×10^{11} m³ (b) 24.3 km
 23. $n_1 = 418 n_2$
 25. $B_{av} = \mu_0 NI/2\pi R$, $B = \mu_0 (NI/2\pi R + M)$
 27. (a) 1.42×10^6 A/m (b) $K_m = 90$, $\mu = 90\mu_0 = 1.13 \times 10^{-1}$ T·m/A, $\chi_m = 89$
 29. (a) 15.1 T (b) 1.2×10^7 A/m (c) 0.0302 T
 31. La respuesta se da en el problema
 33. (a) 0.0524 A·m² (b) 7.70×10^6 A/m (c) 2.31×10^4 A
 35. La respuesta se da en el problema
 37. (b) 1.25 N
 39. (a) 3.02×10^{-4} T (b) 0.121 T (c) 14.5 J/m³
 41. -2.21×10^{-1}

Capítulo 28

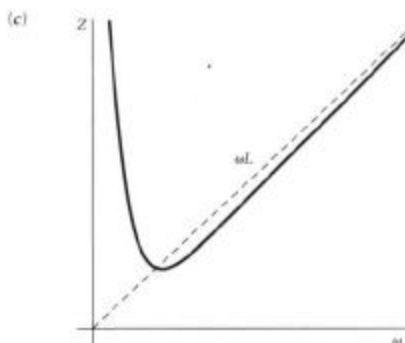
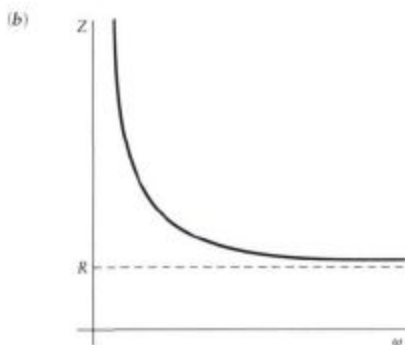
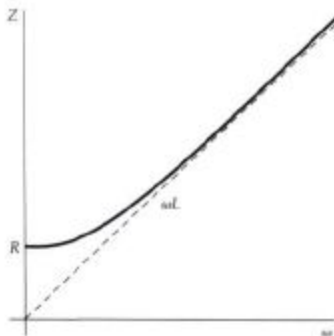
Verdadero o falso 1. Falso; la potencia disipada es proporcional a I^2 2. Verdadero 3. Verdadero 4. Verdadero 5. Verdadero 6. Verdadero

Problemas

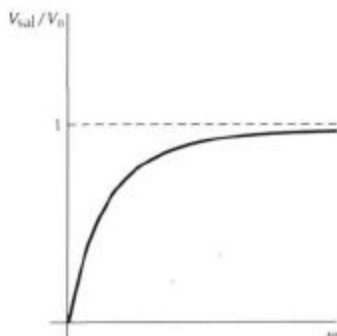
1. (a) 0,833 A (b) 1,18 A (c) 200 W
 3. (a) 20,8 A (b) 29,5 A (c) $I_a = 41,7$ A, $I_{\text{máx}} = 58,9$ A
 5. (a) 0,377 Ω (b) 3,77 Ω (c) 37,7 Ω
 7. 1,59 kHz
 9. (a) 2,65 M Ω (b) 26,5 k Ω (c) 26,5 Ω
 11.



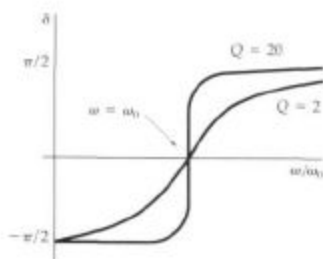
13. (a) 15,9 kHz (b) 159 Hz (c) 1,59 MHz
 15. La respuesta se da en el problema
 17. 88 mH
 19. (a) 2,25 mJ (b) 712 Hz (c) 0,671 A
 21. (a) 1,13 kHz (b) $X_C = 79,6$ Ω , $X_L = 62,8$ Ω
 (c) $Z = 17,5$ Ω , $I_a = 4,04$ A (d) $-73,4^\circ$
 23. 2002
 25. (a) 14,1 (b) 79,6 Hz (c) 0,275
 27. (a) 0,553 (b) 0,663 A (c) 44 W
 29. (a) Un transformador reductor (b) 2,4 V eficaces (c) 5 A
 31. 10,4 vueltas para 2,5 V; 31,3 vueltas para 7,5 V; 37,5 vueltas para 9V
 33. (a) 1,75 A (b) 2,47 A
 35. (a) 12 V (b) 8,49 V
 37. 60 V
 39. (a)



41. (a) 396 Ω (b) 50 V
 43. 29,2 mH
 45. (a) 15 W (b) 15 Ω (c) 0,235 H
 47. (a) 6 Ω (b) 35,5 mH
 49. (a) $C = 18,8$ μF , $I_a = 0,531$ A (b) 25 V
 51. (b) $\delta = -\tau/2 + \omega RC$ (c) $\delta = \pi/2 - R/L\omega$
 53. (a) 80,3 V (b) 77,8 V (c) 165 V (d) 112 V (e) 182 V
 55. 0,935 μF
 57. $R = 933$ Ω , $C = 0,517$ pF
 59. (b) $\omega = 1/\sqrt{3RC}$ (c)



61. (a) $V_{\text{ca}} = (9,95 \text{ V}) \cos 100t + (0,995 \text{ V}) \sin 10\,000t$
 (b) 10
 63. (a) $L = 0,8 \text{ mH}$, $C = 12,5 \mu\text{F}$ (b) 1,6 (c) 2 A
 65. (a) 933 W (b) 7,71 Ω (c) 99,8 μF (d) Añadir una capacidad de 40,9 μF
 67. (c)



69. (a) 12 Ω (b) $R = 7,2 \Omega$, $X = 9,6 \Omega$ (c) Capacitiva
 71. (a) 4 mH (b) 0,1 A
 73. Las respuestas se dan en el problema
 75. La respuesta se da en el problema
 77. Las respuestas se dan en el problema

Capítulo 29

- Verdadero o falso 1. Falso 2. Verdadero 3. Verdadero
 4. Verdadero 5. Falso 6. Verdadero.

Problemas

1. (a) $3,4 \times 10^{11} \text{ V/ms}$ (b) 5 A
 3. La respuesta se da en el problema
 5. (a) $3,33 \times 10^{-7} \text{ N/m}^2$ (b) 194 V/m (c) 647 nT
 7. Las respuestas se dan en el problema
 9. $6,93 \times 10^{-6} \text{ N}$
 11. La respuesta se da en el problema
 13. (a) 300 m (b) 3 m
 15. $3 \times 10^{11} \text{ Hz}$
 17. (b) $(-2,36 \times 10^{-3} \text{ A}) \sin 500\pi t$
 19. (a) 1/9 (b) 1/2 (c) 1/16
 21. (a) $E_{\text{max}} = 12 \text{ V/m}$, $B_{\text{max}} = 4 \times 10^{-8} \text{ T}$ (b) $E_{\text{max}} = 0,12 \text{ V/m}$, $B_{\text{max}} = 4 \times 10^{-10} \text{ T}$ (c) $E_{\text{max}} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ V/m}$, $B_{\text{max}} = 4 \times 10^{-12} \text{ T}$
 23. 111 m³ o sea 10,5 por 10,5 m
 25. (a) $2 \times 10^{-12} \text{ N}$ (b) $6 \times 10^{-12} \text{ N}$
 27. (a) 3 m (b) $5,31 \times 10^9 \text{ J/m}^3$ (c) $E_{\text{max}} = 3,46 \times 10^6 \text{ V/m}$, $B_{\text{max}} = 1,15 \text{ T}$
 29. (a) Sentido positivo de x (b) $\lambda = 0,628 \text{ m}$, $f = 4,77 \times 10^8 \text{ Hz}$ (c) $E = (104 \text{ V/m}) \cos [10\pi x - (3 \times 10^8)t]$, $B = (0,647 \times 10^{-6} \text{ T}) \cos [10\pi x - (3 \times 10^8)t]$
 31. (a) 1417 W/m (b) 902 W/m² (c) $E_{\text{ca}} = 583 \text{ V/m}$ (d) $1,94 \times 10^{-6} \text{ T}$
 33. (a) 279 K (b) 245 K
 35. $3,42 \times 10^6 \text{ W/m}^2$
 37. $7,25 \times 10^{-3} \text{ V}$
 39. (a) $(5 \times 10^{-3} \text{ V}) \cos 10\pi t$ (b) $(4,19 \times 10^{-4} \text{ V}) \sin 10\pi t$
 41. (a) $At/100\pi d$, donde d es la separación entre las placas (b) $\kappa \epsilon_0 A/100d$ (c) $\kappa \epsilon_0 p$
 43. (a) $V_0 [1/R] \sin \omega t + (\epsilon_0 A \omega / d) \cos \omega t$

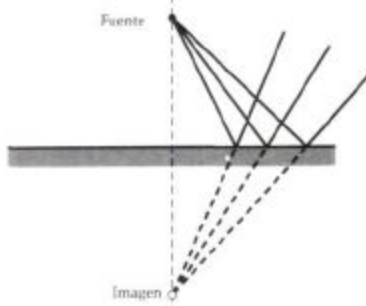
- (b) $(\mu_0 / 2\pi) (V_0 / rR) \sin \omega t + (\epsilon_0 \omega \pi V_0 / d) \cos \omega t$
 (c) $\tan \delta = \epsilon_0 A \omega R / d$
 45. (a) $\rho l / \pi a^2$ (b) $\mu_0 I / 2\pi a$ (c) $S = \rho F / 2\pi a^2$, radialmente hacia dentro (d) $S(2\pi a l) = I(\rho l / A) = FR$
 47. $5,74 \times 10^{-7} \text{ m}$
 49. La respuesta se da en el problema
 51. (a) $3,12 \times 10^{-6} \text{ rad/s}^2$ (b) 3,88 días (c) no

Capítulo 30

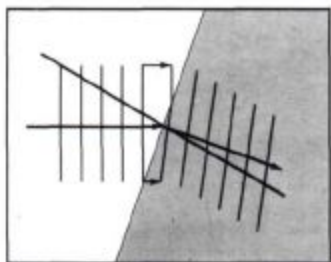
Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Falso 3. Falso; es mayor cuando el segundo medio tiene un índice de refracción menor —por ejemplo, en el caso de la refracción del agua al aire. 4. Falso; si existiera, no aparecería el arco iris 5. Verdadero

Problemas

1. $2,11 \times 10^8$ años-c
 3. $\pm 0,3 \text{ m}$
 5. 92 por ciento
 7. (a) 27,1° (b) 41,7° (c) 70,1° (d) Totalmente reflejado
 9. $v_{\text{max}} = 2,26 \times 10^6 \text{ m/s}$, $v_{\text{min}} = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$
 11. (a) 50,2° (b) 38,8° (c) 26,3°
 13. 62,5°
 15. (a) Sí (b) Como la bola o pelota se mueve con velocidad constante, una distancia mínima implica un tiempo mínimo
 17. (a) 1/8 (b) 3/12
 19. 35,3°
 21.



23. $\Delta t = 0,505 \text{ s}$
 25. 238 m
 27. La respuesta se da en el problema
 29. La respuesta se da en el problema
 31. (b) 3,47°
 33. $\theta_{\text{refl}} = 27,0^\circ$, $\theta_{\text{refr}} = 27,3^\circ$
 35. (b) El ángulo crítico es mayor
 37. La respuesta se da en el problema
 39. (a) $I_0 (\cos \pi / 2N)^{2N}$ (b) $I_0 / 4$ (c) 0,976 I₀
 (d) Perpendicular a la polarización inicial
 41. (a) 1,33 (b) 37,2° (c) $\theta_i = 48,7^\circ$; no, la refracción dentro del líquido no altera la salida; el haz final es paralelo a la superficie del líquido
 43. La respuesta se da en el problema
 45. La respuesta se da en el problema
 47. La respuesta se da en el problema
 49. $\theta_i = 14,5^\circ$; el rayo refractado se desvía acercándose a la perpendicular.



51. (a) $d\theta_1/d\theta_2 = 2 - (4 \cos \theta_2)/(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{1/2}$

53. 2,18 cm

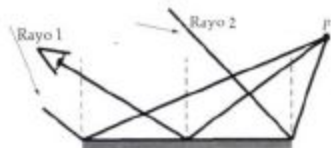
55. $\frac{1}{2} [1 - (1 - 1/n^2)^{1/2}]$

Capítulo 31

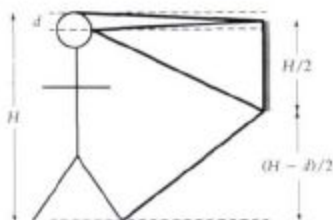
Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Falso 3. Falso: es cierto para distancias objeto positivas. Un ejemplo de imagen real con una distancia imagen negativa se tiene cuando se refleja en un espejo plano un haz de luz convergente 4. Falso; la aberración esférica se produce por los rayos alejados del eje del espejo 5. Verdadero 6. Falso; por ejemplo, la distancia imagen es negativa en el caso de una lupa 7. Verdadero

Problemas

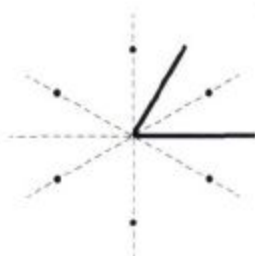
1. El ojo puede ver la imagen desde cualquier punto entre los rayos 1 y 2.



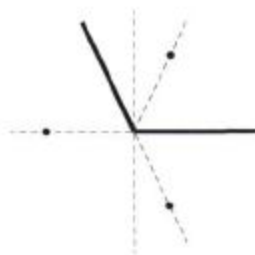
3. (a) 0,81 m (b) La parte inferior del espejo deberá estar a 0,735 m por encima del suelo



5. (a)



(b)



7. (a) $s' = 25$ cm, $m = -0,25$, real, invertida, reducida (b) $s' = 40$ cm, $m = -1$, real, invertida, del mismo tamaño (c) $s' = \infty$, $m = -\infty$, real, invertida, aumentada (d) $s' = -20$ cm, $m = 2$, virtual, derecha, aumentada

9. (a) $s' = -16,7$ cm, $m = 0,167$, virtual, derecha, reducida (b) $s' = -13,3$ cm, $m = 0,333$, virtual, derecha, reducida (c) $s' = 10$ cm, $m = 0,5$, virtual, derecha, reducida

11. (a) 0,566 m (b) Detrás (c) 0,113 m

13. (a) 5,13 cm (b) Cóncavo

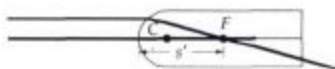
15. (a) $s' = 30$ cm, real



(b) $s' = -15$ cm, virtual



(c) $s' = 15$ cm, real; la imagen tiene tamaño cero y está situada en F



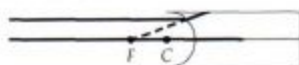
17. (a) $s' = -10$ cm, virtual



(b) $s' = -5$ cm, virtual; los rayos paraxiales que parten de C no se desvian, así pues, la imagen y el objeto son idénticos



(c) $s' = -15$ cm, virtual; la imagen tiene tamaño cero y está situada en F



19. (a) $s' = -14,9$ cm, virtual



(b) $s' = -5$ cm, virtual; los rayos paraxiales que parten de C no se desvian, de modo que la imagen y el objeto son idénticos



(c) $s' = -44,1$ cm, virtual; la imagen tiene tamaño cero y está situada en F



21. (a) $-0,839$ m (b) $0,336$

23. (a) 6 cm



(b) -6 cm



25. (a) $-30,3$ cm (b) $-22,0$ cm (c) $0,275$

(d) Virtual, hacia arriba.

27. (a) $-33,3$ cm



(b) $33,3$ cm



(c) $-33,3$ cm



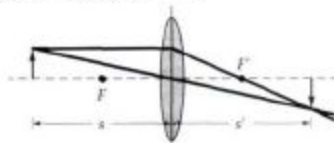
29. (a) $s' = 40$ cm, $m = -1$, real, invertida

(b) $s' = 20$ cm, $m = 2$, real, derecha

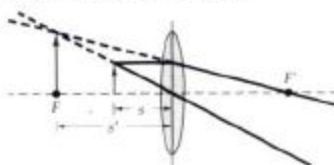
(c) $s' = -17,1$ cm, $m = 0,429$, virtual, derecha

(d) $s' = -7,5$ cm, $m = 0,75$, virtual, derecha

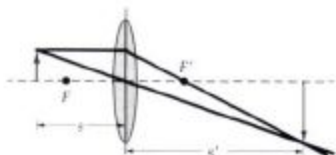
31. $s' = 10$ cm, $m = -1$



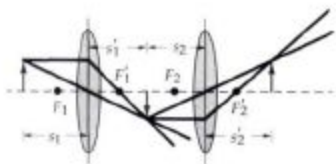
33. (a) $s = 5$ cm, $s' = -10$ cm



(b) $s = 15 \text{ cm}$, $s' = 30 \text{ cm}$



35. (a) A 30 cm de la cara más lejana de la segunda lente



(b) Real, derecha (c) 2

37. (a) 10,6 cm (b) 9,43 cm

39. (a) -66,7 cm (b) Virtual

41. El espejo deberá alejarse 91 cm del objeto

43. Cóncavo, $f = 90 \text{ cm}$

45. (a) -128 cm (b) 14,7 cm (c) Real

47. (a) $r_2 = 35,0 \text{ cm}$, cóncavo

(b)

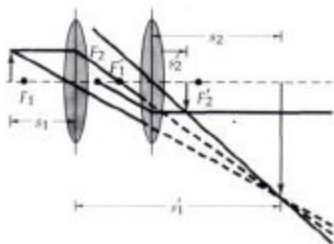


49. 4,10 cm

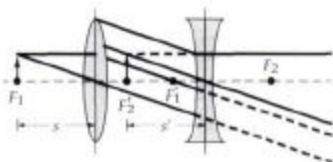
51. (a) -1,33 m (b) Convexo

53. (a) 9,52 cm (b) -1,19

(c)

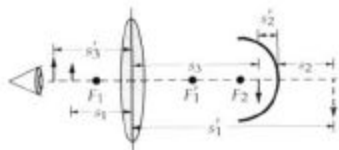


55. La imagen final está en el punto focal izquierdo de la segunda lente; la imagen es derecha y del mismo tamaño que el objeto



57. (a) A 18 cm a la izquierda de la lente (b) Real, hacia arriba

(c)



59. 200 cm

61. 43,5 cm

63. (a) La imagen final está a 0,9 cm detrás de la superficie trasera (b) La imagen final está sobre la superficie trasera

65. (a) A 1,8 m de la pantalla (b) 45 cm

67. (b) 17,5 cm

69. La respuesta se da en el problema

Capítulo 32

Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Verdadero 3. Verdadero 4. Verdadero 5. Falso; varía en razón inversa con el cuadrado del número f 6. Verdadero 7. Verdadero 8. Falso; es invertida y menor que el objeto 9. Falso; utiliza un espejo como objetivo

Problemas

1. 0,278 cm

3. (a) 103 cm (b) 0,972 dioptrías

5. 44,4 cm

7. 0,714 cm; el radio real deberá ser menor

9. 6

11. 5

13. 35,7 mm

15. 1,3 mm

17. (a) $= 1/64 \text{ s}$ (b) $= 1/120 \text{ s}$ (c) $= 1/250 \text{ s}$

(d) $= 1/500 \text{ s}$ (e) $= 1/1000 \text{ s}$

19. -267

21. (a) 20 cm (b) -4 (c) -20 (d) 6,25 cm

23. (a) 0,9 cm (b) 0,18 rad (c) -20

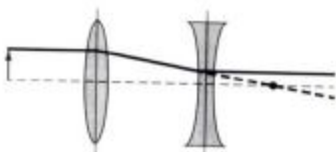
25. (a) 25 (b) -134

27. (a) 3 (b) 4

29. 3,7 m

31. $f_c = 4 \text{ cm}$, $f_o = 28 \text{ cm}$

33.



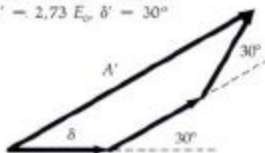
35. -232
 37. 0,00667
 39. (a) 1,67 cm (b) 0,508 delante del objetivo
 (c) 0,496 cm

Capítulo 33

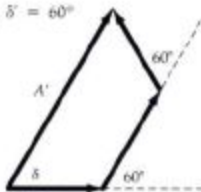
Verdadero o falso 1. Falso 2. Verdadero 3. Verdadero
 4. Verdadero 5. Verdadero

Problemas

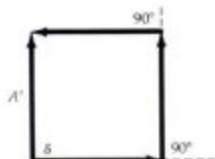
1. (a) Incoherente (b) Coherente (c) Coherente
 (d) Incoherente (e) Coherente
 3. 164°
 5. (a) La parte superior de la película tiende a espesarse, de modo que la diferencia de fase tiende a 180°
 (b) Violeta (c) La parte superior de la película es blanca, el color de la primera banda es rojo
 7. 115 nm
 9. (a) $7,2 \mu\text{m}$ (b) 1,44
 11. 8,33 franjas/cm
 13. (a) $50 \mu\text{m}$ (b) No (c) 0,5 mm
 15. 695 nm
 17. $E = 3,61 \sin(\omega t - 56,3^\circ)$
 19. (a) $A' = 2,73 E_0$, $\delta' = 30^\circ$



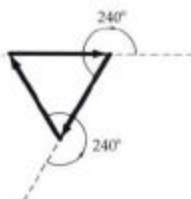
(b) $A' = 2E_0$, $\delta' = 60^\circ$



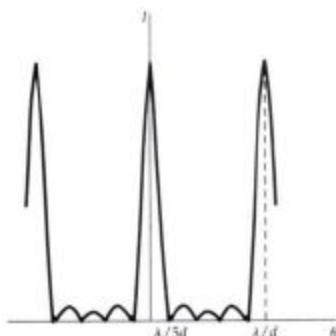
(c) $A' = E_0$, $\delta' = 90^\circ$



(d) $A' = 0$

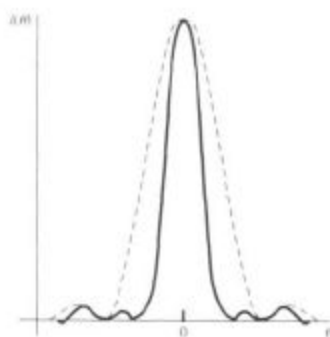


21. (a) $\theta_1 = \lambda/d$, $\theta_{\text{min}} = \lambda/5d$



23. La separación entre las rendijas es d , y la condición para un máximo de interferencia es $d \sin \theta = m\lambda$; la anchura de cada rendija individual es a , y la condición para un mínimo de difracción es $a \sin \theta = m\lambda$
 25. (a) 2 cm (b) 20 cm (c) 2,31 m
 27. 3,01 cm
 29. 39 franjas
 31. (a) $8,54 \times 10^{-3}$ rad (b) 6,83 cm
 33. (a) 55,6 km (b) 55,6 m
 35. 33,6 mm
 37. 484 m
 39. 486 nm, 660 nm
 41. (a) $0,0231^\circ$ (b) 0,145 cm
 43. (a) $0,30^\circ$ (b) 8
 45. $4,5 \times 10^6$ km
 47. (a) $0,6 \mu\text{m}$ (b) 400 nm, 514 nm, 720 nm
 (c) 400 nm, 514 nm, 720 nm
 49. (a) 0,530 m, 0,883 m (b) 0,707 m (c) 8000
 51. (a) 97,8 nm (b) No (c) $I_{\text{max}} = 0,273 I_{\text{central}}$, $I_{\text{min}} = 0,124 I_{\text{central}}$
 53. (b) La anchura del máximo principal de interferencia es 6 mm en el caso de cuatro fuentes, 12 mm si sólo son dos fuentes
 55. (a) 0,242 rad (b) 0,08 rad, 0,161 rad (c) 0,04 rad

(d)



57. 20.5 m

59. 13.0"

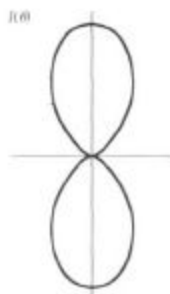
61. La respuesta se da en el problema

63. (c) Invertida (d) 67 franjas (e) 1,14 cm (f) Las franjas aparecerán más juntas

65. (b) 491 (c) 1 mm

67. (a) 1,92 μm (b) 1,9169. (a) $I = I_{\text{max}} \cos^2[(\pi/2) \sin \theta]$

(b)

71. (a) $\phi = \pm 2.86\pi, \pm 4.92\pi, \pm 6.94\pi$ (b) Igual que en la parte (a)

73. La respuesta se da en el problema

Capítulo 34Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Verdadero 3. Falso
4. Verdadero 5. Falso 6. Falso 7. Verdadero**Problemas**1. (a) 0,183 ms (b) $1,83 \times 10^{-12}$ s (c) No3. (a) $4,94 \times 10^{-8}$ s (b) 12,6 m (c) 6,63 m5. (a) 44,7 μs (b) 13,4 km

7. 0,527c

9. (a) 130 a (b) 88,1 a

11. 0,9991c

13. $2,60 \times 10^8$ m/s15. (a) $4,5 \times 10^{-10}$ por ciento (b) El tiempo transcurrido en el reloj del piloto es $3,15 \times 10^8$ s $- 1,42 \times 10^{-4}$ s; el tiempo perdido en minutos es $2,37 \times 10^{-6}$ min.

17. 80 min-c

19. La respuesta se da en el problema

21. $1, V/c^2 = 60$ min

23. 0,0637

25. 0,6c

27. 0,696c

29. (a) $-0,882c$ (b) $-60\,000$ m/s $+ 6 \times 10^{-4}$ m/s31. $-0,994c$ 33. (a) $1,11 \times 10^{-12}$ kg (b) 0,351 mg35. (a) 9×10^{11} J (b) 52,5 millones de dólares (c) 28 371a37. $E = 0,522$ MeV, $E_r = 1,05 \times 10^{-7}$ MeV, $p = 0,104$ MeV/c39. (a) $2,23 \times 10^8$ m/s (b) 1039 MeV/c41. $3,55 \times 10^4$ reacciones/s

43. 0,782 MeV

45. 30 por ciento

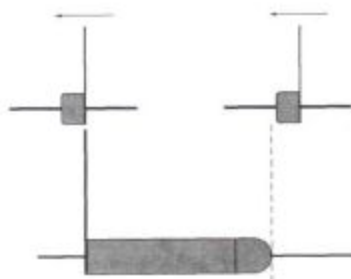
47. 0,8c

49. $1,85 \times 10^3$ a

51. 9,61 ms

53. La velocidad requerida es 0,4c; el suceso B precede al suceso A en el caso de un observador que se mueva con velocidad 0,4c $< v < c$

55. (a) 0,66c (b) 31,3 a

57. (a) 52,7 m (b) $-0,987c$ (c) 16,1 m(d) $2,07 \times 10^{-5}$ s (e)

59. (a) 4,97 MeV/c (b) 0,995c

61. (a) 0,75 por ciento (b) 68,7 por ciento

63. (a) 630 m/c (b) 777 m/c (c) 148 m/c

(d) 278 m/c (e) 4,36 h (f) 19 h

65. (a) Para la izquierda con velocidad 0,5c (b) 1,73 a

67. $3,84 \times 10^{14}$ kg/día

69. (a) 0,333c (b) 20 m en la dirección +x (c) 60 m/c

71. (a) 290 MeV (b) 0,25 MeV

73. (a) 1,30 m (b) 0,825 m

75. (a) E/Mc^2 (b) EL/Mc^2

77. La respuesta se da en el problema

79. La respuesta se da en el problema

81. La respuesta se da en el problema

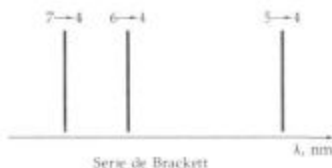
83. La respuesta se da en el problema

Capítulo 35

Verdadero o falso 1. Verdadero 2. Verdadero 3. Falso 4. Verdadero 5. Verdadero 6. Falso 7. Verdadero 8. Verdadero 9. Verdadero 10. Verdadero 11. Verdadero 12. Falso

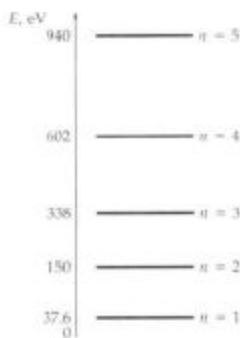
Problema1. $E = 0,626 \times 10^{-18}$ J $= 4,14 \times 10^{-7}$ eV3. (a) $2,42 \times 10^{14}$ Hz (b) $2,42 \times 10^{17}$ Hz(c) 2,42 (c) 10^{10} Hz

5. $E_{\text{ion}} = 3.10 \text{ eV}$, $E_{\text{exc}} = 1.77 \text{ eV}$
 7. (a) $f = 1.11 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\lambda = 271 \text{ nm}$ (b) 1.63 V
 (c) 0.39 V
 9. (a) 4.74 eV (b) 1.68 V
 11. (a) $4.97 \times 10^{-19} \text{ J}$ (b) 0.01 J (c) 2.01×10^{16} fotones/s
 13. $9.27 \times 10^3 \text{ V}$
 15. 1.215 pm
 17. (a) $p = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 3.11 \text{ eV}/c$
 (b) $p = 3.32 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 621 \text{ eV}/c$
 (c) $p = 6.63 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 12.4 \text{ keV}/c$
 (d) $p = 2.21 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 4.14 \times 10^{-13} \text{ eV}/c$
 19. (a) 17.5 keV (b) 76.0 pm (c) 16.3 keV
 21. La respuesta se da en el problema
 23. $\Delta E_{1-2} = 1.89 \text{ eV}$, $\lambda_{1-2} = 656 \text{ nm}$; $\Delta E_{1-3} = 2.55 \text{ eV}$,
 $\lambda_{1-3} = 486 \text{ nm}$; $\Delta E_{2-3} = 2.86 \text{ eV}$, $\lambda_{2-3} = 434 \text{ nm}$
 25. (a) $\Delta E_{2-1} = 0.850 \text{ eV}$, $\lambda_{2-1} = 1459 \text{ nm}$
 (b) $\lambda_{3-1} = 4052 \text{ nm}$, $\lambda_{3-2} = 2627 \text{ nm}$, $\lambda_{4-2} = 2168 \text{ nm}$



27. (a) 0.775 nm (b) 0.0775 nm (c) 0.0245 nm
 (d) 0.00775 nm
 29. (a) $3.313 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ (b) $6.024 \times 10^{-13} \text{ J}$
 31. 0.203 nm
 33. $4.40 \times 10^{-11} \text{ m}$
 35. $1.52 \times 10^{-14} \text{ m}$
 37. 22.8 eV

39. 6.11 keV
 41. $4.86 \times 10^8 \text{ m} = 3018 \text{ mi}$
 43. $1.69 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$
 45. (a) 3.18 W/m^2 (b) 1.04×10^{15} fotones/s
 47. (a) 4.86 pm (b) 92.7 keV (c) 92.7 keV
 49. (a) 13.6 eV (b) 54.4 eV (c) 122.4 eV
 51. (b) $E_n = n^2 (37.6 \text{ eV})$



- (c) 11.0 nm (d) 6.60 nm (e) 1.37 nm
 53. (a) $E_1 = 5.13 \times 10^{-1} \text{ eV}$, $E_2 = 2.05 \times 10^{-1} \text{ eV}$,
 $E_3 = 4.61 \times 10^{-2} \text{ eV}$ (b) $80.8 \mu\text{m}$ (c) $48.5 \mu\text{m}$
 (d) $30.3 \mu\text{m}$
 55. (b) $R_{\text{H}} = 10.97373 \mu\text{m}^{-1}$; $R_{\text{He}} = 10.96776 \mu\text{m}^{-1}$
 (c) 0.0545 por ciento
 57. (a) 10^{-22} W (b) 53 min
 59. (a) $2.42 \times 10^{-14} \text{ m}$ (b) 0.512 MeV
 (c) $2.73 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ (d) 2.42 pm
 61. La respuesta se da en el problema