Serway • Beichner

Vol. 3

FÍSICA

SOLUCIONARIO

SAN MARCOS

Solucionario
Física de Serway
y Beichner

Vol. 3

Solucionario
Física de Serway

y Beichner

Vol. 3

SAN MARCOS

SOLUCIONARIO DE FÍSICA DE SERWAY - VOLUMEN 3

Diseño de Portada: Michael Lozano
Composición de interiores: Carolina Hernández
Responsable de la edición: Yisela Rojas T.

© Editorial San Marcos E.I.R.L., editor
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Telefax: 331-1522
RUC 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Primera edición: 2007
Primera reimpresión: 2008
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Reg. N.° 2008-09488
ISBN: 978-9972-38-206-2
Registro de proyecto editorial Nº 31501000800581

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 974, Lima
Telfs: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com

Composición, diagramación e impresión:
Aníbal Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600 Mangomarca, S.J.L.
RUC 10090984344

PRESENTACIÓN

Debido al papel preponderante de la física en disciplinas como la ingeniería, la química y la medicina, y a la trascendencia de las aplicaciones de las leyes físicas en la moderna tecnología y en los avances científicos, en ese sentido el SOLUCIONARIO FÍSICA DE SERWAY *tiene como principal objetivo brindarle al estudiante la posibilidad de comprender y consolidar los conocimientos teóricos aprendidos, esto es, reforzar el aprendizaje de conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones en el mundo real.*

La obra está desarrollada en tres volúmenes que hacen un total aproximado de 2 400 problemas resueltos, en 34 capítulos; abarca temas fundamentales de la física clásica que se dividen en 4 partes. La parte I (capítulos 1 - 15) se abordan los fundamentos de la mecánica newtoniana y de la física de fluidos; la parte II (capítulos 16 - 18) que comprende el movimiento ondulatorio y el sonido; la parte III (capítulos 19 - 22) considera el calor y la termodinámica y la parte IV (capítulos 23-34) comprende la electricidad y el magnetismo.

Cada uno de los capítulos se ha desarrollado siguiendo un orden coherente de temas con el propósito de llegar didácticamente al estudiante, por lo que esperamos que esta obra sirva como un libro de consulta práctica, dentro de esa gran senda del conocimiento científico que le toca a Ud. descubrir.

El editor

ÍNDICE

Capítulo 23

CAMPOS ELÉCTRICOS

LA LEY DE COULOMB

1. a) Calcule el número de electrones en un pequeño alfiler de plata, eléctricamente neutro, que tiene una masa de 10,0 g. La plata tiene 47 electrones por átomo, y su masa molar es de 107,87 g/mol. b) Se añaden electrones al alfiler hasta que la carga negativa neta sea de 1,00 mC. ¿Cuántos electrones se añaden por cada 10^9 electrones ya presentes?

Resolución:

Datos: $m_{Ag} = 10{,}0\ \text{g}$; $\overline{M}_{Ag} = 107{,}87\ \text{g/mol}$

$\dfrac{\text{n.° } e^-_{Ag}}{\text{átomo}} = 47$; $q_{neta} = -1{,}00\ \text{mC}$

Parte (a)

Sabemos que en: 107,87 g (Ag) ------ $6{,}023 \times 10^{23}$ átomos de Ag

$\Rightarrow$ 107,87 g (Ag) ------ $(6{,}023 \times 10^{23})(47\ e^-)$ de Ag

Luego: 10,0 g (Ag) ------ x

$$\therefore\ x = \frac{(6{,}023)(47)}{107{,}87}\ .\ 10^{24}\ \text{electrones} = 2{,}62 \times 10^{24}\ \text{electrones de Ag.}$$

Parte (b)

Sabemos que: $q_{neta} = n.e^- \Rightarrow -1{,}00 \times 10^{-3} = n\ .\ (-1{,}6 \times 10^{-19}\text{C})$

$\therefore\ n = 6{,}25 \times 10^{15}\ e^-$ (añadidos)

Luego:

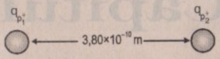
Por cada 10^9 electrones presentes se añade $2{,}62 \times 10^{15}$ electrones; entonces en $6{,}25 \times 10^{15}$ electrones añadidos habrá: $\dfrac{6{,}25}{2{,}62} = 2{,}38$ electrones.

2. a) Dos protones en una molécula están separados por una distancia de $3{,}80 \times 10^{-10}$ m. Encuentre la fuerza eléctrica ejercida por un protón sobre el otro. b) ¿Cómo se compara la magnitud de esta fuerza con la magnitud de la fuerza gravitacional entre los dos protones? c) ¿Cuál debe ser la relación carga a masa de una partícula si la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos de estas partículas es igual a la magnitud de la fuerza eléctrica entre ellas?

Resolución :

Datos.

$q_{p+} = q_{p_1^+} = q_{p_2^+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C



Parte (a)

$$F_e = \frac{k_e \cdot |q_1| \cdot |q_2|}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(1{,}6\times10^{-19})(1{,}6\times10^{-19})}{(3{,}80\times10^{-10})^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 1{,}6 \times 10^{-9}\ \text{N}$$

Parte (b)

Sabemos que: $F_G = \dfrac{G.m_1 .m_2}{d^2} = \dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}67\times10^{-27})(1{,}67\times10^{-27})}{(3{,}80\times10^{-10})^2}$

$$\therefore \quad F_G = 1{,}3 \times 10^{-45}\ \text{N}$$

En consecuencia: $F_e >> F_G$

Parte (c)

Por condición: $F_e = F_G$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_e \cdot q_p^2}{d^2} = \frac{G.m_p{}^2}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{q_{p^+}}{m_{p^+}} = \sqrt{\frac{G}{k_e}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}}{8{,}99\times10^9}} = 86\times10^{-12}$$

3. Richard Feynman dijo una vez que si dos personas estuvieran paradas a una distancia de un brazo una de otra y cada una tuviera 1% más electrones que de protones, la fuerza de repulsión entre ellas sería suficiente para levantar un "peso" igual al de toda la Tierra. Efectúe un cálculo de orden de magnitud para sustentar esta afirmación.

Resolución :

Asumiendo que la distancia de un brazo de una persona es aproximadamente 1,00 m suponiendo que hay 100x protones; entonces hay 101x electrones (por condición).

Además nos dice que: $F_{repulsión}$ = Peso de toda la tierra.

sabemos que: Peso de la Tierra = $(5{,}98 \times 10^{24})$ (9,8) = $5{,}86 \times 10^{25}$ N

Además: $F_{repulsión} = \dfrac{k_e \cdot q_1 \cdot q_2}{d^2} = \dfrac{k_e \cdot q_1^2}{1^2} = \dfrac{k_e \cdot q_2^2}{1^2}$

donde: $q^1_{TOTAL} = \left(\dfrac{M_{persona}}{M_{protón}}\right)\times100\times1{,}6\times10^{-19} = \dfrac{65}{1{,}67\times10^{-27}}\times10^2\times10^{-19}\times1{,}6$

Entonces: $F_{repulsión} = (8{,}99 \times 10^9)\ (100 \times 101)\ \dfrac{(65\times1{,}6)}{167}\times10^{14} \approx 10^{26}$ N

4. Dos pequeñas esferas de plata, cada una con 10,0 g de masa, están separadas 1,00 m. Calcule la fracción de los electrones en una esfera que se deben transferir a la otra para producir una fuerza atractiva de $1{,}00 \times 10^4$ N (aproximadamente 1 ton) entre las esferas. (El número de electrones por átomo de plata es 47, y el número de átomos por gramo es el número de Avogadro dividido entre la masa molar de la plata, 107,87 g/mol.)

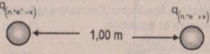
Resolución :

Datos: $m_{esfera_{Ag}} = 10$ g ; $F_e = 1{,}00 \times 10^4$ N ; $\overline{M}_{Ag} = 107{,}87$ g/mol

d = 1,00 m . Nos piden: fracción de e^-_s que se transfieren de una carga a otra.

n.° e/átomo = 47

Sea:



Tenemos que: En 107,87 g hay $6{,}023 \times 10^{23}$ átomos de Ag

Entonces hay $(6{,}023)(47) \times 10^{23}$ electrones de Ag

Por lo tanto en 10 g de Ag habrá $\dfrac{(6{,}023)(47)}{107{,}87} \times 10^{24}$ electrones de Ag $= 2{,}6 \times 10^{24} e^-$

Por otro lado:

$$F_e = 1{,}00 \times 10^4\ \text{N} = \frac{q_{(n.°e^- -x)} \cdot q_{(n.°e+x)}}{d^2}.K_e$$

$$= \frac{(8{,}99\times10^9)(2{,}6\times10^{24} - x)(2{,}6\times10^{24} + x)}{(1{,}00)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}00 \times 10^4 = (8{,}99 \times 10^9)\ (6{,}76 \times 10^{48} - x^2)$$

$$\therefore \quad x \approx 2{,}6 \times 10^{24}\ \text{electrones}$$

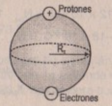
5. Suponga que 1,00 g de hidrógeno se separa en electrones y protones. Suponga, también que los protones están colocados en el polo norte terrestre y que los electrones se colocan en el polo sur. ¿Cuál es la fuerza de compresión resultante sobre la Tierra?

Resolución :

Sea la tierra:

Donde: $R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Nos piden: $F_{compresión}$



Sabemos que en 1 gramo de hidrógeno hay N_A electrones de hidrógeno y también hay N_A protones de hidrógeno; donde: N_A = n.° de Avogadro = $6{,}023 \times 10^{23}$.
Como: $F_{\text{gravitacional}}$ es despreciable con respecto a la $F_{\text{eléctrica}}$ atractiva; entonces:

$$F_{\text{eléctrica atractiva}} = F_{\text{compresión}} = \frac{Ke \,.\, q_{p^+} \,.\, k_{e^-}}{d^2} \,.\, N_A^2$$

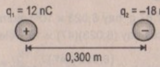
$$\Rightarrow \quad F_{\text{compresión}} = \frac{(8{,}99\times10^9)(1{,}6\times10^{-19})^2(6{,}023\times10^{23})^2}{4(6{,}37\times10^6)^2}$$

$$\therefore \quad F_{\text{comp}} = 514 \times 10^3 \text{ N}$$

6. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas se colocan con sus centros separados 0,300 m. A una se le da una carga de 12,0 nC y a la otra una carga de −18,0 nC. a) Encuentre la fuerza eléctrica ejercida sobre una esfera por la otra. b) Las esferas se conectan por un alambre conductor. Encuentre la fuerza eléctrica entre las dos después de que se alcanza el equilibrio.

Resolución :

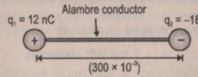
Parte (a)



$$F_e = \frac{k_e \,.\, |q_1| \,.\, |q_2|}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(12\times10^{-9})(18\times10^{-9})}{(300\times10^{-3})^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 21{,}6 \times 10^{-6} \text{ N}$$

Parte (b)



Nos piden F_e cuando ambas cargas alcanzan el equilibrio

Se cumple que:

$q_1 = 12 \times 10^{-9}\text{ C} = N_{p+} \,.\, 1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C}$ $\quad\therefore\ N_{p+} = 75 \times 10^9$ protones

$q_2 = -18 \times 10^{-9}\text{ C} = N_{e-} \,.\, (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})$ $\quad\therefore\ N_{e-} = 112{,}5 \times 10^9$ electrones

Entonces : $\quad 75 \times 10^9\, x_{\text{ganados}} = 112{,}5 \times 10^9 - x_{\text{perdidos}}$

Pero $\quad x_{\text{ganados}} = x_{\text{perdidos}} = x \ \Rightarrow\ x = 18{,}75 \times 10^9$

Luego:

$$q_{p+\ \text{finales}} = (75 \times 10^9 + 18{,}75 \times 10^9)(1{,}6 \times 10^{-19}) = 15{,}00 \times 10^{-9}\text{ C}$$

$$q_{e-\ \text{finales}} = (112{,}5 \times 10^9 - 18{,}75 \times 10^9)(-1{,}6 \times 10^{-19}) = -21{,}00 \times 10^{-9}\text{ C}$$

En consecuencia:

$$F_e = \frac{k_e \cdot |q_{p^+\text{finales}}| \cdot |q_{e^-\text{finales}}|}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(15{,}00\times10^{-9})(21{,}00\times10^{-9})}{(300\times10^{-3})^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 31{,}5 \times 10^{-6} \text{ N}$$

7. Tres cargas puntuales se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P23.7. Calcule la fuerza eléctrica neta sobre la carga de 7,00 μC.

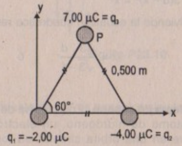
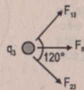


Figura P23.7

Resolución :

Nos piden:

$F_{\text{en P}} = ?$



Sabemos que:

$$F_{13} = \frac{k_e.(q_1)(q_3)}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(2\times10^{-6})(7\times10^{-6})}{(0{,}500)^2} = 503{,}4 \times 10^{-3}\text{ N}$$

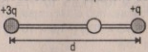
$$F_{23} = \frac{k_e.(q_2)(q_3)}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(4\times10^{-6})(7\times10^{-6})}{(0{,}500)^2} = 1\,007 \times 10^{-3}\text{ N}$$

Entonces: (Por la ley de cosenos)

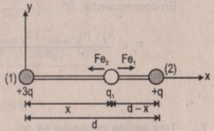
$$F_{\text{en P}} = F_R = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2\,F_{13}.F_{23}.\cos(120°)} = \sqrt{(503{,}4\times10^{-3})^2 + (1\,007\times10^{-3})^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad F_{\text{en P}} = 0{,}873 \text{ N}$$

8. Dos pequeñas cuentas que tienen cargas positivas *3q y q* están fijas en los extremos opuestos de una barra aislante horizontal que se extiende desde el origen al punto *x = d*. Como se muestra en la figura P23.8, una tercera cuenta pequeña cargada es libre de deslizarse sobre la barra. ¿En qué posición está en equilibrio la tercera cuenta? ¿Puede estar en equilibrio estable?



Resolución :



Por condición: $F_{e_1} = F_{e_2}$

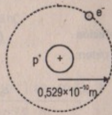
$$\Rightarrow \quad \frac{k_e \cdot (3q)(q_1)}{x^2} = \frac{k_e \cdot (q)(q_1)}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 3(d-x)^2 = x^2$$

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta:

$$x = \frac{\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{3}-1} \quad \text{ó} \quad x = \frac{\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{3}+1}$$

9. **Problema de repaso.** En la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón se mueve en una órbita circular en torno a un protón, donde el radio de la órbita es $0{,}529 \times 10^{-10}$m. a) Encuentre la fuerza eléctrica entre los dos. b) Si esta fuerza provoca la aceleración centrípeta del electrón, ¿cuál es la rapidez del electrón?



Resolución :

Parte (a)

$$F_e = \frac{k_e |q_{e^-}||q_{p^+}|}{d^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(1{,}6\times10^{-19})(1{,}6\times10^{-19})}{(0{,}529\times10^{-10})^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 82{,}2 \times 10^{-9}\text{ N} = 82{,}2\text{ nN}$$

Parte (b)

Por movimiento circular: $F_e = F_c = m_{e^-} \cdot \dfrac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{F_e \cdot r}{m_{e^-}}} = \sqrt{\frac{(82{,}2\times10^{-9})(0{,}529\times10^{-10})}{(9{,}1\times10^{-31})}}$$

$$\therefore \quad v = 2{,}19 \times 10^6\text{ m/s} \approx 2{,}19\text{ Mm/s}$$

10. **Problema de repaso.** Dos cargas puntuales idénticas, cada una con una carga +q, están fijas en el espacio y separadas por una distancia *d*. Una tercera carga puntual –*Q* de masa *m* puede moverse con libertad y se encuentra inicialmente en reposo en un bisector perpendicular de las dos cargas fijas a una distancia x desde el punto medio entre las dos cargas fijas. (Fig. P23.10). a) Muestre que si x es pequeña en relación con *d*, el movimiento de –*Q* es armónico simple a lo largo del bisector perpendicular. Determine el periodo de ese movimiento. b) ¿Qué tan rápido se moverá la carga –*Q* cuando esté en el punto intermedio entre las dos cargas fijas, si inicialmente se libera a una distancia *a* << *d* del punto medio?

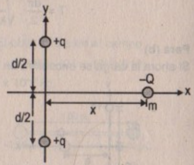


Figura P23.10

Resolución :

Parte (a)

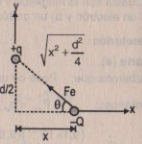
Por demostrar que: si x << d el movimiento de "m" es armónico simple.

Por simetría:

Tenemos que:

$$\Sigma F_x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad -2F_e \cdot \cos\theta = m \cdot \ddot{x}$$



$$\Rightarrow \quad -2\left(\frac{k_e \cdot q \cdot Q}{\sqrt{x^2+\frac{d^2}{4}}^{\,2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{d^2}{4}}}\right) = m\ddot{x}$$

Como: $x << d \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2}{4} >> x^2 \approx \dfrac{d^2}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2 \cdot k_e \cdot q \cdot Q \cdot x}{\left(\frac{d^2}{4}+x^2\right)^{3/2}} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{-16 \cdot k_e \cdot q \cdot Q}{d^3}\right] \cdot x = m\ddot{x}$$

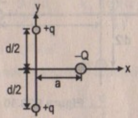
$$\therefore \quad \ddot{x} + \left(\frac{16 \cdot k_e \cdot q \cdot Q}{m \cdot d^3}\right) \cdot x = 0 \quad \text{ecuación diferencial del (M. A. S.)}$$

donde: $\omega^2 = \frac{16.k_e.q.Q}{m.d^3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{k_e.q.Q}{d.m}}$

$$\therefore \quad T = \frac{d\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{d.m}{k_e.q.Q}}$$

Para (b)

Si ahora la carga se encuentra en la posición mostrada:



Donde: a << d

Sabemos que: $\omega = v.\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{k_e.q.Q}{md}}$

$$\therefore \quad v = \frac{4a}{d}\cdot\sqrt{\frac{k_e.q.Q}{m.d}}$$

EL CAMPO ELÉCTRICO

11. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que equilibrará el peso de a) un electrón y b) un protón? (Use los datos de la tabla 23.1)

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: Peso de un e^- = $m_{e-}\cdot g$

Entonces: $\vec{F}_{e-} = q_{e-}\cdot\vec{E} = m_{e-}\cdot g = (9,1\times 10)^{-31}(9,8)$

$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{(9,1\times10^{-31})(9,8)}{1,6\times10^{-19}}\left(\hat{j}\right) = -55,8\times10^{-12}\,\frac{N}{C}\,(\hat{j})$ (hacia abajo en la dirección del peso)

Parte (b):

Por condición: $W_{p^+} = F_{e-} = q_{p^+}\cdot\vec{E}$

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{m_{p^+}\cdot g}{q_{p^+}} = \frac{(1,67\times10^{-27})(9,8)}{(1,6\times10^{-19})}\hat{j} = 102\times10^{-9}\,\frac{N}{C}\,\hat{j}$ (hacia arriba)

12. Un objeto que tiene una carga neta de 24,0 μC, se coloca en un campo eléctrico uniforme de 610 N/C que está dirigido verticalmente. ¿Cuál es la masa de este objeto si "flota" en el campo?

Resolución :

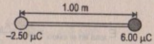
Datos: $q = 24,0\times10^{-6}$ C ; $m = ?$

$E = 610$ N/C Además: El objeto flota en el campo

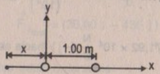
Sabemos que: $W_{objeto} = F_e = q\,.\,E \Rightarrow M.(9,8) = (24\times10^{-6})(610)$

$\therefore \quad m = 1,494\times10^{-9}$ kg

13. En la figura P23.13 determine el punto (distinto del infinito) en el cual el campo eléctrico es cero.



Resolución :



$q_A = -2,50$ μC $\quad q_B = 6,00$ μC

Nos piden un punto (distinto del infinito) donde el campo es cero.

Por condición: $\vec{E}$ (producido por q_A) = $\vec{E}$ (producido por q_B)

Sabemos que a mayor carga mayor campo y que a mayor distancia menor campo, entonces el punto se tendría que localizar muy cerca de la carga q_A; luego:

$$\vec{E}\text{ (producido por } q_A) = \frac{k_e.q_A}{x^2}\,(\hat{i})$$

$$\vec{E}\text{ (producido por } q_B) = \frac{k_e.q_B}{(1+x)^2}\,(-\hat{i})$$

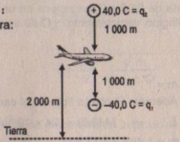
Entonces: $\frac{k_e.q_A}{x^2} = \frac{k_e.q_B}{(x+1)^2} \Rightarrow (x+1)^2.5 = 12(x^2)$

Resolviendo la ecuación resulta: $x = \frac{10\pm\sqrt{240}}{14}$

Por lo tanto: $|x| \approx 1,82$ m (a la izquierda de la carga negativa)

14. Un avión vuela a través de un nubarrón a una altura de 2 000 m. (Ésta es una situación muy peligrosa debido a corrientes ascendentes, turbulencia y la posibilidad de una descarga eléctrica). Si hay una concentración de carga de +40,0 C a una altura de 3 000 m dentro de la nube y de –40,0 C a una altura de 1 000 m, ¿cuál es el campo eléctrico E en la aeronave?

Resolución :
Sea la figura:



$E_{(\text{en el avión producido por } q_2)}$ es hacia abajo

$E_{(\text{en el avión producido por } q_1)}$ es hacia abajo

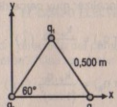
En consecuencia:

$$\vec{E}_{\text{total en el avión}} = 2 \cdot \frac{k_e \cdot q_1}{d^2} = \frac{2(8{,}99\times10^9)(40)}{(10^3)^2}\,(-\hat{j})$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en el avión}} = 71{,}92 \times 10^4\ \frac{N}{C}\ (-\hat{j}) \text{ (hacia abajo)}$$

15. En la figura P23.7 se muestran tres cargas colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero. a) Calcule el campo eléctrico en la posición de la carga de 2,00 μC debido a las cargas de 7,00 μC y –4,00 μC. b) Utilice su respuesta a la parte a) para determinar la fuerza sobre la carga de 2,00 μC.

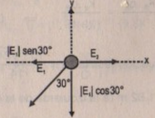
Resolución :
Sea:



Donde:
$q_1 = 7{,}00\ \mu C$
$q_2 = -4{,}00\ \mu C$
$q_3 = 2{,}00\ \mu C$

Parte (a)

Nos piden E_{total} en q_3 = ?



$$\vec{E}_{\text{total en x}} = (E_2 - |E_1|\,\text{sen}30°)\,\hat{i} = \frac{k_e}{d^2}(q_2 - 0{,}5\,q_1)\,\hat{i} = \frac{8{,}99\times10^9}{(0{,}5)^2}\,[4\times10^{-6} - 0{,}5\times10^{-6}\times 7]\,\hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en x}} = 18 \times 10^3\ \hat{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_{\text{total en y}} = |E_1|\cos30°\,(-\hat{j}) = \frac{(8{,}99\times10^9)(7\times10^{-6})}{(0{,}500)^2}\,(-\hat{j})$$

$$\therefore \quad E_{\text{total en y}} = -218 \times 10^3\ \hat{j}\ N/C$$

En consecuencia:

$$\vec{E}_{\text{total (en q3)}} = (18\ \hat{i} - 218\,\hat{j})\ k\ N/C$$

Parte (b)
Luego Fe sobre la carga de 2,00 μC será:

$$\vec{F}_{e_{\text{total}}} = q \cdot \vec{E}_{\text{total}} = 2{,}00 \times 10^{-6}\,(18\ \hat{i} - 218\,\hat{j}) \times 10^3\ N/C$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{e_{\text{total}}} = (36{,}00\ \hat{i} - 436\ \hat{j})\ mN$$

16. Tres cargas puntuales están ordenadas como se muestra en la figura P23.16. a) Encuentre el vector de campo eléctrico que crean en el origen de manera conjunta las cargas de 6,00 nC y –3,00 nC. b) Encuentre el vector fuerza sobre la carga de 5,00 nC.

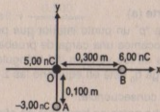


Figura P23.16

Resolución :

Parte (a)

$$\vec{E}_{\text{total en el origen}} = \vec{E}\,q_{B\ \text{en el origen}} + \vec{E}\,q_{A\ \text{en el origen}}$$

Entonces tenemos que:

$$\vec{E}_{q_B} = \frac{k_e \cdot q_B}{d^2}\left(-\hat{i}\right) = \frac{(8{,}99\times10^9)(6\times10^{-9})}{(0{,}300)^2}\left(-\hat{i}\right) = -600\ \hat{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_{q_A} = \frac{k_e \cdot q_A}{d^2}\left(-\hat{j}\right) = \frac{(8{,}99\times10^9)(3{,}00\times10^{-9})}{(0{,}100)^2}\left(-\hat{j}\right) = -2\,697\,\hat{j}\ N/C$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en el origen}} = (-600\ \hat{i} - 2\,697\ \hat{j})\ N/C$$

Parte (b)

$$\vec{F}_{\text{total sobre la carga de 5,00 nC}} = q.E_{\text{total en el origen}}$$

$$\vec{F}_{total} = (5{,}00 \times 10^{-9})(-600\ \hat{i} - 2\,697\ \hat{j}) = -3{,}00 \times 10^{-6}\ \hat{i} - 13{,}5 \times 10^{-6}\ \hat{j}\ N$$

17. Tres cargas positivas iguales, q, están en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.17 a) Suponga que las tres cargas juntas generan un campo eléctrico. Encuentre la ubicación de un punto (distinto al infinito) donde el campo eléctrico es cero. (*Sugerencia:* bosqueje las líneas del campo en el plano de las cargas.) b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en P debido a las dos cargas en la base?

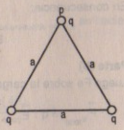


Figura P23.17

Resolución :

Parte (a)

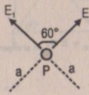
Sea "p" un punto interior que pertenece al triángulo equilátero. Supongamos que colocamos una carga de prueba q_0 entonces las 3 fuerzas producidas por las cargas de los vértices del triángulo son concurrentes. En consecuencia para que la carga q_0 esté en equilibrio las Σ fuerzas totales debe ser cero.

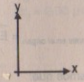
En consecuencia:

Dicha carga se localizará en el centro del triángulo que es el "baricentro".

Parte (b)

Por la ley de cosenos:





$$E_{total} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1.E_2.\cos 60°}$$

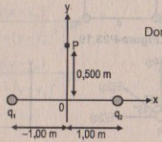
$$\Rightarrow \quad E_{total} = \sqrt{\left(\frac{k_e.q}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{k_e.q}{a^2}\right)^2 + 2\left(\frac{k_e.q}{a^2}\right)\left(\frac{k_e.q}{a^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad E_{total} = \frac{k_e.q}{a^2}\sqrt{3} = 1{,}73.\frac{k_e.q}{a^2}\ \left(\text{en la dirección } \hat{j}\right)$$

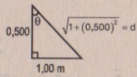
18. Dos cargas puntuales de 2,00 μC se localizan sobre el eje x. Una está en x = 1,00 m y la otra en x = –1,00 m. a) Determine el campo eléctrico sobre el eje y en y = 0,500 m. b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga de –3,00 μC situada en el eje y en y = 0,500 m.

Resolución :

Sea la figura:

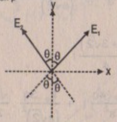


Donde $q_1 = q_2 = 2{,}00 \times 10^{-6}$ C



Parte (a)

Nos piden $E_{\text{total en p}} = ?$



$$\cos\theta = \frac{0{,}500}{\sqrt{1+(0{,}5)^2}}$$

Por simetría:

$$\vec{E}_{\text{total en p}} = 2\,E_1\cos\theta\ \hat{j} = 2.\frac{k_e.q_1}{d^2}.\frac{(0{,}500)}{d}\ \hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{total en p}} = \frac{2.(8{,}99\times10^9)(2{,}00\times10^{-6})(0{,}500)}{\left[1+(0{,}500)^2\right]^{3/2}}\ \hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en p}} = 12{,}86 \times 10^3\ \hat{j}\ N/C$$

Parte (b)

$$\vec{F}_{\text{total en p}} = \vec{E}_{\text{total en p}}.q = (-3{,}00 \times 10^{-6})(12{,}86 \times 10^3\ \hat{j})$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{total} = -38{,}6 \times 10^{-3}\ \hat{j}\ N$$

19. Cuatro cargas puntuales están en las esquinas de un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura P23.19. a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la posición de la carga q. b) ¿Cuál es la fuerza resultante sobre q?

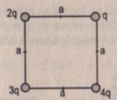
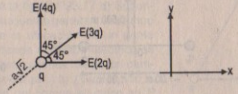


Figura P23.19

Resolución :

Parte (a)

Tenemos que:



$$\vec{E}_{\text{total en x}} = \vec{E}_{(2q)}\,\hat{i} + |E_{(3q)}|\cos 45\,\hat{i} = \frac{k_e.2q}{a^2}\hat{i} + \frac{k_e.3q}{(a\sqrt{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en x}} = \frac{k_e.q}{a^2}\frac{(8+3\sqrt{2})}{4}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{\text{total en y}} = \vec{E}_{4q}\,\hat{j} + |e_{3q}|\cos 45°\,\hat{j} = \frac{k_e.4q}{a^2}\hat{j} + \frac{k_e.3q}{(a\sqrt{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en y}} = \frac{k_e.q}{a^2}\left(\frac{16+3\sqrt{2}}{4}\right)\hat{j}$$

Hallando la magnitud:

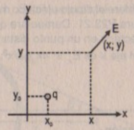
$$|E_{\text{total}}| = \sqrt{E^2_{\text{total en x}} + E^2_{\text{total en y}}} = \frac{k_e.q}{4a^2}\sqrt{(8+3\sqrt{2})^2 + (16+3\sqrt{2})^2}$$

$$\therefore \quad |E_{\text{total}}| = 5{,}91 . \frac{k_e.q}{a^2}$$

Hallando la dirección: $\tan\theta = \dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{\dfrac{k_e.q\,(16+3\sqrt{2})}{4a^2}}{\dfrac{k_e.q\,(8+3\sqrt{2})}{4a^2}}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{16+3\sqrt{2}}{8+3\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{16+3\sqrt{2}}{8+3\sqrt{2}}\right) \approx 58{,}8°$$

20. Una partícula puntual con una carga *q* se localiza en $(x_0; y_0)$ en el plano *xy*. Demuestre que las componentes *x* e *y* del campo eléctrico en el punto (x; y) debidas a esta carga *q* son



$$E_x = \frac{k_e q(x-x_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}}$$

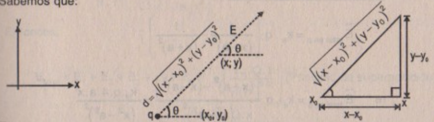
$$E_y = \frac{k_e q(y-y_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}}$$

Resolución :

Por demostrar que:

$$E_x = \frac{k_e.q\,(x-x_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}} \quad \wedge \quad E_y = \frac{k_e.q\,(y-y_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}}$$

Sabemos que:



Entonces:

$$E_x = |E| . \cos\theta = \frac{k_e.q}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]}\cdot\left(\frac{x-x_o}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}\right)$$

$$\therefore \quad E_x = \frac{k_e.q\,(x-x_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}} \qquad \text{Lqqd.}$$

Por otro lado:

$$E_y = |E| . \text{sen}\theta = \frac{k_e.q}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]}\cdot\left(\frac{y-y_o}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}\right)$$

$$\therefore \quad E_y = \frac{k_e.q\,(y-y_o)}{\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{3/2}} \qquad \text{Lqqd.}$$

21. Considere el dipolo eléctrico mostrado en la figura P23.21. Demuestre que el campo eléctrico en un punto distante a lo largo del eje x es $E_x \cong 4k_e qa/x^3$.

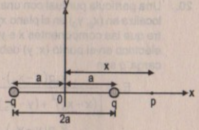


Figura P23.21

Resolución:

Para demostrar que:

$\boxed{E_x \cong 4k_e qa/x^3}$ a una distancia a lo largo del eje x

$$\vec{E}_q = \frac{k_e.q}{(x-a)^2}\,\hat{i}$$

(+)

$$\vec{E}_{(-q)} = \frac{k_e.q}{(x+a)^2}\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{total en p}} = k_e.q\left(\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x+a)^2}\right)\hat{i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{total en p}} = k_e.q\,\frac{\left[(x+a)^2-(x-a)^2\right]}{\left(x^2-a^2\right)^2} = \frac{k_e.q.4.a.x}{\left(x^2-a^2\right)^2}$$

Multiplicando por $\left(\frac{1}{x^4}\right)$ y dividiendo por $\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Entonces: $E_{\text{total en p}} = \frac{k_e.q.4a}{x^3}.\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^2}\right]$

Como: $x >> a \Rightarrow 1-\frac{a^2}{x^2} \approx 1$

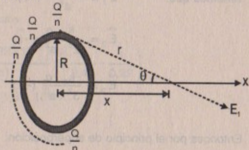
En conseuencia: $E_{\text{total en p}} = E_{\text{total en x}} \cong \frac{4.\,k_e.q.a}{x^3}$ Lqqd.

22. Considere n cargas puntuales positivas iguales, cada una de magnitud Q/n, situadas simétricamente alrededor de un circulo de radio R. a) Calcule la magnitud del campo eléctrico E en un punto a una distancia x sobre la línea que pasa por el centro del círculo y perpendicular al plano del círculo. b) Explique por qué este resultado es idéntico al obtenido en el ejemplo 23.8.

Resolución :

Parte (a)

Según el gráfico:



$$E_{total} = \sum_{K=1}^{n} \vec{E}_k \cos\theta$$

Para 1 carga de magnitud $\frac{Q}{n}$

$$E_1 = \frac{k_e}{r^2}.\frac{Q}{n}.\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{k_e.Q.x}{n.\left(r^2\right)^{3/2}} \quad ; \text{ donde: } r^2 = R^2 + x^2$$

$$E_2 = \frac{k_e Q}{n.r^2}.\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{k_e.Q.x}{n\left(r^2\right)^{3/2}}$$

Entonces:

$$E_{total} = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n = n\left(\frac{k_e.Q.x}{n\left(r^2\right)^{3/2}}\right) \text{ (Principio de superposición)}$$

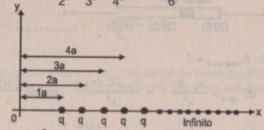
$$\therefore \quad E_{total} = \frac{k_e.Q.x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

23. Considere un número infinito de cargas idéntica (cada una con carga q) colocadas a lo largo del eje x a distancias a, 2a, 3a, 4a, ... del origen. ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a esta distribución? Sugerencia aproveche el techo de que:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Resolución:

Sea la figura:



Nos piden $E_{\text{total en el origen}} = ?$

Tenemos que: $\vec{E}_1 = \dfrac{k_e \cdot q}{a^2}\,(-\hat{i})$

$$\vec{E}_2 = \frac{k_e \cdot q}{2^2 \cdot a^2}\,(-\hat{i})$$

$$\vec{E}_3 = \frac{k_e \cdot q}{3^2 \cdot a^2}\,(-\hat{i})$$

$$\vdots$$

Entonces por el principio de superposición:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \text{ infinito}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total} = \frac{k_e \cdot q}{a^2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)}_{\frac{\pi^2}{6}}(\hat{i})$$

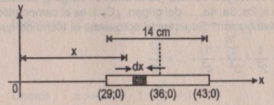
En consecuencia: $\vec{E}_{total} = -\dfrac{k_e \cdot q.\pi^2}{6.a^2}\,\hat{i}$

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA

24. Una barra de 14,0 cm de largo está cargada uniformemente y tiene una carga total de –22,0 μC. Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico a lo largo del eje de la barra en un punto a 36,0 cm de su centro.

Resolución :

Sea el siguiente gráfico:



Datos:
$Q_{total\ de\ la\ barra} = -22{,}0\ \mu C$
Long. barra = 14,0 cm

Nos piden: $E_{total\ en\ 0} = ?$

$$dE_{en\ 0} = \frac{k_e . dq}{x^2}\,\hat{i} = \frac{k_e . (\lambda . dx)}{x^2}\,\hat{i} \quad \text{donde } \frac{|Q|}{L} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad E_{total\ en\ 0} = \int dE_{en\ 0} = k_e . \lambda \int_{0,29\ m}^{0,43\ m} \frac{1}{x^2}.\,dx$$

$$\Rightarrow \quad E_{total\ en\ 0} = -k_e \cdot \frac{|Q|}{long.} \cdot \frac{1}{x}\Big|_{0,29\ m}^{0,43\ m}$$

$$\Rightarrow \quad E_{total\ en\ 0} = -\frac{(8{,}99\times10^9)(+22\times10^{-6})}{(0{,}14\ m)} \cdot \left(\frac{1}{0{,}43} - \frac{1}{0{,}29}\right)$$

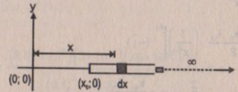
$$\therefore \quad E_{total\ en\ 0} = 1{,}6\times10^6$$

En la dirección positiva del eje x

25. Una línea de carga continua se encuentra a lo largo del eje x, extendiéndose desde $x = +x_0$ hasta el infinito positivo. La línea tiene una densidad de carga lineal uniforme λ_0. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en el origen?

Resolución :

Sea la figura:



Datos: λ_0 = Densidad de carga lineal

Nos piden $E_{total\ en\ el\ origen} = ?$

Sabemos que: $d\vec{E} = \dfrac{k_e . dq}{x^2}\left(-\hat{i}\right) = \dfrac{k_e . \lambda_0 . dx}{x^2}\,(-\hat{i})$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ el\ origen} = k_e . \lambda_0 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}.\,dx\ (-\hat{i})$$

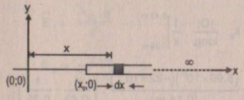
$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ el\ origen} = k_e . \lambda_0\, \frac{1}{x}\Big|_{\infty}^{x_0} (-\hat{i})$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total\ en\ el\ origen} = -\frac{k_e . \lambda_0}{x_0}\,(-\hat{i})$$

26. Una línea de carga empieza en $x = +x_0$ y se extiende hasta el infinito positivo. Si la densidad de carga lineal es $\lambda = \lambda_0 x_0/x$, determine el campo eléctrico en el origen.

Resolución :

Sea la figura:



Datos: $\lambda = \dfrac{\lambda_o \cdot x_o}{x}$ (densidad de carga lineal)

Nos piden E_{total} en el origen = ?

Sabemos que: $d\vec{E} = \dfrac{k_e . dq}{x^2}(-\hat{i}) = \dfrac{k_e . dx . \lambda}{x^2}(-\hat{i})$

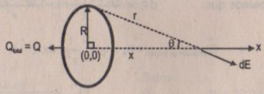
$$\Rightarrow \quad d\vec{E} = \frac{k_e . x_o . \lambda_o}{x^3} . dx(-\hat{i}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{total} = k_e . x_0 . \lambda_0 \int_{x_o}^{\infty} \frac{1}{x^3} . dx(-\hat{i})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total} = \frac{k_e . x_o \lambda_o}{2} . \left(\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{\infty}^{x_o} (-\hat{i})$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total} = -\frac{k_e . \lambda_o}{2x_0}\hat{i}$$

27. Un anillo cargado uniformemente de 10,0 cm de radio tiene una carga total de 75,0 μC. Encuentre el campo eléctrico sobre el eje del anillo de a) 1,00 cm, b) 5,00 cm, c) 30,0 cm, y d) 100 cm del centro del anillo.

Resolución :



Datos:

$Q_{total} = 75\ \mu C$

$R_{anillo} = 0,1\ m$

Parte (a)

Nos piden E_{total} a un 1,00 cm del centro

Sabemos que $\vec{E}_{total} = \vec{E}_{total\ en\ x}$

Entonces decimos que:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x = dE.\cos\theta\hat{i} = \frac{k_e . dq}{r^2} . \frac{x}{r}\hat{i} = \frac{k_e . x}{r^3} . dq\,\hat{i}$$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{k_e\ .x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\int_0^Q dq\,\hat{i}\ ;\ \text{donde } r^2 = R^2 + x^2$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total} = \frac{k_e . x . Q}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\hat{i}$$

para x = 0,01 m

$$\vec{E}_{total} = \frac{(8,99\times10^9)(0,01)(75\times10^{-6})}{\left[(0,1)^2 + (0,01)^2\right]^{3/2}}\hat{i} = 6,64 \times 10^6\ \hat{i}\ N/C$$

Para (b)

Para x = 5,00 cm

$$\vec{E}_{total} = \frac{(8,99\times10^9)(5,00\times10^{-2})(75\times10^{-6})}{\left[(0,1)^2 + (0,05)^2\right]^{3/2}}\hat{i} = 24,1 \times 10^6\ \hat{i}\ N/C$$

Parte (c)

Para x = 30,0 cm

$$\vec{E}_{total} = \frac{(8,99\times10^9)(3\times10^{-1})(75\times10^{-6})}{\left[(0,1)^2 + (0,30)^2\right]^{3/2}}\hat{i} = 6,4 \times 10^6\ \hat{i}\ N/C$$

Parte (d)

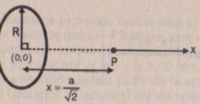
Para x = 1,00 m

$$\vec{E}_{total} = \frac{(8,99\times10^9)(1,00)(75\times10^{-6})}{\left[(0,1)^2 + (1,00)^2\right]^{3/2}}\hat{i} = 0,664 \times 10^6\ \hat{i}\ N/C$$

28. Muestre que la intensidad de campo máxima $E_{máx}$ a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente ocurre en $x = a/\sqrt{2}$ (véase la Fig. 23.17) y tiene el valor $Q/(6\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0 a^2)$.

Resolución :

Sea la figura:



Donde: R = a

Por demostrar que: $E_{total\ máx\ en\ p} = \dfrac{Q}{6\sqrt{3}\ \pi\varepsilon_o\ a^2}$

Sabemos que: $E_{total} = E_{total\ en\ x} = \dfrac{k_e.Q.x}{\left[R^2+x^2\right]^{3/2}}$ (ya demostrado en el problema n.° 27)

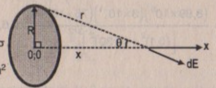
Entonces: para $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; $R = a$

$$E_{total\ máx.\ en\ P} = \frac{k_e.Q}{\left(a^2+\dfrac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q.a}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\left[\dfrac{3a^2}{2}\right]^{3/2}}\right)$$

$$\therefore \quad E_{máx.\ en\ P} = \frac{Q}{6\sqrt{3}\ .\ \pi\varepsilon_o\ a^2} \quad \text{Lqqd.}$$

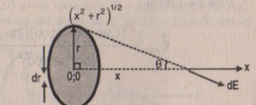
29. Un disco cargado de modo uniforme de 35,0 cm de radio tiene una densidad de carga de $7{,}90\times10^{-3}$ C/m². Calcule el campo eléctrico sobre el eje del disco en a) 5,00 cm, b) 10,0 cm, c) 50,0 cm, y d) 200 cm del centro del disco.

Resolución :
Sea la figura:



Donde:
$\sigma = 7{,}90\times10^{-3}$ C/m²
$R = 35{,}0$ cm

Parte (a)
Sabemos que: $E_{total} = E_{total\ en\ x}$



$$dE_x = dE.\cos\theta = \frac{k_e.\sigma.2\pi.r\,dr.x}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = k_e.x.\sigma.\pi\int_0^R\frac{2r\,dr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = k_e.\sigma.x.\pi\int_0^R\left(x^2+r^2\right)^{-3/2}.\,d\left(r^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = k_e.x.\pi.\sigma\left[\frac{\left(x^2+r^2\right)^{-1/2}}{-\dfrac{1}{2}}\right]_0^R$$

$$\therefore \quad E_{total} = 2\pi.k_e.\sigma\left[\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right] \text{ (para un disco)}$$

Para: x = 5,00 cm

$$E_{total} = 2\pi\times(8{,}99\times10^{-9})(7{,}90\times10^{-3})\ .\left[\frac{5{,}00\times10^{-2}}{|5{,}00\times10^{-2}|}-\frac{5{,}00\times10^{-2}}{\left(25\times10^{-4}+(0{,}35)^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \quad E_{total} = 3{,}83\times10^6 \text{ N/C (alejándose)}$$

Parte (b)
Para x = 0,1 m

$$E_{total} = 2\pi\times(8{,}99\times10^{-9})(7{,}90\times10^{-3})\left[\frac{0{,}1}{|0{,}1|}-\frac{0{,}1}{\left((0{,}1)^2+(0{,}35)^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \quad E_{total} = 324\times10^6\ \frac{N}{C} \quad \text{(alejándose)}$$

Parte (c)
Para x = 0,5 m

$$E_{total} = 2\pi\ \times(8{,}99\times10^{9})(7{,}90\times10^{-3})\left[\frac{(0{,}5)}{|0{,}5|}-\frac{0{,}5}{\left[(0{,}5)^2+(0{,}35)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \quad E_{total} = 80{,}7\times10^6 \text{ N/C} \quad \text{(alejándose)}$$

Parte (d)
Para x = 2,00 m

$$E_{total} = 2\pi\ (8{,}99\times10^{9})(7{,}90\times10^{-3})\left[\frac{2}{|2|}-\frac{2}{\left[(2)^2+(0{,}35)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \quad E_{total} = 6{,}68\times10^6 \text{ N/C (alejándose)}$$

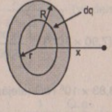
30. En el ejemplo 23.9 se obtiene la expresión exacta para el campo eléctrico en un punto sobre el eje de un disco de radio R = 3,00 cm, con una carga de +5,20 μC distribuida de manera uniforme. a) Con el resultado del ejemplo 23.9 calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje y a 3,00 mm del centro. Compare esta respuesta con el campo calculado a partir de la aproximación de campo cercano $E = \sigma / 2\varepsilon_0$. b) Utilizando el resultado del ejemplo 23.9 calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje y a 30,0 cm del centro del disco. Compare este resultado con el campo eléctrico obtenido tratando al disco como una carga puntual de +5,20 μC a una distancia de 30,0 cm.

Resolución:

Datos:

$R = 3{,}00$ cm

$Q_{total} = 5{,}20\ \mu C$



Parte (a)

Sabemos que: $E_{total\,(disco)} = 2\pi.k_e.\sigma \left[\dfrac{x}{|x|} - \dfrac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$ (ya demostrado problema 29)

Para $x = 3{,}00 \times 10^{-3}$ m

$$E_{total} = \frac{2\pi.k_e.(Q_{total})}{\text{área total}}\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{2\pi.(8{,}99\times10^9)(5{,}20\times10^{-6})}{\pi(3\times10^{-2})^2}\left[\frac{3{,}00\times10^{-3}}{[3{,}00\times10^{-3}]} - \frac{3{,}00\times10^{-3}}{(3\times10^{-3})^2+(3\times10^{-2})}\right]$$

Resolviendo resulta que: $E_{total} = 10{,}4 \times 10^7$

Comparando con:

$$E_{total} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{5{,}20\times10^{-6}}{\pi\times(3\times10^{-2})^2}\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8{,}85\times10^{-12}}\right) = 10\times10^7 \text{ N/C}$$

Aproximadamente son iguales.

Parte (b)

Para $x = 30{,}0$ cm

$$E_{total} = \frac{2\pi\times(8{,}99\times10^9)(5{,}20\times10^{-6})}{\pi\times(3\times10^{-2})^2}\left[\frac{0{,}3}{|0{,}3|} - \frac{0{,}3}{(0{,}3^2+0{,}03^2)^{1/2}}\right] = 31{,}16 \times 10^7 \text{ N/C}$$

Comparando con:

$$E_{total} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{k_e.Q}{r^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(5{,}20\times10^{-6})}{(0{,}30)^2} = 0{,}052 \times 10^7 \text{ N/C}$$

Resulta ser: "Muy mayor"

31. El campo eléctrico a lo largo del eje de un disco cargado de manera uniforme de radio *R* y carga *Q* se calculó en el ejemplo 23.9. Demuestre que el campo eléctrico a distancias x que son grandes comparadas con R se acerca al de una carga puntual $Q = \sigma\pi R^2$. (*Sugerencia:* demuestre primero que $x / (x^2 + R^2)^{1/2} = (1 + R^2 / x^2)^{-1/2}$ y use la serie del binomio $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ cuando $\delta << 1$.

Resolución:

Datos: R, Q

Por demostrar que: $\boxed{E_{total} = \dfrac{k_e.Q}{x^2}}$

en un disco (se acerca al de una carga puntual para distancias de $x >> R$)

Sugerencia:

Nos piden demostrar que: $\dfrac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \left(1+\dfrac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}$ y utilizar la serie del binomio:

$(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$, cuando $\delta << 1$

Tenemos que: $$\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{(x^2+R^2)^{1/2}}{x}} = \frac{1}{\dfrac{(x^2+R^2)^{1/2}}{(x^2)^{1/2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} = \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \quad \text{Lqqd.}$$

Luego: utilizando la serie del binomio:

Como: $x >> R \Rightarrow \dfrac{R^2}{x^2} << 1$

Luego: $\left(1+\dfrac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{R^2}{2x^2}$

Entonces sabemos que:

$$E_{\text{total en un disco a una distancia x del eje}} = 2\pi k_e\,.\,\sigma\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right] \text{ (ya demostrado)}$$

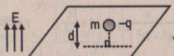
Luego: $E_{\text{total en un disco}} = \dfrac{2\pi.k_e.Q}{\pi.R^2}\left[1-\left(1-\dfrac{R^2}{2x^2}\right)\right]$

$\therefore \quad E_{\text{total en un disco}} = \dfrac{k_e\,Q}{x^2}$ Lqqd (para una carga puntual)

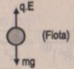
32. Un pedazo de poliestireno de masa *m* tiene una carga neta de *−q* y flota sobre el centro de una lámina de plástico horizontal y muy larga, que tiene una densidad de carga uniforme en su superficie. ¿Cuál es la carga por unidad de área de la lámina de plástico?

Resolución:

Sea la figura:



Nos piden: $\dfrac{\text{carga}}{\text{área}} = \sigma = ?$



Haciendo D. C. L. (carga q) (flota)

Suponiendo que la carga flota a una distancia "d"; entonces $\underbrace{\dfrac{Q}{\text{área}} = \dfrac{Q}{d^2}}_{\text{Poliestireno}} = \sigma$

Luego: $q.E = mg$

$\Rightarrow \dfrac{q.\,k_e.Q}{d^2} = mg$

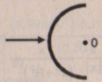
$\Rightarrow \dfrac{k_e.q.\sigma.\text{área}}{d^2} = \dfrac{k_e\;q.\sigma.d^2}{d^2} = m.g \quad \therefore \; \sigma = \dfrac{mg}{k_e.q}$

33. Una barra aislante cargada de manera uniforme de 14,0 cm de largo se dobla en forma de semicírculo, como se muestra en la figura P23.33.Si la barra tiene una carga total de −7,50 μC encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en *O*, el centro del semicírculo.

Resolución:

Sea la figura:

Barra aislante



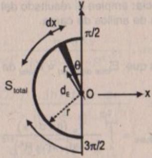
Datos:

$Q_{\text{total}} = 7{,}50\ \mu C$

Long. barra = 14,0 cm

Nos piden $E_{\text{total en }0} = ?$ Figura P23.33

Del gráfico



$\int d\vec{E}\,.\,\text{sen}\theta\,(-\hat{i}) = E_{\text{total en }0}$

Por otro lado :

$S = \theta\, r \Rightarrow ds = r.d\theta$

además : $\pi r = \text{long} \quad \Rightarrow r = \dfrac{\text{long}}{\pi}$

$\dfrac{Q}{S_{\text{total}}} = \lambda \;\Rightarrow\; dq = \lambda\,.\,ds = \lambda r d\theta$

$\Rightarrow \vec{E}_{\text{total en }0} = \int \dfrac{k_e.dq}{r^2}\,.\,\text{sen}\theta\left(-\hat{i}\right) = \dfrac{\lambda.r.k_e}{r^2}\int_{3\pi/2}^{\pi/2}\text{sen}\theta d\theta\,(-\hat{i})$

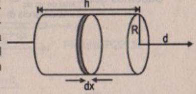
$\Rightarrow E_{\text{total en }0} = -\dfrac{k_e.Q}{\text{longitud}}\cdot\left(\dfrac{\pi}{\text{longitud}}\right)\cos\theta\Big|_{3\pi/2}^{\pi/2}\left(-\hat{i}\right)$

$\Rightarrow E_{\text{total en }0} = -\dfrac{(8{,}99\times10^9)(7{,}50\times10^{-6})(3{,}1416)}{(0{,}14)^2}\,\hat{i}$

$\therefore \; E_{\text{total en }0} = -21{,}6\times10^6\ \hat{i}$ N/C

34. a) Considere un cascarón cilíndrico circular recto cargado uniformemente con una carga total *Q*, radio *R* y altura *h*. Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia *d* del lado derecho del cilindro, como se muestra en la figura P23.34. (*Sugerencia:* emplee el resultado del ejemplo 23.8 y considere al cilindro como una colección de anillos de carga.)

b) Considera ahora un cilindro sólido con las mismas dimensiones y que conduce la misma carga, la cual está distribuida de manera uniforme a través de su volumen. Utilice el resultado del ejemplo 23.9 para encontrar el campo creado en el mismo punto.



Resolución:

Sea la figura:

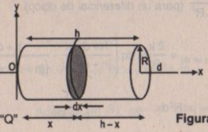


Figura P23.34

Sugerencia: emplee el resultado del ejemplo 23.8 y considere al cilindro como una colección de anillos de carga.

Sabemos que: $E_{total\ de\ un\ dq} = E_{total}$ de x $= \dfrac{k_e.(h-x+d)}{\left([h-x+d]^2+R^2\right)^{3/2}}.\overbrace{dq}^{\lambda.dx}$

Entonces:

$$E_{total\ del\ cilindro} = \int_d^{h+d} \frac{k_e.(h+d-x)}{\left([h+d-x]^2+R^2\right)^{3/2}}.dx.\lambda \quad \text{donde} = \lambda = \frac{Q}{h}$$

Integrando la expresión:

Haciendo cambio de variable $(h+d-x)^2+R^2 = u \Rightarrow du = -2(h+d-x)\,dx$

Entonces: $k_e.\lambda.\left.\dfrac{1}{\sqrt{(h+d-x)^2+R^2}}\right|_d^{d+h} = \dfrac{k_e.Q}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{b^2+R^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$

$$\therefore\ E_{total\ del\ cilindro} = \frac{k_e.Q}{h}\left(\frac{1}{|R|}-\frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$$

Parte (b)

Considerando ahora un cilindro "sólido" ρ_{cte} a través de un volumen y carga total "Q".

Sugerencia: emplee el resultado del ejemplo 23.9 para encontrar el campo creado en el mismo punto.

Sabemos que $\underset{\text{(a una distancia d)}}{E_{total\ de\ un\ dq}} = E_{total\ en\ x}$

$$= 2\pi.\,k_e.\,\sigma\left(\frac{h+d-x}{|h+d-x|}-\frac{h+d-x}{\left([h+d-x]^2+R^2\right)^{1/2}}\right)$$

donde σ : $\dfrac{dq}{\pi.R^2}$ (para un diferencial de disco)

$$\Rightarrow\ E_{total\ de\ un\ dq} = \frac{2k_e}{R^2}.dq.\left(\frac{h+d-x}{|h+d-x|}-\frac{h+d-x}{\left([h+d-x]^2+R^2\right)^{1/2}}\right)$$

donde: $dq = \rho\pi R^2dx \ \wedge\ \rho = \dfrac{Q}{h.\pi.R^2}$

Entonces:

$$E_{total\ del\ cilindro} = \int_d^{h+d}\frac{2\,k_e.\rho.\pi.R^2}{R^2}\left(\frac{h+d-x}{|h+d-x|}-\frac{h+d-x}{\left([h+d-x]^2+R^2\right)^{1/2}}\right).\,dx$$

$$\Rightarrow\ E_{total\ del\ cilindro} = \frac{2\,k_e.Q}{h.R^2}\int_d^{h+d}dx-\frac{2\,k_e.Q}{hR^2}\int_d^{h+d}\frac{(h+d-x)\,.dx}{\left([h+d-x]^2+R^2\right)^{1/2}}$$

$$\therefore\ \underset{\text{a una distancia d}}{E_{total\ del\ cilindro}} = \frac{2\,k_e.Q}{R^2}+\frac{k_e.Q}{hR}-\frac{k_e.Q\sqrt{h^2+R^2}}{hR^2}$$

35. Una barra delgada de longitud l y carga uniforme por unidad de longitud λ está a lo largo del eje x como se muestra en la fitura P23.35. a) Demuestre que el campo eléctrico en *P* a una distancia *y* de la barra, a lo lago del bisector perpendicular no tiene componente x y está dado por $E = 2k_e\lambda$ sen θ_o/y. b) Utilizando su resultado del inciso a) muestra que el campo de una barra de longitud infinita es $E = 2k_e\lambda/y$. (*Sugerencia:* calcule primero el campo *P* debido a un elemento de longitud dx, el cual tiene una carga λ dx. Después cambie variables de x a θ aprovechando que x = y tanθ y dx = y sec² θ dθ e integre sobre θ.

Resolución:

Dato: $\dfrac{Q}{L} = \lambda$

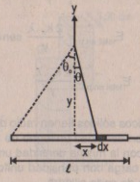
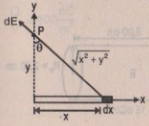


Figura P23.35

Parte (a)

Por demostrar que: $E_p = E_y = \dfrac{2k_e.\lambda.\text{sen}\,\theta_o}{y}$



Sabemos que:

$\tan\theta = \dfrac{x}{y} \Rightarrow dx = y.\sec^2\theta.d\theta$

Además: $dq = \lambda\,.dx$

Tenemos que:

$$dE_p = dE_y \cos\theta = \frac{k_e.dq}{x^2+y^2} = \frac{k_e.\lambda.\cos\theta.dx}{x^2+y^2}$$

Entonces: $$dE_y \cos\theta = \frac{k_e.\lambda.y.\sec^2\theta.\cos\theta.d\theta}{y^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{k_e.\lambda.\sec^2\theta.\cos\theta.d\theta}{y.\sec^2\theta}$$

Integrando:

$$E_{\text{total en p}} = \int dE_y \cos\theta = 2\frac{k_e.\lambda}{y}\int_0^{\theta_o}\cos\theta.d\theta \quad \text{(por simetría)}$$

$$\therefore\ E_{\text{total en p}} = \frac{2k_e.\lambda.\text{sen}\,\theta_o}{y} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)
Demostrar que:

$$E = \frac{2k_e.\lambda}{y}$$, para una barra de longitud infinita.

Del inciso (a)

$$E_{\text{total en p}} = \int dE_y \cos\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{k_e.\lambda}{y}\cos\theta.d\theta \quad \text{(por simetría)}$$

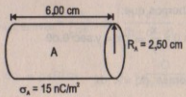
$$\Rightarrow\quad E_{\text{total en p}} = \frac{2k_e.\lambda}{y}\,\text{sen}\,\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

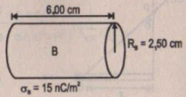
$$\therefore\quad E_{\text{total en p}} = \frac{2k_e.\lambda}{y} \qquad \text{Lqqd.}$$

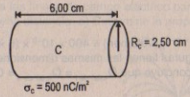
36. Tres cilindros plásticos sólidos tienen radio de 2,50 cm y longitud de 6,00 cm. Uno a) transporta carga con densidad uniforme de 15,0 nC/m² por toda su superficie. Otro b) conduce carga con la misma densidad uniforme sólo sobre su cara lateral curva. El tercero c) tiene carga con densidad uniforme de 500 nC/m³ en todo el plástico. Encuentre la carga de cada cilindro.

Resolución:

Sean los 3 cilindros plásticos según dato:







Nos piden Q_{total} de cada cilindro = ?

Q_{total} de A = σ . área = $(15\times10^{-9})\,(2\pi\,(2{,}50\times10^{-2})\,(6{,}00\times10^{-2})] = 1{,}4\times10^{-9}$ C

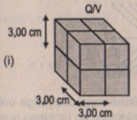
Q_{total} de B = σ . área = $(15\times10^{-9})\,(2\pi\,(2{,}50\times10^{-2})\,(6{,}00\times10^{-2})] = 1{,}4\times10^{-9}$ C

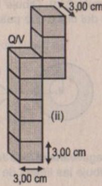
Q_{total} de C = σ . área = $(500\times10^{-9})\,(2\pi\,(2{,}50\times10^{-2})\,(6{,}00\times10^{-2})] = 4{,}7\times10^{-9}$ C

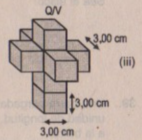
37. Ocho cubos plástico sólidos, cada uno con 3,00 cm por lado, se unen para formar cada uno de los objetos (i, ii, iii y iv) mostrados en la figura P23.37. a) Si cada objeto transporta carga con densidad uniforme de 400 nC/m³ a través de su volumen, ¿cuál es la carga de cada objeto? b) Si a cada objeto se le da carga con densidad uniforme de 15,0 nC/m² en todas partes sobre su superficie expuesta, ¿cuál es la carga en cada objeto? c) Si la carga se coloca sólo sobre los lados donde se encuentran las superficies perpendiculares, con una densidad uniforme de 80,0 pC/m; ¿cuál es la carga de cada objeto?

Figura P23.37

Sean las figuras:

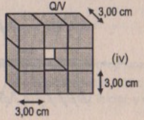






Donde:

$$\frac{Q}{V} = 400\frac{nC}{m^3}$$



Resolución:
Parte (a)

$Q_{total\,(fig.\,i)} = (400 \times 10^{-9})$ (volumen) $= 400 \times 10^{-9} \times (6 \times 10^{-2})^3 = 86{,}4 \times 10^{-12}\,C = 86{,}4$ pC como ambas figuras tienen las mismas dimensiones y la misma densidad de carga volumétrica se concluye que $Q_{total\ de\ i} = Q_{total\ de\ ii} = Q_{total\ de\ iii} = Q_{total\ de\ iv}$.

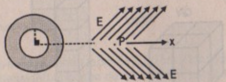
Parte (b):
Si a cada figura se le dá una $\sigma = 15{,}0 \times 10^{-9}$ c/m² ; entonces:

- $Q_{total\ fig.\ 1} = \sigma$. Área superficial $= (15{,}0 \times 10^{-9})\ .\ [2(0{,}36 + 0{,}36 + 0{,}36)] \times 10^{-2}$
  $\therefore\ Q_{total\ fig.\ i} = 324 \times 10^{-12}\,C$
- $Q_{total\ fig.\ 2} = \sigma$. Área superficial $= (15{,}0 \times 10^{-9})\ .\ (30{,}6 \times 10^{-3})$
  $\therefore\ Q_{total\ fig.\ ii} = 459 \times 10^{-12}\,C$
- $Q_{total\ fig.\ 3} = \sigma$. Área superficial $= (15{,}0 \times 10^{-9})\ .\ (30{,}6 \times 10^{-3})$
  $\therefore\ Q_{total\ fig.\ iii} = 459 \times 10^{-12}\,C$
- $Q_{total\ fig.\ 4} = \sigma$. Área superficial $= (15{,}0 \times 10^{-9})\ .\ (28{,}8 \times 10^{-3})$
  $\therefore\ Q_{total\ fig.\ iv} = 432 \times 10^{-12}\,C$

LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

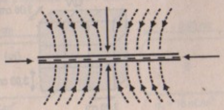
38 Un disco cargado positivamente tiene una carga uniforme por unidad de área, como se describe en el ejemplo 23.9. Dibuje las líneas de campo eléctrico en un plano perpendicular al plano del disco que pasa por su centro.

Resolución:
Sea el disco:



39. Una barra cargada negativamente de longitud finita tiene una carga uniforme por unidad de longitud. Dibuje las líneas de campo eléctrico en un plano que contenga a la barra.

Resolución:



40. La figura P23.40 muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales separadas por una pequeña distancia. a) Determine la proporción q_1/q_2. b) ¿Cuáles son los signos de q_1 y q_2?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

Parte (b):
q_2 = signo positivo ; q_1 = signo negativo

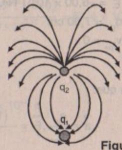


Figura P23.40

MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

41. Un electrón y un protón se ponen en reposo en un campo eléctrico de 520 N/C. Calcule la rapidez de cada partícula 48,0 ns después de liberarlas.

Resolución :
Datos: $v_{o_{p+}} = 0$; $v_{o_{e-}} = 0$
E = 520 N/C ; t = 48 ns

Nos piden $v_{p+} = ?$; $v_{e-} = ?$

Sabemos que: $a = \dfrac{q.E}{m}$ (segunda ley de Newton)

Entonces por cinemática:

$$v_{p+} = v_0 + a.t = 0 + \frac{(1{,}6\times10^{-19})(520)}{1{,}67\times10^{-27}} \times (48 \times 10^{-9})$$

$$\therefore\ v_{p+} = 2{,}39 \times 10^3\ m/s = 2{,}39\ km/s$$

$$v_{e-} = v_0 + at = 0 + \frac{(1{,}6\times10^{-19})(520)}{9{,}1\times10^{-31}} \times (48 \times 10^{-9})$$

$$\therefore\ v_{e-} = 4{,}39 \times 10^6\ m/s = 4{,}39\ Mm/s$$

42. Un protón se lanza en la dirección x positiva dentro de una región de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = -6{,}00 \times 10^5\,\hat{i}$ N/C. El protón viaja 7,00 cm antes de detenerse. Determine a) la aceleración del protón, b) su rapidez inicial, y c) tiempo que tarda en detenerse.

Resolución :

Datos: $\vec{E} = -6{,}00 \times 10^5\ \hat{i}$ N/C

$d_{p+} = 7{,}00$ cm

$v_{i_{p+}} = 0$

Parte (a)

Sabemos que:

$$\vec{a} = \frac{q_{p^+}}{m_{p^+}}.\vec{E} = -\frac{(1{,}6\times 10)^{-19}(6{,}00\times 10^5)}{1{,}67\times 10^{-27}}\hat{i}$$

$$\therefore\ a_{\vec{p^+}} = -5{,}75 \times 10^{13}\ \hat{i}\ \text{m/s}^2$$

Parte (b):

Por cinemática: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + at$

$$\Rightarrow \vec{v}_{inicial} = \vec{a}_{p^+} \times t = (5{,}75 \times 10^3)(t) \qquad \dots (\alpha)$$

Por otro lado:

$$2ad = v^2_{inicial} - v^2_{final} = v^2_{inicial}$$

$$\Rightarrow v_{inicial} = \sqrt{2.a.d} = \sqrt{2\times(7{,}00\times 10^{-2})(5{,}75\times 10^{13})}$$

$$\therefore\ v_{inicial} = 2{,}84 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Parte (c)

De la parte (b) en la ecuación (α)

$$t = \frac{V_{inicial}}{a} = \frac{2{,}84\times 10^6}{5{,}75\times 10^{13}} = 49 \times 10^{-9} \text{ s} = 49 \text{ ns}$$

43. Un protón acelera desde el reposo en un campo eléctrico uniforme de 640 N/C. Cierto tiempo después su rapidez es de $1{,}20 \times 10^6$ m/s (no relativista, puesto que v es mucho menor que la rapidez de la luz). a) Encuentre la aceleración del protón. b) ¿Cuánto tarda el protón en alcanzar esta rapidez? c) ¿Qué distancia ha recorrido en ese tiempo? d) ¿Cuál es su energía cinética en este tiempo?

Resolución :

Datos: E = 640 N/C

$v_{p+} = 1{,}20 \times 10^6$ m/s

$v_{0p+} = 0$

Parte (a)

Sabemos que: $$a_{p+} = \frac{q_{p^+}.E}{m_{p^+}} = \frac{(1{,}6\times 10^{-19})(640)}{1{,}67\times 10^{-27}} = 61{,}4 \times 10^9 \text{ m/s}^2$$

Parte (b):

Por cinemática $v_{p+} = v_0 + a.t$

$$\Rightarrow t = \frac{1{,}20\times 10^6}{61{,}4\times 10^9} = 19{,}5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Parte (c):

Sabemos que: $v^2_{p^+} = v_0^2 + 2.a.d$

$$\Rightarrow d = \frac{v^2_{p^+}}{2a} = \frac{(1{,}20\times 10^6)^2}{2(61{,}4\times 10^9)} = 11{,}7 \text{ m}$$

Parte (d):

Sabemos que: $$E_K = \frac{1}{2}m_{p+}.v^2 = \frac{1}{2}(1{,}67 \times 10^{-27})(1{,}20 \times 10^6)^2$$

$$\therefore\ E_{K(protón)} = 1{,}20 \times 10^{-15} \text{ J}$$

44. Cada uno de los electrones en un haz de partículas tiene una energía cinética de $1{,}60 \times 10^{-17}$ J. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que detendrá estos electrones en una distancia de 10,0 cm?

45. Cada uno de los electrones en un haz de partículas tiene una energía cinética *K*. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que detendrá estos electrones en una distancia *d*?

Resolución 44 y 45:

Datos: K : Energía cinética

d : Distancia recorrida

E = ?

Por la conservación y teorema del trabajo y la energía:

$$F.d = \Delta E_K$$

$$\Rightarrow q_{e^-}.E.d = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -K$$

Como la carga del electrón es negativa; entonces:

$$e.E.d = K$$

$$\therefore\ E = \frac{K}{e.d} \quad \text{(en la dirección del movimiento)}$$

46. Una cuenta de 1,00 g cargada positivamente cae desde el reposo en el vacío desde una altura de 5,00 m a través de un campo eléctrico vertical uniforme con una magnitud de $1{,}00 \times 10^4$ N/C. La cuenta golpea al suelo a una rapidez de 21,0 m/s. Determine a) la dirección del campo eléctrico (arriba o abajo), y b) la carga en la cuenta.

Resolución :

Datos: $M_{cuenta} = 1{,}00 \times 10^{-3}$ kg (positiva)

$h = 5{,}00$ m

$\vec{E} = 1{,}00 \times 10^4$ N/C

$v_{final} = 21{,}0$ m/s ; $v_{inicial} = 0$

Parte (a)

Como la cuenta cae verticalmente hacia abajo, acelera hacia abajo; por lo tanto la dirección del campo eléctrico está dirigido hacia abajo.

Parte (b):

Sabemos que por la segunda ley de Newton:

$$q.E = M.a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{q.E}{M}$$

Por cinemática o por "caída libre"

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a.d$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = 0 + \frac{2.h.q.E}{M}$$

$$\Rightarrow \quad q_{cuenta} = \frac{v_f^2.M}{2h.E} = \frac{(21{,}0)^2}{2(5)(1{,}00\times10^4)} = 4{,}41 \times 10^{-3}\text{C}$$

47. Un protón se mueve a $4{,}50 \times 10^5$ m/s en la dirección horizontal. Entra a un campo eléctrico vertical uniforme de $9{,}60 \times 10^3$ N/C. Ignore todos los efectos gravitacionales y encuentre a) el tiempo que tarda el protón en viajar 5,00 cm en forma horizontal, b) su desplazamiento vertical después de que ha recorrido 5,00 cm horizontalmente, y c) las componentes horizontal y vertical de su velocidad después de que ha recorrido 5,00 cm en la dirección horizontal.

Resolución :

Datos: $v_{p+} = 4{,}50 \times 10^5$ m/s

$\vec{E} = 9{,}60 \times 10^3$ N/C (hacia abajo)

Parte (a)

Nos pide: t_{tarda} en recorrer 5,00 cm en forma horizontal = ?

Por movimiento rectilíneo uniforme:

$$v_{p+} \cdot t_{tarda} = 5{,}00 \times 10^{-2}$$

$$\therefore \quad t_{tarda} = \frac{5{,}00\times10^{-2}}{4{,}50\times10^5} = 111 \times 10^{-9}\text{ s}$$

Parte (b) :

Por cinemática $\quad h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q.E}{m}\right).t^2$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1{,}6\times10^{-19}\times9{,}60\times10^3}{1{,}67\times10^{-27}}\right)(111 \times 10^{-9})^2$$

$$\therefore \quad h = 5{,}67 \times 10^{-3}\text{ m}$$

Parte (c) :

$$v_{fy} = v_0 + a.t = 0 + \frac{(1{,}6\times10^{-19})(9{,}60\times10^3)}{1{,}67\times10^{-27}} \times (111 \times 10^{-9})^2$$

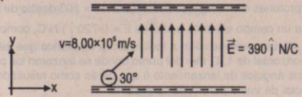
$$\therefore \quad v_{fy} = 102 \times 10^3\text{ m/s}$$

Por lo tanto : las componentes de la velocidad será:

$$\vec{V} = (450\ \hat{i} + 102\hat{j}) \times 10^3\text{ m/s}$$

48. Un electrón se proyecta a un ángulo de 30,0° sobre la horizontal a una rapidez de $8{,}20 \times 10^5$ m/s, en una región donde el campo eléctrico es $E = 390\ \hat{j}$ N/C. Ignore los efectos de la gravedad y determine a) el tiempo que tarda el electrón en regresar a su altura inicial, b) la altura máxima que alcanza, y c) su desplazamiento horizontal cuando alcanza su altura máxima.

Resolución :



Parte (a)

Ecuación de movimiento del electrón en el eje y:

$$y(t) = v_y.t - \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = v_{0y}\cos30^\circ . t - \frac{1}{2}\left(\frac{q.E}{m}\right).t^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 = v_{0y}\cos30^\circ . t - \frac{q.E}{2m}.t^2$$

$$\Rightarrow \ t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2.m_{e^-}.V_{oy}.\text{sen}30°}{|q_{e^-}|.E}$$

$$\Rightarrow \ t_{\text{vuelo}} = \frac{2(9{,}1\times10^{-31})(8{,}20\times10^{5})(1/2)}{(1{,}6\times10^{-19})(390)} = 12\times10^{-9}\ \text{s} \equiv 12\ \text{ns}$$

Parte (b)

Por movimiento de proyectiles: $y_{máx} = V_{oy}\,.\,t - \frac{1}{2}\left(\frac{q_e.E}{m_{e^-}}\right).\,t^2$

Entonces reemplazando:

$$y_{máx} = v.\text{sen}30\,.\left(\frac{t_{\text{vuelo}}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{q_{e^-}.E}{m_{e^-}}\right)\left(\frac{t^2_{\text{vuelo}}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{máx} = (8{,}20\times10^{5})\,(0{,}5)(6{,}00\times10^{-9}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}6\times10^{-19}}{9{,}1\times10^{-31}}\right)(390)\left(\frac{12\times10^{-9}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad y_{máx} = 1{,}23\times10^{-3}\ \text{m} \equiv 1{,}23\ \text{mm}$$

Parte (c)

$$D_{\text{horizontal}} = \text{v}.\cos30°\,.\left(\frac{t_{\text{vuelo}}}{2}\right) \ \text{... (por cinética)}$$

$$\Rightarrow \quad D_{\text{horizontal}} = (8{,}20\times105)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6{,}00\times10^{-9})$$

$$\therefore \quad D_{\text{horizontal}} = 4{,}3\times10^{-3}\ \text{m} \equiv 4{,}3\ \text{mm}$$

49. Se lanzan protones a una rapidez incial $v_i = 9{,}55\times 103$ dentro de una región donde se presenta un campo eléctrico uniforme $E = (-720\,\hat{j})$ N/C, como se muestra en la figura P23.49. Los protones van a incidir sobre un blanco que se encuentra a una distancia horizontal de 1,27 mm del punto donde se lanzaron los protones. Determine a) los dos ángulos de lanzamiento θ que darán como resultado un impacto, y b) el tiempo total de vuelo para cada trayectoria.

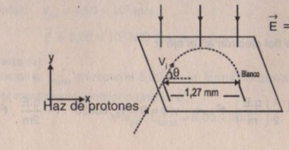


Figura P23.49

Resolución:

Donde: $v_i = 9{,}55\times10^{3}$ m/s

$\vec{E} = -270\ \hat{j}$ N/C

$D_{máx} = 1{,}27$ mm

Parte (a)

Sabemos que: $q_{p+}\,.\,\vec{E} = \vec{F} = m_{p+}.\vec{a}$

$$\Rightarrow \ \vec{a}_{p^+} = \frac{q_{p^+}.\vec{E}}{m_{p^+}} = -\frac{(1{,}6\times10^{-19})(720)}{1{,}67\times10^{-27}}\hat{j}\ \text{m/s}^2$$

Por otro lado:

La ecuación de trayectoria en el eje y del protón está dado por:

$$y(t) = V_{oy}\,.\,t - \frac{1}{2}\,a_{p+}\,.\,t^2$$

Entonces: $y(t) = v_{oy}\,.\,\text{sen}\theta\,.\,t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2}\frac{q_{p^+}E}{m_{p^+}}\,.\,t^2_{\text{vuelo}} = 0$

donde:

$x(t) = D_{máx} = v_{ox}.\cos\theta.t_{\text{vuelo}} \qquad \therefore \quad t_{\text{vuelo}} = \frac{D^2_{máx}}{V_o\times\cos\theta}$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_{oy}\,.\,\text{sen}\theta\,.\,\frac{D_{máx}}{v_o\times\cos\theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{q_{p^+}E}{m_{p^+}}\right)\frac{D^2_{máx}}{v_o^2\times\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \tan\theta\,.\,D_{máx} - \frac{q_{p^+}.E.D^2_{máx}}{2.v^2.m_{p^+}}\,.\,\sec^2\theta$$

Pero: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

Entonces:

$$\frac{q_{p^+}.E.D^2_{máx}}{2.v_o^2.m_{p^+}}\,.\,\tan^2\theta - D_{máx}\,.\,\tan\theta + \frac{q_{p^+}.E.D^2_{máx}}{2v_o^2.m_{p^+}} = 0$$

Reemplazando:

Resulta:

$$\frac{(1{,}6\times10^{-19})(720)(1{,}27\times10^{-3})^2}{2(9{,}55\times10^{3})^2.(1{,}67\times10^{-27})}\tan^2\theta - (1{,}27\times10^{-3})\,.\,\tan\theta + \frac{(1{,}6\times10^{-19})(720)(1{,}27\times10^{-3})^2}{2(9{,}55\times10^{3})^2.(1{,}67\times10^{-27})} = 0$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado:

$$0,61 \times 10^{-3} \tan^2\theta - 1,27 \times 10^{-3} \tan\theta + 0,61 \times 10^{-3} = 0$$

$$\therefore \quad 0,61\tan^2\theta - 1,27\tan\theta + 0,61 = 0$$

$$\tan\theta_1 = \frac{1,27 + \sqrt{(1,27)^2 - 4(0,61)(0,61)}}{2(0,61)} \Rightarrow \theta_1 = 36,9°$$

$$\tan\theta_2 = \frac{1,27 - \sqrt{(1,27)^2 - 4(0,61)(0,61)}}{2(0,61)} \Rightarrow \theta_2 = 53,1°$$

Parte (b)

Sabemos que: $t_{vuelo} = \frac{D_{máx}}{v_{ox} \cdot \cos\theta} = \frac{1,27 \times 10^{-3}}{(9,55 \times 10^3)(0,8)}$

$t_{vuelo} = 167 \times 10^{-9}$ s $\equiv$ 167 ns (para $\theta = 37°$)

ó $t_{vuelo} = 221 \times 10^{-9}$ s $\equiv$ 221 ns (para $\theta = 53°$)

PROBLEMAS ADICIONALES

50. Tres cargas puntuales están alineadas a lo largo del eje x como se muestra en la figura P23.50. Encuentre el campo eléctrico en a) la posición (2;00; 0) y b) la posición (0; 2;00).

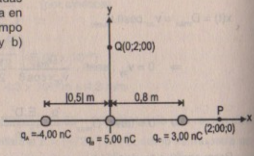


Figura P23.50

Resolución :

Parte (a)

Nos pide $E_{total\ en\ p}$ = ?

$\vec{E}_{total\ en\ p} = \vec{E}_{qC} + \vec{E}_{qB} - \vec{E}_{qA}$ (principio de superposición)

$$\Rightarrow \vec{E}_{total\ en\ p} = \frac{k_e \cdot q_C}{(1,2)^2}\hat{i} + \frac{k_e \cdot q_B}{(2,00)^2}\hat{i} - \frac{k_e \cdot q_A}{(2,5)^2}\hat{i}$$

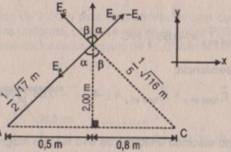
$$\Rightarrow \vec{E}_{total\ en\ p} = 8,99 \times 10^9 \left[\frac{3\times10^{-9}}{(1,2)^2} + \frac{5\times10^{-9}}{(2,0)^2} - \frac{4,0\times10^{-9}}{(2,5)^2}\right]\hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total\ en\ p} = 24,2\ \hat{i}\ \text{N/C}$$

Parte (b):

Nos piden $E_{total\ en\ y}$ = ?

Previamente:



Luego hallando los campos totales en cada eje:

$$\vec{E}_{total\ en\ x} = E_C \cdot \text{sen}\beta\,(-\hat{i}) + E_A\,\text{sen}\alpha\,(-\hat{i})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{total\ en\ x} = \frac{k_e \cdot q_c}{\left(\frac{\sqrt{116}}{5}\right)^2} \cdot \left(\frac{0,8}{\frac{\sqrt{116}}{5}}\right)(-\hat{i}) + \frac{k_e \cdot q_A}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} \cdot \frac{0,5}{\frac{\sqrt{17}}{2}}(-\hat{i})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{total\ en\ x} = 8,99 \times 10^9 \left[\frac{(3\times10^{-9})(0,8)}{\left(\frac{\sqrt{116}}{5}\right)^3} + \frac{(4\times10^{-9})(0,5)}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^3}\right](-\hat{i})$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total\ en\ x} = -4,2\ \hat{i}\ \text{N/C}$$

Hallando el campo total en y:

$$\vec{E}_{total\ en\ y} = \vec{E}_B + \vec{E}_C \cos\beta - \vec{E}_A \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{total\ en\ y} = k_e\left(\frac{q_e q_B}{4}\hat{j} + \frac{q_C}{\left(\frac{\sqrt{116}}{5}\right)^3}(2)\hat{j} - \frac{q_A}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^3}(2)\hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{total en } y} = 8{,}99\times10^{9}\left[\frac{5\times10^{-9}}{4}+\frac{3\times10^{-9}\times2}{\left(\frac{\sqrt{116}}{5}\right)^{3}}-\frac{4\times10^{-9}\times2}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^{3}}\right]\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{total en } y} = -0{,}65\ \hat{j}\ \text{N/C}$$

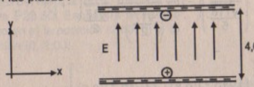
En consecuencia:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{total en } x} + \vec{E}_{\text{total en } y} = (-4{,}2\ \hat{i} - 0{,}65\ \hat{j})\ \text{N/C}$$

51. Un campo eléctrico uniforme de 640 N/C de magnitud existe entre dos placas paralelas que están separadas 4,00 cm. Un protón se suelta desde la placa positiva en el mismo instante en que un electrón se suelta desde la placa negativa. a) Determine la distancia desde la placa positiva en que las dos partículas se cruzan. (Ignore la atracción eléctrica entre el protón y el electrón). b) Repita el inciso a para un ion sodio (Na^+) y un ion cloro (Cl^-).

Resolución:

Sean las placas :



Donde :
E = 640 N/C

Parte (a)

$y_{e-} + y_{p+} = 4{,}00\times10^{-2}$

Pero : $y_{p+} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q_{p^+}.E}{m_{p^+}}.t^2$ (acelera puesto que está a favor de $\vec{E}$)

$y_{e-} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q_{e^-}.E}{m_{e^+}}.t^2$ (acelera puesto que está a favor del movimiento)

Sumando: $\frac{1}{2}E.q\left(\frac{1}{m_{e^-}}+\frac{1}{m_{p^+}}\right).t^2 = 4{,}00\times10^{-2}$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{8{,}00\times10^{-2}}{10^{31}\times1{,}6\times10^{-19}\times640} = \frac{1}{16\times8}\times10^{-14}$$

Nos piden: $y_{p+} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1{,}6\times10^{-19}\times(640)}{1{,}67\times10^{-27}}\times\left(\frac{1}{16\times8}\times10^{-14}\right)$

$\therefore\ y_{p+} = 21{,}8\times10^{-6}\ \text{m}$

52. Una pequeña bola de plástico de 2,00 g está suspendida de una cuerda larga de 20,0 cm en un campo eléctrico uniforme, como se ven en la figura P23.52. Si la bola está en equilibrio cuando la cuerda forma un ángulo de 15,0° con la vertical, ¿cuál es la carga neta en la bola?

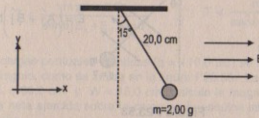


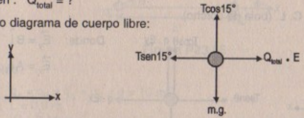
Figura P23.52

Resolución:

Dada la figura : $E = 100\times10^3\hat{i}$ N/C

Nos piden : $Q_{total} = ?$

Haciendo diagrama de cuerpo libre:



Entonces por 1.° condición:

$\Sigma F_x = 0 \ \wedge\ \Sigma F_y = 0$

$$\left.\begin{aligned} T\text{sen}15° &= Q_{total}\cdot E \\ T\cos15° &= m.g \end{aligned}\right\}(\div)$$

Resulta que: $\tan15° = \frac{Q_{total}.E}{m.g}$

$$\therefore\ Q_{total} = \frac{\tan15°.m.g}{E} = \frac{(0{,}27)(2{,}00\times10^{-3})(9{,}8)}{1{,}00\times10^{3}} = 5{,}25\times10^{-6}$$

53. Una bola de corcho cargada, de 1,00 g de masa, está suspendida en una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura P23.53. Cuando $E = (3{,}00\hat{i} + 5{,}00\hat{j}) \times 10^5$ N/C, la bola está en equilibrio a $\theta = 37{,}0°$. Encuentre a) la carga en la bola y b) la tensión en la cuerda.

54. Una bola de corcho cargada, de masa *m*, está suspendida en una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico $E = (A\hat{i} + B\hat{j})$ N/C, donde A y B son números positivos, la bola está en equilibrio a un ángulo θ. Encuentre a) la carga en la bola y b) la tensión en la cuerda.

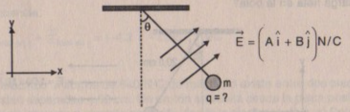


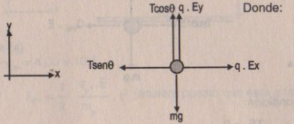
Figura P23.53

Resolución 53 y 54:

Dada la figura:

$$\vec{E} = (A\hat{i} + B\hat{j})\ \text{N/C}$$

Parte (a)
Haciendo D. C. L. (bola de corcho)



Donde: $\vec{E}_y = B\hat{j}$
$\vec{E}_x = A\hat{i}$

Aplicando la primera condición de equilibrio:
$\Sigma F_x = 0 \ \wedge \ \Sigma F_y = 0$

$$\div \begin{cases} T\text{sen}\theta = q \cdot E_x \\ T\cos\theta = mg - q \cdot E_y \end{cases}$$

Tenemos que : $\tan\theta = \dfrac{q.E_x}{mg - qE_y}$

$\Rightarrow$ mg $\tan\theta - q\,E_y.\tan\theta = q.E_x$

$\Rightarrow$ mg $\tan\theta = q\,(E_x + E_y \,.\, \tan\theta)$

$$\therefore \quad Q_{total} = q = \frac{m.g.\tan\theta}{E_x + E_y.\tan\theta} = \frac{m.g.\tan\theta}{A + B.\tan\theta}$$

Parte (b)
Sabemos que : $T.\,\text{sen}\theta = q \,.\, E_x$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{q.E_x}{\text{sen}\theta} = \left(\frac{m.g.\tan\theta}{E_x + E_y.\tan\theta}\right)\left(\frac{E_x}{\text{sen}\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{m.g.\tan\theta.E_x}{\text{sen}\theta\left(E_x + E_y.\tan\theta\right)} \qquad \therefore \quad T = \frac{m.g.\tan\theta.A}{\text{sen}\theta\,(A + B.\tan\theta)}$$

55. Cuatro cargas puntuales idénticas (q = +10,0 μC) se localizan en las esquinas de un rectángulo, como se indica en la figura P23.55. Las dimensiones del rectángulo son L = 60,0 cm y W = 15,0 cm. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica neta ejercida sobre la carga en la esquina inferior izquierda por las otras tres cargas.

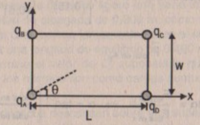
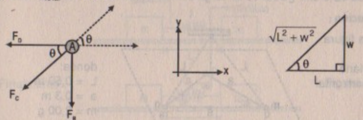


Figura P23.55

Resolución :

Datos: $q_A = q_B = q_C = q_D = q = 10$ mC
L = 0,6 m
W = 0,15 m

Nos piden: F_{total} sobre A = ?



Calculando por partes: $\vec{F}_{\text{total en } A_x} = \vec{F}_D(-\hat{i}) + F_C\cos\theta(-\hat{i})$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total en } A_x} = \frac{k_e \cdot q_D}{L^2}\left(-\hat{i}\right) + \frac{k_e \cdot q_C}{L^2 + W^2} \cdot \frac{L}{\left(L^2+W^2\right)^{1/2}}\left(-\hat{i}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total en } A_x} = (8{,}99\times 10^9)(10\times 10^6)\left[\frac{1}{(0{,}6)^2} + \frac{(0{,}6)}{\left[(0{,}6)^2+(0{,}15)^2\right]^{3/2}}\right]\left(-\hat{i}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{total en } A_x}$$

Por otro lado:

$$\vec{F}_{\text{total en } A_y} = \vec{F}_B(-\hat{j}) + \vec{F}_C \operatorname{sen}\theta(-\hat{j})$$

$$\vec{F}_{\text{total en } A_y} = \frac{k_e \cdot q_B}{W^2}\left(-\hat{j}\right) + \frac{k_e \cdot q_C}{L^2 + W^2} \cdot \frac{W}{\left(L^2+W^2\right)^{1/2}}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total en } A_y} = (8{,}99\times 10^9)(10\times 10^{-6})\left[\frac{1}{(0{,}15)^2} + \frac{(0{,}15)}{\left[(0{,}6)^2+(0{,}15)^2\right]^{3/2}}\right]\left(-\vec{j}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{total en } A_y}$$

Luego:

- Dirección: $\tan\alpha = \dfrac{F_{\text{total en y}}}{F_{\text{total en x}}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left[\dfrac{F_{\text{total en y}}}{F_{\text{total en x}}}\right]$

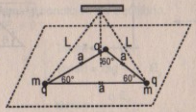
- Magnitud: $F_{\text{total}} = \sqrt{F^2_{\text{total en x}} + F^2_{\text{total en y}}}$

56. Tres pequeñas bolas idénticas de poliestireno ($m = 2{,}00$ g) están suspendidas de un punto fijo por medio de tres hilos no conductores, cada uno con una longitud de 50,0 cm y masa despreciable. En equilibrio, las tres bolas forman un triángulo equilátero con lados de 30,0 cm. ¿Cuál es la carga común q que tiene cada bola?

Resolución:

Sea la figura:

plano horizontal

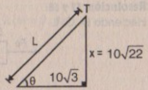


donde:
$L = 0{,}50$ m
$a = 0{,}3$ m
$m = 2{,}00$ g
$q = ?$

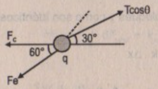
sistema en equilibrio

- **Vista lateral:** (para la cuerda)

Donde: $T\operatorname{sen}\theta = mg$ ... (1)



- **Vista superior arriba**



Entonces: $T\cos\theta \cdot \cos 30°$

$= 2Fe\,(1 + \cos 60°)$ ... (2)

Dividiendo: (1) ÷ (2)

Resulta que:

$$\frac{\tan\theta}{\cos 30°} = \frac{mg}{2\,\dfrac{k_e \cdot q^2}{a^2}\cdot(1+\cos 60°)} \qquad \therefore\ \theta = 144\times 10^{-9}\ \text{C}$$

57. Dos bloques metálicos idénticos descansan sobre una superficie horizontal sin fricción conectados por un resorte metálico ligero que tiene una constante de fuerza $k = 100$ N/m y una longitud no elongada de 0,300 m; como se muestra en la figura P23.57a. Una carga total Q se coloca lentamente sobre el sistema, lo cual provoca que el resorte se estire a una longitud de equilibrio de 0,400 m; como se muestra en la figura P23.57b. Determine el valor de Q, suponiendo que toda la carga reside sobre los bloques y que los mismos son como cargas puntuales.

58. Dos bloques metálicos idénticos descansan sobre una superficie horizontal sin fricción conectados por un resorte metálico ligero que tiene una constante de fuerza k y una longitud no elongada L_i, como se muestra en la figura P23.57a. Una carga total Q se coloca lentamente sobre el sistema, lo cual provoca que el resorte se estire a una longitud de equilibrio L, como se muestra en la figura P23.57b. Determine el valor de Q suponiendo que toda la carga reside sobre los bloques y que los mismos son como cargas puntuales.

Inicialmente: **Figura (a)**

Finalmente: **Figura (b)**

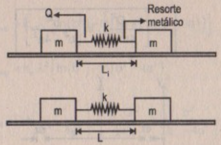
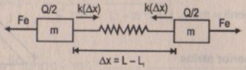


Figura P23.57

Resolución 57 y 58:
Haciendo D. C. L.



Como la carga total "Q" reside sobre los 2 bloques y como son idénticos y están en equilibrio; entonces se cumple que:

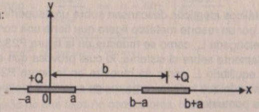
$$Fe = F_{\text{elástica}} = k\,.\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{k_e\cdot\left(\frac{Q}{2}\right)\cdot\left(\frac{Q}{2}\right)}{L^2} = k\,.\,(L-L_i) \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{4\,.\,k\,.\,(L-L_i)\,L^2}{k_e}$$

$$\therefore \quad Q_{total} = 2L\sqrt{\frac{k(L-L_i)}{k_e}}$$

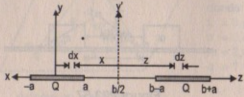
59. Barras delgadas idénticas de longitud $2a$ conducen cargas iguales, $+Q$ distribuidas de manera uniforme a lo largo de sus longitudes. Las barras descansan sobre el eje x con sus centros separados por una distancia $b > 2a$ (Fig. P23.59). Demuestre que la magnitud de la fuerza ejercida por la barra izquierda sobre la de la derecha está dada por $F = \frac{k_e.Q^2}{4a^2}\,.\,\ln\left[\frac{b^2}{b^2-4a^2}\right]$

Resolución :
Dada la figura:



Por demostrar:

$$\boxed{F = \left[\frac{k_e.Q^2}{4a^2}\right].\ln\left[\frac{b^2}{b^2-4a^2}\right]}$$



Sabemos que: $\frac{Q}{2a} = \frac{Q}{L} = \lambda \quad \Rightarrow \quad dQ = \lambda.dL = \lambda\,dx = \lambda.dz$

Luego: $\quad dF_{total} = \frac{k_e.dq_1.dq_2}{(x+z)^2} = \frac{k_e.\lambda.dx.\lambda.dz}{(x+z)^2}$

$$\Rightarrow \int\int dF_{total} = k_e.\lambda^2\int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\frac{dx.dz}{(x+z)^2}$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\left[-\frac{1}{(x+z)}\Bigg|_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\right]dz$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\left[\frac{1}{\left(\frac{b}{2}-a+z\right)} - \frac{1}{\left(\frac{b}{2}+a+z\right)}\right]dz$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\frac{1}{\left(\frac{b}{2}-a+z\right)}dz - \int_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}\frac{1}{\left(\frac{b}{2}+a+z\right)}dz$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\ln\left(\frac{b}{2}-a+z\right)\Bigg|_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a} - k_e\lambda^2\ln\left(\frac{b}{2}+a+z\right)\Bigg|_{\frac{b}{2}-a}^{\frac{b}{2}+a}$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\left[\ln(b)-\ln(b-2a)-\ln(b+2a)+\ln(b)\right]$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\left[\ln(b^2)-\ln[(b-2a)(b+2a)]\right]$$

$$\Rightarrow F_{total} = k_e\lambda^2\left[\ln(b^2)-\ln(b^2-4a^2)\right]$$

$$\therefore \quad F_{total} = k_e\lambda^2.\ln\left(\frac{b^2}{b^2-4a^2}\right) = \frac{k_e.Q^2}{4a^2}\,.\,\ln\left(\frac{b^2}{b^2-4a^2}\right)$$

Lqqd.

60. Se dice que una partícula es no relativista mientras su rapidez sea menor a un décimo de la rapidez de la luz, o menor a $3{,}00 \times 10^7$ m/s. a) ¿Cuánto tiempo permanecerá un electrón como no relativista si parte del reposo en una región de un campo eléctrico de 1,00 N/C? b) ¿Cuánto tiempo permanecerá un protón como no relativista en el mismo campo eléctrico? c) Por lo general los campos eléctricos son mucho mayores a 1 N/C. ¿La partícula cargada permanecerá no relativista durante un tiempo menor o mayor en un campo eléctrico mucho más grande?

Resolución :

Datos: v_{p+} no relativista $\leq$ $3{,}00 \times 10^7$ m/s

v_{e-} no relativista $\leq$ $3{,}00 \times 10^7$ m/s E = 1,00 N/C

Parte (a)

Por cinemática: (para un electrón)

$$v_{e-} = v_{0e-} + a.t = v_{0e-} + \frac{q.E}{m_{e^-}}.t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_{e^-}.m_{e^-}}{q.E} = \frac{(3{,}00\times10^7)(9{,}1\times10^{-31})}{(1{,}6\times10^{-19})(1{,}00)}$$

$$\therefore \quad t = 170{,}6 \times 10^{-6} \equiv 170{,}6\ \mu s$$

Parte (b):

Por cinemática: (para un protón)

$$v_{p+} = v_{op+} + a.t = 0 + \frac{q_{p+}.E}{m_{p+}}.t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_{p^+}.m_{p^+}}{q_{p^+}.E} = \frac{(3{,}00\times10^7)(1{,}67\times10^{-27})}{(1{,}6\times10^{-19})(1{,}00)}$$

$$\therefore \quad t = 0{,}313 \times 10^{-6} \equiv 0{,}313\ us$$

61. Una línea de carga positiva se forma dentro de un semicírculo de radio R = 60,0 cm, como se muestra en la figura P23.61. La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo se describe por medio de la expresión $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. La carga total en el semicírculo es 12,0 μC situada en el centro de curvatura.

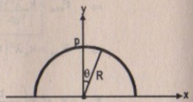


Figura P23.61

Resolución :

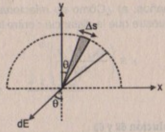
Datos: R = 60,0 cm

$\lambda = \lambda_0 . \cos\theta$

$Q_{\text{total semicírculo}} = 12{,}0\ \mu C$

Nos piden $F_{\text{total en 0}} = ?$

Hallando previamente el campo eléctrico producido por el semicírculo.



Tenemos que:

$$\vec{E}_{\text{total en 0}} = \int dE \cos\theta(-\hat{j})$$

Entonces:

$$\vec{E}_{\text{total en 0}} = \int \frac{k_e.dq}{R^2}.\cos\theta\,(-\hat{j}) = \int \frac{k_e.\lambda_o.\cos\theta.\cos\theta.d\theta}{R}\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{total en 0}} = -2\,\frac{k_e.Q}{\pi.R^2}.\int_{\pi/2}^{0}\cos\theta.d\theta\ \hat{j} \text{ (por simetría)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{total en 0}} = \frac{-2\,k_e.Q}{\pi.R^2}.\text{sen}\theta\Big|_{\pi/2}^{0}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{\text{total en 0}} = \frac{-2\,k_e.Q}{\pi.R^2}\,\hat{j}$$

Luego:

$$\vec{F}_{\text{total sobre la carga q en el centro}} = \frac{-2\,k_e.Q.q}{\pi.R^2}\,\hat{j}$$

Reemplazando:

$$\vec{F}_{\text{total sobre q}} = \frac{-(2)(8{,}99\times10^9)(12{,}0\times10^{-6})(3{,}00\times10^{-6})}{\pi\,(6\times10^{-1})^2}\,\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{total sobre q}} = -707 \times 10^{-3}\text{ N }\hat{j}$$

62. Dos esferas pequeñas, cada una de 2,00 g de masa, están suspendidas por medio de cuerdas ligeras de 10,0 cm de largo (Fig. P23.62). Un campo eléctrico uniforme se aplica en la dirección x. Si las esferas tienen cargas iguales a $-5{,}00 \times 10^{-8}$ C y $+5{,}00 \times 10^{-8}$ C, determine el campo eléctrico que permite a las esferas estar en equilibrio a un ángulo de $\theta = 10{,}0°$.

63. Dos esferas pequeñas de masa *m* están suspendidas de cuerdas de longitud ℓ que están conectadas a un punto común. Una esfera tiene carga *Q*; la otra tiene 2*Q*. Suponga que los ángulos θ_1 y θ_2 que las cuerdas forman con la vertical son pequeños. a) ¿Cómo se relacionan θ_1 y θ_2? b) Demuestre que la distancia r entre las esferas es:

$$r \cong \left(\frac{4k_e.Q^2.\ell}{mg}\right)^{1/3}$$

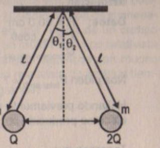
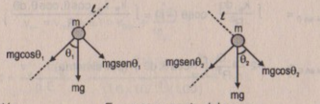


Figura P23.62

Resolución 62 y 63 :

Parte (a)



Por repulsión $\qquad F_e$ = componente del peso

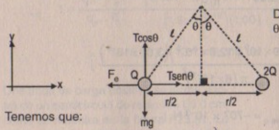
Entonces se cumple: $\qquad mgsen\theta_1 = mgsen\theta_2$

$\therefore \quad sen\theta_1 = sen\theta_2 \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2$

Parte (b)

Por demostrar que: $\qquad r \cong \left(\frac{4k_e.Q^2.\ell}{mg}\right)^{1/3}$

Haciendo diagrama de cuerpo libre:



Donde:
$\theta \approx$ muy pequeño

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \; Tsen\theta = F_e = \dfrac{k_e.2.Q^2}{r^2} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \; Tcos\theta = mg\end{array}\right\} \div$$

$$tan\theta = \frac{k_e.2.Q^2}{mg.r^2} \qquad ...(\alpha)$$

Por otro lado:

Según gráfico: $\qquad cot\theta = \frac{\sqrt{4\ell^2 - r^2}}{r} \qquad$ pero: $\ell >> r \Rightarrow 4\ell^2 - r^2 \approx 4\ell^2$

$$\Rightarrow \quad cot\theta = \frac{2\ell}{r} \qquad ...(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α)

$$mg.r^2 = cot\theta.k_e.2.Q^2$$

$$\Rightarrow \quad mg.r^2 = \frac{2\ell}{r}.(2\,k_e.Q^2) \quad \Rightarrow \quad r^3 \cong \frac{4.\ell.k_e.Q^2}{mg}$$

$$\therefore \quad r \cong \left[\frac{4k_e.\ell.Q^2}{mg}\right]^{1/3} \qquad \text{Lqqd.}$$

64. Tres cargas de igual magnitud *q* están fijas en los vértices de un triángulo equilátero (Fig. P23.64). Una cuarta carga *Q* tiene la libertad de movimiento a lo largo del eje x positivo bajo la influencia de las fuerza ejercidas por las tres cargas fijas. Encuentre un valor de s para el cual *Q* esté en equilibrio. Usted necesitará resolver una ecuación trascendental.

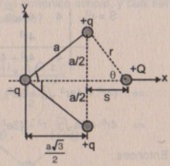
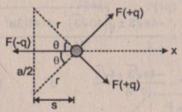


Figura P23.64

Resolución :

Dada la figura: s = ?

Haciendo gráfico aparte:



Como el sistema está en equilibrio:

$$F_{total\ en\ x} = 0 \quad \wedge \quad F_{total\ en\ y} = 0$$

En el eje x: $\quad 2F(+q).cos\theta - F(-q) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{2.k_e.q.Q}{r^2}\cdot\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{k_e.q.Q}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}+s\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4}\left(a\sqrt{3}+2s\right)^2 .s = r^3 \quad \text{... (a)}$$

En el eje y: $F_{\text{total en y}} = 0$

Entonces de la ecuación (α):

$$2r^3 = (3a^2 + 4s^2 + 4as\sqrt{3})s$$

$$\Rightarrow 2r^3 = 3a^2.s + 4s^3 + 4as^2.\sqrt{3} \quad \text{... entonces:}$$

$$4s^3 + 4a\sqrt{3}\,s^2 + 3a^2.s - 2r^3 = 0 \quad \text{(ecuación cúbica)}$$

Por divisores binómicos:

Divisores de P(s) $\left\{\frac{-2r^3}{4}\right\} = \frac{-2r^3}{4}\,;\frac{-2r^3}{2}\,;\, r^3; -r^3; -2r^3; -\frac{r^3}{4}; \frac{r^3}{4}; \frac{r^3}{2}; -\frac{r^3}{2}$

Por Ruffini:

$S = r^3$	4	$4a\sqrt{3}$	$3a^2$	$-2r^3$
		$4r^3$	$4r^6 + 4ar^3.\sqrt{3}$	$x.r^3$
	4	$4r^3 + 4a\sqrt{3}$	$\downarrow$	0

$$\Rightarrow (4r^6 + 4ar^3.\sqrt{3} + 3a^2) \times r^3 - 2r^3 = 0$$

$$\Rightarrow 4r^6 + 4a\sqrt{3}\,.\,r^3 + (3a^2 - 2) = 0 \qquad \text{si } p = r^3$$

Entonces:

$$4p^2 + 40\sqrt{3}\,.\,p + (3\,a^2 - 2) = 0 \qquad \text{(ecuación de 2.° grado)}$$

Luego: $$P = \frac{-4a\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(40\sqrt{3}\right)^2 - 4(4)(3a^2-2)}}{2(4)}$$

$$\therefore\ P = \frac{-4a\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{8} \quad \text{ó} \quad P = \frac{-4a\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{8}$$

Pero: $s = r^3 = P$

En consecuencia: $$S = \frac{\sqrt{2} - a\sqrt{3}}{4}$$

65. Problema de repaso. Cuatro cargas puntuales idénticas, cada una con carga *+q*, están fijas en las esquinas de un cuadrado de lado *L*. Una quinta carga puntual *–Q* está a una distancia *z* a lo largo de la línea perpendicular al plano del cuadrado y que pasa por el centro del cuadrado (Fig. P23.65). a) Muestre que la fuerza ejercida sobre *–Q* por las otras cuatro cargas es

$$F = -\frac{4k_e.q.Q.z}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}\hat{k}$$

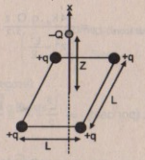


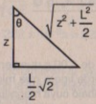
Figura P23.65

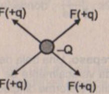
Advierta que esta fuerza está dirigida hacia el centro del cuadrado si *z* es positiva (*–Q* arriba del cuadrado) o negativa (*–Q* debajo del cuadrado). b) Si *z* es pequeña comparada con *L*, la expresión anterior se reduce a **F** ≈ –(constante) $z\hat{k}$. ¿Por qué este resultado implica que el movimiento de *–Q* es armónico simple, y cuál sería el periodo de este movimiento si la masa de *–Q* fuese *m*?

Resolución :

Por demostrar que: $$F_{\text{total sobre }(-Q)} = -\frac{4k_e.q.Q.z}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}\hat{k}$$

Graficando:
(Vista lateral)

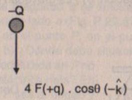


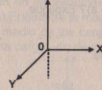


Vista superior arriba
$\Sigma F = 0$

Vista frontal:

(por simetría)





Entonces:

$$\vec{F}_{\text{total sobre }(-Q)} = 4\vec{F}(+q)\,.\,\cos\theta(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total sobre }(-Q)} = \frac{4.k_e.q.Q}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)} \cdot \frac{z}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{1/2}}\left(-\hat{k}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{total sobre }(-Q)} = \frac{-4k_e.q.Q.z}{\left(z^2+\frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}.\hat{k} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Como z << L (por dato) $\Rightarrow \frac{L^2}{2}+z^2 \cong \frac{L^2}{2}$

Luego:

$$\vec{F}_{\text{total sobre }(-Q)} = \frac{-8\sqrt{2}.k_e.q.Q}{L^3}.z.\hat{k} \approx -\text{cte}.z\,\hat{k}$$

Entonces por 2.° ley de Newton:

$$-\text{cte}.\,z = m.\ddot{z} \;\Rightarrow\; \ddot{z} + \frac{\text{cte.}}{m}.z = 0$$

(ecuación diferencial del movimiento armónico simple)

Luego:

$$\omega^2 = \frac{\text{cte}}{m} \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\text{cte.}}{m}}$$

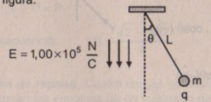
Entonces:

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{\text{cte.}}}\ ; \text{ donde la cte} \approx \frac{8\sqrt{2}.k_e.q.Q}{L^3}$$

66. Problema de repaso. Una bola de corcho de 1,00 g que tiene una carga de 2,00 μC está suspendida verticalmente de una cuerda ligera que mide 0,500 m de largo, en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo cuya magnitud es E = 1,00 × 10⁵ N/C. Si la bola se desplaza ligeramente de la vertical, oscila como un péndulo simple. a) Determinar el periodo de esta oscilación. b) ¿La gravedad debe incluirse en el cálculo del inciso a)? Explique.

Resolución:

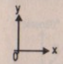
Sea la figura:

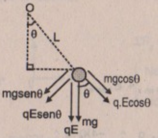


Donde:
m = 1,00 gr
q = 2,00 μC
L = 0,500 m

Parte (a)

Haciendo D.C.L. (bola de corcho)





Como : θ ≈ es muy pequeño

$\Rightarrow$ Senθ ≈ θ

En vista que:

F_e >> mg. Entonces F_g es despreciable en comparación con la F_e y se podría no considerar.

Luego: $\Sigma\tau_o = I\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \underbrace{-q.E.\theta}_{\text{Fuerza recuperadora}} = m.L^2.\ddot{\theta} \qquad \text{En vista que sen}\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow mL^2.\ddot{\theta} + q.E.\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{q.E}{mL^2}.\theta = 0 \text{ (ecuación diferencial del M.A.S)}$$

Luego: $T = 2\pi L\sqrt{\frac{m}{q.E}} = 2\pi\times(0{,}500).\sqrt{\frac{1{,}00\times10^{-3}}{2{,}00\times10^{-6}\times\left(1{,}00\times10^{5}\right)}}$

$\therefore \quad T = 222\times10^{-3}\text{s} \equiv 222 \text{ ms}$

Parte (b)

La F_g no debe de incluirse en el cálculo en vista que es una cantidad muy pequeña en comparación con la fuerza eléctrica. En consecuencia la única fuerza recuperadora será la fuerza eléctrica.

67. Tres cargas de igual magnitud *q* se encuentran en las esquinas de un triángulo equilátero de longitud de lado *a* (Fig. P 23.67). a) Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto *P*, en el punto medio de las cargas negativas, en término de k_e, *q* y *a*. b) ¿Dónde debe situarse una carga –4*q* de manera que cualquier carga localizada en *P* no experimente fuerza eléctrica neta? En el inciso b) deje que *P* sea el origen y que la distancia entre la carga +*q* y *P* sea 1,00 m.

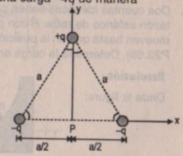


Figura P23.67

Resolución :

Parte (a)

Nos piden $\vec{E}_{\text{total en P}} = ?$

$\vec{E}_{\text{total en P}} = \vec{E}_{\text{total en x}} + \vec{E}_{\text{total en y}}$

Donde: $\vec{E}_{\text{total en x}} = 0$

y: $\vec{E}_{\text{total en y}} = -\dfrac{k_e.q}{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}\hat{j} = \dfrac{-4k_e.q}{3a^2}.\hat{j}$

Parte (b)

Nos piden en donde debe de colocarse una carga –4q, de modo que cualquier carga localizada en "P" no experimente fuerza eléctrica neta.

Sabemos que inicialmente: $\vec{F}_{\text{total en P}} = \dfrac{-4k_e.q}{3a^2}\hat{j}$

Entonces: para que:

$\vec{F}_{\text{total en P}} = 0$ se le tiene que sumar una $\vec{F}_e = \dfrac{4k_e.q}{3a^2}\hat{j}$ en la misma dirección que la producirá la carga "–4q".

Luego: $\dfrac{4k_e.q}{3a^2} = \dfrac{k_e.(4q)}{x^2}$

$\Rightarrow \quad x^2 = 3a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - (\sqrt{3}a)^2 = 0$

$\therefore \quad x = a\sqrt{3} \quad$ ó $\quad x = -a\sqrt{3}$

Pero por dato: a = 2,00 m

Entonces: $x = 2\sqrt{3}$ m (en el eje y) ó

$x = -2\sqrt{3}$ m (en el eje y)

68. Dos cuentas idénticas tienen cada una masa *m* y carga *q*. Cuando se ponen en un tazón esférico de radio *R* con paredes no conductoras y sin fricción, las cuentas se mueven hasta que en la posición de equilibrio están separadas una distancia *R*. (Fig. P23.68). Determine la carga en cada cuenta.

Resolución :

Dada la figura:

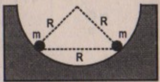
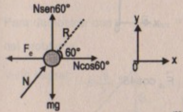


Figura P23.68

Nos piden: q = ?

Haciendo D.C.L. (de un cuenta)



$\Sigma F_x = 0 \quad \wedge \quad \Sigma F_y = 0$

$\div \begin{cases} N\text{sen}60° = mg \\ N\cos 60° = F_e = \dfrac{k_e.q^2}{R^2} \end{cases}$

$\tan 60° = \dfrac{mg}{\dfrac{k_e.q^2}{R^2}}$

$\Rightarrow \quad q^2 = \dfrac{mg.R^2}{k_e.\tan 60°} \qquad \therefore \quad q_{(c/cuenta)} = R.\sqrt{\dfrac{mg}{k_e.\tan 60°}}$

69. Ocho cargas puntuales, cada una de magnitud *q*, se localizan en las esquinas de un cubo de lado *s*, como se muestra en la figura P23.69. a) Determine las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza resultante ejercida sobre la carga localizada en el punto A por las otras cargas. b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de esta fuerza resultante?

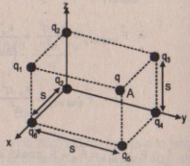


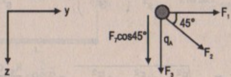
Figura P23.69

Resolución :

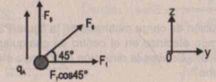
Donde: $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = q$

Parte (a)

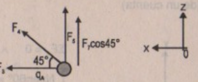
Vista superior arriba:



Vista frontal:



Vista lateral:



- $\vec{F}_{\text{total en x}} = \vec{F}_2\cos45° + \vec{F}_7\cos45° + \vec{F}_3 + \vec{F}_4\cos45°$

$$\vec{F}_{\text{total en x}} = \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt3)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{s^2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{\text{total en x}} = \frac{k_e.q^2}{s^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt2+3}{3}\right)\hat{i} = 1{,}90\ \frac{k_e.q^2}{s^2}\ \hat{i}$$

- $\vec{F}_{\text{total en y}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2\cos45 + \vec{F}_7\cos45° + \vec{F}_6\cos45°$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total en y}} = \frac{k_e.q^2}{s^2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt3)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{\text{total en y}} = \frac{k_e.q^2}{s^2}\left(\frac{3+2\sqrt2}{3}\right)\hat{j} = 1{,}90\ \frac{k_e.q^2}{s^2}\ \hat{j}$$

- $\vec{F}_{\text{total en z}} = \vec{F}_5 + \vec{F}_6\cos45 + \vec{F}_7\cos45° + \vec{F}_4\cos45°$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{total en z}} = \frac{k_e.q^2}{s^2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt3)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{k_e.q^2}{(s\sqrt2)^2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{\text{total en z}} = \frac{k_e.q^2}{s^2}\left(\frac{3+2\sqrt2}{3}\right)\hat{k} = 1{,}90\ \frac{k_e.q^2}{s^2}\ \hat{k}$$

Parte (b)

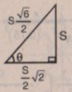
$$\vec{F}_{\text{total}} = \sqrt{F^2_{\text{total x}} + F^2_{\text{total y}} + F^2_{\text{total z}}} = 3{,}29\ .\ \frac{k_e.q^2}{s^2}$$

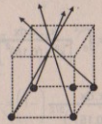
70. Considere la distribución de carga mostrada en la figura P23.69. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el centro de cualquier cara del cubo tiene un valor de 2,18 k_eq/s^2. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el centro de la cara superior del cubo?

Resolución :

Para demostrar que $E_{\text{centro}} = \dfrac{2{,}18k_eq}{s^2}$ de cualquier cara del cubo de la figura del problema.

Vista lateral:





Analizando "cara superior"

Del gráfico las componentes horizontales de las cargas inferiores se anulan, quedando solamente las componentes verticales; asimismo las cargas de la cara superior, todas se anulan:

Luego:

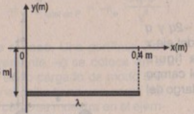
$$E_{\text{total centro}} = 4.E.\text{sen}\theta = \frac{4.k_e.q}{\left(\frac{s\sqrt6}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{\sqrt6}{2}}\right) = \frac{8\sqrt6}{9}\cdot\frac{Ke\ .\ k_e}{s^2}$$

$\therefore\ E_{\text{centro}} = 2{,}18\ k_e.q / S^2$ Lqqd.

71. Una línea de carga con una densidad uniforme de 35,0 nC/m reposa a lo largo de la línea $y = -15{,}0$ cm; entre los puntos con coordenadas x = 0 y x = 40,0 cm. Encuentre el campo eléctrico creado en el origen.

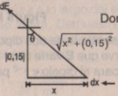
Resolución :

Sea la figura:



Donde:
$\lambda = 35{,}0$ nC/m

Nos piden: $E_{\text{total en el origen}} = ?$



Donde: $\text{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+(0{,}15)^2}}$ $dq = \lambda.dx$

$\cos\theta = \dfrac{0{,}15}{\sqrt{x^2+(0{,}15)^2}}$

Sabemos que:

$$\vec{E}_{total\ en\ el\ origen} = \vec{E}_{total\ en\ x} + \vec{E}_{total\ en\ y}$$

Pero:

$$\vec{E}_{total\ en\ x} = \int dE\ sen\theta(-\hat{i}) = \int_0^{0,4} \frac{k_e.\lambda.dx}{\left[x^2+(0,15)^2\right]}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+(0,15)^2}}\right)(-\hat{i})$$

$$\vec{E}_{total\ en\ x} = k_e\cdot\lambda\int_0^{0,4}\frac{x.dx}{\left(x^2+(0,15)^2\right)^{3/2}}\left(-\hat{i}\right) = -\frac{k_e.\lambda}{2}\int_0^{0,4}\frac{d(x^2)}{\left(x^2+(0,15)^2\right)^{3/2}}\hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total\ en\ x} = -1{,}36\times10^3\ \hat{i}\ N/C$$

Luego:

$$\vec{E}_{total\ en\ y} = \int dE\cos\theta\,\hat{j} = \int_0^{0,4}\frac{k_e.\lambda.dx}{\left(x^2+0{,}15^2\right)}\cdot\left(\frac{0{,}15}{\sqrt{x^2+0{,}15^2}}\right)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ y} = k_e.\lambda.(0{,}15)\int_0^{0,4}\frac{dx}{\left(x^2+0{,}15^2\right)^{3/2}}\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{total\ en\ y} = 1{,}96\times10^3\ \hat{j}\ N/C$$

En consecuencia: $\vec{E}_{total\ en\ el\ origen} = (-13{,}6\ \hat{i} + 1{,}96\ \hat{j})\times10^3\ N/C$

72. Tres cargas puntuales *q, –2q* y *q* están ubicadas a lo largo del eje x como se muestra en la figura P23.72. Demuestre que el campo eléctrico en *P (y >> a)* a lo largo del eje *y* es $E = -\frac{k_e.3.q.a^2}{y^4}\hat{j}$

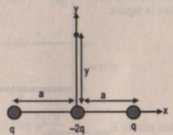


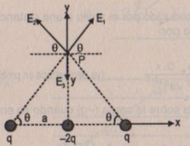
Figura P23.72

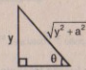
Esta distribución de carga, que es en esencia la de dos dipolos eléctricos, recibe el nombre de *cuadrupolo eléctrico*. Observe que E varía con r^{-4} para el cuadrupolo, comparado con las variaciones de r^{-3} para el dipolo y r^{-2} para el monopolo (una carga individual).

Resolución :

Para demostrar que:

$$\vec{E}_{total\ en\ P} = -\frac{k_e.3.q.a^2}{y^4}\hat{j} \qquad \text{cuando: } y >> a$$





Vemos que el campo total producido en el eje x = 0

Por lo tanto: $\vec{E}_{total\ en\ P} = \vec{E}_{total\ en\ y}$

Luego: $\vec{E}_{total\ en\ P} = E_1 sen\theta\ \hat{j} + E_2 sen\theta\ .\ \hat{j} - E_3\ .\ \hat{j}$

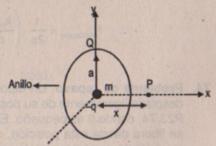
$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ P} = \frac{k_e.q}{\sqrt{y^2+a^2}}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right)\hat{j} + \frac{k_e.q.y}{\sqrt{y^2+a^2}.(y^2+a^2)}\hat{j} - \frac{2k_e.q}{y^2}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ P} = 2k_e\,q\left(\frac{y}{[y^2+a^2]^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right)\hat{j}$$

Pero como: y >> a

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{total\ en\ P} \approx -k_e\cdot\frac{3q.a^2}{y^4}\hat{j} \qquad \text{Lqqd.}$$

73. Problema de repaso. Una partícula cargada negativamente *–q* se coloca en el centro de un anillo cargado de modo uniforme, donde el anillo tiene una carga positiva total *Q*, como se muestra en el ejemplo 23.8. La partícula, restringida a moverse a lo largo del eje *x*, se desplaza una *pequeña* distancia x a lo largo del eje (donde *x << a*) y se libera. Demuestre que la partícula oscila con movimiento armónico simple con una frecuencia.



$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_e qQ}{ma^3}\right)^{1/2}$$

Resolución:

Por demostrar que:

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{k_e.q.Q}{ma^3}\right)}$$ Para x << a

Sabemos que el campo total producido por el anillo a una distancia "x" del origen y sobre el eje del anillo está dado por:

$$E_{\text{total del anillo}} = E_{\text{total en }x} = \frac{k_e.Q.x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$ ... (ya demostrado en problema n.° 27)

Entonces la fuerza total ejercida sobre la carga (–q) cuando se encuentra o se desplaza una distancia "x" será:

$$\vec{E}_{\text{total}} = -q\ .\ \vec{E}_{\text{total en }x} = -\frac{k_e.Q.q.x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

Pero: para x << a

$$F_{\text{total}} = -\frac{k_e.Q.q}{a^3}\ .\ x$$

Entonces por la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{total}} = m.\ddot{x} \quad\Rightarrow\quad -\frac{k_e.q.Q}{m.a^3}\ .\ x = m\ddot{x}$$

$$\therefore\quad \ddot{x} + \frac{k_e.q.Q}{m.a^3}\ .\ x = 0 \text{ (ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

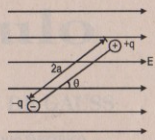
Donde: $\omega = \sqrt{\frac{k_e.q.Q}{ma^3}} = 2\pi\ .\ f$

Luego: $2\pi\ .\ f = \left(\frac{k_e.q.Q}{ma^3}\right)^{1/2}$

$$\therefore\quad f_{\text{oscilación}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{k_e.q.Q}{ma^3}\right)^{1/2}$$ Lqqd.

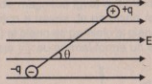
74. Problema de repaso. Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como se muestra en la figura P23.74, donde θ es pequeño. El momento de inercia del dipolo es *I*. Si el dipolo se libera desde esta posición, demuestre que su orientación angular presenta movimiento armónico simple con una frecuencia.

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2qaE}{I}}}$$



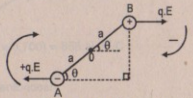
Resolución:

Dada la figura:



Donde:
Momento de inercia dado dipolo es "I"

Por demostrar que: $f_{\text{dipolo}} = \frac{1}{2\pi}\ .\ \sqrt{\frac{2q.aE}{I}}$



Tenemos que: $\Sigma\tau_A = I.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow\quad -q.E.2a.\text{sen}\theta = I.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow\quad -q.E.2a.\text{sen}\theta = I.\ddot{\theta}$ para θ muy pequeño $\text{sen}\theta \approx \theta$

$$\therefore\quad \ddot{\theta} + \frac{q.E.2a}{I}\ .\ \theta = 0 \text{ (ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

Donde: $\omega = \sqrt{\frac{I}{2a.q.E}}$

Como: $\omega = 2\pi\ .\ f$

Por lo tanto: $f_{\text{dipolo}} = \frac{1}{2\pi}\ .\ \sqrt{\frac{2a.q.E}{I}}$ Lqqd.

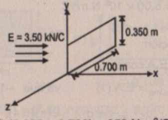
Capítulo 24

LEY DE GAUSS

FLUJO ELÉCTRICO

1. Un campo eléctrico de magnitud igual a 3,50 kN/C se aplica a lo largo del eje x. Calcule el flujo eléctrico a través de un plano rectangular de 0,350 m de ancho y 0,700 m de largo si a) el plano es paralelo al plano *yz*, b) es paralelo al plano *xy*, y c) el plano contiene al eje *y* y su normal forma un ángulo de 40,0° con el eje *x*.

Resolución :
Sea la figura:



Parte (a)

$$\Phi_E = E.A = (3,50 \times 10^3)\ (0,350 \times 0,700) = 858\ N.m^2/C$$

Parte (b)
Si el plano es paralelo al plano xy; entonces:

$$\Phi_E = E.A.\cos 90° = 0$$

Parte (c)
Si el plano contiene al eje y su normal forma un ángulo de 40° entonces:

$$\Phi_E = E.A.\cos 50° = (3,50 \times 10^3)(0,350 \times 0,700)\ .\ (0,766)$$

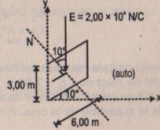
$$\therefore \quad \Phi_E = 657\ N.m^2/C$$

2. Un campo eléctrico vertical de $2,00 \times 10^4$ N/C de magnitud existe sobre la superficie de la Tierra un día en el que amenaza una tormenta. Un auto que puede considerarse como un rectángulo de aproximadamente 6,00 m por 3,00 m viaja a lo largo de un camino inclinado de 10,0° hacia abajo. Determine el flujo eléctrico a través de la base inferior del auto.

Resolución :

Sea la figura:

$E = 2,00 \times 10^4$ N/C



Entonces:

$\Phi_E = E.A.\cos 10°$

$\Rightarrow \quad \Phi_E = (2{,}00 \times 10^4)\ (3{,}00 \times 6{,}00)\ (0{,}98)$

$$\Phi_E = 35{,}45 \times 10^4\ \text{Nm}^2/\text{C}$$

3. Una espira de 40,0 cm de diámetro gira en un campo eléctrico uniforme hasta que se encuentra la posición de máximo flujo eléctrico. El valor que se mide del flujo en esta posición es de $5{,}20 \times 10^5$ N.m² /C. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

Resolución:

Datos: Diámetro de la espira = 40,0 cm

$\Phi_{E\ \text{máximo}} = 5{,}00 \times 10^5\ \text{N.m}^2/\text{C}$

$E = ?$

Sabemos por definición:

$\Phi_E = E.A.\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ \text{máximo}} = E.A.(1) \qquad$ ya que $-1 \le \cos\theta \le 1$

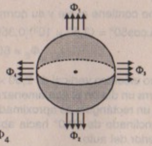
$$\Rightarrow \quad 5{,}20 \times 10^5 = E\left(\frac{\pi.d^2}{4}\right) = \frac{E(\pi)(0{,}4)^2}{4}$$

$$\therefore \quad E = 4{,}14 \times 10^6\ \text{N/C}$$

4. Un cascarón esférico se pone en un campo eléctrico uniforme. Determine el flujo eléctrico total a través del cascarón.

Resolución:

Sea la figura:



Nos piden $\Phi_{E\ \text{total}} = ?$

Sabemos que $\Phi_{E\ \text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$

Pero: $\quad \Phi_1 = -\Phi_2 \wedge \Phi_3 = -\Phi_4$ (por simetría)

$$\therefore \quad \Phi_{E\ \text{total}} = 0$$

5. Considere una caja triangular cerrada que descansa dentro de un campo eléctrico horizontal de magnitud $E = 7{,}80 \times 10^4$ N/C, como se muestra en la figura P24.5. Calcule el flujo eléctrico a través de a) la superficie vertical, b) la superficie inclinada, y c) toda la superficie de la caja.

Resolución:

Dada la figura:

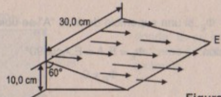


Figura P24.5

Donde: $\vec{E} = 7{,}80 \times 10^4$ N/C

Parte (a)

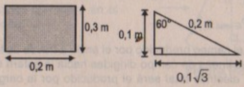
Por definición: $\quad \Phi_E = \vec{E}.\vec{A} = E.A\cos(180°)$

$\Rightarrow \quad \Phi_E = (7{,}80 \times 10^4)(0{,}1 \times 0{,}3)(-1)$

$\therefore \quad \Phi_E = -2{,}34 \times 10^3\ \text{N.m}^2/\text{C}$

Parte (b)

Área inclinada =



Luego:

$\Phi_E = E.A\cos 60° = (7{,}80 \times 10^4)(0{,}2 \times 0{,}3)(0{,}5)$

$\therefore \quad \Phi_E = 2{,}34 \times 10^3\ \text{N.m}^2/\text{C}$

Parte (c)

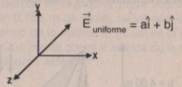
$\Phi_{E\ \text{total}} = -2{,}34 \times 10^3\ \text{Nm}^2/\text{C} + 2{,}34 \times 10^3\text{N m}^2/\text{C}$

$\therefore \quad \Phi_{E\ \text{total en toda la superficie de la caja}} = 0$

6. Un campo eléctrico uniforme ai + bj cruza una superficie de área *A*. ¿Cuál es el flujo a través de esta área si la superficie se ubica a) en el plano *yz*, b) en el plano *xz*, c) en el plano *xy*?

Resolución:

Sea la figura:



Parte (a)

Nos piden: Φ_E si una superficie de área "A" se ubica en el plano yz

Por definición: $\quad \Phi_E = E_x A = a.A$

Parte (b)

Nos piden: Φ_E si una superficie de área "A" se ubica en el plano xz

Por definición: $\quad \Phi_E = E.A.\cos\theta = E_y.A\cos(180°)$

$\therefore \quad \Phi_E = b.A(-1) = -b.A$

Parte (c)

Nos piden Φ_E si una superficie de área "A" se ubica en el plano xy

Por definición: $\Phi_E = E.A = E.A\cos 90°$

$\therefore \quad \Phi_E = 0$

7. Una carga puntual q se localiza en el centro de un anillo uniforme que tiene densidad de carga lineal λ y radio a, como se muestra en la figura P24.7. Determine el flujo eléctrico total a través de la esfera centrada en la carga puntual y que tiene radio R, donde $R < a$.

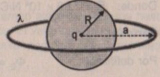


Figura P24.7

Resolución:

Dada la figura:

Nos piden: $\Phi_{E\ total} = ?$

Tenemos que el campo producido por el anillo a través de la esfera es "cero" debido a que todas las líneas de campo dirigidas hacia la esfera se anulan entre sí.

Luego el flujo eléctrico total será el producido por la carga puntual a través de la esfera y estará dado:

$\Phi_E = E.A$ ... (por definición)

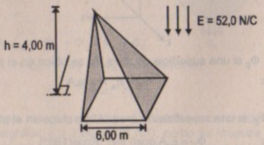
$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ total} = \frac{k_e.q}{R^2}.(4\pi.R^2) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{E\ total} = k_e.q.4\pi$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

8. Una pirámide con una base cuadrada de 6,00 m y altura de 4,00 m se coloca en un campo eléctrico vertical de 52,0 N/C. Calcule el flujo eléctrico total a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.

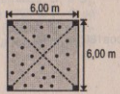
Resolución:

Sea la figura:



Nos piden: Φ_E a través de las 4 superficies inclinadas = ?

Vista superior:



donde: E: se está representando como (.) sobre la base de la pirámide.

Entonces:

$$\Phi_{E\ total} = E.A = (52,0)(6 \times 6) = 1,872 \times 10^3\ N.m^2/C$$

(a través de las 4 superficies inclinadas)

9. Un cono de radio R en la base y altura h está sobre una mesa horizontal. Un campo horizontal uniforme E penetra el cono, como se muestra en la figura P24.9 Determine el flujo eléctrico que entra en el lado izquierdo del cono.

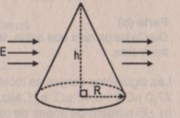
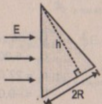


Figura P24.9

Resolución:

Vista lateral:



Entonces:

$$\Phi_E = E\ .\ \text{área} = E\left(\frac{1}{2}(2R)h\right)$$

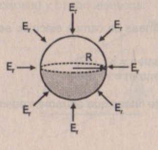
$$\therefore \quad \Phi_E = E.R.h$$

LEY DE GAUSS

10. Cuando se mide el campo eléctrico en cualquier parte sobre la superficie de un cascarón esférico delgado con 0,750 m de radio, se ve que es igual a 890 N/C y apunta radialmente hacia el centro de la esfera. a) ¿Cuál es la carga neta dentro de la superficie de la esfera? b) ¿Qué puede concluir acerca de la naturaleza y distribución de la carga dentro del cascarón esférico?

Resolución:

Sea la figura:



Donde:

$R = 0,750$ m

$E_r = 890$ N/C

Parte (a)

Por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E_r\,.dA = \oint E_r\,.dA\cos 180° = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow\quad -E_r \oint dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow\quad -(890)(4\pi.[0{,}750]^2) = \frac{Q_{neta}}{8{,}85\times10^{-12}}$$

$$\therefore\quad Q_{neta} = 55{,}7\times10^{-9}\,C = -55{,}7\ nC$$

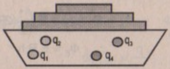
Parte (b)

Que la carga neta que actúa dentro de la superficie de la esfera está cargada negativamente.

11. Las siguientes cargas se localizan dentro de un submarino: 5,00 µC, −9,00 µC, 27,0 µC y −8,40 µC. a) Calcule el flujo eléctrico neto a través del submarino. b) ¿El número de líneas de campo eléctrico que salen del submarino es mayor, menor o igual al número de las líneas que entran?

Resolución:

Sea el submarino:



Donde:

$q_1 = 5{,}00\ \mu C$

$q_2 = 27{,}0\ \mu C$

$q_3 = -9{,}00\ \mu C$

$q_4 = -84{,}0\ \mu C$

Parte (a)

Por la ley de Gauss:

$$\Phi_{neto} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \frac{(+5{,}00+27{,}0-9{,}00-8{,}4)}{8{,}85\times10^{-12}}\,\mu C$$

$$\therefore\quad \Phi_{neto} = -6{,}89\times10^{6}\ N.m^2/C$$

Parte (b)

Sabemos que el número de líneas de campo eléctrico es proporcional a la carga; entonces

- El número de líneas que salen = K . (32)
- El número de líneas que entran = K . (93)

En consecuencia el número de líneas que entran exceden en $\left(\frac{93}{32} = 2{,}91\right)$ veces al número de líneas que salen.

12. Cuatro superficies cerradas, S_1 a S_4, junto con las cargas −2Q, Q y −Q se dibujan en la figura P24.12. Encuentre el flujo eléctrico a través de cada superficie.

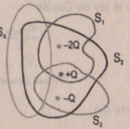


Figura P24.12

Resolución:

Nos piden: Φ_E a través de cada superficie = ?

$$\Phi_{E\ \text{a través}\ S_1} = \oint E.d_A = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}\ \ldots \text{ por la ley de Gauss}$$

$$\therefore\quad \Phi_{E\ \text{a través}\ S_1} = \frac{-2Q+Q}{\varepsilon_o} = \frac{-Q}{\varepsilon_o}$$

Por otro lado: $\Phi_{E\ \text{a través}\ S_2} = \oint E.d_A = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \frac{+Q-Q}{\varepsilon_o}$

$$\therefore\quad \Phi_{E\ \text{a través}\ S_2} = 0$$

Así también: $\Phi_{E\ \text{a través}\ S_3} = \oint E.d_A = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \frac{-2Q+Q-Q}{\varepsilon_o}$

$$\therefore\quad \Phi_{E\ \text{a través}\ S_3} = -\frac{2Q}{\varepsilon_o}$$

Por último: $\Phi_{E\ \text{a través}\ S_4} = \oint E.d_A = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \frac{0}{\varepsilon_o}$

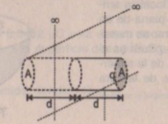
$$\therefore\quad \Phi_{E\ \text{a través}\ S_4} = 0$$

13. a) Una carga puntual *q* se localiza a una distancia *d* de un plano infinito. Determine el flujo eléctrico a través del plano debido a la carga puntual. b) Una carga puntual *q* se localiza a *muy corta* distancia del centro de un cuadrado *muy grande*, sobre la línea perpendicular al cuadrado que pasa por su centro. Determine el flujo eléctrico aproximado a través del cuadrado debido a la carga puntual. c) Explique por qué las respuestas a los incisos a) y b) son idénticas.

Resolución:

Parte (a)

Sea la figura:



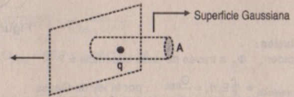
Plano infinito

Por la ley de Gauss:

$$\frac{\Phi_{E\text{total}}}{2} = \oint E.dA = \frac{q}{2\varepsilon_o} \quad \text{(por simetría)}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E \text{ total a una distancia "d"}} = \frac{q}{2\varepsilon_o}$$

Parte (b)



Entonces: $\quad 2\Phi_{E\text{ total}} = \oint E.dA = \frac{q}{\varepsilon_o}$ ... por simetría

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\text{ total}} = \frac{q}{2\varepsilon_o} \text{ (a una distancia muy corta)}$$

Parte (c)
El plano y el cuadrado parecen iguales a la carga

14. Calcule el flujo eléctrico total a través de la superficie paraboloide debido al campo eléctrico constante de magnitud E_0 en la dirección mostrada en la figura P.24.14.

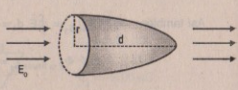


Figura P24.14

Resolución : 14
Nos piden: $\quad \Phi_{E\text{ total}} = ?$

Por la ley de Gauss:

$$\Phi_{E\text{ total}} = \oint E.dA = E_0 \oint dA = E_0 \oint (dA_1 + dA_2 + dA_3 \ldots) = E_0 \oint dA$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\text{ total}} = E_0\,\pi.r^2$$

15. Una carga puntual Q se localiza arriba del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R, como se muestra en la figura P.24.15. ¿Cuál es el flujo eléctrico a) a través de la superficie curva, y b) a través de la cara plana?

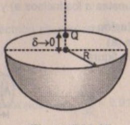


Figura P24.15

Resolución :
Parte (a)
Por la ley de Gauss:

$$\oint_{\substack{\text{total}\\ \text{(esfera)}}} = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint_{\substack{\text{total}\\ \text{(media esfera)}}} = \frac{Q}{2\varepsilon_o}$$

Parte (b)

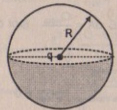
Sabemos que: $\quad \Phi_{\text{esfera}} = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\text{total (media esfera inferior)}} = -\frac{Q}{2\varepsilon_o}$$

16. Una carga puntual de 12,0 μC se coloca en el centro de un cascarón esférico de 22,0 cm de radio. ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de a) la superficie del cascarón y b) cualquier superficie hemisférica del cascarón? c) ¿Los resultados dependen del radio? Explique.

Resolución :

Sea la figura: Cascarón esférico



Donde:
R = 0,22 m
q = 12,0 μC

Parte (a)

Por la ley de Gauss:

$$\Phi_{\text{total}} = \oint E.dA = \frac{Q_{\text{neta}}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{total}} = \frac{12{,}0\times10^{-6}}{8{,}85\times10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\text{ total}} = 1{,}36 \times 10^6 \text{ N.m}^2/\text{C}$$

Parte (b)
Como: $\quad \Phi_{E\text{ total}} = 1{,}36 \times 10^6$ N.m²/C toda la superficie

Entonces: $\quad \Phi_{E\text{ total c/hemisferio}} = \frac{1}{2}(1{,}36 \times 10^6) = 0{,}68 \times 10^6 \text{ N.m}^2/\text{C}$

17. Una carga puntual de 0,0462 μC está dentro de una pirámide. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de la pirámide.

Resolución :

Datos: Sea una pirámide; donde: $Q_{\text{dentro de la pirámide}} = 0{,}046$ μC

Nos piden $\Phi_{E\text{ total}} = ?$

Empleando la ley de Gauss:

$$\Phi_{E\ total} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \Phi_{E\ total} = \frac{0{,}046\times10^{-6}}{8{,}85\times10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total} = 5{,}22\times10^{3}\ N.m^2/C$$

18. Una línea de carga infinitamente larga que tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ se encuentra a una distancia d de un punto O, como se muestra en la figura P.24.18. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de una esfera de radio R centrada en O resultante de esta línea de carga. (*Sugerencia:* considere tanto $R < d$ como $R > d$).

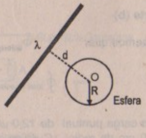


Figura P24.18

Resolución :

Nos piden: $\Phi_{E\ total\ a\ través\ de\ la\ superficie\ de\ la\ esfera} = ?$

Cuando: R < d:

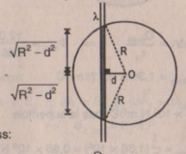
Aplicando la ley de Gauss:

$$\Phi_{E\ esfera} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} \quad \text{(por definición)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ (a\ través\ de\ la\ esfera)} = \frac{0}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ (a\ través\ de\ la\ esfera)} = 0$$

Cuando: R > d



Aplicando Gauss:

$$\Phi_{E\ (a\ través\ de\ la\ esfera)} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ (a\ través\ de\ la\ esfera)} = \frac{\lambda\left[2\sqrt{R^2-d^2}\right]}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ (a\ través\ de\ la\ esfera)} = \frac{2\lambda}{\left(R^2-d^2\right)^{-1/2}.\varepsilon_o}$$

19. Una carga puntual Q = 5,00 μC se localiza en el centro de un cubo de lado L = 0,100 m. Además, otras seis cargas puntuales idénticas, cada una con una carga $q = -1{,}00$ μC, están colocadas simétricamente alrededor de Q, como se muestra en la figura P24.19. Determine el flujo eléctrico a través de una cara del cubo.

20. Una carga puntual Q se localiza en el centro de un cubo de lado L. De manera adicional, otras seis cargas puntuales idénticas, negativas están colocadas simétricamente alrededor de Q, como en la figura P24.19. Determine el flujo eléctrico a través de una cara del cubo.

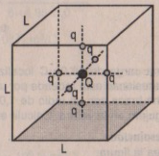


Figura P24.19 Problemas 19 y 20.

Resolución 19 y 20 :

Nos piden: $\Phi_{E\ a\ través\ de\ una\ cara} = ?$

Sabemos que por la ley de Gauss: $\Phi_{E\ total} = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

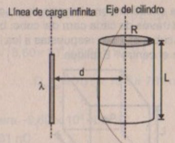
$$\Rightarrow \quad \frac{\Phi_{E\ total}}{6} = \Phi_{E\ a\ través\ de\ una\ cara} = \frac{1}{6}\frac{(Q-6q)}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total\ a\ través\ de\ una\ cara} = \frac{Q-6q}{6\varepsilon_o}$$

21. Considere una línea de carga infinitamente larga que tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ. Determine el flujo eléctrico total a través de un cilindro circular recto cerrado de longitud L y radio R que está paralelos a la línea de carga, si la distancia entre el eje del cilindro y la línea de carga es d. (*Sugerencia*: considere tanto cuando $R < d$ como cuando $R > d$).

Resolución :

Sea la figura:



- Para R < d

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_{E\ total\ a\ través\ del\ cilindro} = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ total\ a\ través\ del\ cilindro} = 0\ (\text{cuando } R < d)$$

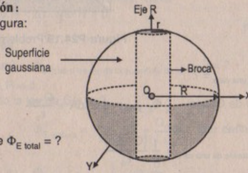
* Para R > d
La carga infinita está dentro del cilindro; en consecuencia al cilindro se puede considerar como una superficie gaussiana; luego:

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_{E\ total} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total} = \frac{\lambda.L}{\varepsilon_o}$$

22. Una carga de 10,0 μC localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas está rodeada por una esfera hueca no conductora de 10,0 cm de radio. Una broca con un radio de 1,00 mm se alinea a lo largo del eje *z*, y se perfora un agujero en la esfera. Calcule el flujo eléctrico a través del agujero.

Resolución:
Sea la figura:



Donde:
Q = 10,0 μC
r = 10,0 cm
R = 10,0 cm

Nos pide $\Phi_{E\ total}$ = ?

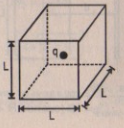
Aplicando la ley de Gauss y considerando a la **broca** como una superficie cilíndrica gaussiana:

$$\Phi_{E\ total} = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ total} = \frac{10,0\times10^{-6}}{8,85\times10^{-12}} = 1,13\times10^{6}\ N.m^2/C$$

23. Una carga de 170 μC se encuentra en el centro de un cubo de 80,0 cm de lado. a) Determine el flujo total a través de cada cara del cubo. b) Encuentre el flujo a través de toda la superficie del cubo. c) ¿Sus respuestas a los incisos a) o b) cambiarían si la carga no estuviera en el centro? Explique.

Resolución:
Sea la figura:



Donde:
q = 180 μC
L = 0,8 m

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Gauss: $\Phi_{E\ total} = \frac{q}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{E\ total\ a\ través\ de\ una\ cara} = \frac{1}{6}\cdot\frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{170\times10^{-6}}{6\times8,85\times10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total\ a\ través\ de\ una\ cara} = 3,20\times10^{6}\ N.m^2/C$$

Parte (b)
Sabemos que por la ley de Gauss:

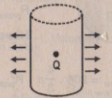
$$\Phi_{total} = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{total} = \frac{170\times10^{-6}}{8,85\times10^{-12}} = 19,2\times10^{6}\ N.m^2/C$$

Parte (c)
No cambia; porque para aplicar la ley de Gauss, no interesa la posición de la carga dentro de una superficie Gaussiana.

24. El flujo eléctrico total que pasa por una superficie cerrada en la forma de un cilindro es de $8,60\times10^4$ N.m²/C. a) ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro? b) A partir de la información proporcionada, ¿cuál es su comentario acerca de la carga dentro del cilindro? c) ¿Cómo cambiarían sus respuestas a los incisos a) y b) si el flujo neto fuera $-8,60\times10^4$ N.m²/C?

Resolución:
Sea la figura:



$\Phi_E = 8,60\times10^4\ N.m^2/C$

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad Q_{neta} = \Phi_E\ .\ \varepsilon_o = (8,60\times10^4)(8,85\times10^{-12})$$

$$\therefore \quad Q_{neta} = 761\times10^{-9} = 761\ nC$$

Parte (b)
Si el flujo eléctrico fuera $-8,60\times10^4$ N.m²/C
Entonces: $Q_{neta} = -761$ nC
Es decir que Q_{neta} estaría cargada más negativamente y las líneas de campo eléctrico que entraran serían mayores que las líneas de campo eléctrico que salieran.

25. La línea *ag* en la figura P24.25 es una diagonal de un cubo. Una carga puntual *q* se localiza en la extensión de *ag* muy cerca del vértice *a* del cubo. Determine el flujo eléctrico a través de cada lado del cubo que se encuentra en el punto *a*.

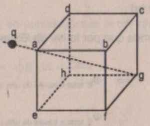


Figura P24.25

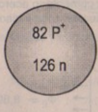
Resolución :
Datos incorrectos.

APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS A AISLANTES CUADRADOS

26. Determine la magnitud del campo eléctrico en la superficie de un núcleo de plomo-208, el cual contiene 82 protones y 126 neutrones . Suponga que el núcleo de plomo tiene un volumen 208 veces el de un protón, y considere un protón como una esfera de radio $1{,}20 \times 10^{-15}$ m.

Resolución :
Sea la figura:

Núcleo del plomo 208



Datos:
$V_{\text{núcleo del plomo}}$ = 208 veces volumen de un protón

$R_{\text{protón}} = 1{,}20 \times 10^{-15}$m

Nos piden $E_{\text{superficie}}$ = ?

Sabemos que: $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3_{\text{plomo}} = 208 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3_{\text{protón}}$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{plomo}} = 1{,}20 \times 10^{-15}\ \sqrt[3]{208} \approx 7{,}1 \times 10^{-15}\ \text{m}$$

Por otro lado:

Por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E\,.dA = \frac{Q_{\text{neta}}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E_r \,.\, A = 82 \,.\, q_{p+}/\varepsilon_o$$

$$\Rightarrow \quad E_r \,.\,(4\pi \,.\, R^2_{\text{plomo}}) = \frac{82\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{\varepsilon_o}$$

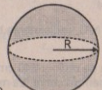
$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{k_e(82)\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{R^2_{\text{plano}}} = \frac{\left(8{,}99\times10^{9}\right)(82)\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{\left(7{,}1\times10^{-15}\right)^2}$$

$$\therefore \quad E_{r\ \text{en la superficie}} = 2{,}34 \times 10^{21}\ \text{N/C (radialmente hacia afuera)}$$

27. Una esfera sólida de 40,0 cm de radio tiene una carga positiva total de 26,0 μC distribuida uniformemente por todo su volumen. Calcule la magnitud del campo eléctrico de a) 0 cm, b) 10,0 cm, c) 40,0 cm, y d) 60,0 cm del centro de la esfera.

Resolución :

Sea la figura: Esfera sólida



Donde:
$Q_{\text{total}} = 26{,}0\ \mu C$
$R = 0{,}4$ m

Parte (a)
$E_r = 0$ a 0 cm del centro

Parte (b)
Sabemos que $\quad Q_{\text{total}} = \rho$. volumen total

Entonces para "r" = 0,1 m

$$Q'_{\text{total}} = \rho.\ \text{volumen}$$

$$\Rightarrow \quad Q'_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{total}}}{\text{Volumen Total}}\ .\ \text{Volumen} = \frac{Q_{\text{total}}}{\frac{4}{3}\pi.R^3}\ .\ \frac{4}{3}\pi r^3$$

Luego por Gauss: $\quad \Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{\text{total neta}}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E_r\ .\ (4\pi.r^2) = \frac{Q_{\text{total}}.r^3}{R^3\,\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{k_e.r.Q}{R^3} = \frac{\left(8{,}99\times10^{9}\right)(0{,}1)\left(26\times10^{-6}\right)}{(0{,}4)^3} \quad \ldots (1)$$

$$\therefore \quad E_r = 366 \times 10^3\ \text{N/C (radialmente hacia afuera)}$$

Parte (c)

Para $r = 0{,}4\ m = R$

Entonces de (1):

$$\Rightarrow\ E_r = \frac{k_e.Q_{total}.r}{R^3} = \frac{k_e.Q_{total}}{R^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(26\times10^{-6})}{(0{,}4)^2}$$

$\therefore\quad E_r = 1{,}46 \times 10^6$ N/C (radialmente hacia afuera)

Parte (d)

Para $r = 0{,}6$ m

Entonces de la ecuación (1):

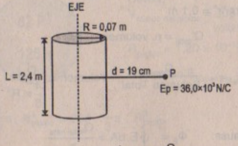
$$E_r = \frac{k_e.Q_{total}}{r^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(26\times10^{-6})}{(0{,}6)^2}$$

$\therefore\quad E_r = 650 \times 10^3$ N/C (radialmente hacia afuera)

28. Un cascarón cilíndrico de 7,00 cm de radio y 240 cm de largo tiene su carga distribuida uniformemente sobre su superficie curva. La magnitud del campo eléctrico en un punto 19,0 cm radialmente hacia afuera de su eje (medido desde el punto medio del cascarón) es de 36,0 kN/C. Use relaciones aproximadas para encontrar a) la carga neta sobre el cascarón y b) el campo eléctrico en un punto a 4,00 cm del eje, medido radialmente hacia afuera desde el punto medio del cascarón.

Resolución:

Dada la figura:



Parte (a)

Sabemos que por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow\quad E_p.(2\pi R)(L) = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow\quad Q_{neta} = E_p(2\pi RL)\,\varepsilon_0 = (36{,}0\times10^3)(2\pi\times7\times10^{-12})(2{,}4)(8{,}85\times10^{-12})$$

$$\therefore\quad Q_{neta} = 336{,}3\times10^{-9}\ C \equiv 336{,}3\ nC$$

Parte (b)

Nos piden E a 4,00 cm del eje

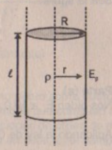
Por Gauss: $\oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = 0 \qquad \therefore\quad E_{(4{,}00\ cm)} = 0$

29. Considere una larga distribución de carga cilíndrica de radio *R* con densidad de carga uniforme ρ. Encuentre el campo eléctrico a una distancia *r* del eje donde *r* < *R*.

Resolución:

Sea la figura:

Carga cilíndrica infinita



Nos piden E_p cuando $r < R$

Sabemos que: $Q_{total} = \rho.\pi.R^2.\ell$

Para $r < R$

$$Q_{total}{}^1 = \rho.\pi r^2.\ell \Rightarrow$$

Por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \dfrac{Q_{total}}{\varepsilon_o}$

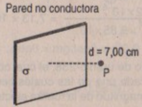
$$\Rightarrow\quad E_P.(2\pi r)(\ell) = \frac{\rho.\pi.r^2.l}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore\quad E_P = \frac{\rho.r}{2\varepsilon_0}$$ (alejándose del centro o eje del cilindro)

30. Una pared no conductora tiene una densidad de carga uniforme de 8,60 μC/cm². ¿Cuál es el campo eléctrico a 7,00 cm frente a la pared? ¿Obtiene otro resultado cuando varía la distancia desde la pared?

Resolución:

Sea la figura:

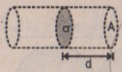


Donde:

$\sigma = 8{,}60 \times 10^{-6}$ C/cm²

Nos piden: $E_P = ?$

Sea el cilindro gaussiano:



Entonces por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$

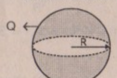
$$\Rightarrow\quad 2E.A = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \text{... (por simetría)}$$

$$\therefore\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{8{,}40\times10^{-6}}{2\times8{,}85\times10^{-12}}\times(10^{-4}) = 48{,}6\ N/C$$

31. Considere un delgado cascarón esférico de 14,0 cm de radio con una carga total de 32,0 μC distribuida uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico de a) 10,0 cm y b) 20,0 cm del centro de la distribución de carga.

Resolución :

Sea la figura: Cascarón esférico



Donde:
$Q = 32{,}0\ \mu C$
$R = 14$ cm

Parte (a)

Nos piden E a 10,0 cm del centro

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \dfrac{0}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \quad E_{(a10cm)} = 0$$

Parte (b)

Nos piden E_r a 20 cm del centro

Por la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E_r\left(4\pi.r^2\right) = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

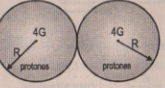
$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{32\times10^{-6}}{4\pi(0{,}2)^2\times8{,}85\times10^{-12}} = 7{,}13\times10^3\ \frac{N}{C} \text{ (alejándose del centro)}$$

32. En la fisión nuclear un núcleo de uranio-238, el cual contiene 92 protones, se divide en dos pequeñas esferas, cada una de las cuales tiene 46 protones y un radio de $5{,}90\times10^{-15}$ m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica repulsiva que aparta a las dos esferas?

Resolución :

Sea la figura:

uranio - 238



Donde:
$R = 5{,}90\times10^{-15}$ m
$F_{e\ repulsión} = ?$

Sabemos que por la ley de Gauss

$$\vec{E}_r = \frac{k_e.Q}{r^2}\hat{r} \quad \text{cuando } r \geq R$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{e\,repulsión} = Q.\vec{E}_r = \frac{k_e.Q^2}{R^2}$$

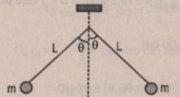
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{e\,repulsión} = \frac{k_e.\left(46\,q_{p^+}\right)^2}{R^2} = \frac{\left(8{,}99\times10^9\right)(46)^2\left(1{,}6\times10^{-19}\right)^2}{\left(5{,}90\times10^{-15}\right)^2}\hat{r}$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{e\ repulsión} = 14{,}0\times10^3 \text{ N (hacia fuera radialmente)}$$

33. Llene dos globos de hule con aire. Suspéndalos del mismo punto sobre cuerdas de igual longitud. Frote cada globo con lana o su cabello, de modo que cuelguen aparte con una notable separación entre los dos. Realice estimaciones de orden de magnitud de a) la fuerza en cada uno de los globos, b) la carga en ellos, c) el campo que crea cada uno de los mismos en el centro del otro, y d) el flujo total del campo eléctrico creado por cada globo. En su respuesta establezca las cantidades que tomó como datos y los valores que midió o estimó para ellos.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:
$m = 20{,}0$ g
$L = 1{,}00$ m
$\theta = 82°$

Parte (a)

$$F_{eléctrica} = T\,sen\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\,.\,sen\theta = mg.\tan\theta = (20{,}0\times10^{-3})(9{,}8)(2{,}69)$$

$$\therefore \quad F_{eléctrica} = 0{,}53 \text{ N}$$

Parte (b)

Sabemos que: $F_e = \dfrac{k_e.Q^2}{(2L\,sen\theta)^2} \Rightarrow Q = 2L\sqrt{\dfrac{(0{,}53)(0{,}989)}{8{,}89\times10^9}} \quad \therefore \quad Q = 15\times10^{-6}$ C

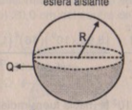
Parte (c)

Sabemos que: $E = \dfrac{F_e}{Q} = \dfrac{0{,}53}{15\times10^{-6}} \quad \therefore \quad E = 35\times10^{-3}$ N/C

34. Una esfera aislante de 8,00 cm de diámetro tiene una carga de 5,70 μC distribuida de manera uniforme por todo su volumen interior. Calcule la carga encerrada por una superficie esférica concéntrica con radio a) $r = 2{,}00$ cm, y b) $r = 6{,}00$ cm.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:
$Q = 5{,}70 \times 10^{-6}$ C
Diámetro = 8,00 cm

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{Q}{V} = \rho$

$$\Rightarrow \quad Q_{neta} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \quad \text{para } r < R \ \wedge \ r = 2{,}00 \text{ cm}$$

Entonces:

$$Q_{neta} = \frac{Q}{\underset{\text{de la esfera}}{\text{Volumen}}} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{Q.r^3}{R^3} = \frac{5{,}70\times10^{-6}\times(0{,}02)^3}{(0{,}04)^3}$$

$$\therefore \quad Q_{neta\ con\ radio:\ 2{,}00\ cm} = 712{,}5 \times 10^{-3}\ C = 712{,}5\ \mu C$$

Parte (b)

Cuando $r > R \ \wedge \ r = 6{,}00$ cm

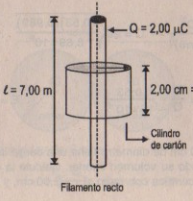
Entonces: $Q_{total} = Q_{esfera}$

$$\therefore \quad Q_{total} = 5{,}70 \times 10^{-6} c \equiv 5{,}70\ \mu C$$

35. Un filamento recto de 7,00 m de largo está cargado uniformemente con una carga positiva total de 2,00 μC. Un cilindro de cartón descargado de 2,00 cm de longitud y 10,0 cm de radio rodea el filamento en su centro, con el filamento como el eje del cilindro. Utilizando aproximaciones razonables encuentre a) el campo eléctrico en la superficie del cilindro, y b) el flujo eléctrico total a través del cilindro.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:
R = 10,0 cm

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \quad \text{considerando al cilindro de cartón como una superficie gaussiana}$$

$$\Rightarrow \quad E.A = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{Q'}{\varepsilon_o.A} = \frac{Q}{2\pi.R.L.\varepsilon_o} \qquad \ldots (1)$$

Como: $$\frac{Q}{\ell} = \frac{Q'}{L} = \lambda \ \Rightarrow Q' = \frac{Q.L}{\ell} \qquad \ldots (2)$$

Luego reemplazando (2) en (1):

$$E = \frac{Q.L}{2\pi.R.L.\varepsilon_o.\ell} = \frac{Q}{2\pi.R.\ell.\varepsilon_o} = \frac{2{,}00\times10^{-6}}{2\pi(0{,}1)(7{,}00)\left(8{,}85\times10^{-12}\right)}$$

$$\therefore \quad E_{en\ la\ superficie\ del\ cilindro} = 51{,}4 \times 10^3\ N/C$$

Parte (b)

Sabemos que: $$\Phi_{E\ total} = \oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o}$$

Pero: $$Q_{total} = \frac{Q.L}{2} \quad \text{(dentro del cilindro)}$$

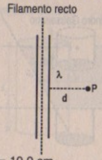
Entonces: $$\Phi_{E\ total} = \frac{Q.L}{\ell.\varepsilon_o} = \frac{\left(2{,}00\times10^{-6}\right)\left(2{,}00\times10^{-2}\right)}{(7{,}00)\left(8{,}85\times10^{-12}\right)}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E\ total} = 646\ N.m^2/C \ \text{(a través del cilindro)}$$

36. La carga por unidad de longitud en un filamento recto y largo es de −90,0 μC/m. Encuentre el campo eléctrico de a) 10,0 cm, b) 20,0 cm, y c) 100 cm del filamento, donde las distancias se miden perpendiculares a la longitud del filamento.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:
λ = −90,0 μC/m

Parte (a)

Me piden E_P = ? cuando: d = 10,0 cm

Por la ley de Gauss:

$$\oint E_P . dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}, \text{ considerando: cilindro gaussiano de radio d}$$

$$\Rightarrow \quad E_p(2\pi.d)(\ell) = \frac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E_p = \frac{\lambda}{2\pi.d\varepsilon_o} = \frac{-90{,}0\mu C/m}{2\pi(0{,}1)(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore \quad E_p = -1{,}62\times10^6 \text{ N/C (dirigido hacia el filamento)}$$

Parte (b)
Me piden E_P = ? cuando d = 20,0 cm
Entonces de (a)

$$E_p = \frac{\lambda}{2\pi.d\varepsilon_o} = \frac{-90\times10^{-6}}{2\pi(0{,}2)(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore \quad E_p = -8{,}1\times10^6 \text{ N/C (dirigido hacia el filamento)}$$

Parte (c)
Me piden Ep = ? cuando d = 100 cm
Entonces de (a)

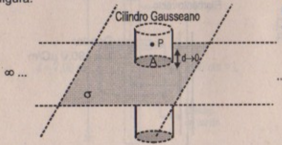
$$E_p = \frac{\lambda}{2\pi.d\varepsilon_o} = \frac{-90\times10^{-6}}{2\pi(1{,}00)(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore \quad E_p = -1{,}62\times10^6 \text{ N/C (dirigido hacia el filamento)}$$

37. Una larga lámina plana de carga tiene una carga por unidad de área de 9,00 $\mu C/m^2$. Determine la intensidad de campo eléctrico justo arriba de la superficie de la lámina, medida desde su punto medio.

Resolución:

Sea la figura:



Donde:
σ = 9,00 $\mu C/m^2$

Nos piden E_P = ?

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad 2E.A = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \text{... (por simetría)}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{9{,}00\times10^{-6}}{2\times(8{,}85\times10^{-12})} = 508\times10^3 \text{ N/C}$$

CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

38. En un día claro y soleado, un campo eléctrico vertical de aproximadamente 130 N/C apunta hacia abajo sobre suelo plano. ¿Cuál es la densidad de carga superficial sobre el suelo en estas condiciones?

Resolución:

Datos: E = 130 N/C (hacia abajo suelo plano)
Nos piden σ

Aplicando la ley de Gauss se cumple que:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E.A = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

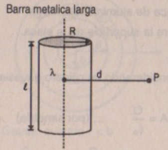
Luego: $\sigma = E.\varepsilon_0 = (130)(8{,}50\times10^{-12})$

$$\therefore \quad \sigma = 1{,}15\times10^{-9} \text{ C/m}^2$$

39. Una larga barra metálica recta tiene un radio de 5,00 cm y una carga por unidad de longitud de 30,0 nC/m. Encuentre el campo eléctrico a a) 3,00 cm, b) 10,0 cm, y c) 100 cm del eje de la barra, donde las distancias se miden perpendiculares a la barra.

Resolución:

Sea la figura:



Donde:
λ = 30 nC/m
R = 5,00 cm

Parte (a)
Nos piden E_P cuando d = 3,00 cm

Como: d < R y la carga radica en la superficie de la barra; se concluye que:
$E_P = 0$ cuando d < R (por la ley de Gauss)

Parte (b)
Nos piden E_P cuando d = 10,0 cm

Por la ley de Gauss, sabemos que:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E_P.(2\pi.d\ell) = \frac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_P = \frac{\lambda}{2\pi.d.\varepsilon_o} = \frac{30{,}0\times10^{-9}}{2\pi\,(0{,}1)\left(8{,}85\times10^{-12}\right)}$$

$$\therefore \quad E_P = 5\,400 \text{ N/C (hacia afuera)}$$

Parte (c)
Nos piden E_P cuando d = 1,00 m

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E_p(2\pi.d.\ell) = \frac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_p = \frac{\lambda}{2\pi.d.\varepsilon_o} = \frac{30{,}0\times10^{-9}}{2\pi\,(1{,}00)\left(8{,}85\times10^{-12}\right)}$$

$$\therefore \quad E_p = 540 \text{ N/C (hacia afuera)}$$

40. Una placa de aluminio muy larga, delgada y plana tiene un área *A* y una carga total *Q* distribuida uniformemente sobre su superficie. Si la misma carga está extendida de manera uniforme sobre la superficie *superior* de una placa de vidrio idéntica, compare los campos eléctricos justo arriba del centro de la superficie superior de cada placa.

Resolución:

Datos: Q, A de una placa de aluminio muy larga.

Nos piden E justo sobre la superficie de la placa.

Aplicando Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \text{(considerando un cilindro gaussiano)}$$

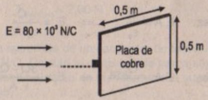
$$\Rightarrow 2E.A = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \text{... (por simetría)}$$

$$\therefore \quad E = \frac{Q}{2\varepsilon_o.A}$$

41. Una placa de cobre cuadrada, con lados de 50,0 cm, no tiene carga neta y está colocada en una región donde existe un campo eléctrico uniforme de 80,0 kN/C dirigido perpendicularmente hacia la placa. Encuentre a) la densidad de carga de cada cara de la placa y b) la carga total en cada cara.

Resolución:

Sea la figura:
Si
$E = 80 \times 10^3$ N/C



Parte (a)

Sabemos que: por definición: $\Phi_E = \int E.dA = \dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow E.A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\varepsilon_o = \sigma$$

Luego : $\sigma = (8{,}85 \times 10^{-12})(80 \times 10^3) = 708$ nC/m² (cara izquierda)

y $\sigma = -(8{,}85 \times 10^{-12})(80 \times 10^3) = 708$ nC/m² (cara derecha)

Parte (b)

Sabemos que: $Q_{total} = \sigma$. Área total

Entonces:

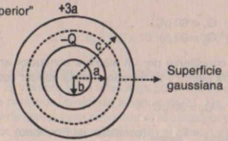
Q_{total} (cara izquierda) $= (708 \times 10^{-9})(5 \times 10^{-1})^2 = 177 \times 10^{-9}$ C ≡ 177 nC

y Q_{total} (cara derecha) $= (-708 \times 10^{-9})(5 \times 10^{-1})^2 = 177 \times 10^{-9}$ C ≡ −177 nC

42. Una esfera conductora hueca está rodeada por un cascarón conductor esférico concéntrico y más grande. La esfera interior tiene una carga −Q y la esfera exterior tiene una carga 3Q. Las cargas están en equilibrio electrostático. Con la ley de Gauss encuentre las cargas y los campos eléctricos en todo punto.

Resolución:

Sea la figura: "Vista superior"



- Aplicando la ley de Gauss: cuando r < b

$$E.A = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{0}{\varepsilon_o} \qquad \therefore \quad E_r = 0$$

- Cuando: $b < r < a$

  Por Gauss $E.A = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \dfrac{0}{\varepsilon_o} \therefore E_r = 0$

- Cuando: $a < r < c$

  Por Gauss: $E.A = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_r = \dfrac{-Q}{\varepsilon_o . A}$

- Cuando $r > 0$

  Por Gauss: $E.A = \dfrac{Q_{total}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_r = \dfrac{3Q - Q}{\varepsilon . A} = \dfrac{2Q}{\varepsilon . A}$

Se concluye que:

- La carga que actúa sobre la esfera de radio interior "b" debe de ser +Q para cancelar la carga –Q.
- La carga total que actúa sobre la esfera de radio r < c debe de ser –2Q para cancelar la carga total de la esfera de radio "0".

43. Dos esferas conductoras idénticas, cada una con un radio de 0,500 cm están conectadas por medio de un ligero alambre conductor de 2,00 m de largo. Determine la tensión en el alambre si se ponen 60,0 μC en uno de los conductores. (*Sugerencia*: suponga que al distribución superficial de carga sobre cada esfera es uniforme).

Resolución:

Sea la figura:

Donde:

$Q_1 = Q_2 = 30\ \mu C$

$R = 0,500$ cm

$T_{alambre} = ?$

Inicialmente: $Q_1 = 60\ \mu C$

$Q_2 = 0$

Después al conectarse por un alambre conductor ambas esferas una gana o se carga y la otra pierde o se descarga hasta quedar equiparadas.

Es decir: $Q_1 = Q_2 = 30\ \mu C$

Luego: $F_{electrica} = T_{alambre}$ (condición de Equilibrio)

$$\Rightarrow \frac{k_e . Q_1 . Q_2}{d^2} = T_{alambre}$$

$$\Rightarrow T_{alambre} = \frac{(8,99\times10^{9})(30,0\times10^{-6})(30\times10^{-6})}{(5\times10^{-4}+2,00)^2}$$

$$\therefore T_{alambre} = 2,00\ N$$

44. El campo eléctrico sobre la superficie de un conductor de forma irregular varía desde 56,0 kN/C hasta 28,0 kN/C. Calcule la densidad de carga superficial local en el punto sobre la superficie donde el radio de curvatura de la superficie es a) el más grande y b) el más pequeño.

Resolución:

Datos: Sea una superficie irregular de un conductor por condición; donde:

$$28 \times 10^3\ N/C \le E \le 56 \times 10^3\ N/C$$

Parte (a)

Nos piden: σ: donde $\underbrace{r}_{\text{Distancia a la superficie.}}$: es el más grande posible

Como r: es el más grande, entonces "E" tiene que ser el menor posible.

Luego: por Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$$

$\Rightarrow E.A = \dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \therefore \sigma = E . \varepsilon_0 = (28 \times 10^3)(8,85 \times 10^{-12}) = 247,8\ nC/m^2$

Parte (b)

Nos piden: σ donde r: es el menor posible

Entonces por Gauss:

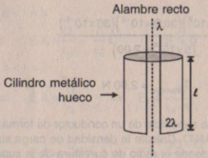
$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$$

$\Rightarrow E_{mayor\ posible} . A = \dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \therefore \sigma = E . \varepsilon_0 = (56 \times 10^3)(8,85 \times 10^{-12}) = 495,6\ nC/m^2$

45. Un alambre largo y recto está rodeado por un cilindro metálico hueco cuyo eje coincide con el del alambre. El alambre tiene una carga por unidad de longitud de λ y el cilindro tiene una carga neta por unidad de longitud de 2λ. De acuerdo con esta información, utilice la ley de Gauss para encontrar a) la carga por unidad de longitud en las superficies interior y exterior del cilindro, y b) el campo eléctrico afuera del cilindro, a una distancia *r* del eje.

Resolución:

Sea la figura:



Parte (a)

Sabemos que por propiedad, la carga en un conductor reside en su superficie; entonces:

$$\frac{\underline{\text{Carga neta}}}{\text{Longitud}}\left(\begin{array}{l}\text{interior}\\ \text{cilindro}\end{array}\right) = -\lambda$$

$$\frac{\underline{\text{Carga neta}}}{\text{Longitud}}\left(\begin{array}{l}\text{exterior}\\ \text{cilindro}\end{array}\right) = \lambda + 2\lambda = 3\lambda$$

Parte (b)

Nos piden E a una distancia "r" del eje del cilindro

Aplicando la ley de Gauss:

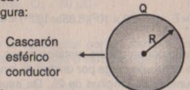
$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(2\pi r)\ell = \frac{3\lambda.\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E = \frac{3\lambda}{2\pi.r\varepsilon_0} \quad \text{radialmente hacia afuera}$$

46. Un cascarón esférico conductor de 15,0 cm de radio tiene una carga neta de $-6{,}40\ \mu C$ distribuida uniformemente sobre la superficie. Encuentre el campo eléctrico en puntos a) justo fuera del cascarón y b) dentro del cascarón.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:

$Q = -6{,}40\ \mu C$

$R = 15{,}0$ cm

Parte (a)

A una distancia $d \geq R$ nos piden $E_{eléctrico} = ?$

Por Gauss: $\quad \Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \quad E\,(4\pi.\,d^2) = \frac{Q_{neta}}{E_o} = -6{,}40 \times 10^{-6}$$

$$\therefore \quad E = \frac{-k_e.\left(6{,}40\times10^{-6}\right)}{d^2} = -\frac{\left(8{,}99\times10^{9}\right)\left(6{,}40\times10^{-6}\right)}{(0{,}15)^2} = -2{,}56\times10^{-6}\,N/C$$

(Dirigido hacia la esfera)

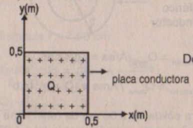
Parte (b)

A una distancia d < R ; E = 0 por propiedad

47. Una delgada placa conductora de 50,0 cm de lado se encuentra en el plano *xy*. Si una carga total de $4{,}00 \times 10^{-8}$ C se pone sobre la placa, encuentre a) la densidad de carga sobre la placa, b) el campo eléctrico justo arriba de la placa, y c) el campo eléctrico justo debajo de la placa.

Resolución :

Sea la figura:



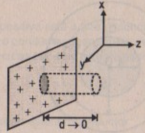
Donde: $Q = 4{,}00 \times 10^{-8}$ C

Parte (a)

Sabemos que: $\quad \sigma_{total} = \dfrac{Q}{\text{Área}} = \dfrac{4{,}00\times10^{-8}}{(0{,}5)^2}$

$$\therefore \quad \sigma_{total} = 160 \times 10^{-9}\ nC/m^2 = 160\ nC/m^2 \qquad \underbrace{80\ nC/m^2}_{\text{(cara 1}} + \underbrace{80\ nC/m^2}_{\text{cara 2)}}$$

Parte (b)



(justo arriba)

Por Gauss: $\quad \Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta\ arriba}}{\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma_{arriba}.A}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}\,.\,A = \frac{\sigma_{arriba}.A}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma_{arriba}}{\varepsilon_o} = \frac{80{,}0\times10^{-9}}{8{,}85\times10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = 9{,}04 \times 10^3\ N/C\ \hat{k} \quad \text{(hacia arriba en la dirección z)}$$

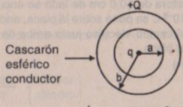
Parte (c)

$\vec{E}$ debajo de la placa = $-9{,}04 \times 10^3$ N/C $\hat{k}$ (en la dirección $-z$)

48. Un cascarón esférico conductor que tiene un radio interior *a* y radio exterior *b* tiene una carga neta *Q*. Si una carga puntual *q* se pone en el centro de este cascarón, determine la densidad de carga superficial sobre a) la superficie interior, y b) la superficie exterior del cascarón.

Resolución :

Sea la figura:



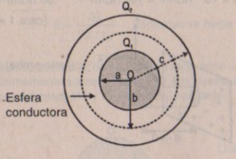
Parte (a) $\sigma_{interior} = Q_{neta}/\text{Área} = -q/4\pi.a^2$

Parte (b) $\sigma_{exterior} = Q_{neta}/\text{Área} = (Q+q)/4\pi.b^2$

49. Una esfera conductora sólida de 2,00 cm de radio tiene una carga de 8,00 μC. Un cascarón esférico conductor de radio interior igual a 4,00 cm y de radio exterior de 5,00 cm es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga de −4,00 μC. Encuentre el campo eléctrico en a) $r = 1{,}00$ cm, b) $r = 3{,}00$ cm, c) $r = 4{,}50$ cm, y d) $r = 7{,}00$ cm desde el centro de esta configuración de carga.

Resolución :

Sea la figura



Donde:
$c = 5{,}00$ cm
$b = 4{,}00$ cm
$a = 2{,}00$ cm
$Q_1 = 8{,}00\ \mu C$
$Q_2 = -4{,}00\ \mu C$

Parte (a)

Nos piden E a una distancia r = 1,00 cm

Por propiedad: el campo eléctrico producido dentro de un conductor es cero.

Por lo tanto: $E_{(r=1{,}00\,cm)} = 0$

Parte (b)

Nos piden E a una distancia r = 3,00 cm

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_o} \Rightarrow E.(4\pi.r^2) = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_o}$

Entonces: $$E = \frac{k_e Q_1}{r^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(8{,}00\times10^{-6})}{(0{,}003)^2}$$

$\therefore\quad E = 79{,}9 \times 10^6$ N/C (dirigido hacia fuera)

Parte (c)

Nos piden E a una distancia r = 4,50 cm

Por propiedad: El campo eléctrico producido a una distancia r > b de la esfera conductora interna es "cero". Por lo tanto:

$$E_{(r=4{,}5\,cm)} = 0$$

Parte (d)

Nos piden E a una distancia r = 7,00 cm

Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow\quad E.(4\pi.r^2) = \frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow\quad E = \frac{k_e.(Q_1+Q_2)}{r^2} = \frac{8{,}99\times10^9\,(8-4)\times10^{-6}}{(7{,}00\times10^{-2})^2}$$

$\therefore\quad E = 7{,}35 \times 10^6$ N/C (radialmente hacia afuera)

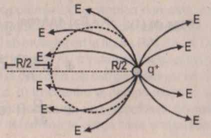
50. Una carga puntual positiva está a una distancia de R/2 desde el centro de un delgado cascarón esférico conductor descargado de radio R. Bosqueje las líneas de campo eléctrico establecidas por este arreglo tanto en el interior como en el exterior del cascarón.

Resolución :

Sea la figura:

cascarón esférico conductor

Vista superior arriba

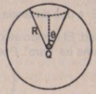


VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS LEYES DE GAUSS Y DE COULOMB

Deducción formal de la ley de Gauss

51. Una esfera de radio R rodea a una carga puntual Q, localizada en su centro. a) Demuestre que el flujo eléctrico a través de un casquete circular de medio ángulo θ (Fig. P24.51) es $\Phi_E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos\theta)$

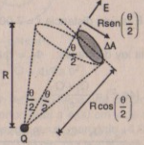
¿Cuál es el flujo por b) $\theta = 90°$ y c) $\theta = 180°$?



Resolución:

Parte (a)

Sea: (medio casquete)



Según el gráfico:

$$\Delta\Phi = E.\Delta A\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = 4E.\Delta A\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ...(1) \quad \text{(de un casquete circular)}$$

Por otro lado:

Sabemos que: $2\Delta A\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\pi.R^2.\text{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Por trigonometría (ángulo mitad)

sabemos que: $\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

Entonces: $2\Delta A\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\pi.R^2.\text{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{2\pi R^2}{2}.(1-\cos\theta)$

Luego de (1): $\Phi = E\times\left(4\Delta A\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = 4E\times\dfrac{\pi.R^2}{2}(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad \Phi = 4\frac{k_e.Q}{R^2}\times\frac{\pi.R^2}{2}(1-\cos\theta) = \frac{4Q\pi.R^2}{8R^2\pi.\varepsilon_o}(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos\theta) \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Hallar $\Phi = ?$ para $\theta = 90°$

Sabemos que: $\Phi = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos\theta) \Rightarrow \Phi_{(90°)} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos(90°)) = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}$

Parte (c)

Hallar $\Phi = ?$ para $\theta = 180°$

Sabemos que: $\Phi = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos\theta) \Rightarrow \Phi_{(180°)} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-\cos 180°) = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o}(1-(-1))$

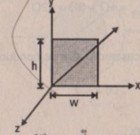
$$\therefore \quad \Phi_{(180°)} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

52. Un campo eléctrico no uniforme está dado por la expresión $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + bz\mathbf{j} + cx\mathbf{k}$, donde a, b y c son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular en el plano xy, que se extiende de $x = 0$ a $x = w$ y de $y = 0$ a $y = h$.

Resolución:

Sea la figura: $\vec{E} = a_y\,\hat{i} + b_z\,\hat{j} + c_x.\hat{k}$



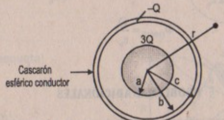
Sabemos que: $\Phi_E = \displaystyle\int \vec{E}.dA = \int_0^{\infty} |E_z|.h.dx.\cos(0°)$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = c_x.h.w$$

53. Una esfera aislante sólida de radio a tiene una carga positiva neta $3Q$, distribuida de manera uniforme a través de su volumen. Concéntrico con esta esfera está un cascarón esférico conductor de radio interior b y radio exterior c, y que tiene una carga negativa neta $-Q$, como se muestra en la figura P24.53. a) Construya una superficie gaussiana esférica de radio $r > c$ y determine la carga neta encerrada por esta superficie. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en $r > c$? c) Encuentre el campo eléctrico en $r > c$. d) Encuentre el campo eléctrico en la región con radios r donde $c > r > b$. e) Construya una superficie gaussiana esférica de radio r, donde $c > r > b$, y determine la carga neta encerrada por esta superficie. f) Construya una superficie gaussiana esférica de radio *r*, donde *b > r > a* y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. g) Determine el campo eléctrico en la región *b > r > a*. h) Construya una superficie gaussiana esférica de radio *r < a* y encuentre una expresión para la carga neta dentro de esa superficie como una función de r. Observe que la carga dentro de esta superficie es menor que 3*Q*. i) Encuentre el campo eléctrico en la región *r < a*. j) Determine la carga en la superficie interior del cascarón conductor. k) Determine la carga sobre la superficie exterior del cascarón conductor. l) Dibuje una gráfica de la magnitud del campo eléctrico *versus r*.

Resolución :

Dada la figura:



Parte (a)

Carga neta encerrada en una superficie gaussiana de radio r > c; está dada:

$$Q_{neta} = -Q + 3Q = +2Q$$

Parte (b)

Radialmente hacia afuera del cascarón esférico conductor.

Parte (c)

Aplicando la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E(4\pi \cdot r^2) = \frac{-Q+3Q}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{Q}{2\pi\, \varepsilon_o\, r^2} = \frac{2k_e.Q}{r^2} \quad \text{(radialmente hacia afuera)}$$

Parte (d)

Nos piden E cuando: b < r < c

Por propiedad: En un conductor eléctrico; el campo en su interior es cero.

$$E = 0 \quad \text{donde } b < r < c$$

Parte (e)

Q_{neta} encerrada en una superficie gaussiana de radio "r" cuando: b < r < c es cero.

$$\therefore \quad Q_{neta} = 0$$

Parte (f)

Q_{neta} encerrada en una superficie gaussiana de radio "r" cuando: a < r < b está dada por:

$$Q_{neta} = +3Q$$

Parte (g)

Nos piden E cuando a < r < b

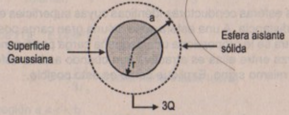
Aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.\,dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{3Q}{\varepsilon_o} \qquad \therefore \quad E = \frac{3k_e.Q}{r^2} \text{ (radialmente hacia fuera)}$$

Parte (h)

Nos piden Q_{neta} a una distancia r < a

Tenemos que:



Luego: $\rho = \frac{3Q}{\text{volumen}} = \frac{Q_{neta}}{\text{volumen}}$

$$\Rightarrow \quad Q_{neta} = \frac{3Q.(4/3\,\pi.r^3)}{(4/3\,\pi.a^3)} \qquad \therefore \quad Q_{neta} = \frac{3Q.r^3}{a^3}$$

Parte (i)

Por la ley de Gauss y considerando a la esfera sólida aislante de radio "a" como una superficie gaussiana; tenemos que:

$$\Phi_E = \oint E.\,dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} \qquad \text{cuando } r < a$$

$$\Rightarrow \quad E(4\pi \cdot r^2) = \frac{3Q.r^3}{a^3.\varepsilon_o} \quad \therefore E = \frac{3k_e.Q.r}{a^3} \quad \text{(radialmente hacia afuera)}$$

Parte (j)

Por propiedad:

Carga neta dentro de un conductor eléctrico es cero, puesto que radica en su superficie; entonces:

$$Q_{neta} \text{ (interior)} = -3Q$$

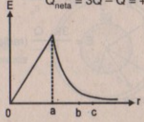
Parte (k)

Q_{neta} sobre la superficie exterior del cascarón es:

$$Q_{neta} = 3Q - Q = +2Q$$

Parte I

Gráfica E vs r

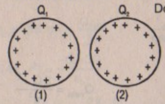


54. Considere dos esferas conductoras idénticas cuyas superficies están separadas por una corta distancia. A una esfera se le da una gran carga positiva neta mientras que a la otra se le proporciona una pequeña carga positiva neta. Se encuentra que la fuerza entre ellas es atractiva aun cuando ambas esferas tienen cargas netas del mismo signo. Explique cómo es esto posible.

Resolución:

Sea la figura: esferas conductoras idénticas

Donde: $Q_1 >> Q_2$



Por condición y dato: F_E entre ellas es atractiva

Sabemos que el campo producido por la esfera (1) está dirigido radialmente hacia fuera y con dirección a la esfera (2). Así también el campo producido por la esfera (2) en el exterior está dirigido radialmente hacia afuera; pero por el principio de superposición, el campo eléctrico total es igual a $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \vec{E}_{total}$ dirigido hacia la esfera más pequeña; es decir menor carga. En consecuencia:

$$F_E = Q_1 \cdot \vec{E}_{total} \text{ (dirigido hacia la esfera 2 y por tanto atractiva)}$$

55. Una esfera aislante sólida de radio *a* tiene una densidad de carga uniforme r y una carga total Q. Concéntrica con ella está una esfera hueca conductora descargada cuyos radios interior y exterior son *b* y *c*, como se muestra en la figura P24.55. a) Determine la magnitud del campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a < r$, b, $b < r < c$, y $r > c$. b) Determine la carga inducida por unidad de área en las superficies interior y exterior de la esfera hueca.

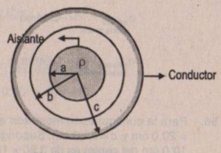


Figura P24. 55

Resolución:

Parte (a)

- Nos piden E en la región r < a

  Por Gauss:

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} \quad \dots (1)$$

Pero $\dfrac{Q_{neta}}{\text{volumen}} = \dfrac{Q}{V} = \rho \Rightarrow Q_{neta} = \dfrac{4}{3}\pi.r^3.\rho$

Entonces de (1): $E.(4\pi r^2) = \dfrac{4/3\pi.r^3.\rho}{\varepsilon_o}$

$$\therefore \quad E = \frac{\rho.r}{3\varepsilon_o} \quad \text{(radialmente hacia fuera)}$$

- En la región a < r < b

Aplicando Gauss: $\Phi_E = \oint E \cdot dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E(4\pi.r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \therefore \quad E = \frac{k_e Q}{r^2} \text{ (radialmente hacia afuera)}$$

- En la región b < r < c

  Por propiedad: en un conductor el campo eléctrico en el interior es cero. Por lo tanto: E = 0

- En la región r > c

  Aplicando Gauss:

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \therefore \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad \text{(radialmente hacia afuera)}$$

Parte (b)

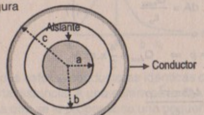
$$\sigma_{\substack{\text{interior}\\ \text{esfera hueca}}} = -Q/\text{área} = -\frac{Q}{4\pi.\,b^2}$$

$$\sigma_{\substack{\text{exterior}\\ \text{esfera hueca}}} = Q/\text{área} = \frac{Q}{4\pi.\,c^2}$$

56. Para la configuración mostrada en la figura P24.55, suponga que a = 5,00 cm, b = 20,0 cm y c = 25,0 cm. Suponga también que el campo eléctrico en un punto a 10,0 cm del centro es de $3{,}60 \times 10^3$ N/C radialmente hacia adentro, en tanto que el campo eléctrico en un punto a 50,0 cm del centro de $2{,}00 \times 10^2$ N/C radialmente hacia fuera. A partir de esta información encuentre a) la carga sobre la esfera aislante, b) la carga neta sobre la esfera conductora hueca, y c) la carga total sobre las superficies interior y exterior de la esfera conductora hueca.

Resolución:

Dada la figura



Donde:
a = 5,00 cm
b = 20,0 cm
c = 25,00 cm
$E_{(10\text{ cm})} = 3{,}6 \times 10^3$ N/C (hacia adentro)
$E_{(50\text{ cm})} = 2{,}00 \times 10^2$ N/C (hacia afuera)

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E\,.\,dA = \frac{Q_{\text{aislante}}}{\varepsilon_o} \quad \text{a una distancia } r = 10{,}0 \text{ cm}$$

Radialmente hacia adentro

$$\Rightarrow \; -E\,.\,(4\pi\,.\,r^2) = \frac{Q_{\text{aislante}}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \; Q_{\text{aislante}} = -E(4\pi r^2)\varepsilon_o = -(3{,}60 \times 10^3)(4\pi)(0{,}1)^2(8{,}85 \times 10^{-12})$$

$$\therefore \; Q_{\text{aislante}} = -4{,}00 \times 10^{-9}\text{C} \equiv 4{,}00 \text{ nC}$$

Parte (b)

Sabemos que E a 50 cm del centro = $2{,}00 \times 10^2$ N/C; entonces:

Aplicando ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{\text{total}}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \; E\,.\,(4\pi.r^2) = \frac{Q_{\text{aislante}} + Q_{\substack{\text{esfera hueca}\\ \text{conductora}}}}{\varepsilon_o} \;;\; r = 0{,}5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \; Q_{\text{esfera cond. cueca}} + Q_{\text{aislante}} = E\,(4\pi r^2)\,(\varepsilon_0)$$

$$\Rightarrow \; Q_{\text{esfera cond. hueca}} - 4{,}00 \times 10^{-9} = (2{,}00 \times 10^2)\,(4\pi\,[0{,}5]^2)(8{,}85 \times 10^{-12})$$

$$\therefore \; Q_{\text{esfera conductora hueca}} = 9{,}56 \times 10^{-9}\text{C} \equiv 9{,}56 \text{ nC}$$

Parte (c)

Carga total = $Q_{\text{esfera}} + Q_{\text{esfera cond. hueca}}$

$$\Rightarrow \; Q_{\text{total}} = -4.00\times10^{-9}\text{C} + 9{,}56\times10^{-9}\text{C}$$

$$\Rightarrow \; Q_{\text{total}} = 5{,}56 \times 10^{-9}\text{ C} \equiv 5{,}56 \text{ nC}$$

57. Un cascarón aislante cilíndrico e infinitamente largo, de radio interior a y radio exterior b, tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ (C/m³). Una línea de densidad de carga λ (C/m) se sitúa a lo largo del eje del cascarón. Determine la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto.

Resolución:

Sea la figura:

Donde:
λ = densidad de carga de la línea de carga.
ρ = densidad de carga volumétrica del cascarón

Nos piden: E en cualquier punto

- Cuando r < a

Por la ley de Gauss: $\oint E_{\text{total}}\,.\,dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \dfrac{\lambda\,.\,\ell}{\varepsilon_o}$

$$E_{\text{total}}\,.\,(2\pi.r.l) = \frac{\lambda\,.\,\ell}{\varepsilon_o} \;\therefore\; E_{\text{total}} = \frac{\lambda}{2\pi r.\varepsilon_o}\,\hat{r} \text{ (radialmente hacia afuera)}$$

- Cuando: $a < r < b$

Por la ley de Gauss: $\oint E_{\substack{total \\ de\ linea}} \cdot dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \dfrac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o}$

$\Rightarrow E_{línea} \cdot (2\pi.r.\ell) = \dfrac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o}$ $\qquad \therefore E_{línea\ de\ carga} = \dfrac{\lambda}{2\pi\, r.\varepsilon_o}\hat{r}$

Por otro lado:

$$\oint E_{cascarón} \cdot dA = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{\rho.\pi\left(r^2 - a^2\right).\ell}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E_{cascarón} \cdot (2\pi.r.\ell) = \frac{\rho.\pi.\ell\left(r^2 - a^2\right)}{\varepsilon_o} \qquad \therefore E_{cascarón} = \frac{\rho.\pi\left(r^2 - a^2\right)}{2\pi.r\,\varepsilon_o}\hat{r}$$

En consecuencia:

$E_{total} = \dfrac{1}{2\pi.\varepsilon_o.r}\left[\lambda + \rho\pi(r^2 - a^2)\right]\hat{r}$ (radialmente hacia afuera)

- Cuando: $r > b$

Por la ley de Gauss: $\oint E_{línea} \cdot dA = \dfrac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o}$

$\Rightarrow E_{línea} = (2\pi.r) \cdot \ell = \dfrac{\lambda.\ell}{\varepsilon_o} \therefore \quad E_{línea} = \dfrac{\lambda}{2\pi r.\varepsilon_o}\hat{r}$

Así también:

$$\oint E_{cascarón} \cdot dA = \frac{\rho.\pi(b^2 - a^2).\ell}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E_{cascarón}\,(2\pi.r.\ell) = \frac{\rho.\pi(b^2 - a^2).\ell}{\varepsilon_o} \qquad \therefore E_{cascarón} = \frac{\rho.\pi(b^2 - a^2)}{2\pi r\varepsilon_o}\hat{r}$$

Por lo tanto:

$E_{total} = \dfrac{1}{2\pi r\varepsilon_o}\left[\lambda + \rho\pi(b^2 - a^2)\right]\hat{r}$ radialmente hacia afuera.

58. Dos láminas de carga no conductora infinitas son paralelas entre sí como se ve en la figura P24.58. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme σ y la de la derecha tiene una densidad de carga uniforme $-\sigma$. Calcule el valor del campo eléctrico en puntos a) a la izquierda, b) entre, y c) a la derecha de las dos láminas (*Sugerencia*: véase el ejemplo 24.8).

59. Repita los cálculos del problema 58 cuando, ambas láminas tienen densidades de carga superficial uniforme *positivas* con valor σ.

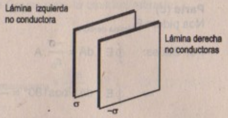
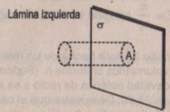


Figura P24.58

Resolución 58 y 59:

Parte (a)

Nos piden $E_{izquierda} = ?$



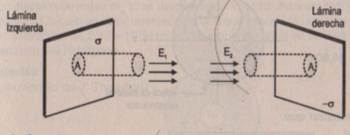
Aplicando la ley de Gauss:

$$\frac{\Phi_E}{2} = \oint E\,.dA = \frac{\sigma\,.\,A}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\,.A = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_o}$$

$E = \sigma/\varepsilon_o$ (alejándose de la lámina)

Parte (b)

Nos piden: E entre las placas



Aplicando Gauss:

$2\oint E_1 \cdot dA = \dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ (por simetría)

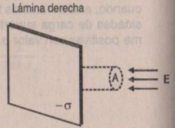
$2\oint E_2 \cdot dA \cdot \cos 180° = -\dfrac{\sigma.A}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad -E_2 \cdot A = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}.A$

$\therefore E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ (por simetría)

En consecuencia: $E_{entre\ las\ láminas} = E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$

Parte (c)

Nos piden: $E_{\text{lámina derecha}}$



Por Gauss: $\oint E \cdot dA = \frac{-\sigma}{\varepsilon_o} . A$

$$\Rightarrow \oint E \cdot dA \cdot \cos 180^\circ = \frac{-\sigma \cdot A}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E.A.(-1) = \frac{-\sigma . A}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \text{ (dirigido hacia la lámina)}$$

60. Una esfera de radio 2a está hecha de un material no conductor que tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. (Suponga que el material no afecta el campo eléctrico). Una cavidad esférica de radio a se separa después de la esfera, como se indica en la figura 24.60. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = \rho a/3\varepsilon_0$. (*Sugerencia*: el campo dentro de la cavidad es la superposición del campo debido a la esfera original sin corte, más el campo debido a una esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga negativa uniforme $-\rho$).

Resolución :

Dada la figura:

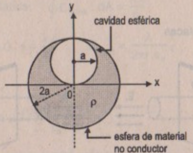


Figura 24.60

Por demostrar que:

$\boxed{E_x = 0 \text{ y } E_y = \rho.a/3\varepsilon_0}$ dentro de la cavidad esférica

Inicialmente: aplicando la ley de Gauss:

$$\oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho \cdot 4\pi\,(2a)^3}{3\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E(4\pi)(2a)^2 = \frac{\rho(4\pi)(8a^3)}{3\varepsilon_o} \qquad \therefore \quad E_{total} = \frac{2\rho a}{3\varepsilon_o} \text{ (esfera no conductora)}$$

Después se retira de la esfera conductora una cavidad.

Esfera de radio a; entonces aplicando Gauss para la cavidad retirada:

$$\oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho \cdot 4\pi\,(a)^3}{3\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E(4\pi a)^2 = \frac{\rho.4\pi a^3}{3\varepsilon_o} \qquad \therefore \quad E_{\text{cavidad retirada}} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_o}$$

En consecuencia:

Por el principio de superposición:

$$E_{total}(\text{esfera no conductora}) = E_{\text{cavidad retirada}} + E_{\text{cavidad interna}}$$

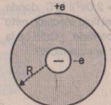
$$\Rightarrow E_{\text{cavidad interna}} = \frac{2\rho a}{3\varepsilon_o} - \frac{\rho.a}{3\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E_{\text{cavidad esférica interna}} = \frac{\rho.a}{3\varepsilon_o}$$ Lqqd (dirigida hacia arriba ó hacia el eje y)

61. Problema de repaso. Un primer (incorrecto) modelo del átomo de hidrógeno, sugerido por J. J. Thomson, proponía que una nube de carga positiva *+e* se distribuía uniformemente por todo el volumen de una esfera de radio R, con el electrón como una carga puntual negativa de igual magnitud *–e* en el centro. a) Utilizando la ley de Gauss, demuestre que el electrón estaría en equilibrio en el centro y, si se desplaza del centro una distancia $r < R$, experimentaría una fuerza restauradora de la forma $F = -Kr$, donde K es una constante. b) Muestre que $K = ke^2/R^3$. c) Encuentre una expresión para la frecuencia f de oscilaciones armónicas simples que experimentaría un electrón de masa m_e si se desplazara una corta distancia (<R) del centro y se liberara. d) Calcule un valor numérico para *R* que producirá una frecuencia de vibración del electrón de $2{,}47 \times 10^{15}$ Hz, la frecuencia de la luz en la línea más intensa en el espectro del hidrógeno.

Resolución :

Sea la modelo de J. Thomson:



Parte (a)

Por demostrar que:

$F_{RESTAURADORA} = -k.r$ si e^- se desplaza una distancia: $r < R$

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho.\text{volumen}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E(4\pi.r^2) = \frac{4\pi.\rho.r^3}{3\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\rho.r}{3\varepsilon_o}\hat{r} \text{ (radialmente hacia afuera)}$$

Entonces: $F_R = -e.E = \left(\dfrac{-e.\rho}{3\varepsilon_o}\right).r = -k.r$ Lqqd.

Parte (b)

Sabemos que: $K = \dfrac{-e.\rho}{3\varepsilon_o}$

Además: $\rho = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi.r^3} = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi.R^3}$

Entonces: $K = \dfrac{e}{3\varepsilon_o}\cdot\left(\dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi.R^3}\right) = \dfrac{k_e.e^2}{R^3}$ Lqqd.

Parte (c)

Sabemos que por la segunda ley de Newton (dinámica circular)

$$F_C = F_R = m_{e-}\,\omega^2.r = \frac{k_e.e^2.r}{R^3}$$

Entonces: $\omega = |e|\cdot\sqrt{\dfrac{k_e}{m_e.R^3}}$ $\therefore$ $f_{oscilación} = \dfrac{|e|}{2\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{k_e}{m_e.R^3}}$

62. Una superficie cerrada con dimensiones $a = b = 0{,}400$ m y $c = 0{,}600$ m se localiza como se muestra en la figura P24.62. El campo eléctrico por toda la región no es uniforme y está dado por $E = (3{,}0 + 2{,}0x^2)$i N/C, donde x está en metros. Calcule el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada. ¿Cuál es la carga neta encerrada por la superficie?

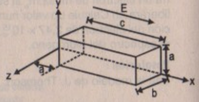
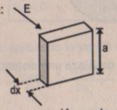


Figura P24.62

Resolución :

Dada la figura:



Donde:
a = b = 0,400 m
c = 0,6 m
$\vec{E} = (3{,}0 + 2{,}0x^2)\ \hat{i}$ N/C

$$dA = a.dx = (0{,}4)dx$$

Por definición: $\Phi_E = \int_a^{a+c} E.dA = \int_{0,4}^{0,4+0,6}(3{,}0 + 2{,}0x^2)(0{,}4\ dx)$

$$\Rightarrow\ \Phi_E = 1{,}2\int_{0,4}^{1,0}dx + 0{,}8\int_{0,4}^{1,0}x^2dx$$

$$\Rightarrow\ \Phi_E = 1{,}2\,x\Big|_{0,4}^{1,0} + \frac{0{,}8}{2}x^3\Big|_{0,4}^{1,0}$$

$$\therefore\ \Phi_{E\ sale} = 0{,}6496\ N.m^2/C$$

Sabemos que: $\Phi_{E\ total} = \Phi_{E\ que\ entra} + \Phi_{E\ que\ sale}$

$$\Rightarrow\ \Phi_{E\ total} = -0{,}6496 + 0{,}6496 = 0$$

Entonces: por la ley de Gauss:

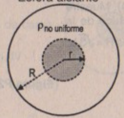
$$\Phi_{E\ total} = \oint E\ .\ dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}\quad \therefore\ Q_{neta\ encerrada} = 0$$

63. Una esfera aislante sólida de radio R tiene una densidad de carga no uniforme que varía con r de acuerdo con la expresión $\rho = Ar^2$, donde A es una constante y r < R se mide desde el centro de la esfera. a) Demuestre que el campo eléctrico exterior a la esfera (r > R) es $E = AR^5/5\varepsilon_0 r^2$. b) Muestre que el campo eléctrico interior (r < R) de la esfera es $E = Ar^3/5\varepsilon_0$. (Sugerencia: advierta que la carga total Q sobre la esfera es igual a la integral de ρ dV, donde r se extiende de 0 a R; observe también que la carga q dentro de un radio r < R es menor que Q. Para evaluar las integrales advierta que el elemento de volumen dV para un cascarón esférico de radio r y espesor *dr* es igual a $4\pi r^2$dr.)

Resolución :

Sea la figura: Esfera aislante



Donde:
$\rho = A.r^2$

Parte (a)

Por demostrar que: $E = \dfrac{A.R^5}{5\varepsilon_o r^2}$ cuando r > R

Sabemos que: $dQ = \rho\ .\ dV = A.r^2.4\pi.r^2.dr$

$$\Rightarrow\ Q_{neta} = \int dQ = 4\pi.A\int_0^R r^4.dr$$

$$\therefore\ Q_{neta} = \frac{4}{5}\pi.AR^5$$

Luego por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_o} = \frac{4\pi AR^5}{5\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E(4\pi.r^2) = \frac{4\pi AR^5}{5\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{A.R^5}{5\varepsilon_o r^2} \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $\boxed{E = \dfrac{A.r^3}{5\varepsilon_o}}$ cuando $r < R$

Sabemos: de la parte (a)

$$Q_{neta} = \frac{4}{5}\pi . A . r^5 \quad \text{(integrando)}$$

Luego aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_o}$

Entonces: $E\,(4\pi.r^2) = \dfrac{4\pi A r^5}{5\varepsilon_o}$

$$\therefore \quad E = \frac{A.r^3}{5\varepsilon_o} \quad \text{Lqqd.}$$

64. Una carga puntual *Q* se localiza en el eje de un disco de radio *R* a una distancia *b* del plano del disco (Fig. P24.64). Muestre que si un cuarto del flujo eléctrico de la carga pasa por el disco, entonces $R = \sqrt{3}\,b$.

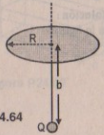


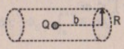
Figura P24.64

Resolución :

Dada la figura:

Por demostrar que: si $\frac{1}{4}\,\Phi_E$ pasa por el disco, entonces: $\boxed{R = \sqrt{3}\,b}$

Considerando un cilindro gaussiano de la siguiente manera:



Entonces por Gauss: $\Phi_{E\ total} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$ ...(α)

Por otro lado:

Por definición sabemos que:

$$\Phi_{E\ total} = \int E.dA = \int \frac{k_e.Q}{b^2}.\ dA\ .\cos\theta = \frac{k_e.Q}{b^2}\int_0^R 2\pi.r.dr.\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \Phi_{E_{total}} = \frac{\pi.k_e.Q}{b^2}\int_0^R \frac{2b}{\left(r^2+b^2\right)^{1/2}}.\ d(r^2+b^2) \quad \text{... por simetría}$$

$$\therefore \quad \Phi_{E_{total}} = \frac{\left(b^2+R^2\right)^{1/2}.\ \pi\ .\ k_e\ .\ Q}{2b}$$

De la ecuación: (α)

Por condición: $\dfrac{Q}{4\varepsilon_o} = \dfrac{\left(b^2+R^2\right)^{1/2}.\pi.Q}{2(4\pi.b\varepsilon_o)} \quad \Rightarrow \quad 4b^2 = b^2 + R^2$

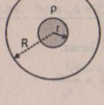
$$\therefore \quad R = |\sqrt{3}.b| \qquad \text{Lqqd.}$$

65. Una distribución de carga simétrica esféricamente tiene una densidad de carga dada por $\rho = a/r$, donde a es constante. Encuentre el campo eléctrico como función de r. (Sugerencia: advierta que la carga en la esfera de radio R es igual a la integral de ρdV, donde r se extiende de 0 a R. Para evaluar la integral, note que el elemento de volumen dV para un cascarón esférico de radio r y espesor dr es igual a $4\pi r^2$dr.

Resolución :

Sea la figura:

Distribución de carga



Donde: $\rho = \dfrac{a}{r}$

Sabemos que: $dq = \rho.dV$

$$\Rightarrow \quad dq = \frac{a}{r}\ (4\pi.r^2.dr)$$

$$\therefore \quad Q_{total} = 4\pi.a\int_0^R r\ dr = 2\pi.a.R^2$$

Luego por la ley de Gauss:

$$\oint E\ .dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E.(4\pi) = \frac{2\pi\ a\ R^2}{\varepsilon_o} \quad \text{a una distancia } r > R$$

$$\therefore \quad E_{(r)} = \frac{a.R^2}{2r^2\varepsilon_o}$$

66. Un cilindro aislante infinitamente largo de radio R tiene una densidad de carga volumétrica que varía con el radio como

$$\rho = \rho_o\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

donde ρ_0, a y b son constantes positivas, y *r* es la distancia desde el eje de cilindro. Utilice la ley de Gauss para determinar la magnitud del campo eléctrico a distancias radiales a) r < R, y b) r > R.

Resolución:

Sea la figura: Cilindro aislante infinito

Donde:

$$\rho = \rho_o\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

r : distancia desde el eje del cilindro

ρ_0; a; b; ctes.

Parte (a)

Nos piden E cuando r < R

Sabemos que: $dq = \rho\,.\,dV = \rho.2\pi.r.\ell.dr$

$$\Rightarrow \quad dq = \rho_o\left(a - \frac{r}{b}\right)(2\pi.r.\ell.dr)$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = \int \rho_o.a.2\pi.\ell.r.dr - \int \frac{\rho_o.2\pi.\ell}{b}\,r^2\,.\,dr$$

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{2\pi.\rho_o.a.\ell r^2}{2} - \frac{2\pi.\ell.\rho_o r^3}{3b}$$

Luego: aplicando la ley de Gauss:

$$\Phi_e = \oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E(2\pi\,.\,r)\,\ell = \frac{2\pi\,.\rho_o.a.\ell.r^2}{2\varepsilon_o} - \frac{2\pi.\rho_o.\ell.r^2}{3b\,\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{a.\rho_o.r}{2\varepsilon_o} - \frac{\rho_o.r^2}{3b\,\varepsilon_o} = \frac{\rho_o.r}{\varepsilon_o}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3b}\right) \text{ a una distancia } r < R$$

Parte (b)

Nos piden: E cuando r > R

Sabemos que: $dq = \rho\,.\,dV$

$$\Rightarrow \quad \int dq = 2\pi.\ell.\rho_o.a\int_0^R r.dr - \frac{2\pi.\rho_o.\ell}{b}\int_0^R r^2.dr$$

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{2\pi.\ell.\rho_o.aR^2}{2} - \frac{2\pi.\rho_o.\ell.R^3}{3b}$$

Luego: aplicando la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E\,.\,(2\pi.r.\ell) = \frac{2\pi.\ell.\rho_o.a.R^2}{2\varepsilon_o} - \frac{2\pi.\rho_o.\ell.R^3}{3b\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\rho_o.a.R^2}{2r\,\varepsilon_o} - \frac{\rho_o.\,R^3}{3br\varepsilon_o} \text{ a una distancia } r > R$$

67. **Problema de repaso.** Una placa de material aislante (infinita en dos de sus tres dimensiones) tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ. Una vista de canto de la placa se muestra en la figura P24.67). a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico a una distancia x de su centro y en el interior de la placa es $E = \rho x/\varepsilon_0$. b) Suponga que un electrón de carga $-e$ y masa m_e se coloca dentro de la placa. Si se suelta desde el reposo a una distancia x del centro, demuestre que el electrón exhibe movimiento armónico simple con una frecuencia descrita por la expresión.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m_e\,\varepsilon_o}}$$

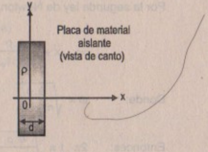


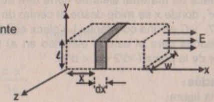
Figura P24.67

Resolución:

Datos: ρ = uniforme

Por demostrar que: $E = \dfrac{\rho.x}{\varepsilon_o}$ a una distancia x de su centro y en el interior de la placa

Sea una parte del material aislante



Parte (a)

Sabemos que: $dq = \rho \,.\, dV = \rho.\ell.w.dx$

$\therefore \quad Q_{total} = 2\rho.\ell.w.x$(por simetría)

Luego:

Aplicando la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad 2E(\ell.w) = \frac{2\rho.\ell.w.x}{\varepsilon_o} \text{ (por simetría)}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\rho.x}{\varepsilon_o} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\rho e}{m_e\,\varepsilon_o}}$

Cuando un electrón de carga $-e$ se coloca dentro de la placa a una distancia x del centro.

Sabemos que: $F_R = -e.E = \dfrac{-e.\rho.x}{\varepsilon_o}$

Por la segunda ley de Newton: $F_R = \dfrac{-e.\rho.x}{\varepsilon_o} = m_e \,.\, \ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{-e.\rho}{m_{e^-}.\varepsilon_o}.x = 0 \text{ (ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

Donde: $\omega = \sqrt{\dfrac{e.\rho}{m_{e^-}.\varepsilon_o}}$

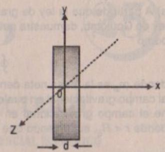
Entonces: $2\pi \,.\, f = \sqrt{\dfrac{e.\rho}{m_{e^-}.\varepsilon_o}}$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{e.\rho}{m_{e^-}.\varepsilon_o}} \qquad \text{Lqqd.}$$

68. Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme $\rho = Cx^2$, donde x se mide desde el centro de la placa como se muestra en la figura P24.67, y C es una constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Obtenga expresiones para el campo eléctrico en a) las regiones exteriores y b) la región interior de la placa ($-d/2 < x < d/2$).

Resolución:

Dada la figura:



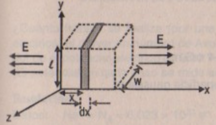
Datos:

$\rho = c.x^2$

La placa es infinita en las direcciones "y" y "z".

Parte (a)

Sea una parte del material aislante.



Sabemos que:

$dq = \rho \,.\, dV = c.x^2.\ell.w.dx$

$\Rightarrow \quad Q_{total} = 2\,.\,c\,.\,\ell\,.\,w\displaystyle\int_0^{d/2} x^2dx$ (por simetría)

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{2.c.\ell.w.d^3}{24}$$

Luego por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E.dA = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_o} = \frac{2c.\ell.w.d^3}{24\,\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow 2E(\ell\,.\,w) = \frac{2c.\ell.w.d^3}{24\,\varepsilon_o} \quad \text{... (por simetría)}$$

$$\therefore \quad E_{externo} = \frac{c.d^3}{24\,\varepsilon_o}$$

Parte (b)

Para $-d/2 < x < d/2$

Sabemos que: $dq = \rho.dV = c.x^2.\ell.w.dx$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = \frac{2c.\ell.w.x^3}{3} \text{ ... por simetría}$$

Luego aplicando la ley de Gauss: $\Phi_E = \oint E.dA = \dfrac{Q_{total}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad 2E.(\ell\,.\,w) = \frac{2c.\ell.w.x^3}{3\,\varepsilon_o} \text{ ... (por simetría)}$$

$$\therefore \quad E_{interior} = \frac{c.x^3}{3\,\varepsilon_o}$$

69. a) A partir de que la ley de gravitación de Newton es matemáticamente similar a la ley de Coulomb, demuestra que la ley de Gauss para la gravitación puede escribirse como

$$\oint g \,.\, dA = -4\pi G m_{in}$$

donde m_{in} es la masa neta dentro de la superficie gaussiana, y $g = F_g/m$ representa al campo gravitacional en cualquier punto sobre la superficie gaussiana. b) Determine el campo gravitacional en un punto a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r < R_E$, suponiendo que la densidad de masa de la Tierra es uniforme.

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\oint g \,.dA = -4\,\pi.G.m_{in}$

Donde: m_{in} : masa neta dentro de la superficie gaussiana.

Sabemos que: $F_g = \dfrac{G.M.m_{in}}{d^2}$

$\Rightarrow \ M.g = \dfrac{G.M.m_{in.}}{d^2} \qquad \therefore \ g = \dfrac{G.m_{in}}{d^2}$ (producido por el planeta de masa M)

Luego:

Por analogía: aplicando la ley de Gauss

$$\oint g\,.dA = g.dA.\cos 180° = -\oint g\,dA$$

$$\Rightarrow \ -\oint g\,.dA = +\frac{G.m_{in.}}{d^2}\ (4\pi.d^2)$$

$$\therefore \ \oint g\,.dA = -4\pi.G.m_{in.} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Tenemos que: $\oint g\,.dA = -4\pi.G.m_{in}$

$$\Rightarrow \ g(4\pi.r^2) = -4\pi.G.m_{in}$$

$$\therefore \ g = \frac{-G.\,m_{in.}}{r^2} \qquad \text{dirigido hacia el centro}$$

Capítulo 25

POTENCIAL ELÉCTRICO

DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ELÉCTRICO

1. ¿Cuánto trabajo se realiza (por una batería, generador u otra fuente de energía eléctrica) al mover un número de Avogadro de electrones a partir de un punto inicial donde el potencial eléctrico es 9,00 V hasta un punto donde el potencial es –5,00 V? (El potencial en cada caso se mide en relación con un punto de referencia común).

Resolución :

Datos: $Ne^- = N_A = 6{,}023 \times 10^{23}\ e^-$

$q_{e^-} = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$\Delta V = -14{,}00$ V

$W = ?$

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_o} = \dfrac{W}{q_o}$

$\Rightarrow \ q_{e^-}\,.\,\Delta V = W_{(batería)}$

$\Rightarrow \ W_{(batería)} = -14{,}00\ \dfrac{J}{C} \times (-1{,}6 \times 10^{-19}\ C) \times (6{,}023 \times 10^{23}\ e)$

$\therefore \ W_{(batería)} = 1{,}35$ MJ

2. Un ion acelerado mediante una diferencia de potencial de 115 V experimenta un aumento en su energía cinética de $7{,}37 \times 10^{-17}$ J. Calcule la carga en el ion.

Resolución :

Datos: $\Delta V = 115$ V

$\Delta E_K = 7{,}37 \times 10^{-17}$ J

$q_{ion} = ?$

Resolución:

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q}$

Pero por la conservación de la energía: $\Delta U = \Delta E_K$

$\Rightarrow \ \Delta V = \dfrac{\Delta E_k}{q}$

$$\Rightarrow \quad q_{ion} = \frac{\Delta E_k}{\Delta V} = \frac{7{,}37\times10^{-17}}{115}$$

$$\therefore \; q_{ion} = 6{,}4 \times 10^{-15}\ C = 6{,}4\ fC$$

3. a) Calcule la rapidez de un protón que es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 120 V. b) Calcule la rapidez de un electrón que se acelera a través de la misma diferencia de potencial.

Resolución :

Datos: $\Delta V = 120\ V$

$q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

$m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

Parte (a)

Por la conservación de la energía: $-\Delta U = \Delta E$

Entonces:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_{p+}} = \frac{\Delta E_k}{q_{p+}} \Rightarrow \Delta V \times q_{p+} = \frac{1}{2} m_{p+} . v_{p+}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{p+} = \sqrt{\frac{2.\Delta V . q_{p+}}{m_{p+}}} = \sqrt{\frac{2(120)(1{,}6\times10^{19})}{1{,}67\times10^{-27}}}$$

$$\therefore \; v_{protón} = 152\ km/s$$

Parte (b)

Sabemos que: $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

$m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$

Entonces: $v_{e^-} = \sqrt{\dfrac{2.\Delta V . q_{e^-}}{m_{e^-}}} = \sqrt{\dfrac{2(120)(1{,}6\times10^{19})}{9{,}1\times10^{-31}}}$

$$\therefore \; v_{electrón} = 6{,}49\ Mm/s$$

4. **Problema de repaso.** ¿A través de qué diferencia de potencial se necesitaría acelerar un electrón para que alcanzara el 40% de la rapidez de la luz empezando desde el reposo? La rapidez de la luz es $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

Resolución :

Datos: $v_{o\,e^-} = 0$; $c = 3{,}00 \times 10^8\ m/s$

$v_{f\,e^-} = 0{,}4\ c$; $m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$

$\Delta V = ?$

Sabemos que: $-\Delta U = \Delta E_k$ (por conservación de la energía)

Entonces:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_{e^-}} = \frac{\Delta E_k}{q_{e^-}} \Rightarrow \quad \Delta V = -\frac{(9{,}1\times10^{-31})(1{,}2\times10^{8})^2}{2(-1{,}6\times10^{-19})}$$

$$\therefore \; \Delta V = 4{,}1 \times 10^4\ V$$

5. ¿Qué diferencia de potencial se necesita para frenar un electrón que tiene una rapidez inicial de $4{,}20 \times 10^5$ m/s?

Resolución :

Datos: $v_f = 0$; $m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$

$v_i = 4{,}2 \times 10^5\ m/s$; $q_{e^-} = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

$\Delta V = ?$

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_{e^-}} = \dfrac{-\Delta E_k}{q_{e^-}}$

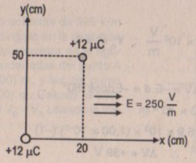
$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{-\left(0 - \frac{1}{2} m_{e^-} . v_{e^-}^2\right)}{q_{e^-}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{9{,}1\times10^{-31}(4{,}2\times10^5)^2}{2(-1{,}6\times10^{-19})}$$

$$\therefore \; \Delta V = -\,0{,}502\ V$$

DIFERENCIAS DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

6. Un campo eléctrico uniforme de 250 V/m de magnitud está dirigido en la dirección x positiva. Una carga de +12,0 μC se mueve desde el origen hacia el punto (x; y) = (20; 0 cm; 50,0 cm). a) ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial de esta carta? b) ¿A través de qué diferencia de potencial se movió la carga?

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que en un campo eléctrico uniforme:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_o} = -\vec{E}.\vec{d}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = -q_o\vec{E}.\vec{d} = -12 \times 10^{-6} \times (250)(0{,}2\hat{i} + 0{,}5\hat{j})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = -12 \times 10^{-6} \times (50\ \hat{i} + 125\ \hat{i}.\hat{j})$$

$$\therefore \quad \Delta U = -6{,}00 \times 10^{-4}\ \hat{i}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \dfrac{-6{,}00\times10^{-4}}{12\times10^{-6}}$

$$\therefore \quad \Delta V = -50\ V$$

7. La diferencia en potencial entre las placas aceleradoras de una TV es de casi 25 000 V. Si la distancia entre dichas placas es de 1,50 cm, encuentre la magnitud del campo eléctrico uniforme en esta región.

Resolución:

Datos: $\Delta V = 25 \times 10^3\ V$
$d = 1{,}5 \times 10^{-2}\ m$
$E = ?$

Sabemos que: $\Delta V = -E.d$

$$\Rightarrow \quad |\Delta V| = |-E.d| \quad \Rightarrow \quad 25 \times 10^3 = |E| \times (1{,}5 \times 10^{-2})$$

$$\therefore \quad |E| = 1{,}67 \times 10^6\ \frac{N}{C} = 1{,}67\ M\ \frac{N}{C}$$

8. Suponga que un electrón es liberado desde el reposo en un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de $5{,}90 \times 10^3$ V/m. a) ¿A través de qué diferencia de potencial habrá pasado después de moverse 1,00 cm? b) ¿Cuán rápido estará moviéndose el electrón después de que haya viajado 1,00 cm?

Resolución:

Datos: $E = 5{,}9 \times 10^3\ \dfrac{V}{m}$; $V_o\ e^- = 0$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = -E.d = -Ed\cos 180°$

Dato: $d = 1{,}00 \times 10^{-2}\ m$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = -5{,}9 \times 10^3 \times (1{,}00 \times 10^{-2})(-1)$$

$$\therefore \quad \Delta V = +59\ V$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_{e-}} = \dfrac{-\Delta E_k}{q_{e-}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = 59\ V = \frac{-m_{e-}.v_{e-}^2}{2.q_{e-}} = \frac{-(9{,}1\times10^{-31})v_{e-}^2}{2(-1{,}6\times10^{-19})}$$

$$\therefore \quad V_{e-} = 4{,}55 \times 10^6\ m/s = 4{,}55\ Mm/s$$

9. Un electrón que se mueve paralelo al eje x tiene una rapidez inicial de $3{,}70 \times 10^6$ m/s en el origen. Su rapidez se reduce a $1{,}40 \times 10^5$ m/s en el punto x = 2,00 cm. Calcule la diferencia de potencial entre el origen y este punto. ¿Cuál punto está a mayor potencial?

Resolución:

$v_i = 3{,}7 \times 10^6\ m/s$ $\quad v_f = 1{,}4 \times 10^5\ m/s$

x (cm)

$x = 0$ $\quad x = 2{,}00\ cm$

Datos: $q_{e-} = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$
$\Delta V = ?$
$m_{e-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$

Sabemos que por conservación de la energía: $-\Delta U = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = \frac{1}{2}m_{e-}(v_i^2 - v_f^2) = \frac{1}{2}(9{,}1 \times 10^{-31})\,[(3{,}7 \times 10^6)^2 - (1{,}4 \times 10^5)^2]$$

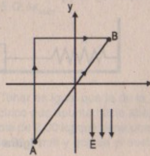
$$\therefore \quad \Delta U = 6{,}22 \times 10^{-18}\ J > 0$$

Luego: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_{e-}} = \dfrac{6{,}22\times10^{-18}}{1{,}6\times10^{-19}}$

$$\therefore \quad \Delta V = -38{,}9\ V < 0$$

En consecuencia: V(0) es mayor que V(2).

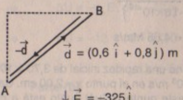
10. Un campo eléctrico uniforme de 325 V/m de magnitud está dirigido en la dirección *y negativa*, como se muestra en la figura P25.10. Las coordenadas del punto A son (–0,200; –0,300) m, y las del punto *B* son (0,400; 0,500) m. Calcule la diferencia de potencial $V_B - V_A$ usando la trayectoria azul.

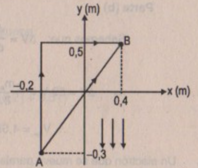


Resolución:

$$E = 325\frac{V}{m}$$

Hallar: $V_B - V_A$





Luego:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\vec{E}\cdot\vec{d} = 325\,\hat{j}\,(0{,}6\,\hat{i} + 0{,}8\,\hat{j})$$

$$\therefore \quad V_B - V_A = 260 \text{ V}$$

11. Un bloque de 4,00 kg con una carga Q = 50,0 μC se conecta a un resorte para el cual k = 100 N/m. El bloque está sobre una pista horizontal sin fricción, y el sistema está inmerso en un campo eléctrico uniforme de magnitud E = 5,00 × 10⁵ V/m, dirigido como se indica en la figura P25.11 Si el bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está sin estirar (en x = 0), a) ¿cuál es la cantidad máxima a la que se alarga el resorte?, b) ¿cuál será la posición de equilibrio del bloque?, c) muestre que el movimiento del bloque es armónico simple y determine su período. d) repita el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0,200.

12. Un bloque de masa m y carga Q se conecta a un resorte de constante k. El bloque está sobre una pista horizontal sin fricción y el sistema está inmerso en un campo eléctrico uniforme de magnitud E, dirigido como se indica en la figura P25.11. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está sin estirar (en x = 0), a) ¿en qué cantidad máxima se alarga el resorte?, b) ¿cuál será la posición de equilibrio del bloque?, c) muestre que el movimiento del bloque es armónico simple y determine su período, d) repita el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k.

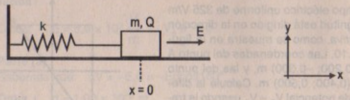
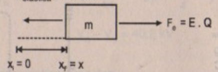


Figura P25.11 Problemas 11 y 12.

Resolución :

Parte (a) $\quad F_{\text{elástica}} = k\,.\,\Delta x$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \quad F_{\text{elástica}} = F_e$$

$$\Rightarrow \quad k.\Delta x = E.Q$$

$$\therefore \quad \Delta x = \frac{E.Q}{k} \qquad \text{Luego: } \Delta x_{\text{máx.}} = 2.\frac{E.Q}{k}$$

Parte (b) $\quad x_{\text{final}} = \dfrac{E.Q}{F_x}$

Parte (c) $\quad \Sigma F_x = m.\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad -k(x) = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0 \quad \text{(ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

Luego: $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Parte (d)

Por la conservación de la energía:

$$W_{F\text{ (no conserv)}} = \Delta E_{\text{mecánica}}$$

$$\Rightarrow \quad -f_f\,.\,\Delta x_{\text{máx}} = -\frac{1}{2}k\,.\,\Delta^2 x_{\text{máx}} + (E.Q)\,\Delta x_{\text{máx}}$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_k\,.\,mg\,.\,\Delta x_{\text{máx}} = -\frac{1}{2}k\,.\,\Delta^2 x_{\text{máx}} + E.Q.\Delta x_{\text{máx}}$$

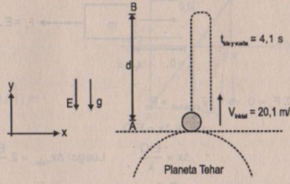
$$\therefore \Delta x_{\text{máx}} = 2\left(\frac{E.Q + \mu_k.mg}{k}\right)$$

13. La aceleración debido a la gravedad del planeta Tehar es igual que la de la Tierra, pero en Tehar hay también un intenso campo eléctrico que apunta hacia abajo y es uniforme cerca de la superficie del planeta. Una bola de 2,00 kg que tiene una carga de 5,00 μC se lanza hacia arriba a una rapidez de 20,1 m/s y golpea el suelo después de un intervalo de 4,10 s. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto de inicio y el punto más alto de la trayectoria?

Resolución :

Datos: $g_{tehar} = g_{tierra}$
$m = 2,00$ kg
$q = 5,00$ μC

Nos piden: $V_A - V_B$



Sabemos que: $$V_A - V_B = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B E d_s = -E.d \quad ...(1)$$

Por otro lado:

Por el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$-(qE + mg) \,.\, d = 0 - \frac{1}{2}m \,.\, v^2_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad qE + mg = \frac{m.\,v^2_{inicial}}{2d} \quad ...(2)$$

Por dinámica: $\Sigma F_y = m.a_y$

$$\Rightarrow \quad -mg - q.E = m.a_y \quad \Rightarrow \quad a_y = -\left(\frac{mg+qE}{m}\right)$$

Por cinemática:

$$y(t) = v_{inicial} \,.\, t + \frac{1}{2} ay \,.\, t^2$$

$$\Rightarrow \quad y(t = 4,1) = 0 = v_{inicial}(4,1) - \frac{1}{2}\,\frac{qE+mg}{m}\,(4,1)^2$$

$$\Rightarrow \quad mg + qE = \frac{2v_{inicial}.m}{4,1} \quad ...(3)$$

Igualando: (3) = (2)

Resulta que: $$d = \frac{4,1\, v_{inicial}}{4}$$

Entonces de (1):

$$V_A - V_B = -E.d = \frac{m}{q}\left(\frac{2\,v_{inicial}}{4,1} - 9\right)\left(\frac{4,1 v_{inicial}}{4}\right)$$

$$\therefore \quad V_A - V_B = 40,2 \text{ kV}$$

14. Una barra aislante que tiene una densidad de carga lineal λ = 40,0 μC/m y densidad de masa línea μ = 0,100 kg/m se suelta desde el reposo en un campo eléctrico uniforme E = 100 V/m dirigida en forma perpendicular a la barra (Fig. P25.14). a) Determine la rapidez de la barra después de que ésta se ha desplazado 2,00 m. b) ¿Cómo cambia su respuesta al inciso a) si el campo eléctrico no es perpendicular a la barra? Explique.

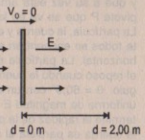


Figura P25.14

Resolución :

Datos: $\lambda = 40,0\,\mu\frac{C}{m}$; $\mu = 0,1$ kg/m

$$E = 100\,\frac{V}{m}$$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta U = -Q.E.d$

Por la conservación de la energía: $-\Delta U = \Delta E_k$

Entonces:

$$\Delta E_k = Q.E.d$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m \,.\, v^2_{final} = Q.E.d \quad \Rightarrow \quad v_{final} = \sqrt{\frac{2.Q.E.d}{m}} = \sqrt{\frac{2.E.d\lambda}{\mu}}$$

Reemplazando: $$v_{final} = \sqrt{\frac{2(100)(2)(40\times10^{-6})}{0,1}}$$

$$\therefore \quad v_{final\ de\ la\ barra} = 0,126 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Si el campo eléctrico "E" es diagonal, entonces: "E" con "d" forma un ángulo determinado, luego:

$$V_F = \sqrt{\frac{2.E.d.\lambda}{\mu}.\cos\theta} = \sqrt{\frac{2.E.d.\lambda}{\mu}\cdot\frac{(\mu d)^{1/2}}{(\mu^2 d^2 + m^2)^{1/4}}}$$

15. Una partícula que tiene carga $q = +2{,}00\ \mu C$ y masa $m = 0{,}0100$ kg está conectada a una cuerda cuya longitud es $L = 1{,}50$ m y que a su vez está amarrada al punto pivote P que se ve en la figura P25.15. La partícula, la cuerda y el punto de pivote todos se encuentran sobre una mesa horizontal. La partícula se suelta desde el reposo cuando la cuerda forma un ángulo $\theta = 60{,}0°$ con un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 300$ V/m. Determine la rapidez de la partícula cuando la cuerda es paralela al campo eléctrico (punto a en la figura P25.15).

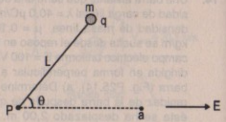


Figura P25.15

Resolución:

Datos: $q = +2{,}00\ \mu C$

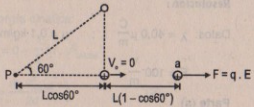
$L = 1{,}50$ m

$E = 300$ V/m

$m = 0{,}010$ kg

$\theta = 60°$

$v_f = ?$



Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{total} = \Delta E_k$$

$$F.d = \frac{1}{2}m\,(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow \quad q.E.L\,(1-\cos 60°) = \frac{1}{2}m\,(v_f^2)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2q.E.L(1-\cos 60°)}{m}} = v_{final}$$

Luego: $$v_{final} = \sqrt{\frac{2(2\times10^{-6})\times 300(1{,}50)(1-0{,}5)}{0{,}010}}$$

$$\therefore\ v_{final} = 0{,}300 \text{ m/s}$$

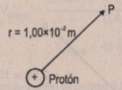
POTENCIAL ELÉCTRICO Y ENERGÍA POTENCIAL DEBIDOS A CARGAS PUNTUALES

Nota: a menos que se establezca de otro modo, supongo un nivel de referencia de potencia $V = 0 = r = \infty$.

16. a) Encuentre el potencial a una distancia de 1,00 cm de un protón. b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos que están a 1,00 cm y 2,00 cm de un protón? c) Repita las partes a) y b) para un electrón.

Resolución:

Parte (a)

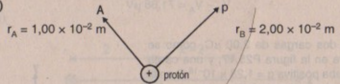


Sabemos que: $$V_p = \frac{k_e \cdot q_{p+}}{r}$$

$$\Rightarrow \quad V_p = \frac{8{,}99\times10^9\times(1{,}6\times10^{-19})}{1{,}00\times10^{-2}}$$

$$\therefore\ V_{p\,(\text{de un protón})} = 143{,}8\ \mu V$$

Parte (b)



Sabemos que: $$V_B = \frac{k_e \cdot q_{p+}}{r_B} = \frac{8{,}99\times10^9\times(1{,}6\times10^{-19})}{2{,}00\times10^{-2}}$$

$$\therefore\ V_B = 71{,}9\ \mu V$$

Además: $$V_A = \frac{k_e \cdot q_{p+}}{r_A} = \frac{8{,}99\times10^9\times(1{,}6\times10^{-19})}{1{,}00\times10^{-2}}$$

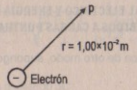
$$\therefore\ V_A = 143{,}8\ \mu V$$

En consecuencia:

$$V_B - V_A = 71{,}9\ \mu V - 143{,}8\ \mu V$$

$$\therefore\ V_B - V_A = -71{,}88\ \mu V$$

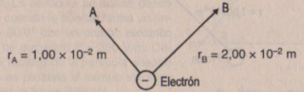
Parte (c)
Para un electrón:



Entonces: $V_p = \dfrac{k_e \cdot q_{e^-}}{r} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(-1{,}6\times10^{-19})}{1{,}00\times10^{-2}}$

$$\therefore\ V_p = -143{,}8\ \mu V$$

Parte (d)



Luego: $V_B - V_A = k_e . q_{e-} = \left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right)$

$$\Rightarrow V_B - V_A = 8{,}99\times10^9\times(-1{,}6\times10^{-19})\times\left(\frac{1}{2{,}00\times10^{-2}} - \frac{1}{1{,}00\times10^{-2}}\right)$$

$$\therefore\ V_B - V_A = 71{,}88\ \mu V$$

17. Dadas dos cargas de 2,00 μC, como se muestra en la figura P25.17, y una carga de prueba positiva $q = 1{,}28\times10^{-18}$ C en el origen, a) ¿cuál es la fuerza neta ejercida sobre q por las dos cargas de 2,00 C? ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2,00 μC? c) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2,00 μC?

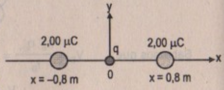


Figura P25.17

Resolución:

Dato: $q = 1{,}28\times10^{-18}$ C

Parte (a)
Como: "q" es equidistante a las 2 cargas de igual carga entonces:

$$F_e/q\ (Q_1) = F_e/q\ (Q_2)$$

$$\therefore\ F_{neta/q} = 0$$

Parte (b)

Como: $E = \dfrac{F}{q} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{F_{neta}}{q} = \dfrac{0}{q}$

$$\therefore\ E_{(origen)} = 0$$

Parte (c)

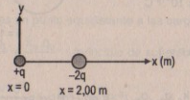
Sabemos que: $V_{origen} = \dfrac{k_e \cdot q_1}{r} = \dfrac{k_e \cdot q_2}{r}$

$$V_{origen} = \frac{8{,}99\times10^9\times\left(2{,}00\times10^{-6}\right)}{0{,}8}$$

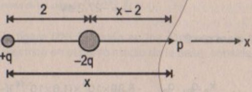
$$\therefore\ V_{origen} = 45\ k.V$$

18. Una carga +q se encuentra en el origen. Una carga –2q está en x = 2,00 m sobre eje x. ¿Para qué valor(es) finito(s) de x es a) el campo eléctrico cero?, b) el potencial eléctrico cero?

Resolución:



Parte (a)
Sea:



Sabemos que por el principio de superposición:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}/q + \vec{E}/{-2q}$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{k_e . q}{x^2} - \frac{k_e(2q)}{(x-2)^2} \qquad \text{(por condición)}$$

$$\Rightarrow\ (x-2)^2 - x^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 1{,}00\ m$$

En consecuencia:
Para: x = 1,00 m. El campo eléctrico es cero.

Parte (b)

Sabemos que: $V_p = \dfrac{k_e \cdot q}{x} \Rightarrow V_p = E.x$

Luego: $V_p = 0 \Rightarrow E = 0$

$\therefore$ "V_p" es cero, cuando "E" es cero para x = 1,00 m.

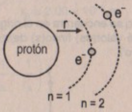
19. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno establece que el electrón puede existir sólo en ciertas órbitas permitidas alrededor del protón. El radio de cada órbita de Bohr es $r = n^2$ (0,0529 nm) donde n = 1, 2, 3, ... Calcule la energía potencial eléctrica de un átomo de hidrógeno cuando el electrón esta en a) la primera órbita permitida, n = 1; b) la segunda órbita permitida, n = 2; y c) cuando el electrón ha escapado del átomo ($r = \infty$). Exprese sus respuestas en electrón volts.

Resolución:

Datos: $r = n^2$ (0,0529 nm)

$q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$q_{e-} = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C



Parte (a)

Hallar U = ? para n = 1

Entonces:

$$U = \frac{k_e \cdot q_{p+} \cdot q_{e-}}{r} = \frac{8{,}99\times10^9 \times (1{,}6\times10^{-19})(-1{,}6\times10^{-19})}{(1)^2(0{,}0529\times10^{-9})}$$

$$\therefore \quad U = -27{,}2 \text{ eV}$$

Parte (b)

Hallar U = ? para n = 2

Entonces:

$$U = \frac{k_e \cdot q_{p+} \cdot q_{e-}}{r} = \frac{8{,}99\times10^9 \times (1{,}6\times10^{-19})(-1{,}6\times10^{-19})}{4(0{,}0529\times10^{-9})}$$

$$\therefore \quad U = -6{,}8 \text{ eV}$$

Parte (c)

Hallar U cuando $r = \infty$

Entonces:

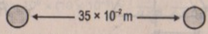
$$U = \frac{k_e \cdot q_{p+} \cdot q_{e-}}{r} = \frac{8{,}99\times10^9 \times (1{,}6\times10^{-19})(-1{,}6\times10^{-19})}{\infty}$$

$$\therefore \quad U = 0$$

20. Dos cargas puntuales, $Q_1 = +5{,}00$ nC y $Q_2 = -3{,}00$ nC, están separadas 35,0 cm. a) ¿Cuál es la energía potencial del par? ¿Cuál es la importancia del signo algebraico de su respuesta? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto a la mitad entre las cargas?

Resolución:

Sea:



$Q_1 = +5$ nC $\qquad Q_2 = -3{,}00$ nC

Parte (a)

$$U = \frac{k_e \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r} = \frac{8{,}99\times10^9 \times (5\times10)^{-9}(-3{,}00\times10)^{-9}}{35\times10^{-2}}$$

$$\therefore \; U(\text{par}) = 0{,}286 \; \mu J$$

El signo significa que la energía potencial eléctrica del sistema va disminuyendo conforme las cargas se alejan o están separadas cada vez más.

Parte (b)

Hallar V_p = ? donde "p" es un punto equidistante a las cargas.

Entonces: $V_p = \dfrac{k_e \cdot q_1}{r} + \dfrac{k_e \cdot q_2}{r}$ (principio de superposición)

$$\Rightarrow \quad V_p = \frac{8{,}99\times10^9}{17{,}5\times10^{-2}}(5\times10^{-9} - 3\times10^{-9})$$

$$\therefore \; V_{p\,(\text{a la mitad de las cargas})} = 1{,}03 \text{ V}$$

21. Las tres cargas de la figura P25.21 están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base, considerando $q = 7{,}00 \; \mu C$.

Resolución:

Datos: $q = 7{,}00 \; \mu C$

V_p = ?

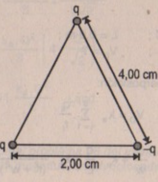
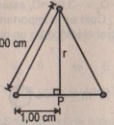


Figura P25.21

Sea:



Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{15}\ \text{cm}$$

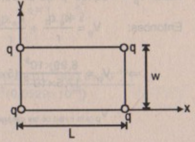
Luego por el principio de superposición: $V_p = \sum_{i=1}^{3} k_e \cdot \frac{q_i}{r_i}$

$$\Rightarrow \quad V_p = \frac{k_e q}{\sqrt{15}} + \frac{k_e(-q)}{1{,}00} + \frac{k_e(-q)}{1{,}00} \quad \Rightarrow \quad V_p = k_e . q\left(\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{2}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_p = 8{,}99 \times 10^9 \times (7 \times 10^{-6}) \times [-1{,}742 \times 10^{-2}]$$

$$\therefore \; V_p = -1{,}1\ \text{kV}$$

22. *Compare este problema con el problema 55 del capítulo 23.* Cuatro cargas puntuales idénticas ($q = +10{,}0\ \mu C$) están ubicadas en las esquinas de un rectángulo, como se muestra en la figura P23.55. Las dimensiones del rectángulo son $L = 60{,}0$ cm y $w = 15{,}0$ cm. Calcule la energía potencial eléctrica de la carga en la esquina inferior izquierda debida a las otras tres cargas.



Resolución :

Datos: $q = +10{,}0\ \mu C$; $L = 0{,}6$ m ;
$W = 0{,}15$ m ; $V_D = ?$

Por el principio de superposición:

$$V_D = k_e \sum_{i=1}^{3} \cdot \frac{q_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = k_e \cdot \frac{q}{w} + k_e \cdot \frac{q}{L} + k_e \cdot \frac{q}{(l^2 + w^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = k_e \cdot q\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{L} + \frac{1}{(l^2 + w^2)^{1/2}}\right)$$

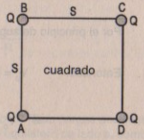
Reemplazando datos:

Resulta que: $V_D = 8{,}99 \times 10^9 \times (10 \times 10^{-6}) \times \left(\frac{1}{0{,}15} + \frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}618}\right)$

$$\therefore \; V_D = 0{,}89\ \text{MV}$$

23. Demuestre que la cantidad de trabajo necesario para agrupar cuatro cargas puntuales idénticas de magnitud Q en las esquinas de un cuadrado de lado s es $5{,}41\ k_e Q^2/s$.

Resolución :



Por demostrar que:

$$W_{\text{total en}\,\square} = 5{,}41\ k_e \cdot \frac{Q^2}{5}$$

$$W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} + W_{BD} + W_{AC}$$

Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{total\ (f.conserv)} = -\Delta U_{total} = \Delta E_k$$

Entonces:

$$W_{total} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{BD} + U_{DA} + U_{AC}$$

$$\Rightarrow W_{total} = \frac{k_e . Q^2}{S} + \frac{k_e . Q^2}{S} + \frac{k_e . Q^2}{S} + \frac{k_e . Q^2}{S} + \frac{k_e . Q^2}{S\sqrt{2}} + \frac{k_e . Q^2}{S\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow W_{total} = \frac{4\,k_e . Q^2}{S} + \frac{2\,k_e . Q^2}{S\sqrt{2}}$$

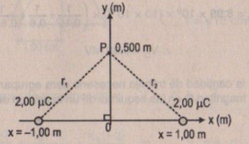
$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{k_e . Q^2}{S}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore W_{total} = 5{,}41\,\frac{k_e . Q^2}{S} \quad \text{Lqqd.}$$

24. *Compare este problema con el problema 18 del capítulo 23.* Dos cargas puntuales, cada una de 2,00 μC de magnitud, están colocadas en el eje x. Una está en x = 1,00 m y la otra está en x = −1,00. a) Determine el potencial eléctrico sobre y en y = 0,500 m. b) Calcule la energía potencial eléctrica de una tercera carga, de −3,00 μC, ubicada sobre el eje y en y = 0,500 m.

Resolución :

Parte (a)



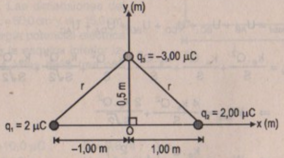
Por el principio de superposición: $V_p = \sum_{i=1}^{2} k_e \dfrac{q_i}{r_i}$

Entonces: $V_p = k_e \cdot \dfrac{q}{r_1} + k_e \cdot \dfrac{q}{r_2}$; pero $|r_1| = |r_2| = r$

$$\Rightarrow \quad V_p = \frac{2k_e.q}{r} = \frac{2\times(8{,}99\times10^9)(2\times10^{-6})}{\sqrt{1^2+(0{,}5)^2}}$$

$$\therefore\ V_p = 32{,}2\ \text{kV}$$

Parte (b)



Entonces:

$$U_{(0,5)} = \frac{k_e.q_1.q_3}{r} + \frac{k_e.q_2.q_3}{r}$$

$$\Rightarrow\ U_{(0,5)} = \frac{k_e.q_3}{r}(q_1+q_2) \quad \Rightarrow \quad U_{(0,5)} = \frac{8{,}99\times10^9\times(-3\times10^{-6})(4\times10^{-6})}{\sqrt{(1{,}00)^2+(0{,}5)^2}}$$

$$\therefore\ U_{(0,5)} = -96{,}5\times10^{-3}\ \text{J} \cong -96{,}5\ \text{mJ}$$

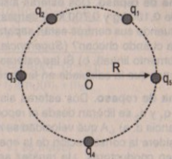
25. *Compare este problema con el problema 22 del capítulo 23.* Cinco cargas puntuales negativas iguales −q están colocadas simétricamente alrededor de un círculo de radio R. Calcule el potencial eléctrico en el centro del círculo.

Resolución :

Datos:

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = -q$

$V_o = ?$



Por el principio de superposición:

$$V_o = k_e.\sum_{i=1}^{5}\frac{q_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad V_o = \frac{k_e(-q)}{R} + \frac{k_e(-q)}{R} + \frac{k_e(-q)}{R} + \frac{k_e(-q)}{R} + \frac{k_e(-q)}{R}$$

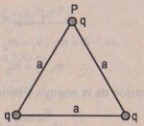
$$\therefore \quad V_o = -\frac{5k_e.q}{R}$$

26. *Compare este problema con el problema 17 del capítulo 23.* Tres cargas positivas iguales q están ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.17. a) ¿En qué punto, si es que existe alguno, en el plano de las cargas el potencial eléctrico es cero? ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto P debido a las dos cargas en la base del triángulo?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que por el principio de superposición:



$$V_{total} = k_e \cdot \sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad V_{total} = \frac{k_e.q}{r_1} + \frac{k_e.q}{r_2} + \frac{k_e.q}{r_3} \quad \Rightarrow \quad V_{total} = k_e.q\left(\frac{r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3}{r_1.r_2.r_3}\right)$$

Para que el potencial total de las cargas sea cero, la distancia de alguna carga al punto donde se quiera hallar el potencial total, debe estar en el infinito.

Parte (b)

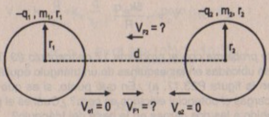
Por el principio de superposición:

$$V_P = \frac{k_e.q}{a} + \frac{k_e.q}{a} \quad \therefore \; V_P = \frac{2k_e.q}{a}$$

27. Problema de repaso. Dos esferas aislantes con radios de 0,300 cm y 0,500 cm, masas de 0,100 kg y 0,700 kg y cargas de –2,00 μC y 3,00 μC se liberan desde el reposo cuando sus centros están separados 1,00 m. a) ¿A qué velocidad se mueve cada una cuando chocan? (*Sugerencia:* considere la conservación de la energía y la del momento lineal). b) Si las esferas fuesen conductoras, ¿la rapidez sería mayor o menor que la calculada en la parte a)? Explique.

28. Problema de repaso. Dos esferas aislantes con radios r_1 y r_2, masa m_1 y m_2 y cargas $-q_1$ y q_2 se liberan desde el reposo cuando sus centros están separados por una distancia d. a) ¿A qué velocidad se mueve cada una cuando chocan? (*Sugerencia:* considere la conservación de la energía y la del momento lineal). b) Si las esferas fuesen conductoras, ¿la rapidez sería mayor o menor que la calculada en la parte a)?

Resolución 27 y 28:



Parte (a)

Por la conservación del momento lineal:

$$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = m_1 . v_1 - m_2 . v_2$$

$$\therefore \quad m_1 v_1 = m_2 . v_2 \qquad \text{... (1)}$$

Por la conservación de la energía y considerando despreciable la gravedad:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad U_{inicial} = U_{final} + E_{K\,final}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{k_e.q_1.q_2}{d} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{k_e.q_1.q_2}{r_1+r_2} \qquad \text{... (2)}$$

Reemplazando: (1) en (2)

$$\Rightarrow \quad k_e\,q_1 . q_2\left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2^2v_2^2}{m_1^2}\right) + \frac{1}{2}m_2 . V_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_e q_1.q_2}{d(r_1+r_2)}(d-(r_1+r_2)) = \frac{1}{2}m_2 . v_2^2\left(\frac{m_2+m_1}{m_1}\right)$$

En consecuencia:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m_1.k_e(q_1)(q_2)[d-(r_1+r_2)]}{d(r_1+r_2)(m_2)(m_1+m_2)}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2.k_e(q_1)(q_2)[d-(r_1+r_2)]}{d(r_1+r_2)(m_1)(m_1+m_2)}}$$

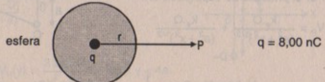
Parte (b)

Si las esferas fuesen conductoras entonces:

V_2 es mayor y V_1 es mayor

29. Un pequeño objeto esférico tiene una carga de 8,00 nC. ¿A qué distancia desde el centro del objeto el potencial es igual a 100 V? ¿50,0 V? ¿El espaciamiento de las equipotenciales es proporcional al cambio en el potencial?

Resolución :



* Hallando r = ? cuando $V_P = 100$ V (dato)

$$\text{Entonces: } 100 = \frac{k_e.q}{r} = \frac{8{,}99\times10^9\times(8\times10^{-9})}{r}$$

$$\therefore \quad r = 0{,}720 \text{ m}$$

Hallando r = ? cuando $V_P = 50{,}0$ V (dato)

Entonces:

$$50 = \frac{k_e.q}{r} = \frac{8{,}99\times10^9\times(8\times10^{-9})}{r}$$

$$\therefore \quad r = 1{,}44 \text{ m}$$

Hallando r = ? cuando $V_P = 25{,}0$ V (dato)

$$\text{Entonces:} \quad 25{,}0 = \frac{k_e.q}{r} = \frac{8{,}99\times10^9\times(8\times10^{-9})}{r}$$

$$\therefore \quad r = 2{,}88 \text{ m}$$

"No". Los radios de los equipotenciales son inversamente proporcionales al potencial.

30. Dos cargas puntuales de igual magnitud se localizan a lo largo del eje y a distancias iguales sobre y debajo del eje x, como se muestra en la figura P25.30. a) Dibuje una gráfica del potencial en puntos a lo largo del eje x sobre el intervalo $-3a < x < 3a$. Debe graficar el potencial en unidades de k_eQ/a. b) Deje que la carga localizada en $-a$ sea negativa y grafique el potencial a lo largo del eje y sobre el intervalo $-4a < y < 4a$.

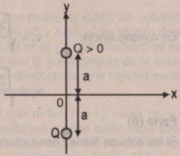
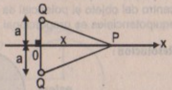


Figura P25.30

Resolución:

Parte (a)



Por el principio de superposición:

$$V_P = \frac{k_e.Q}{(a^2+x^2)^{1/2}} + \frac{k_e.Q}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\therefore\ V_P(x) = 2k_e.Q\,\frac{1}{(a^2+x^2)^{1/2}}\ ;\ -3a < x < 3a \Leftrightarrow a > 0$$

Recordando: (empleando introd. al análisis matemático)

$V'(x) > 0$ si: $\forall\ -3a < x < 0$ (estrictamente creciente)

$V'(x) < 0$ si: $\forall\ 0 < x < 3a$ (estrictamente decreciente)

Ceros de $V'(x)$ en $x = 0 \Rightarrow V(0) = \dfrac{k_eQ}{a}$

Además:

$V''(x) > 0$ si: $\forall\ -3a < x < -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \cup \dfrac{a}{\sqrt{2}} < x < 3a$ (cóncava hacia arriba)

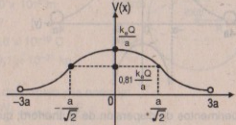
$V''(x) < 0$ si: $\forall\ -\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (cóncava hacia abajo)

Puntos de inflexión: en: $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \pm 0{,}81\,\dfrac{k_eQ}{a} = V(x)$

En conclusión: V(x) es simétrica en y(+)

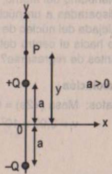
$$V(0) = \frac{k_eQ}{a}\ ;\ V(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}) = \pm 0{,}81\,\frac{k_eQ}{a}$$

Graficando:



Parte (b)

Sea:



Por el principio de superposición:

$$V_p = \frac{k_e.Q}{(y-a)} + \frac{k_e(-Q)}{(y+a)}$$

$$\therefore\ V_P(y) = \frac{2a\,k_e.Q}{y^2-a^2}\ ;\ -4a < y < 4a$$

Recordando: (empleando introd. al análisis matemático)

$V'(y) > 0$ si: $\forall\ -4a < y < 00$ (estrictamente creciente)

$V'(y) < 0$ si: $\forall\ 0 < y < 4a$ (estrictamente decreciente)

Ceros de $V'(y)$ en $y = 0 \Rightarrow V(0) = -\dfrac{k_eQ}{a}$

Además:

$V''(y) > 0$ si: $\forall\, y \in]-4a; -a[\ \cup\ ]a; 4a[$ (cóncava hacia arriba)

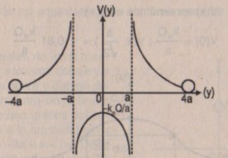
$V''(y) < 0$ si: $\forall\, y \in]-a; a[$ (cóncava hacia abajo)

Puntos de inflexión: en $y = \pm a \Rightarrow V(y) = \pm\infty$ (asíntota vertical)

En conclusión: V(y) es simétrica en la dirección de V(y)

$V(y = \pm a)$ = asíntota vertical

Graficando:

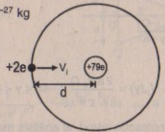


31. En los famosos experimentos de dispersión de Rutherford, que llevaron al modelo planetario del átomo, las partículas alfa (carga +2e, masa = $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg) fueron disparadas a un núcleo de oro (carga +79e). Una partícula alfa, al principio muy alejada del núcleo de oro, se dispara a una velocidad de $2{,}00 \times 10^7$ m/s directamente hacia el centro del núcleo. ¿Qué tanto se acerca la partícula alfa a este centro antes de regresarse? Suponga que el núcleo de oro permanece estacionario.

Resolución:

Datos: Masa (+2e) = $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg

$v_i = 2{,}00 \times 10^7$ m/s



Sabemos que: $+\Delta U_{sistema} = \Delta E_{K\ sistema}' = W_{total\ sistema}$

Entonces: $U_{inicial} = \dfrac{k_e(2e)(79e)}{d}$

$U_{final} = 0$

Luego: $\dfrac{k_e(2e)(79e)}{d} = \dfrac{1}{2} m_{(2e)} \cdot v_i^2$

$$\Rightarrow \frac{2(k_e)(158)(e)^2}{m_i v_i^2} = d \ \Rightarrow \frac{2(8{,}99\times10^9)(158)(1{,}6\times10^{-19})^2}{6{,}64\times10^{-27}(2{,}00\times10^7)^2} = d$$

$$\therefore |d| = 27{,}4 \times 10^{-15}\ \text{m} = 27{,}4\ \text{fm}$$

32. Un electrón parte desde el reposo a 3,00 cm del centro de una esfera aislante cargada de manera uniforme cuyo radio es de 2,00 cm y su carga total es de 1,00 nC. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando llega a la superficie de la esfera?

Resolución:

Datos: $Q_{total} = 1{,}00$ nC

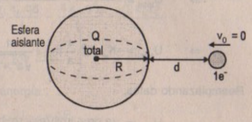
$R = 2{,}00 \times 10^{-2}$ m

$d = 1{,}00 \times 10^{-2}$ m

$v_{Fe^-} = ?$

$q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$me^- = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg



Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{F\ eléctrica} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \frac{k_e |Q||q_{e^-}|}{(R+d)^2} = \frac{1}{2} m_e - v_f^2 e^- - 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2k_e.Q.|q_{e^-}|}{m_{e^-}(R+d)^2}} = v_{Fe^-}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2(8{,}99\times10^9)(1{,}00\times10^{-9})(1{,}6\times10^{-19})}{9{,}1\times10^{-81}(3\times10^{-2})^2}} = v_{Fe^-}$$

$$\therefore\ v_{final}(e^-) = 59{,}3\ \text{Mm/s}$$

33. Calcule la energía requerida para conformar el arreglo de cargas que se muestra en la figura P25.33, donde a = 0,200 m, b = 0,400 m y q = 6,00 μC.

Resolución:

Datos: a = 0,200 m

b = 0,400 m

q = 6,00 μC

$U_{total} = ?$

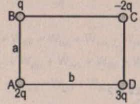


Figura 25.33

La energía requerida para que las cargas estén en la posición mostrada y mantengan dicha posición equidistantes entre ellas es:

$$U_{total} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} + U_{BD} + U_{CA}$$

$$\Rightarrow U_{total} = \frac{k_e(q)(2q)}{a} + \frac{k_e(q)(-2q)}{b} + \frac{k_e(-2q)(3q)}{a} + \frac{k_e(3q)(2q)}{b} + \frac{k_e(q)(3q)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{k_e(2q)(-2q)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \quad U_{total} = \frac{-k_e.q^2.4}{a} - \frac{-k_e.q^2.4}{b} - \frac{k_e.q^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

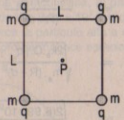
$$\Rightarrow \quad U_{total} = -K_e . q^2\left[\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

Reemplazando datos:

$$U_{total} = -(8{,}99 \times 10^9)(6 \times 10^{-6})^2\left[\frac{4}{0{,}2}+\frac{4}{0{,}4}+\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$$

$$\therefore \quad U_{total} = -3{,}96 \text{ J}$$

34. Cuatro partículas idénticas tienen cada una carga q y masa m. Se liberan desde el reposo en los vértices de un cuadro de lado L. ¿Qué tan rápido se mueve cada carga cuando su distancia desde el centro del cuadro se duplica?

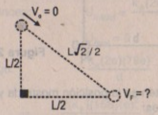


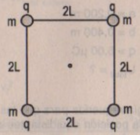
Resolución:

Datos: $V_{o\,(c/carga)} = 0$ $\qquad v_{final\,(c/carga)\,en\,p} = ?$

$d(q \to p) = 2d(\text{original})$

Finalmente:





Sabemos que: $\quad U_{total\ inicial} = \dfrac{4.k_e.q^2}{L} + \dfrac{k_e.q^2}{L\sqrt{2}}$

Entonces: $\quad U_{total\ final} = \dfrac{k_e.q^2}{2L\sqrt{2}} + \dfrac{4.k_e.q^2}{2L}$

Luego:

$$\Delta U_{total} = \frac{2.k_e.q^2}{L} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{k_e.q^2}{L} - \frac{4.k_e.q^2}{L} - \frac{\sqrt{2}\,k_e.q^2}{L}$$

$$\therefore \Delta U_{total} = -2{,}707\ \frac{k_e.q^2}{L}$$

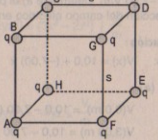
Luego por la conservación de la energía:

$$-\Delta U_{total} = \Delta E_{K\ total}$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}707 . \frac{k_e.q^2}{L} = 4\left(\frac{1}{2}m.v_q^2\right)$$

Entonces $\Rightarrow \quad v_q = \sqrt{\dfrac{2{,}707.k_e.q^2}{2.mL}} \qquad \therefore v_{cada\ carga} = 1{,}16\, q\sqrt{\dfrac{k_e}{mL}}$

35. ¿Cuánto trabajo se requiere para juntar ocho cargas puntuales idénticas, cada una de magnitud q en las esquinas de un cubo de lado s?



Resolución:

Sabemos que:

$$W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EF} + W_{FA} + W_{AH} + W_{HC} + W_{HE} + W_{FG} + W_{BG} + W_{GD} + W_{AC} + W_{BH} + W_{AG} + W_{BF} + W_{HF} + W_{AE} + W_{HD} + W_{EC} + W_{BD} + W_{CG} + W_{GE} + W_{FD} + W_{AD} + W_{FC} + W_{GH} + W_{BE}$$

Pero:

$$W_{AB} \neq W_{BC} \neq W_{CD} \neq W_{DE} \neq W_{EF} \neq W_{FA} \neq W_{AH} \neq W_{HC} \neq W_{HE} \neq W_{FG} \neq W_{BG} \neq W_{GD} = \frac{k_e.q^2}{s}$$

y $\quad W_{AC} = W_{BH} = W_{AG} = W_{BF} = W_{HF} = W_{AE} = W_{HD} = W_{EC} = W_{BD} = W_{CG} = W_{GE} =$

$$W_{FD} = \frac{k_e.q^2}{s\sqrt{2}}$$

Además: $W_{BE} = W_{AD} = W_{FG} = W_{GH} = \dfrac{k_e.q^2}{s\sqrt{3}}$

Como: $U_{\text{inicial sistema}} = 0$

Entonces por el teorema del trabajo y la energía:

$$\Delta U = W_{total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{total del sistema}} = 12\,\frac{k_e.q^2}{s} + \frac{12k_e.q^2}{s\sqrt{2}} + 4\,\frac{k_e.q^2}{s\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{total del sistema}} = \frac{k_e.q^2}{s}\left[12+6\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right] = 22{,}8\,\frac{k_e.q^2}{s}$$

OBTENCIÓN DEL VALOR DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

36. El potencial en una región entre x = 0 y x = 6,00 m es V = a + bx, donde a = 10,0 V y b = –7,00 V/m. Determine a) el potencial en x = 0,300 m y 6,00 m, y b) la magnitud y dirección del campo eléctrico en x = 3,00 m y 6,00 m.

Resolución:

Datos: $V(x) = 10{,}0 + (-7{,}00)\,x \qquad \forall\, x \in [0;\, 6{,}00]\ \text{m}$

Parte (a)

$V(0{,}0\ \text{m}) = 10{,}0 - 7{,}00\,(0) = 10{,}0\ \text{V}$

$V(3{,}00\ \text{m}) = 10{,}0 - 7{,}00\,(3{,}00) = -11{,}0\ \text{V}$

$V(6{,}00\ \text{m}) = 10{,}0 - 7{,}00\,(6{,}00) = 32{,}0\ \text{V}$

Parte (b)

Sabemos que: $dV = -E ds = -E_x \,.\, dx$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV(x)}{dx} = -E_x$$

Entonces: $\dfrac{d[10-7x]}{dx} = -E_x \qquad \therefore\ \vec{E}_x = 7\,\hat{i}\,\dfrac{V}{m}$

En consecuencia: $\vec{E}_x$ en $x = 0$ es $\dfrac{7\,V}{m}$; es cte $\forall\, x$

Para: $x = 3{,}00\ \text{m} \qquad E_x = 7\dfrac{V}{m}$

Para: $x = 6{,}00\ \text{m} \qquad E_x = 7\dfrac{V}{m}$

37. Sobre cierta región del espacio, el potencial eléctrico es $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. Encuentre las expresiones para las componentes *x, y* y *z* del campo eléctrico sobre esa región. ¿Cuál es la magnitud del campo en el punto P, el cual tiene coordenadas (1; 0; –2) m?

Resolución:

Datos: $V(x,y,z) = 5x - 3x^2y + 2yz^2$

$E(x) = ?\ ;\ E(y) = ?\ ;\ E(z) = ?$

$E(1;\,0;\,-2)\ \text{m} = ?$

Sabemos que: $E(x) = \dfrac{-\partial V}{\partial x}$

Entonces: $E(x) = \dfrac{-\partial}{\partial x}\,[5x - 3x^2y + 2yz^2] = (-5 + 6xy)\ \hat{i}\ \dfrac{V}{m}$

Por otro lado: $E(y) = \dfrac{-\partial V}{\partial y}$

$$\Rightarrow \quad E(y) = \frac{-\partial}{\partial y}\,[5x - 3x^2y + 2yz^2] = (3x^2 - 2z^2)\ \hat{j}\ \frac{V}{m}$$

Por último: $E(z) = \dfrac{-\partial V}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad E(z) = \frac{-\partial}{\partial z}\,[5x - 3x^2y + 2yz^2] = -4yz\ \hat{k}\ \frac{V}{m}$$

En consecuencia:

$$\vec{E}(x) = (-5 + 6xy)\ \hat{i}\ \frac{V}{m}\ ;\ \vec{E}(y) = (3x^2 - 2z^2)\ \hat{j}\ \frac{V}{m};\ \vec{E}(z) = -4xy\ \hat{k}\ \frac{V}{m}$$

La magnitud en (1; 0; –2) m será:

$$\vec{E}(x,y,z) = -5\hat{i} - 5\hat{j} + 0\hat{k}$$

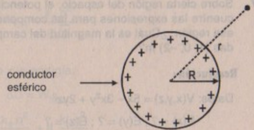
$$\therefore\ \vec{E}(x,y,z) = |\vec{E}(1;\,0;\,-2)| = 5\sqrt{2} = 7{,}08\frac{V}{m} = 7{,}08\frac{N}{C}$$

38. El potencial eléctrico dentro de un conducto esférico cargado de radio R está dado por $V = k_e$. Q/R y en el exterior el potencial está dado por $V = k_eQ/r$. Utilizando $E_r = dV/dr$, obtenga el campo eléctrico a) en el interior y b) afuera de esta distribución de carga.

Resolución:

Datos: $V_{(interior)} = k_e \cdot \dfrac{Q}{r}$

$V_{(exterior)} = k_e \cdot \dfrac{Q}{r}$



Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{dV}{dr} = -E_r$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}(k_e \cdot \frac{Q}{R}) = \frac{d}{dr} + \left(\frac{k_e \cdot q}{r}\right) = -E_r$$

$$\therefore \quad E(r) = \frac{d}{dr}\frac{k_eQ}{R} = 0 \qquad \text{(característica de un conductor)}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{dV}{dr} = -Er_{\ (exterior)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}(k_e \cdot \frac{Q}{r}) = -\frac{k_eQ}{r^2} = Er \quad \Rightarrow \quad \frac{k_eQ}{r^2} = E(r)$$

$$\therefore \quad E_{r\ (exterior)} = \frac{k_eQ}{r^2}$$

39. En el ejemplo 25.7 se demostró que el potencial en un punto P a una distancia a sobre un extremo de una barra de longitud ℓ cargada uniformemente que se encuentra a lo largo del eje x es:

$$V = \frac{k_e Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a}\right)$$

Utilice este resultado para obtener la expresión correspondiente a la componente y del campo eléctrico en P. (*Sugerencia:* sustituya *a* con *y*).

Resolución:

Datos: $V(y) = \dfrac{k_e.Q}{\ell}.\ln\left[\dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2}}{y}\right]$

$E(y) = ?$

Sabemos que: $\dfrac{dV}{dy} = -E(y)$

Entonces: derivamos V con respecto de y

$$\frac{dV}{dy} = (\frac{k_e.Q}{\ell})\frac{d}{dy}(\ln\left[\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2}\right]) - (\frac{k_e.Q}{\ell})\frac{d}{dy}[\ln(y)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dy} = \frac{k_e.Q}{\ell}\left[\frac{y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}(\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2})}\right] - (\frac{k_e.Q}{\ell}) \times (\frac{1}{y})$$

$$\Rightarrow \quad E(y) = \frac{k_e.Q}{\ell y} - \frac{k_e.Q_y}{\ell}\left[\frac{1}{\sqrt{\ell^2 + y^2}\ (\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2})}\right]$$

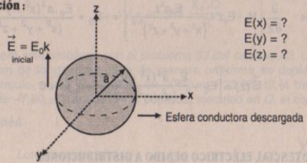
$$\therefore \quad E(y) = \frac{k_e.Q}{\ell y}\left[1 - \frac{y^2}{\sqrt{\ell^2 + y^2}\ (\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2})}\right]$$

40. Cuando una esfera conductora descargada de radio a se coloca en el origen de un sistema de coordenadas *xyz* que está en un campo eléctrico inicialmente uniforme $E = E_0 k$, el potencial eléctrico resultante es:

$$V(x, y, z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

para los puntos afuera de la esfera, donde V_0 es el potencial eléctrico (constante) en el conductor. Utilice esta ecuación para determinar las componentes *x, y* y *z* del campo eléctrico resultante.

Resolución:



$E(x) = ?$
$E(y) = ?$
$E(z) = ?$

Datos:

$$V_{result}(x, y, z) = V_o + E_o z + \frac{E_0.a^3 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Hallando $\vec{E}(x) = ?$

Sabemos que: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -E(x)$ (derivada parcial)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[V_o - E_0.z\frac{E_0.a^3z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = -\frac{3E_o.a^3z.x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \ \vec{E}(x) = \frac{3E_o.a^3z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.x\hat{i} \ \text{N/C}$$

Hallando $\vec{E}(y) = ?$

Sabemos que: $\dfrac{\partial V}{\partial y} = -E(y)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[V_o - E_0.z\frac{E_0.a^3z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = -\frac{3E_o.a^3z \ \ y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \ \vec{E}(y) = \frac{3E_o.a^3z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.y \ \hat{j} \ \text{N/C}$$

Hallando $\vec{E}(z) = ?$

Sabemos que: $\dfrac{\partial V}{\partial z} = -E(z)$

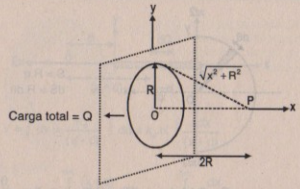
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[V_o - E_oz + \frac{E_oa^3z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = -E_0 + \frac{E_0.a^3(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \quad \vec{E}(z) = \left[E_0 - \frac{E_0.a^3(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]\hat{k} \ \text{N/C}$$

POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A DISTRIBUCIONES DE CARGAS CONTINUAS

41. Considere un anillo de radio *R* con carga total *Q* distribuida uniformemente sobre su perímetro. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto en el centro del anillo y un punto sobre su eje a una distancia 2*R* del centro?

Resolución :



$$\Delta V = V_P - V_o$$

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{k_e.dq}{\sqrt{x^2+R^2}} \quad \Rightarrow \quad V = \int dV = \dfrac{k_e}{\sqrt{x^2+R^2}}\int dq$

$$\therefore \ V(x) = \frac{k_e.Q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Luego: $V_{(0)} = \dfrac{k_e.Q}{R}$

$V_{(0)} = \dfrac{k_e.Q}{R\sqrt{5}}$

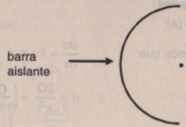
Entonces: $V_P - V_o = \dfrac{k_e.Q}{R}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5} - 1\right)$

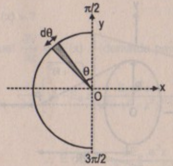
$$\therefore \ \Delta V = -0{,}553.\frac{k_e.Q}{R}$$

42. *Compare este problema con el problema 33 del capítulo 23.* Una barra aislante de 14,0 cm de longitud cargada de manera uniforme se dobla en la forma de un semicírculo, como se muestra en la figura P23.33. Si la barra tiene una carga total de –7,50 μC, encuentre el potencial eléctrico en *O*, el centro del semicírculo.

Resolución :

Datos: Long. barra = 0,14 m
$Q_{total} = -7{,}5\ \mu C$
$V_o = ?$





$$S = R.q \;\Rightarrow\; dS = R.d\theta$$

Sabemos que: $\pi.R = 0{,}14\ m$; $dQ = \lambda R d\theta$; $\lambda = \dfrac{\theta}{\pi.R}$

Por otro lado: $dV = \dfrac{k_e}{R}.\,dQ = \dfrac{k_e}{R}(\lambda.R.d\theta)$

$$\Rightarrow\; V_{(0)} = \int dV = k_e.\lambda \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta$$

$$\therefore\; V_{(0)} = k_e.\lambda.\pi$$

Luego: $V_{(0)} = k_e \cdot \dfrac{\theta}{\pi.R} \cdot \pi = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(-7{,}5\times10^{-6})\times(3{,}1416)}{0{,}14}$

$$\therefore\; V_{(0)} = -1{,}51\times10^3\ V$$

43. Una barra de longitud *L* (Fig. P25.43) se encuentra a lo largo del eje x con su extremo izquierdo en el origen y tiene una densidad de carga no uniforme $\lambda = \alpha x$ (donde α es una constante positiva). a) ¿Cuáles son las unidades de α? b) Calcule el potencial eléctrico en *A*.

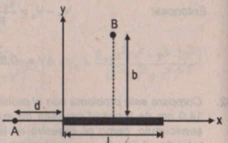


Figura P25.43

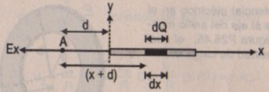
Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{dq}{dx} = \lambda = \alpha.x \;\Rightarrow\; Q = \dfrac{\alpha}{2}x^2$

$$\therefore\; \alpha = \frac{2Q}{x^2} = \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

Parte (b)



Sabemos que: $V = \int dv = \dfrac{k_e}{(x+d)} \int dq = k_e.\alpha \int \dfrac{xdx}{(x+d)}$

$$\Rightarrow\; V_{(A)} = k_e.\alpha \int_d^{d+L} \frac{(x+d)}{(x+d)}\,dx - k_e\alpha d \int_d^{d+L} \frac{dx}{(x+d)}$$

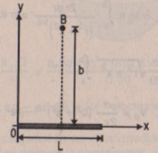
$$\Rightarrow\; V_A = k_e\alpha x\,\Big|_d^{d+L} - k_e.\alpha\, d\ln(\alpha+d)\,\Big|_d^{d+L}$$

$$\therefore\; V_A = k_e.\alpha\left[L - d\ln\left(1 + \frac{L}{2d}\right)\right]$$

44. Para el arreglo descrito en el problema anterior calcule el potencial eléctrico en un punto *B* que está sobre el bisector perpendicular de la barra a una distancia *b* encima del eje *x*.

Resolución :

$V_B = ?$



Sabemos que: $dV = \dfrac{k_e}{b}.\,dq$

$$\Rightarrow\; dV = \frac{k_e}{b}.\,(\alpha\, xdx)$$

$$\Rightarrow\; V_B = \int dV = \frac{k_e}{b}\alpha \int_0^L x\,dx$$

$$\therefore\; V_B = \frac{k_e\alpha}{b}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L = \frac{k_e\alpha L^2}{2b}$$

45. Calcule el potencial eléctrico en el punto *P* sobre el eje del anillo mostrado en la figura P25.45, el cual tiene una densidad de carga uniforme σ.

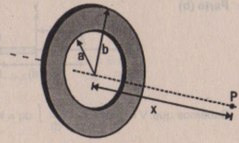
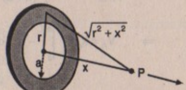


Figura P25.45

Resolución :

Datos:
Densidad de carga uniforme = σ
$V_P = ?$



Sabemos que:

$$dV = \frac{k_e.dq}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+r^2}}(2\pi.r\ dr)$$

$$\Rightarrow \quad \int dV = \sigma\, k_e\, \pi \int_a^b \frac{2r\,dr}{(r^2+x^2)^{1/2}} = \sigma\, k_e\, \pi \int_a^b \frac{d(r^2+x^2)}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_P = \frac{\sigma}{2\theta}\sqrt{r^2+x^2}\,\Big|_a^b$$

$$\therefore\ V_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[(b^2+x^2)^{1/2} - (a^2+x^2)^{1/2}\right]$$

46. Un alambre de longitud finita, que tiene una densidad de carga lineal uniforme λ, se dobla en la forma indicada en la figura P25.46. Encuentre el potencial eléctrico en el punto *O*.

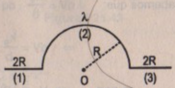


Figura P25.46

Resolución :

Dato: $V_o = ?$

Sabemos que: $V_o = k_e.\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i}$ (principio de superposición)

Por otro lado:

$$V_2 = \frac{k_e}{R}\int dq = \frac{k_e}{R}\,Q = \frac{k_e}{R}(\pi.R\lambda) = \pi.k_e.\lambda$$

Como:

$$V_1 = V_3 = k_e\frac{Q}{R} = \frac{k_e}{R}(2R\lambda) = 2k_e.\lambda$$

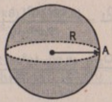
En consecuencia:

$$V_{\text{total en (0)}} = 2(2k_e\lambda) + \pi.k_e\lambda = 7{,}1416\ k_e\lambda$$

POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UN CONDUCTOR CARGADO

47. ¿Cuántos electrones deberían extraerse de un conductor esférico, inicialmente descargado, de 0,300 m de radio, para producir un potencial de 7,50 kV en la superficie?

Resolución :



Datos: $R = 0{,}300$ m
$V_A = 7{,}5$ kV
$n_e- = ?$

Sabemos que por simetría:

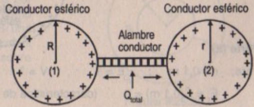
$$V_A = \frac{k_e.Q}{R} = \frac{8{,}99\times10^9\times(n)(1{,}6\times10^{-19})}{0{,}30}$$

$$\therefore\ n_e- = 1{,}56\times10^{12}\ \text{electrones}$$

48. Dos conductores esféricos cargados se conectan mediante un largo alambre conductor, y una carga de 20,0 μC se pone en la combinación. a) Si una esfera tiene un radio de 4,00 cm y el radio de la otra es de 6,00 cm, ¿cuál es el campo eléctrico cerca de la superficie de cada esfera? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?

Resolución :

Datos:
$R = 6{,}00\times10^{-2}$ m
$R = 4{,}00\times10^{-2}$ m
$Q_{total} = 20{,}0\times10^{-6}\ \mu C$



Parte (a)

Puesto que las esferas están conectadas por un alambre conductor, deben estar a un mismo potencial. Entonces:

$$V = \frac{k_e.Q_1}{R} = \frac{k_e.Q_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{R} = \frac{Q_2}{r}$$

Como: $Q_1 + Q_2 = Q_{total} = 20{,}0 \times 10^{-6}$ C

$\Rightarrow$ $(20 \times 10^{-6} - Q_2)(4{,}00 \times 10^{2}) = Q_2\,(6{,}00 \times 10^{-2})$

Entonces: $Q_2 = 8{,}00$ mC $\wedge$ $Q_1 = 12{,}00$ mC

Luego:

$$E_1 = \frac{k_e.Q_1}{R^2}\,\hat{r} = \frac{(8{,}99\times10^9)\,(8\times10^{-6})}{(6{,}00\times10^{-2})^2}\,\hat{r} = 19{,}98 \text{ M N/C } \hat{r}$$

$$E_2 = \frac{k_e.Q_2}{r^2}\,\hat{r} = \frac{(8{,}99\times10^9)\,(12\times10^{-6})}{(4{,}00\times10^{-2})^2}\,\hat{r} = 67{,}4 \text{ M N/C } \hat{r}$$

Parte (b)

$$V_1 = \frac{k_e.Q_1}{R} = \frac{(8{,}99\times10^9)\,(8\times10^{-6})}{6{,}00\times10^{-2}} = 1{,}2 \text{ MV}$$

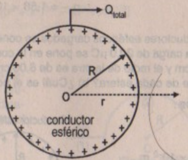
$$V_2 = \frac{k_e.Q_2}{r} = \frac{(8{,}99\times10^9)\,(12\times10^{-6})}{4{,}00\times10^{-2}} = 2{,}7 \text{ MV}$$

49. Un conductor esférico tiene un radio de 14,0 cm y una carga de 26,0 μC. Calcule el campo eléctrico y el potencia eléctrico en a) $r = 10{,}0$ cm; b) $r = 20{,}0$ cm; y c) $r = 14{,}0$ cm del centro.

Resolución:

Datos: $Q_{total} = 26$ μC

$R = 0{,}14$ m



Parte (a)

Para: $r = 0{,}1$ m ; $E = ?$; $V = ?$

$E_r = E(0{,}1 \text{ m}) = 0$ (característica de un conductor)

Por otro lado: $\dfrac{Q_{total}}{R^3} = \dfrac{Q'}{r^3} \Rightarrow Q' = \dfrac{Q_{total}\times r^3}{R^3}$

Luego: $V = k_e\,\dfrac{Q'}{r} = \dfrac{k_e\,Q_{total}\times r^3}{R^3} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(26\times10^{-6})(0{,}1)^2}{(0{,}14)^3}$

$\therefore V = 0{,}167$ MV

Parte (b)

Para: $r = 20{,}0$ cm ; $E = ?$; $V = ?$

Sabemos que: $E_{(r)} = \dfrac{k_e.Q}{r^2} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(26\times10^{-6})}{(0{,}2)^2}$

$\therefore E_{(r)} = 5{,}85$ M N/C $\hat{r}$

Por otro lado: $V_{(r)} = \dfrac{k_e.Q}{r} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(26\times10^{-6})}{(0{,}2)}$

$\therefore V_{(r)} = 1{,}17$ MV

Parte (c)

Para: $r = 0{,}14$ m ; $E_r = ?$; $V = ?$

Sabemos que: $E_{(r)} = \dfrac{k_e.Q}{r^2} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(26\times10^{-6})}{(0{,}14)^2}$

$\therefore E_{(r)} = 11{,}9$ M N/C $\hat{r}$

Por otro lado: $V_{(r)} = \dfrac{k_e.Q}{r} = \dfrac{8{,}99\times10^9\times(26\times10^{-6})}{0{,}14}$

$\therefore V_{(r)} = 1{,}67$ MV

50. Dos cascarones conductores esféricos y concéntricos de radios $a = 0{,}400$ m y $b = 0{,}500$ m están conectados por medio de un alambre delgado, como se muestra en la figura P25.50. Si una carga total $Q = 10{,}0$ μC se pone en el sistema, ¿cuánta carga queda sobre cada esfera?

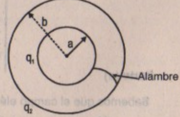


Figura P25.50

Resolución:

Datos: $Q_{total} = q_1 + q_2 = 10{,}0\ \mu C$
$a = 0{,}400\ m \qquad b = 0{,}500\ m$
$q_1 = ? \qquad q_2 = ?$

Sabemos que en un cascarón conductor esférico la carga radica en su superficie, luego:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = \sigma \cdot 4\pi \cdot a^2 \\ q_2 = \sigma \cdot 4\pi \cdot b^2 \end{array}\right\} (+)$$

$$q_1 + q_2 = \sigma \cdot 4\pi\,[a^2 + b^2]$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = 10{,}0 \times 10^{-6} = \sigma \cdot (4\pi)\,[(0{,}4)^2 + (0{,}5)^2]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{10{,}0\times10^{-6}}{(4\pi)(41\times10^{-2})}$$

$$\therefore \quad \sigma = 1{,}94 \times 10^{-6}\ c/m^2$$

Luego: $q_1 = \sigma.4\pi.a^2 = 1{,}94 \times 10^{-6} \times (4\pi) \times (4 \times 10^{-1})^2$

$$\therefore \quad q_1 = 3{,}9 \times 10^{-6}\ C = 3{,}9\ \mu C$$

$$q_2 = \sigma.4\pi.b^2 = 1{,}94 \times 10^{-6} \times (4\pi) \times (5 \times 10^{-1})^2$$

$$\therefore \quad q_2 = 6{,}1 \times 10^{-6}\ C = 6{,}00\ \mu C$$

EL EXPERIMENTO DE LA GOTA DE ACEITE DE MILLIKAN

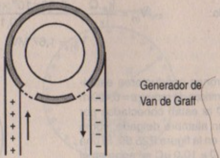
APLICACIONES DE LA ELECTROSTÁTICA

51. Considere un generador Van de Graaff con un domo de 30,0 cm de diámetro que opera en aire seco. a) ¿Cuál es el potencial máximo del domo? b) ¿Cuál es la carga máxima sobre el domo?

Resolución:

Datos:

Diámetro del domo = 30,0 cm



Parte (a)

Sabemos que el campo eléctrico en el aire es: $3 \times 10^6\ \dfrac{V}{m}$ aproximadamente entonces: $\dfrac{dV}{dr} = -Er$

$$\Rightarrow \quad V_{\text{máximo del domo}} = \int dV = \int_{\infty}^{0{,}15} |Er| \cdot dr$$

$$\therefore V_{\text{máximo del domo}} = 3 \times 10^6 \times (0{,}15) = 450\ kV$$

Parte (b)

Sabemos que: $V = \dfrac{k_e \cdot Q_{domo}}{r} = \dfrac{8{,}99\times10^9 \times Q_{domo}}{0{,}15}$

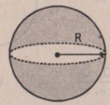
$$\Rightarrow \quad 450 \times 10^3 = \frac{8{,}99\times10^9}{0{,}15} \times Q_{domo}$$

$$\therefore Q_{\text{sobre el domo}} = 7{,}5\ \mu C$$

52. El domo esférico de un generador Van de Graaff puede elevarse a un potencial máximo de 600 kV; entonces carga adicional se fuga en chispas, al presentarse fallas del aire seco circundante. Determine a) la carga sobre el domo y b) el radio del domo.

Resolución:

Sea: (domo esférico)



Datos:

$R = ?$

$V_{\text{máximo}} = 600\ kV$

Parte (a)

Según el problema, el generador Van de Graff sufre fallas al llegar a un potencial máximo, en el aire seco circundante.

Como: $E_{(aire)} = 3 \times 10^6$ V/m (aproximadamente), entonces:

$$V_{\text{máximo}} = \frac{k_e \cdot Q_{domo}}{r} \quad \dots (1)$$

Además: $dV = -Er.dr =$

$$\Rightarrow \quad \int dV = -\int Er\,dr = E.r$$

$$\Rightarrow \quad V_{\text{máximo}} = 600 \times 10^3 = -3 \times 10^6 \times r$$

$$\therefore |r| = 0{,}2\ m$$

Parte (b)

De la ecuación (1) $\quad 600\ kV = \dfrac{8{,}99\times10^9}{r}\ (Q_{\text{sobre domo}})$

$$\Rightarrow \quad \frac{6\times10^{5}\times(-0,2)}{8,99\times10^{9}} = Q_{\text{sobre el domo}}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{sobre el domo}} = -13,35\times10^{-6}\text{ C} = -13,35\ \mu\text{C}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

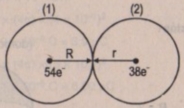
53. El modelo de gota líquida del núcleo sugiere que oscilaciones de alta energía de ciertos núcleos pueden dividir el núcleo en dos fragmentos distintos más unos cuantos neutrones. Los fragmentos adquieren energía cinética de su mutua repulsión de Coulomb. Calcule la energía potencial eléctrica (en electrón volts) de dos fragmentos esféricos de un núcleo de uranio que tiene las siguientes cargas y radios: 38*e* y $5,50\times10^{-15}$ m; 54*e* y $6,20\times10^{-15}$ m. Suponga que la carga está distribuida de manera uniforme por todo el volumen de cada fragmento esférico y que sus superficies están inicialmente en contacto en reposo. (Los electrones que rodean el núcleo pueden ignorarse).

Resolución:

Datos: $R = 6,20\times10^{-15}$ m

$r = 5,50\times10^{-15}$ m

$U_{\text{sistema}} = ?$



Sabemos que: $U_{\text{sist}} = \dfrac{k_e.Q_1.Q_2}{R+r} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{sist}} = \dfrac{k_e(54e^-)(38e^-)}{(R+r)}$

$$\Rightarrow \quad U_{\text{sist}} = \frac{8,99\times10^{9}\times(54)(38)(-1,6\times10^{-19})^2}{11,70\times10^{-15}}$$

$$\therefore\ U_{\text{sist}} = 253\text{ eV}$$

54. En un día seco de invierno usted arrastra sus zapatos con suela de cuero sobre una alfombra y recibe una descarga cuando extiende la punta de su dedo hacia una manija metálica. En un cuarto oscuro usted ve una chispa quizá de 5 mm de largo. Realice estimaciones de orden de magnitud de a) su potencial eléctrico y b) la carga sobre su cuerpo antes de que usted toque la manija. Explica que sus razonamientos.

Resolución:

Datos: Long (chispa) $= 5,00\times10^{-3}$ m

Parte (a)

Sabemos que: $E_{\text{aire seco}} = 3\times10^{6}$ V/m (aproximadamente)

Luego: $\dfrac{dV}{dr} = -E_r \quad \Rightarrow \quad V = -\int 3\times10^{6}\,dr$

$$\Rightarrow \quad V = -3\times10^{6}\,(5\times10^{-3}) = -15\text{ kV}$$

Parte (b)

Sabemos que: $V = \dfrac{k_e.Q}{r} = \dfrac{8,99\times10^{9}\times(Q)}{5\times10^{-3}}$

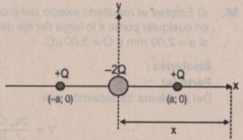
$$\therefore\ Q = -8,34\text{ nC}$$

55. La distribución de carga que se muestra en la figura P25.55 se conoce como cuadrupolo lineal. a) Demuestre que el potencial en un punto sobre el eje x, donde $x > a$, es:

$$V = \frac{2k_e Qa^2}{x^3 - xa^2}$$

b) Muestre que la expresión obtenida en a) cuando $x >> a$ se reduce a:

$$V = \frac{2k_e Qa^2}{x^3}$$



Cuadrupolo
Figura P25.55

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que:

$$V = \frac{2k_e.Q.a^2}{x^3 - x.a^2} \quad \text{sobre el eje x, donde } x > a$$

Sabemos que por el principio de superposición:

$$V_{\text{total}} = k_e.\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{k_e.Q}{(x-a)} + \frac{k_e.Q}{(x+a)} + \frac{k_e(-2Q)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad V = k_e.Q\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} - \frac{2}{x}\right] = k_e.Q\left[\frac{2.a^2}{(x^2-a^2).x}\right]$$

$$\therefore\ V = \frac{2k_e.Q.a^2}{x^3 - xa^2} \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $\boxed{V = \dfrac{2k_e.Q.a^2}{x^3}}$ para $x >> a$

De lo hallado en (a): $V = \dfrac{2k_e.Q.a^2}{x^3 - xa^2}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2k_e.Q.a^2}{x(x^2 - a^2)} = \frac{2k_e.Q.a^2}{x(x^2)} \; ; \quad x^2 - a^2 = x^2$$

$$\therefore V = \frac{2k_e.Q.a^2}{x^3} \qquad \text{Lqqd.}$$

56. a) Emplee el resultado exacto del problema 55 para determinar el campo eléctrico en cualquier punto a lo largo del eje del cuadrupolo lineal $x > a$. b) Evalúe E en $x = 3a$ si $a = 2{,}00$ mm y $Q = 3{,}00$ μC.

Resolución:

Parte (a)

Del problema 55 sabemos que:

$$V = \frac{2k_e.Q.a^2}{x^3 - x.a^2} \text{ donde: } x > a$$

Como:

$$-\frac{dV}{dx} = Ex \text{ (sobre el eje x)}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d}{dx}\left[\frac{2k_e.Q.a^2}{x^3 - x.a^2}\right] = \frac{2k_e.Q.a^2(3x^2 - a^2)}{(x^3 - x.a^2)^2}$$

$$\therefore \quad \vec{E}(x) = \frac{2k_eQa^2\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^3 - xa^2\right)^2}\,\hat{i}\,\frac{N}{C}$$

Parte (b)

Hallar E = ? para: $x = 3a$; $a = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $Q = 3{,}00$ μC

Sabemos que: $\vec{E}(x) = \dfrac{2k_e.Q.a^2(3x^2 - a^2)}{(x^3 - x.a^2)^2}\hat{i}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(x = 3a) = \frac{2k_e.Q.a^2(27a^2 - a^2)}{(27a^3 - 3a^3)^2} = \frac{2k_e.Q.a^2(26a^2)}{576a^6}$$

$$\therefore \quad \vec{E}(x = 3a) = \frac{0{,}09k_e.Q}{a^2}\;\hat{i}\text{ N/C}$$

Reemplazando datos:

Resulta que: $\vec{E} = \dfrac{0{,}09(8{,}99\times10^9)(3{,}00\times10^{-6})}{(2{,}00\times10^{-3})^2}$

$$\therefore \quad \vec{E} = 608{,}7 \text{ M}\,\frac{N}{C}\,\hat{i}$$

57. A una cierta distancia de un carga puntual, la magnitud del campo eléctrico es de 500 V/m, y el potencial eléctrico es igual a −3,00 kV. a) ¿Cuál es la distancia a la carga? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

Resolución:

Datos: $E = 500\,\dfrac{V}{m}$

$V = -3{,}00$ kV

Parte (a)

Sabemos que: $E = \dfrac{k_e.q}{r^2}$

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{\left(8{,}99\times10^9\right).q}{r^2} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado: $V = \dfrac{k_e.q}{r}$

$$\Rightarrow \quad -3{,}00 \times 10^3 = \frac{8{,}99\times10^9\,(q)}{r} \quad \text{... (2)}$$

(1) ÷ (2):

$$500.r^2 = (8{,}99 \times 10^9)\,.\,q$$

$$-3{,}00 \times 10^3\, r = (8{,}99 \times 10^9)\,.\,q$$

$$\therefore |r| = 6{,}00 \text{ m}$$

Parte (b)

De (1): $500 = \dfrac{8{,}99\times10^9\times|q|}{(6{,}00)^2} \quad \Rightarrow \quad |q| = \dfrac{500\times(6{,}00)^2}{8{,}99\times10^9}$

$$\therefore |q| = 2{,}00 \text{ μC}$$

Luego de (2):

$$q = -2{,}00 \text{ μC} \quad \text{(respuesta)}$$

58. Un electrón es liberado desde el reposo sobre el eje de un anillo uniforme cargado positivamente, a 0,100 m del centro del anillo. Si la densidad de carga lineal del anillo es de +0,100 μC/m y el radio del anillo es de 0,200 m, ¿cuán rápido se moverá el electrón cuando alcance el centro del anillo?

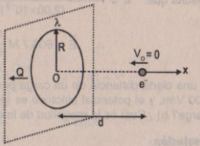
Resolución :

Datos: $\lambda = +\,0{,}100\ \mu\dfrac{C}{m}$

$R = 0{,}200$ m

$d = 0{,}100$ m

$V_{Fe^-} = ?$



Sabemos que: $\Delta U = -q_e \int E_x.dx = -q_e \int E_x\, dx$

Como:

$$E_{\text{total de un anillo}} = E_x = \frac{k_e.Q.x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \text{ (a una distancia sobre el eje x)}$$

Entonces:

$$\Delta Ue^- = -qe\int_d^0 \frac{k_e.Q.x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx = -q_{e^-}.Q.k_e\int_d^0 \frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Pero: por la conservación de la energía:

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

Luego $$q_e.Q.k_e\int_d^0 \frac{x\,dx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}\,m_{e-} - V^2_{Fe-}$$

$$\Rightarrow\quad -q_e.Q.k_e\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\Big|_d^0 = \frac{1}{2}\,m_{e-}.V^2_{Fe-}$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{-2.q_e.(2\pi.R)\lambda.k_e}{m_{e-}}\times\left(\frac{\sqrt{d^2+R^2}-R}{R\sqrt{d^2+R^2}}\right)} = V_{Fe-}$$

Reemplazando datos:

$$2\times10^6\times\sqrt{\frac{\pi(1{,}6)(8{,}99)(0{,}2)(0{,}1)(10)}{9.1}\times\left(\frac{\sqrt{0{,}05}-0{,}2}{0{,}2\sqrt{0{,}05}}\right)} = V_{Fe-}$$

$$\therefore\ V_{final}\,e^- = 1{,}448 \text{ M m/s}$$

59. a) Considere un cascarón cilíndrico cargado uniformemente que tiene una carga total *Q*, radio R y altura *h*. Determine el potencial electrostático en un punto a una distancia *d* del lado derecho del cilindro, como se muestra en la P25.59. (*Sugerencia:* emplee el resultado del ejemplo 25.5 tratando al cilindro como una colección de anillos de carga). b) Utilice el resultado del ejemplo 25.6 para resolver el mismo problema en el caso de un cilindro sólido.

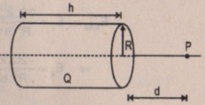


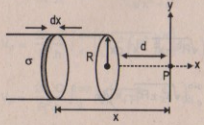
Figura P25.59

$V_P = ?$

Resolución :

Parte (a)

Sea:



Sabemos que: $\dfrac{Q}{A} = \sigma \;\Rightarrow\; dQ = 2\pi.R.dx\ \sigma$

Luego: $$dV = \frac{k_e.2\pi.R\sigma}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad V_P = 2\pi.\sigma\,k_e.R\int_d^{d+h}\frac{dx}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow\quad V_P = 2\pi.\sigma.k_eR\,.\ln\left(x+\sqrt{x^2+R^2}\right)\Big|_d^{d+h}$$

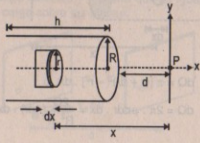
$$\Rightarrow V_P = 2\pi.k_e.R.\left(\ln\left[d+h+\sqrt{(d+h)^2+R^2}\right] - \text{Ln}\left[d+\sqrt{d^2+R^2}\right]\right)$$

$$\therefore\ V_P = \frac{k_e.Q}{h}\left[\ln\left(\frac{d+h+\sqrt{(d+h)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}\right)\right]$$

Parte (b)

Otro método:

(cilindro sólido)



Sabemos que:

$$E_{total} = E_x = \frac{2Q.k_e}{R^2.h}\int_0^R \frac{r.dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \; E_x = \frac{-2Q.k_e}{R^2.h}\sqrt{x^2+R^2}\,\Big|_0^R$$

$$\therefore \; E_x = \frac{-2Q.k_e}{R^2.h}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

Como: $\dfrac{dV}{dx} = -E_x$

$$\Rightarrow \; dV = -E_x\,dx = \frac{2Q.k_e}{R^2.h}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)dx$$

$$\Rightarrow \; V_P = \int dv = \frac{2Q.k_e}{R^2.h}\int_d^{d+h}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)dx$$

$$\Rightarrow \; V_P = \frac{2Q.k_e}{2R^2.h}\left[x\sqrt{x^2+R^2}+R^2.\ln(x+\sqrt{x^2+R^2})\,\Big|_d^{d+h}\right]-\frac{2Q.k_e}{2R^2.h}\,x^2\,\Big|_d^{d+h}$$

Por lo tanto:

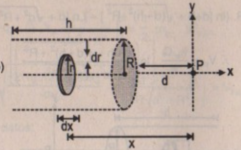
$$V_P=\frac{k_e.Q}{R^2.h}\left[(d+h)\sqrt{(d+h)^2+R^2}-d\sqrt{d^2+R^2}+R^2.\ln\left(\frac{d+h+\sqrt{(d+h)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}\right)\right]-\frac{k_e.Q}{R^2.h}(2dh+h^2)$$

Parte (b)

(Otro procedimiento y manera)

Sea:

(cilindro sólido)



Sabemos que: $dQ = \pi\,[(r+dr)^2 - r^2]\,.\,dx\,.\rho$

$$\Rightarrow \; dQ = 2\pi\,.\,\rho r.dr\,.\,dx = \frac{2Q}{R^2.h}(r.dr)\,.\,dx$$

Entonces: $dV = \dfrac{k_e.dQ}{\sqrt{x^2+r^2}} = \left(\dfrac{k_e.2Q}{R^2.h}\right)\left(\dfrac{r.dr.dx}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)$

Luego:

$$\Rightarrow \; V_P = \iint dv = cte\int_d^{d+h}\int_0^R \frac{r.dr.dx}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \; V_P = \frac{2k_e.Q}{R^2.h}\int_d^{d+h}dx\int_0^R\frac{r.dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \; V_P = \frac{2k_e.Q}{R^2.h}\int_d^{d+h}\left[\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)\Big|_0^R\right]dx$$

$$\Rightarrow \; V_P = \frac{2k_e.Q}{R^2.h}\int_d^{d+h}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right).\,dx$$

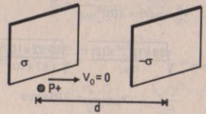
$$\Rightarrow \; V_P = \frac{2k_e.Q}{2R^2.h}\left[x\sqrt{x^2+R^2}+R^2.\ln\left(x+\sqrt{x^2+R^2}\right)\Big|_d^{d+h}\right]\frac{-2k_e.Q}{2R^2+h}\,x^2\,\Big|_d^{d+h}$$

$$\therefore \; V_P = \frac{k_eQ}{R^2.h}\left[(d+h).\sqrt{(d+h)^2+R^2}+R^2.\ln\left(\frac{d+h+\sqrt{(d+h)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}\right)-d\sqrt{d^2+R^2}\right]$$

$$-\frac{k_e.Q}{R^2+h}(2dh+h^2)$$

60. Dos placas paralelas que tienen carga de igual magnitud pero signos opuestos están separadas 12,0 cm. Cada placa tiene una densidad de carga superficial de 36,0 nC/m². Un protón se libera desde el reposo en la placa positiva. Determine a) la diferencia de potencial entre las placas, b) la energía del protón cuando llega a la placa negativa, c) la rapidez del protón antes de incidir en la placa negativa, d) la aceleración del protón, y e) la fuerza sobre el protón. f) A partir de la fuerza encuentre la magnitud del campo eléctrico y muestre que es igual a la encontrada a partir de las densidades de carga sobre las placas.

Resolución :

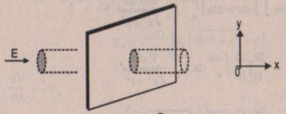


Datos: $d = 0{,}12$ m $\qquad q_{p^+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$s = 36 \times 10^{-9}\dfrac{C}{m^2} \qquad m_{p^+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$V_{o\,p^+} = 0 \qquad \sigma$

Parte (a)



Por Gauss: $\qquad \Phi = E\,dA = \dfrac{Q_{int.}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad 2E.A = \frac{A\sigma}{\varepsilon_o} \qquad \therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 20{,}34 \times 10^2 \frac{N}{C}$$

Luego:

Sabemos que: $\qquad \Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_{p^+}} = -\int_0^d E\,dx = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}x\Big|_0^d$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta U}{q_{p^+}} = \Delta V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}.d = \frac{-36\times10^{9}}{2(8{,}85\times10^{-12})} \times (0{,}12)$$

$$\therefore \Delta V = -244 \text{ V}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\qquad \Delta V = \dfrac{\Delta V}{q_{p^+}}$

$$\Rightarrow \quad -\Delta V \,.\, q_{p+} = -\Delta U = \Delta E_k$$

$\therefore$ Energía (protón) $= + (244)(1{,}6 \times 10^{-19}) = 39 \times 10^{-18}$ J $= 39$ aJ

Parte (c)

Por la conservación de la energía: $-\Delta U = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_{p^+} \,.\, v_{fp^+}^2 = 39 \times 10^{-18}$$

$$\Rightarrow \quad v_{final(P+)} = \sqrt{\frac{39\times10^{-18}\times(2)}{m_{P+}}} = \sqrt{\frac{39\times2\times10^{-18}}{1{,}67\times10^{-27}}}$$

$$\therefore \quad v_{final\,(P+)} = 216 \text{ km/s}$$

Parte (d)

Sabemos que: $q_{P+}.E = m_{P+}.a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{q_{p^+}.E}{m_{p^+}} = \frac{1{,}6\times10^{-19}}{1{,}67\times10^{-27}} \times \frac{(36\times10^{-9})}{2(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore a_{P+} = 19{,}5 \times 10^{10} \text{ m/s}^2$$

Parte (e)

Sabemos que: $F_{p^+} = m_{p^+} \,.\, a_{p^+}$

$$\Rightarrow \quad F_{p^+} = 1{,}67 \times 10^{-27} \times (19{,}5) \times 10^{10}$$

$$\therefore \quad F_{sobre\,(P+)} = 32{,}5 \times 10^{-17} \text{ N}$$

Parte (f)

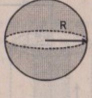
Sabemos que: $\qquad \dfrac{F_{(p^+)}}{q_{p^+}} = E$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{32{,}5\times10^{-17}}{1{,}6\times10^{-19}} \qquad \therefore E = 20{,}34 \times 10^2 \text{ N/C}$$

61. Calcule el trabajo que debe efectuarse para cargar un cascarón esférico de radio E hasta una carga total *Q*.

Resolución :

Cascarón esférico



$Q = Q'$

Sabemos que por Gauss: $\qquad \Phi = \oint E.d_A = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E\,(4\pi R^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \text{ (por dato)(y simetría)}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\hat{r} = \frac{k_e.Q}{2R^2}\hat{r}$$

Luego: $\qquad -\Delta U = W_{Fe} = Q'\int E\,.dr = Q'\dfrac{k_e.Q}{2R^2}\int_0^R dr$

$$\therefore W = \left(\frac{k_e.Q}{2R}\right).Q' = \frac{k_e.Q^2}{2R}$$

62. Un contador Geiger-Müller es un detector de radiación que se compone de un cilindro hueco (el cátodo) de radio interior r_a un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio r_b (Fig. P25.62). La carga por unidad de longitud del ánodo es λ; en tanto que la carga por unidad de longitud del cátodo es $-\lambda$. a) Muestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro en la región sensible del detector es:

$$\boxed{\Delta V = 2k_e\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

b) Muestre que la magnitud del campo eléctrico sobre esa región está dada por

$$\boxed{\Delta E = \frac{V}{\ln(r_a/r_b)}\left(\frac{1}{r}\right)}$$

donde r es la distancia desde el centro del ánodo al punto donde se va a calcular el campo.

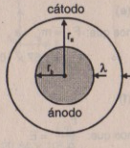


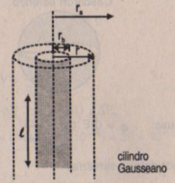
Figura P25.62

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\boxed{\Delta V = 2.k_e.\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$

Sea:



Por Gauss: $\oint E_{alambre} \cdot d_A = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \Rightarrow |E_{alambre}| = \frac{2k_e.\lambda}{r}$

$\oint E_{cilindro} \cdot d_A = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \Rightarrow |E_{cilindro}| = \frac{2k_e.\lambda}{r}$

Luego: $\frac{dV_{alambre}}{dr} = -|E_{alambre}| \Rightarrow V_{alambre} = -2k_e.\lambda \ln(r_b)$

Además: $\frac{dV}{dr} = -|E_{cilindro}|$

$\Rightarrow \quad V_{cilindro} = -2\,k_e\,.\lambda\,\ln(r_a)$

En consecuencia:

$$\Delta V = V_{alambre} - V_{cilindro} = 2\,k_e.\lambda \ln(r_a) - 2k_e.\lambda \ln(r_b)$$

$$\therefore \quad \Delta V = 2.k_e.\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Sabemos que de (a): $2\,k_e.\lambda = \Delta V/\ln(r_a/r_b)$

Además: $\Delta E = |E_{alambre}| = |E_{cilindro}| = \frac{2.k_e.\lambda}{r}$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \Delta E = \frac{V}{\ln(\frac{r_a}{r_b})} \times \left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

63. Según la ley de Gauss, el campo eléctrico establecido por una línea de carga uniforme es:

$$E = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\right)\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta radicalmente alejándose de la línea y λ es la carga por unidad de longitud a lo largo de la línea. Obtenga una expresión para la diferencia de potencial entre $r = r_1$ y $r = r_2$.

Resolución :

Dato: $E = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\right)\hat{r}$ (para una línea de carga)

$\Delta V = ?$

Sabemos que: $\frac{dV}{dr} = -E(r)$

$$\Rightarrow \quad dV = -E_r.dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \times \left(\frac{1}{r}\right) dr$$

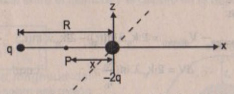
$$\Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \int_1^2 dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr$$

$$\therefore \quad \Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

64. Una carga puntual q se localiza en $x = -R$, y una carga puntual $-2q$ se encuentra en el origen. Demuestre que la superficie equipotencial que tiene potencial cero es una esfera centrada en $(-4R/3;\ 0;\ 0)$ y tiene una radio $r = 2R/3$.

Resolución :

Sea:



Sabemos que todos los puntos que están en una misma superficie equipotencial se encuentran en un mismo o tienen igual potencial. Entonces:

$$V_P = -\frac{k_e.q}{R-x} + \frac{-k_e(2q)}{x} = V_o = 0$$

$$\Rightarrow\ x = 2R - 2x \qquad \therefore\ x = \frac{2R}{3} \qquad \text{(posición de P)}$$

Luego:

A una distancia $\frac{2R}{3}$ equidistantes de la carga (–2q) el potencial será igual a cero y pasará una esfera de radio: $\frac{2R}{3}$.

65. Considere dos cascarones esféricos delgados y conductores, como los que se muestran en la vista transversal de la figura P25.65. El cascarón interno tiene un radio r_1 = 15,0 cm y una carga de 10,0 nC. El cascarón exterior tiene un radio r_2 = 30,0 cm y una carga de –15,0 nC. Encuentre a) el campo eléctrico E y b) el potencial eléctrico V en las regiones *A*, *B* y *C*, con V = 0 en $r = \infty$.

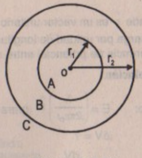


Figura P25.65

Resolución :

Cascarones esféricos delgados y conductores

Datos:
r_1 = 15,0 cm
Q_1 = 10,0 × 10^{-9} C
r_2 = 30,0 cm
Q_2 = –15,0 × 10^{-9} C

Parte (a)

- Hallando E = ? en "A"

  Sabemos que en cualquier parte dentro de un conductor E = 0

- Hallando $\vec{E}_B$ = ? en "B"

$$\text{Sabemos que: } \vec{E}_B = \frac{k_e.Q_1}{r^2} = \frac{8{,}99\times10^9\times(10\times10^{-9})}{r^2}\hat{r} = \frac{8{,}99\times10}{r^2}\hat{r}$$

$$\therefore\ \vec{E}_B = \frac{89{,}9}{r^2}\frac{V}{m}\hat{r} \text{ (radialmente hacia fuera)}$$

- Hallando E_C = ? en C

$$\text{Sabemos que: } \vec{E}_C = \frac{k_e(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r} = \frac{8{,}99\times10^9\times(-5{,}00\times10^{-9})}{r^2}\hat{r}$$

$$\therefore\ \vec{E}_C = -\frac{45{,}00}{r^2}\frac{V}{m}\hat{r} \qquad \text{(radialmente hacia adentro)}$$

Parte (b)

Hallando: V_A = ? ; V_B = ? ; V_C = ? si: V = 0 en $r = \infty$

Como: $E_A = 0 \Rightarrow \quad V_A$ = cte.

$$\text{Luego: } V_A = V_O = \frac{k_e.Q_1}{r^2} + \frac{k_e.Q_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ V_A = V_O = \frac{8{,}99\times10^9\times(10\times10^{-9})}{0{,}15} + \frac{8{,}99\times10^9\times(-15\times10^{-9})}{0{,}30}$$

$$\therefore\ V_A = V_O = 150\ V$$

Por otro lado:

$$V_B = \int\frac{dV}{dr} = -E_r \quad\Rightarrow\quad V_B = \int dV = -\int_{r_2}^{r_1}\frac{89{,}9}{r^2}.dr$$

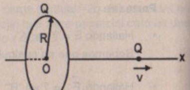
$$\Rightarrow\ V_B = \frac{(8{,}99\times10^9)(-15\times10^{-9})}{0{,}3} + \frac{89{,}9}{r} = -450\ V + \frac{89{,}9}{r}\ V$$

Por último:

$$V_C = \int dV = \int -E_r.dr = -45{,}0\int\frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{45{,}0}{r}\ V$$

66. El eje x es el eje de simetría de un anillo con carga uniforme, de radio R y carga Q (Fig. P25.66). Una carga puntual *Q* de masa *M* se localiza en el centro del anillo. Cuando éste se desplaza ligeramente la carga puntual se acelera a lo largo del eje *x* hacia el infinito. Demuestre que la rapidez final de la carga puntual es:

$$v = \left(\frac{2k_e Q^2}{MR}\right)^{1/2}$$



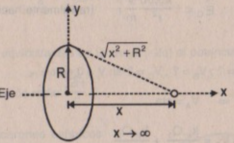
Anillo cargado de manera uniforme

Figura P25.66

Resolución :

Por demostrar que: $v = \left[\frac{2k_e.Q^2}{MR}\right]^{1/2}$

Sea:



Luego:

$$\Delta U = -Q \int E_x.dx = -Q \int_0^{\infty} \frac{k_e.Q.x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx$$

Pero por la conservación de la energía:

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

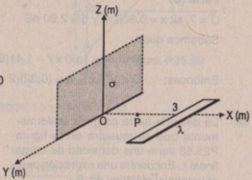
$$\Rightarrow \quad k_e \cdot Q^2 \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} M.v^2$$

$$\Rightarrow \quad -k_e\, Q^2 \times \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} M.v^2$$

$$\therefore \quad v = \left[\frac{2k_e.Q^2}{MR}\right]^{1/2} \quad \text{Lqqd.}$$

67. Una hoja infinita de carga que tiene una densidad de carga superficial de 25,0 nC/m² colocada en el plano yz, pasa a través del origen y está a un potencial de 1,00 kV en el punto y = 0, z = 0. Un alambre largo que tiene una densidad de carga lineal de 80,0 nC/m está paralelo al eje *y* y cruza al eje *x* en x = 3,00 m. a) Determine, como una función de *x*, el potencial a lo largo del eje *x* entre el alambre y la hoja. b) ¿Cuál es la energía potencial de una carga de 2,00 nC colocada en x = 0,800 m?

Resolución :

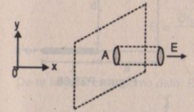


Datos: $\sigma = 25{,}0\ \text{nC/m}^2$

$V_{(0)} = 1{,}00$ kV en y = 0; z = 0

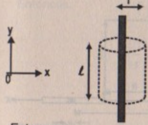
$\lambda = 80{,}0$ nC/m

Parte (a)



Por Gauss:

$$\Phi = \oint E\,dA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \qquad \therefore\ E_H = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 1{,}41k\ \frac{N}{C}$$



Por Gauss:

$$\Phi = \oint E\,dA = \frac{\lambda l}{\varepsilon_o} \quad \therefore E_L = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = \frac{1{,}44k}{r}\ \frac{N}{C}$$

Entonces:

- Para la hoja infinita: $\frac{dV}{dx} = -E_x \Rightarrow \int dV = -1{,}41k \int_0^x dx$

$$\therefore V_{H\ en\ P} = 1{,}00\ \text{kV} - 1{,}41\ x$$

- Para la línea de carga: $\frac{dV}{dr} = -E_r \Rightarrow dV = -\frac{1{,}44k}{r}\int_3^{3-x} dr$

$$\therefore\ V_{L\ en\ P} = -1{,}44\ k\ \ln(1-\frac{x}{3})$$

En consecuencia:

$$V_{total\ en\ P} = 1{,}00\ kV - 1{,}41x - 1{,}44\ kv\ \ln(1-\frac{x}{3})$$

Parte (b)

U = ? si: x = 0,800 m y q = 2,00 nC

Sabemos que:

$$V(0{,}8) = 1{,}00\ kV - 1{,}41(0{,}8) - 1{,}44\ kV\ \ln(1-0{,}8/3) = 36{,}62\ V$$

Entonces: $U = V(0{,}8)\ .\ q = (0{,}32)(2\times10^{-9}) = 633\ nJ$

68. La delgada barra cargada uniformemente que se muestra en la figura P25.68 tiene una densidad de carga lineal λ. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en *P*.

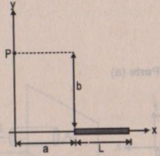
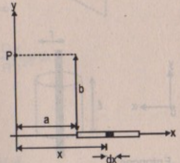


Figura P25.68

Resolución :

Sabemos que:



$$dV = \frac{k_e}{b}\ .\ d\theta = \frac{k_e}{b}(\lambda.dx)$$

$$\Rightarrow\ V_P = \int dv = \frac{k_e.\lambda}{b}\int_a^{a+L} dx$$

$$\therefore\ V_P = \frac{k_e.\lambda}{b}\ .\ L$$

69. Un dipolo se localiza a lo largo del eje *y* como se muestra en la figura (P25.69). a) En el punto *P*, el cual está alejado del dipolo (r >> a), el potencial eléctrico es:

$$V = k_e\ \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

donde p = 2qa. Calcule las componentes radial E_r y perpendicular E_θ del campo eléctrico asociado. Advierta que $E_\theta = -(1/r)(\partial V/\partial\theta)$. ¿Estos resultados parecen razonables para $\theta = 90°$ y 0°?, ¿para r = 0?

b) Para el arreglo de dipolo mostrado, exprese V en función de coordenadas cartesianas usando $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ y

$$\cos\theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Con estos resultados, y considerando r >> a, calcule las componentes de campo E_x y E_y.

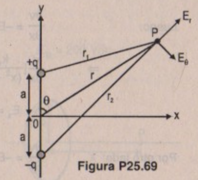


Figura P25.69

Resolución :

Datos: $V_p = \dfrac{k_e.p.\cos\theta}{r^2}$ donde: r >>> a y p = 2qa

Parte (a)

Hallando: E_r = ? y E_θ = ?

Sabemos que: $\left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) = -E_r\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{k_e.p.\cos\theta}{r^2}\right) = -E_r$

$$\therefore\ E_r = \frac{2k_e.p.\cos\theta}{r^2}\ \hat{r}$$

Por otro lado:

De la sugerencia y como dato: $E_\theta = -\left(\dfrac{1}{r}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)$

Entonces: $\left(-\dfrac{1}{r}\right)\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{k_e.p.\cos\theta}{r^2}\right) = E_\theta$

$$\Rightarrow\ -\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{k_e.p.sen\theta}{r^2}\right) = E_\theta$$

$$\therefore\ E_\theta = \frac{k_e.p.sen\theta}{r^2}\ \hat{\theta}$$

Parte (b)

Hallar: $V_{(x,y)}$ = ? si: $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ y $\cos\theta = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

Sabemos que: $V_P = \dfrac{k_e.p.\cos\theta}{r^2} = \dfrac{k_e.p}{(x^2+y^2)}\ .\ \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

Luego: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -E_x$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_e.p.y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right] = -\frac{3k_e.p.y.x}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -E_x$$

$$\therefore \quad E_x = \frac{3k_e.p.y.x}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,\hat{i}$$

Por otro lado: $\dfrac{\partial V}{\partial y} = -E_y$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k_e.p.y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right] = -E_y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_e.p(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -E_y$$

$$\therefore \quad E_y = \frac{k_e.p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,\hat{j}$$

70. La figura P25.70 muestra varias líneas equipotenciales, cada una marcada por su potencial en volts. La distancia entre líneas de cuadriculado representa 1,00 cm. a) ¿La magnitud del campo es más grande en A o B? ¿Por qué? b) ¿Cuál es el valor de E en *B*? c) Represente cómo se observa el campo dibujando al menos ocho líneas de campo.

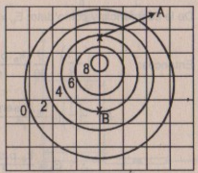


Figura P25.70

Resolución:

Parte (a)

Según el gráfico: $E_A = \dfrac{k_e.Q}{r_A^2}\,\hat{r}$; $E_B = \dfrac{k_e.Q}{r_B^2}\,\hat{r}$

Como: $r_A < r_B$ al punto fijo (o)

Entonces: $E_A > E_B$

Parte (b)

$$\Delta V = -E_B \,.\, d$$

$$\Rightarrow \quad (4-8)V = -(E_B)(2\times 10^{-2}) \qquad \therefore\ E_B = 200\ \text{V/m}$$

71. Un disco de radio *R* tiene una densidad de carga superficial no uniforme σ = Cr, donde C es una constante y r se mide desde el centro del disco. (Fig. P25.71). Encuentre (por integración directa) el potencial en *P*.

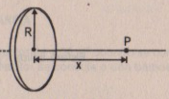


Figura P25.71

Resolución:

Datos: $\sigma = C.r$

$V_P = ?$

Sabemos que: $\dfrac{d\theta}{dA} = \sigma = C.r \quad \Rightarrow \quad dQ = 2\pi.r\,dr.Cr$

Luego: $dV = \dfrac{k_e.dQ}{\sqrt{x^2+r^2}} = \dfrac{2\pi.C.k_e.r^2.dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$

$$\Rightarrow \quad V_P = \int dV = 2\pi.C.k_e \int_0^R \sqrt{x^2+r^2}\,dr - 2\pi\,.\,C.k_e\,x^2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_P = \pi.C.k_e\left[r\sqrt{r^2+x^2} + x^2.\ln(r+\sqrt{r^2+x^2})\right]\Big|_0^R - 2\pi.C.k_e.x^2.\ln(r+\sqrt{r^2+x^2})\Big|_0^R$$

$$\Rightarrow \quad V_P = \pi.C.k_e\left[R\sqrt{R^2+x^2} + x^2.\ln(R+\sqrt{R^2+x^2})\right] - \pi.C.k_e.x^2.\ln(x)$$

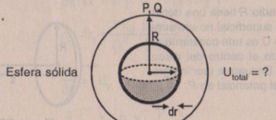
$$-2\pi.C.k_e.x^2.\ln(R+\sqrt{R^2+x^2}) + 2\pi.C.k_e.x^2.\ln(x)$$

$$\Rightarrow \quad V_P = \pi.C.k_e.R.\sqrt{R^2+x^2} + \pi.C.k_e.x^2.\ln\left[\frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2}}\right]$$

$$\therefore\ V_P = \pi.C.k_e\left[R\sqrt{R^2+x^2} + x^2.\ln\left(\frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2}}\right)\right]$$

72. Una esfera sólida de radio R tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total Q. Derive una expresión para su energía potencial eléctrica total. (Sugerencia: imagine que la esfera se construye añadiendo capas sucesivas de cascarones concéntricas de carga $dq = (4\pi r^2\, dr)\rho$ y use $dU = V\, dq$).

Resolución :



Sabemos que: $\dfrac{Q}{vol} = \rho \;\Rightarrow\; dQ = 4\pi.r^2.\rho.\,dr$

Por otro lado:

En una superficie equipotencial V = cte.

Entonces:

$V.dQ = dU$ (de la sugerencia)

$\Rightarrow\; V\,(4\pi.\rho.r^2.dr) = dU \;\Rightarrow\; 4\pi.V.\rho\int_0^R r^2.dr = \int dU = U_{total}$

$\therefore\; U_{total} = Q.V$

73. Los resultados del problema 62 se aplican también a un precipitador electrostático (véanse las Figs. 25.28a y P25.62). Un voltaje aplicado $\Delta V = V_a - V_b = 50{,}0$ kV produce un campo eléctrico de 5,50 MV/m de magnitud en la superficie del alambre central. La pared cilíndrica exterior tiene un radio uniforme $r_a = 0{,}850$ m. a) ¿Cuál sería el radio r_b del alambre central? Usted necesitará resolver una ecuación trascendental. b) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la pared exterior?

Resolución :

Datos: $\Delta V = V_a - V_b = 50{,}0$ kV

$E = 5{,}50\,M\dfrac{V}{m}$

Parte (a)

Si: $r_a = 0{,}850$ m , hallar: r_b = ?

Sabemos que: $\dfrac{dV}{dr} = -E_r \;\Rightarrow\; \int_b^a dV = -\int_{r_b}^{r_a} E_r\, dr$

$\Rightarrow\; V_a - V_b = 50{,}0 \times 10^3 = -5{,}50 \times 10^6\,(0{,}850 - r_b)$

$\therefore\; r_b = 1{,}42$ mm

Capítulo 26

CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

DEFINICIÓN DE CAPACITANCIA

1. a) ¿cuánta carga existe en cada placa de un capacitor de 4,00 μF cuando se conecta a una batería de 12,0 V? b) Si este mismo capacitor se conecta a una batería de 1,50 V, ¿qué carga se almacena?

Resolución :

Datos: $C = 4{,}00\ \mu F$; $\Delta V = 12{,}0$ V

Parte (a)

Sabemos que: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \;\Rightarrow\; Q = C.\Delta V = 4{,}00 \times 10^{-6} \times (12)$

$\therefore\; Q = 48{,}0\ \mu C$

Parte (b)

Si $\Delta V = 1{,}50$ V

Entonces: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \;\Rightarrow\; Q = C.\Delta V = 4 \times 10^{-6} \times (1{,}5)$

$\therefore\; Q = 6{,}00\ \mu C$

2. Dos conductores con cargas netas de +10,0 μC y −10,0 μC tienen una diferencia de potencial de 10,0 V. Determine a) la capacitancia del sistema y b) la diferencia del potencial entre los dos conductores si las cargas en cada uno se incrementan hasta +100 μC y −100 μC.

Resolución :

Datos: $Q_1 = +10{,}0\ \mu C$ $Q_2 = -10{,}0\ \mu C$ $\Delta V = 10{,}0$ V

Parte (a)

Sabemos que: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{10\times10^{-6}}{10}$

$\therefore\; C = 1{,}00$ mF

Parte (b)

Si: $Q_1 = +100\ \mu C$ y $Q_2 = -100\ \mu C$

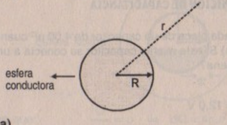
Entonces: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{100\times10^{-6}}{10}$

$\therefore\; C = 10{,}0$ mF

CÁLCULO DE CAPACITANCIA

3. Una esfera conductora cargada y aislada de 12,0 cm de radio crea un campo eléctrico de 4,90 × 10⁴ N/C a una distancia de 21,0 cm de su centro. a) ¿Cuál es su densidad de carga superficial? b) ¿Cuál es su capacitancia?

Resolución :



Datos:
$R = 0{,}12$ m
$r = 0{,}21$ m
$E = 4{,}9 \times 10^4 \dfrac{N}{C}$

Parte (a)

Por Gauss: $\Phi = \oint E\, dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow \quad E \times (4\pi.r^2) = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{E\epsilon_o\, r^2}{R^2} = \frac{4{,}9\times10^4(8{,}85\times10^{-12})\times(0{,}21)^2}{(0{,}12)^2}$$

$$\therefore \quad \sigma = 1{,}33\ \mu C/m^2$$

Parte (b)

Sabemos que la capacitancia para una esfera conductora es:

$$C = 4\pi\varepsilon_o \,.\, R$$

$$\Rightarrow \quad C = 4\pi \times (8{,}85 \times 10^{-12})(0{,}12)$$

$$\therefore \quad C = 13{,}3\ pF$$

4. a) Si una gota de líquido tiene una capacitancia de 1,00 pF, ¿cuál es su radio? b) Si otra gota tiene un radio de 2,00 mm, ¿cuál es su capacitancia? c) ¿Cuál es la carga en la gota más pequeña si su potencial es de 100 V?

Resolución :

Parte (a)

$C = 1{,}00$ pF $\quad R = ?$

Considerando a la gota de líquido como una esfera, entonces:

$$C = 4\pi.\ \varepsilon_o\ (R)$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}00 \times 10^{-12} = 4\pi\ (8{,}85 \times 10^{-12})\ .\ R$$

$$\therefore \quad R = 8{,}96 \times 10^{-3}\ m$$

Parte (b)

Si: $R = 2 \times 10^{-3}$ m ; $C = ?$

Sabemos que para una esfera:

$$C = 4\pi.\varepsilon_o.R$$

$$\Rightarrow \quad C = 4\pi \times (8{,}85 \times 10^{-12})(2 \times 10^{-3})$$

$$\therefore \quad C = 0{,}224\ pF$$

Parte (c)

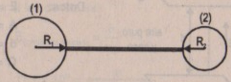
Nos piden: $q = ?$ de la gota de radio: 2×10^{-3} m $\quad \Delta V = 100V$

Entonces como: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad 0{,}224 \times 10^{-12} = \dfrac{Q}{100}$

$$\therefore \quad Q = 22{,}4\ pC$$

5. Dos esferas conductoras con diámetros de 0,400 m y 1,00 m están separadas por una distancia que es grande comparada con los diámetros. Las esferas están conectadas por medio de un alambre delgado y se cargas hasta 7,00 μC. a) ¿Cómo se comparte esta carga total entre las esferas? (Ignore cualquier carga en el alambre.) b) ¿Cuál es el potencial del sistema de esferas cuando el potencial de referencia se toma como V = 0 en r = ∞?

Resolución :



Datos: $2R_2 = 0{,}400$ m $\quad Q_{total} = 7{,}00\ \mu C$
$2R_1 = 1{,}00$ m

Parte (a)

Sabemos que: $V_1 = V_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_e.Q_1}{R_1} = \frac{k_e.Q_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Q_1.R_2 = Q_2.R_1$$

Como: $Q_1 + Q_2 = 7{,}00\ \mu C$

Entonces: $(7 - Q_2)\ R_2 = Q_2\ .\ R_1$

$$\therefore Q_2 = \frac{7R_2}{R_2 + R_1} = \frac{7(0{,}2)}{0{,}7}$$

Por lo tanto: $Q_2 = 2{,}00\ \mu C$ y $Q_1 = 5{,}00\ \mu C$

Parte (b)

Sabemos que: $V = 0$ en $r = \infty$

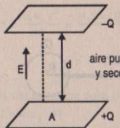
Entonces: $V_{sistema} = V_1 = V_2 = \dfrac{k_e . Q_1}{R_1}$

$$\Rightarrow \quad V_{sistema} = \frac{8,99 \times 10^9 \times (5,00 \times 10^{-6})}{0,5}$$

$$\therefore \quad V_{sistema} = 89,9 \text{ kV}$$

6. Considerando a la Tierra y una capa de nubes 800 m sobre la superficie terrestre como las "placas" de un capacitor, calcule la capacitancia si la capa de nubes tiene un área de 1,00 km². Suponga que el aire entre la nube y el suelo es puro y seco. Suponga que el aire entre la nube y el suelo es puro y seco. Suponga que la carga acumulada en la nube y el suelo hasta un campo eléctrico uniforme con una magnitud de $3,00 \times 10^6$ N/C a través del espacio entre ellos hace que el aire se rompa y conduzca electricidad como un relámpago. ¿Cuál es la máxima carga que puede soportar la nube?

Resolución :



Datos: $E = 3,00 \times 10^6$ N/C
$A = 1,00 \text{ km}^2$
$d = 800$ m
$Q = ?$

Sabemos que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es:

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times (1,00 \times 10^6)}{800}$$

$$\therefore \quad C = 1,1 \times 10^{-2} \text{ mF}$$

Por otro lado:

$$\Delta V = E.d = 3,00 \times 10^6 \times (800) = 2,4 \times 10^9 \text{ V}$$

Luego por definición: $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

$$\Rightarrow \quad Q = C \times \Delta V = 1,1 \times 10^{-2} \text{ mF} \times (2,4 \times 10^9 \text{ V})$$

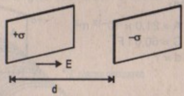
$$\therefore \quad Q_{máxima} = 26,4 \text{ C}$$

7. Un capacitor lleno de aire está compuesto de dos placas paralelas, cada una con un área de 7,60 cm², separadas por una distancia de 1,80 mm. si se aplica una diferencia de potencial de 20,0 V a estas placas, calcule a) el campo eléctrico entre las mismas, b) la densidad de carga superficial, c) la capacitancia, y d) la carga sobre cada placa.

Resolución :

Datos:

$A = 7,60 \text{ cm}^2$
$d = 1,80$ mm
$\Delta V = 20,0$ V



Parte (a)

Para una distancia de separación muy pequeña entre las placas, el campo es uniforme entonces:

$$\Delta V = E.d$$

$$\Rightarrow \quad 20,0 = E \times (1,80 \times 10^{-3} \text{ m})$$

$$\therefore \quad E = 11,1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Parte (b)

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$E_{(entre\ las\ placas)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad 11,1 \times 10^3 = \frac{\sigma}{8,85 \times 10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \sigma = 98,3 \text{ nC/m}^2$$

Parte (c)

en un capacitor de placas paralelas, la capacitancia es igual a:

$$C = \frac{\varepsilon_o . A}{d} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times (7,60 \times 10^{-4})}{1,8 \times 10^{-3}}$$

$$\therefore C = 3,74 \text{ pF}$$

Parte (d)

Por definición: $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

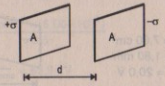
$$\Rightarrow \quad Q = C.\Delta V = 3,74 \times 10^{-12} \times (20)$$

$$\therefore Q = 74,8 \text{ pC}$$

8. Un chip de memoria de computadora de un megabit contiene muchos capacitores de 60,0 fF. Cada capacitor tiene un área de placa de $21,0 \times 10^{-12}$ m². Determine la separación de placas de tal capacitor (suponga una configuración de placas paralelas). El diámetro atómico característico es de 10^{-10} m = 0,100 nm. Exprese la separación de placas en nanómetros.

Resolución :

Datos: $A = 21,0 \times 10^{-12}\ m^2$
$C = 60,0\ fF$
$d = ?$



En un capacitor de placas paralelas, la capacitancia es igual a:

$$C = \frac{\varepsilon_o . A}{d}$$

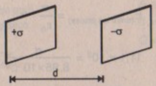
$$\Rightarrow \quad 60,0 \times 10^{-15} = \frac{8,85\times10^{-12} \times (21,0\times10^{-12})}{d}$$

$$\therefore \quad d = 3,1 \times 10^{-9}\ m = 3,1\ nm$$

9. Cuando se aplica una diferencia de potencial de 150 V a las placas de un capacitor de placas paralelas, las placas tienen una densidad de carga superficial de 30,0 nC/cm². ¿Cuál es el espaciamiento entre las placas?

Resolución :9

Datos: $\sigma = 30,0\ nC/cm^2$
$\Delta V = 150\ V$
$d = ?$



Sabemos que por la ley de Gauss, el campo eléctrico entre las placas es:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{30,0\times10^{-9}}{8,85\times10^{-12}} \times 10^{+4}$$

$$\therefore \quad E = 3,39 \times 10^{+7}\ N/C$$

Luego: $\Delta V = -\int E.ds = -E.d$

$\Rightarrow \quad |\Delta V| = E.d$ (para distancias de separación muy pequeñas)

$$\Rightarrow \quad 150\ V = 3,39 \times 10^{+7} \frac{V}{m} \times d$$

$$\therefore \quad d = 44,2 \times 10^{-7} m = 4,42\ mm$$

10. Un capacitor de aire variable que se usa en circuitos de sintonización está hecho de *N* placas semicirculares, cada una de radio *R* y separadas por una distancia d una de otras. Como se muestra en la figura P26.10, un segundo conjunto de placas idéntico, que tiene libertad para girar, se intercala con sus placas a la mitad entre aquellas del primer juego. El segundo conjunto puede rotar como unidad. Determine la capacitancia como una función del ángulo de rotación θ, donde θ = 0 corresponde a la máxima capacitancia.

Resolución :

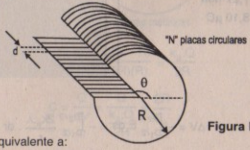
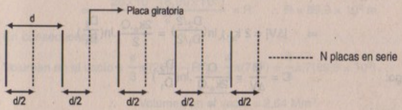


Figura P26.10

El sistema es equivalente a:



Sabemos que el área de una placa en función del ángulo giratorio es:

$$Área = \frac{\pi}{2} R^2.\theta$$

Luego: $$C_1 = \frac{\varepsilon_o . A}{\frac{d}{2}} = \frac{2 \cdot \varepsilon_o . A}{d} = \frac{\varepsilon_o . \pi R^2 . \theta}{d}$$

Luego: $$\frac{1}{C_{sistema}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_o . \pi R^2 . \theta}{d}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_o . \pi R^2 . \theta}{d}} + \ldots + \frac{1}{\frac{\varepsilon_o . \pi R^2 . \theta}{d}}$$

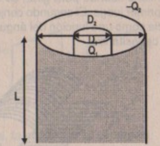
$$\therefore \quad C_{sistema\ total} = \frac{\varepsilon_o . \pi R^2 . \theta}{N.d}$$

11. Un cable coaxial de 50,0 m de largo tiene un conductor interior con un diámetro de 2,58 mm que conduce una carga de 8,10 μC. El conductor circundante tiene un diámetro interior de 7,27 mm y una carga de −8,10 μC.

a) ¿Cuál es la capacitancia de este cable? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos conductores? Suponga que la región entre los conductores es aire.

Resolución :

Datos: $L = 50{,}0$ m
$D_1 = 2{,}58$ mm
$D_2 = 7{,}27$ mm
$Q_1 = 8{,}10\ \mu C$



Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = -\int_{D_1/2}^{D_2/2} E.ds = -\int_{D_1/2}^{D_2/2} \frac{2k_e.\lambda}{r}.dr$

$$\Rightarrow \quad |\Delta V| = 2\,k_e.\lambda \ln\left(\frac{D_2/2}{D_1/2}\right) = \frac{2k_e.Q}{2}.\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)$$

Luego: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{2k_e.Q}{L}.\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}$

Entonces: $C = \frac{L}{2k_e \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)} = \frac{50{,}0}{2(8{,}99\times10^9).\ln\left(\frac{7{,}27}{2{,}58}\right)}$

$$\therefore \quad C = 2{,}68 \text{ nF}$$

Parte (b)

Sabemos que: $C = \frac{Q}{\Delta V}$

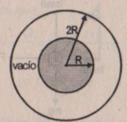
$$\Rightarrow \quad \frac{Q}{C} = \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{8{,}10\times10^{-6}}{2{,}68\times10^{-9}}$$

$$\therefore \quad \Delta V = 3{,}02 \text{ kV}$$

12. Un capacitor esférico de 20,0 μF está compuestos de dos esferas metálicas, una con radio dos veces mayor que la otra. Si la región entre las esferas es el vacío, determine el volumen de esta región.

Resolución :

Datos:
$C = 20\ \mu F$
Volumen (vacío) = ?



Sabemos que: $\Delta V = k_e.Q\frac{(2R-R)}{(2R)(R)} = \frac{k_e.Q}{2R}$

Entonces: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{k_e.Q}{2R}} = \frac{2R}{k_e}$

$$\Rightarrow \quad \frac{20\times10^{-6}(8{,}99\times10^9)}{2} = R \quad \therefore R = 89{,}9\times10^3 \text{ m}$$

En consecuencia:

Volumen en el vacío $= \frac{4}{3}\pi[(2R)^3 - R^3] = \frac{4}{3}\pi(7R^3) = \frac{4}{3}\pi.7(89{,}9\times10^3)$

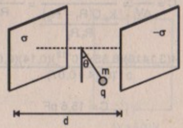
$$\therefore \quad \text{Volumen en el vacío} = 2{,}64 \text{ Mm}^3$$

13. Un pequeño objeto con una masa de 350 mg tiene una carga de 30,0 nC y está suspendido por medio de un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación de las placas es de 4,00 cm. Si el hilo forma un ángulo de 15,0° con la vertical, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

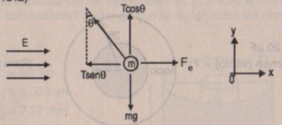
14. Un pequeño objeto con una masa m tiene una carga q y está suspendido por medio de un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación de las placas es d. Si el hilo forma un ángulo θ con la vertical, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

Resolución 13 y 14:

$\Delta V = ?$



Haciendo: (D.C.L)



Entonces: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\text{sen}\theta = F_e = q.E$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$

Luego: $\dfrac{mg.\tan\theta}{q} = E$

Como: $\Delta V = -\int_a^b E.ds = -E.d$ (distancias cortas, "E" uniforme)

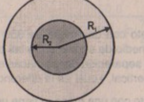
$$\Rightarrow |\Delta V| = \frac{mg.\tan\theta}{q}.d$$

15. Un capacitor esférico lleno de aire se construye con un cascarón interior y uno exterior de 7,00 y 14,0 cm de radio, respectivamente. a) Calcule la capacitancia del dispositivo. b) ¿Qué diferencia de potencial entre las esferas resulta en una carga de 4,00 μC sobre el capacitor?

Resolución :

Datos: $R_1 = 1,40$ cm

$R_2 = 7,0$ cm



Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = \dfrac{k_e.Q(b-a)}{ab} = \dfrac{k_e.Q(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}$

Entonces: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{Q}{\dfrac{k_e.Q(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}} = \dfrac{4\pi.\varepsilon_o(R_1 R_2)}{R_1 - R_2}$

$$\Rightarrow C = \frac{4(3,1416)(8,85\times10^{-12})(0,14)(0,07)}{(0,14-0,07)}$$

$$\therefore C = 15,6 \text{ pF}$$

Parte (b)

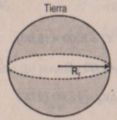
Por definición empírica sabemos que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{4,00\times10^{-6}}{15,6\times10^{-12}}$$

$$\therefore \Delta V = 256,4 \text{ kV}$$

16. Determine la capacitancia de la Tierra. (*Sugerencia:* el conductor exterior del "capacitor esférico" puede considerarse como una esfera conductora en el infinito donde *V* tiene a 0).

Resolución :



$R_{Tierra} = 6,37 \times 10^6$ m

$C_T = ?$

Sabemos que por demostración la capacitancia de una esfera cargada aislada está dada por:

$$C = 4\pi.\varepsilon_o.R$$

$$\Rightarrow C_{Tierra} = 4\pi.\varepsilon_o.R_{Tierra}$$

$$\Rightarrow C_{Tierra} = 4(3,1416)(8,85\times10^{-12})(6,37\times10^6)$$

$$\therefore C_{Tierra} = 708\times10^{-6} \text{ F} \quad 708\ \mu\text{F}$$

COMBINACIONES DE CAPACITORES

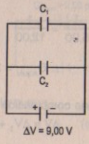
17. Dos capacitores $C_1 = 5,00$ μF y $C_2 = 12,0$ μF están conectados en paralelo, y la combinación resultante está conectada a una batería de 9,00 V. a) ¿Cuál es el valor de la capacitancia equivalente de la combinación? ¿Cuáles son b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y c) la carga almacenada en cada capacitor?

Resolución :

Datos: $C_1 = 5,00$ μF

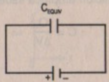
$C_2 = 12,0$ μF

$\Delta V = 9,00$ V



Parte (a)

En una combinación en paralelo se cumple que:



$$C_{equiv} = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad C_{equiv} = 5{,}00\ \mu F + 12{,}0\ \mu F$$

$$\therefore C_{equiv} = 17{,}0\ \mu F$$

Parte (b)

Como cada capacitador está conectada a una misma batería, entonces:

$$\Delta V_1 = \Delta V = 9{,}00\ V$$

$$\Delta V_2 = \Delta V = 9{,}00\ V$$

Luego por definición:

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = C_1\ \Delta\ V_1 = 5{,}00 \times (9{,}00)$$

$$\therefore \quad Q_1 = 45{,}00\ \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V_2} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_2 = 12{,}00\ (9{,}00)$$

$$\therefore \quad Q_2 = 108\ \mu C$$

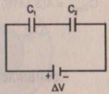
18. Los dos capacitores del problema 17 ahora están conectados en serie y a una batería de 9,00 V. Encuentre a) el valor de la capacitancia equivalente de la combinación. b) el voltaje a través de cada capacitor y c) la carga en cada capacitor.

Resolución :

Datos: $C_1 = 5{,}00\ \mu F$

$C_2 = 12{,}00\ \mu F$

$\Delta V = 9{,}00\ V$



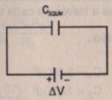
Parte (a)

En una combinación en serie se cumple que:

$$\frac{1}{C_{equiv}} = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{C_{equiv}} = \frac{1}{5{,}00} = \frac{1}{12{,}00}$$

$$\therefore C_{equiv} = 3{,}53\ \mu F$$



Parte (b)

Sabemos que en una combinación en serie se cumple que:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Pero: $\Delta V = \dfrac{Q}{C_{equiv}} \quad \Rightarrow \quad Q = \Delta V \cdot C_{equiv} = (9{,}00)(3{,}53)$

$$\therefore Q = 31{,}8\ \mu C$$

Luego: (por definición)

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_1 = \frac{31{,}8 \times 10^{-6}}{5{,}00 \times 10^{-6}}$$

$$\therefore \quad \Delta V_1 = 6{,}36\ V$$

$$C_2 = \frac{Q}{\Delta V_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_2 = \frac{31{,}8 \times 10^{-6}}{12{,}0 \times 10^{-6}}$$

$$\therefore \quad \Delta V_2 = 2{,}64\ V$$

Parte (c)

De lo hallado en la parte (b) tenemos que en una combinación en serie se cumple que:

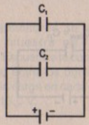
$$Q_{total} = Q_1 = Q_2$$

Entonces:

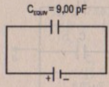
$$Q_{total} = Q_1 = Q_2 = 31{,}8 \times 10^{-6}\ C = 31{,}8\ \mu C$$

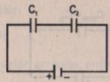
19. Dos capacitores, cuando están conectados en paralelo, producen una capacitancia equivalente de 9,00 pF, y una capacitancia equivalente de 2,00 pF cuando se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia de cada capacitor?

Resolución :

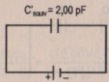


⇒





⇒



En una combinación en paralelo se cumple que:

$$C_{equiv} = C_1 + C_2 \quad \ldots (\alpha)$$

En una combinación en serie se cumple que:

$$C'_{equiv} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2} \quad ... (\beta)$$

Entonces (α) en (β)

$$C'_{equiv} = \frac{C_1.C_2}{C_{equiv}}$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}00 = \frac{C_1.C_2}{9{,}00} \qquad \therefore \quad C_1.\, C_2 = 18{,}00$$

Luego de (α): $$C_{equiv} = C_1 + \frac{18{.}00}{C_1}$$

$$\Rightarrow \quad 9{,}00 = C_1 + \frac{18{,}00}{C_1} \qquad \therefore \quad C_1^2 - 9{,}00C_1 + 18{,}00 = 0$$

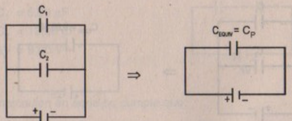
Desarrollando dicha ecuación:

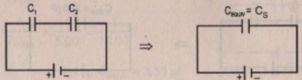
Resulta que: Si: $C_1 = 6{,}00$ pF $\Rightarrow$ $C_2 = 3{,}00$ pF

Si: $C_2 = 3{,}00$ pF $\Rightarrow$ $C_2 = 6{,}00$ pF

20. Dos capacitores, cuando están conectados en paralelo, producen una capacitancia equivalente C_p, y una capacitancia equivalente C_s cuando se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia de cada capacitor?

Resolución:





En una combinación en paralelo se cumple que:

$$C_{equiv} = C_P = C_1 + C_2 \quad ... (1)$$

En una combinación en serie se cumple que:

$$C_{equiv} = C_S = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2} \quad ... (2)$$

Entonces (1) en (2)

$$C_S = \frac{C_1.C_2}{C_p} \qquad \therefore \quad C_P.C_S = C_1.C_2$$

Luego: $$C_1 = \frac{C_P.C_S}{C_2} \quad ... (\alpha)$$

Reemplazando (α) en (1)

$$C_P = \frac{C_P.C_S}{C_2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2^2 - C_2.C_P + C_P.C_S = 0$$

Resolviendo dicha ecuación de segundo grado resulta que:

$$C_2 = \frac{C_P \pm \sqrt{C_P^2 - 4C_P.C_S}}{2}$$

En consecuencia:

Si: $$C_2 = \frac{C_P}{2} + \sqrt{C_P^2 - 4C_P.C_S} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{C_P}{2} - \sqrt{C_P^2 - 4C_P.C_S}$$

Si: $$C_2 = \frac{C_P}{2} - \sqrt{C_P^2 - 4C_P.C_S} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{C_P}{2} + \sqrt{C_P^2 - 4C_P.C_S}$$

21. Cuatro capacitores se conectan como se muestra en la figura P26.21. a) Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos a y b. b) Calcule la carga en cada capacitor si $\Delta V_{ab} = 15{,}0$ V.

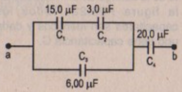


Figura P26.21

Resolución:

Parte (a)

C_1 y C_2 están en serie, entonces: $C_{equiv} = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \dfrac{(15{,}00)(3{,}00)}{(18{,}00)} = 2{,}5\ \mu F$

C_{equiv} y C_S están en paralelo, entonces:

$$C'_{equiv} = C_{equiv} + C_S = 2{,}5 + 6{,}00 = 8{,}5\ \mu F$$

C'_{equiv} y C_4 están en serie, entonces:

$$C''_{equiv} = \frac{C'_{equiv} \cdot C_4}{C_4 + C'_{equiv}} = \frac{(8,5)(20,0)}{28,5} = 5,96\ \mu F$$

En consecuencia:

$$C_{\text{equivalente entre a y b}} = C''_{equiv} = 5,96\ \mu F$$

Parte (b)

Si: $\Delta V_{(a\ y\ b)} = 15,0\ V \quad Q_1 = ?;\ Q_2 = ?;\ Q_3 = ?;\ Q_4 = ?$

$Q_1 = Q_2 = Q_{equiv}$ (en serie)

$Q'_{equiv} = Q_{equiv} + Q_3$ (en paralelo)

$Q'_{equiv} = Q_4 = Q''_{equiv} = C''_{equiv} \cdot \Delta V_{(ab)} = (5,96)(15)$

$\therefore \quad Q_4 = 89,5\ \mu C$

Como: $Q_4 = Q'_{equiv} = \Delta V \cdot C'_{equiv} = \Delta V \times (8,5) \quad \therefore \Delta V = 10,53\ V$

Luego: $Q_3 = C_3 \cdot \Delta V = (6,00)(10,53) = 63,2\ \mu C$

Como: $Q_1 = Q_2 = Q_{equiv} = \Delta V \cdot C_{equiv} = (10,53)(2,5)$

$\therefore \quad Q_1 = Q_2 = 26,3\ \mu C$

22. Evalúe la capacitancia equivalente de la configuración mostrada en la figura P26.22. Todos los capacitores son idénticos y cada uno tiene capacitancia C.

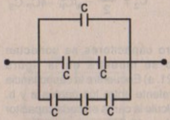
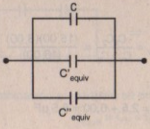


Figura P26.22

Resolución :

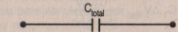
Parte (a)



$$C'_{equiv} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{1}{2}C$$

$$C''_{equiv} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{1}{3}C$$

Parte (b)



$$C_{total} = C + C'_{equiv} + C''_{equiv} = C + \frac{1}{2}C + \frac{1}{3}C$$

$$\therefore \quad C_{\text{equiv total}} = \frac{11}{6}C$$

23. Considere el circuito mostrado en la figura P26.23, donde $C_1 = 6,00\ \mu F$, $C_2 = 3,00\ \mu F$ y $\Delta V = 20,0\ V$. El capacitor C_1 se carga primero cerrando el interruptor S_1. Este interruptor se abre después, y el capacitor cargado se conecta al capacitor descargado al cerrar S_2. Calcule la carga inicial adquirida por C_1 y la carga final en cada uno.

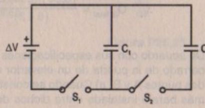


Figura P26.23

Resolución :

Datos: $C_1 = 6,00\ \mu F$

$C_2 = 3,00\ \mu F$

$\Delta V = 20,0\ V$

Carga inicial adquirida por C_1:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V = (6,00\ \mu F)(20V)$$

$$\therefore Q_1 = 120\ \mu C$$

Carga final adquirida por C_1 y C_2:

Sabemos que: $Q_{\text{total inicial sistema}} = C_1 \cdot \Delta V$

$Q_{\text{total inicial sistema}} = C_1 \cdot \Delta V_{final} + C_2\ \Delta V_{final}$ (están en paralelo)

Por la conservación de la carga:

$$Q_{\text{total inicial}} = Q_{\text{total final}}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \cdot \Delta V = C_1 \cdot \Delta V_{final} + C_2\ \Delta V_{final}$$

$$\therefore \quad \Delta V_{final} = \frac{C_1 \cdot \Delta V}{C_1 + C_2}$$

Luego: $Q_{1\ final} = C_1.\Delta V_{final} = \dfrac{C_1^2.\Delta V}{C_1 + C_2}$

$$\therefore \quad Q_{1\ final} = \frac{(6{,}00)^2(20)}{(6+3)} = 80 \times 10^{-6}\ C = 80\ \mu C$$

$$Q_{2\ final} = C_2.\Delta V_{final} = \frac{C_1.C_2.\Delta V}{C_1 + C_2}$$

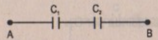
$$\therefore \quad Q_{2\ final} = \frac{(6{,}00)(3{,}00)(20)}{(6+3)} = 40 \times 10^{-6}\ C = 40\ \mu C$$

24. De acuerdo con sus especificaciones de diseño, el circuito de tiempo que retrasa el cerrado de la puerta de un elevador debe tener una capacitancia de 32,0 μF entre dos puntos A y B. a) Cuando se construye un circuito, se encuentra que el capacitor más barato instalado entre dichos dos untos tiene 34,8 μF de capacitancia. Para satisfacer las especificaciones se puede colocar un capacitor adicional entre los dos puntos. ¿Éste debería estar en serie o en paralelo con el capacitor de 34,8 μF? ¿Cuál sería su capacitancia? b) El siguiente circuito baja la línea de montaje con capacitancia de 29,8 μF entre *A* y *B*. ¿Qué capacitor adicional debería instalarse, en serie o en paralelo, en dicho circuito para satisfacer la especificación?

Resolución:

Datos: $C_{equivalente} = 32{,}0\ \mu F$ (entre 2 puntos A y B)

Parte (a)



$C_1 = 34{,}8\ \mu F \quad C_2 = ?$

Para que produzca una capacitancia equivalente entre 2 puntos A y B se tiene que colocar un segundo capacitor en serie, luego:

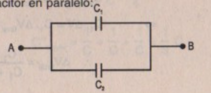
$$\frac{1}{C_{equiv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \frac{1}{32{,}0} = \frac{1}{34{,}8} + \frac{1}{C_2}$$

$$\therefore \quad C_2 = 400\ \mu f$$

Parte (b)

$C_1 = 29{,}8\ \mu F \quad C_2 = ?$

Para que produzca una capacitancia equivalente de 32,00 mF entre 2 puntos A y B se tiene que colocar un segundo capacitor en paralelo:



Entonces: $C_{equiv} = C_1 + C_2$

$\Rightarrow \quad 32{,}00 = 29{,}8 + C_2$

$\therefore \quad C_2 = 2{,}2\ \mu F$

25. El circuito en la figura P26.25 se compone de dos placas metálicas paralelas idénticas conectadas mediante resortes metálicos idénticos a una batería de 100 V. Con el interruptor abierto las placas están descargadas, se encuentran separadas por una distancia d = 8,00 mm y tienen una capacitancia C = 2,00 μF. Cuando se cierra el interruptor, la distancia entre las placas disminuye en un factor de 0,500. a) ¿Cuánta carga recoge cada placa, y b) cuál es la constante de fuerza de cada resorte? (*Sugerencia:* utilice el resultado del problema 35).

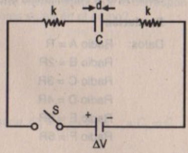


Figura P26.25

Resolución:

Datos: $\Delta V = 100\ V$

$C = 2{,}00\ \mu F$

$d = 8{,}00\ mm$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V_{inicial} = E.d_{inicial}$

Cuando se abre el interruptor la distancia entre las placas disminuye en la mitad, luego:

$$\Delta V_{final} = E.\frac{d_{inicial}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\ \Delta V_{final} = \Delta V_{inicial} = 2(100) = 200\ V$$

Luego: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad Q = C.\Delta V = (2)(200) = 400\ \mu F$

Parte (b)

De la sugerencia, sabemos que: $F_{en\ cada\ placa} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_o.A}$

Luego: como $F_{resorte} = F_{en\ cada\ placa}$

$$\Rightarrow \quad K(\Delta x) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o.A} \ \therefore\ K = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o.A(\Delta x)} = \frac{2Q^2}{2C.d.\Delta x}$$

En consecuencia:

$$K = \frac{2(400 \times 10^{-6})^2}{2(2 \times 10^{-6})(8 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})} = 250\ k\ N/m$$

26. La figura P26.26 muestra seis esferas conductoras concéntricas, A, B, C, D, E y F, que tienen radios *R*, 2*R*, 3*R*, 4*R*, 5*R* y 6*R*, respectivamente. Las esferas B y C están conectadas mediante un alambre conductor, del mismo modo que las esferas D y E. Determine la capacitancia equivalente de este sistema.

Resolución :

Datos: Radio A = R
Radio B = 2R
Radio C = 3R
Radio D = 4R
Radio E = 5R
Radio F = 6R

Figura 26.26

$C_A = 4\pi\varepsilon_o.R$

C_B y C_C están en paralelo. Entonces: $C_{equiv\,1} = C_B + C_C = 4\pi\varepsilon_o(5R)$

C_A y $C_{equiv\,1}$ están en serie. Entonces:

$$\frac{1}{C_{equiv\,2}} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_{equiv\,1}} = \frac{4\pi\,\varepsilon_o(5R)(R)}{5R-R}$$

$$\therefore\quad C_{equiv\,2} = 4\pi\varepsilon_o\left(\frac{5R}{4}\right)$$

C_D y C_E están en paralelo. Entonces:

$$C_{equiv\,3} = C_D + C_E = 4\pi\varepsilon_o(4R) + 4\pi\varepsilon_o(5R)$$

$$\therefore\quad C_{equiv\,3} = 4\pi\varepsilon_o(9R)$$

Luego: $C_{equiv\,2}$ y $C_{equiv\,3}$ están en serie.

Entonces: $$C_{equiv\,4} = \frac{4\pi\,\varepsilon_o\,(9R)(5R/4)}{\frac{31R}{4}}$$

$$\therefore\quad C_{equiv\,4} = 4\pi\varepsilon_o\left(\frac{45R}{31}\right)$$

En consecuencia:
$C_{equiv\,4}$ y C_F están en serie.

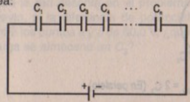
Luego: $$C_{equiv\ del\ sistema} = \frac{4\pi\varepsilon_o\left(\frac{45R}{31}\right)(6R)}{\frac{141R}{31}}$$

$$\therefore\quad C_{equiv\ del\ sistema} = 4\pi.\varepsilon_o.(1{,}9\ R)$$

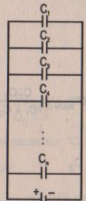
27. Un grupo de capacitores idénticos se conectan primero en serie y después en paralelo. La capacitancia combinada en paralelo es 100 veces mayor que la correspondiente a la conexión en serie. ¿Cuántos capacitores están en el grupo?

Resolución :

Sea:



En serie: $C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_n = C$



En paralelo: $C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_n = C$

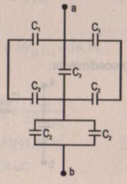
Por condición: $C_{\substack{equivalente\\en\ paralelo}} = 100\ .\ C_{\substack{equivalente\\en\ serie}}$

Luego: $n.c = 100.\frac{c}{n} \quad \therefore n = 10$

En consecuencia:

"10 capacitores están en el grupo"

28. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos a y b para el grupo de capacitores conectados como se indica en la figura P26,28 si $C_1 = 5{,}00\ \mu F$, $C_2 = 10{,}0\ \mu F$ y $C_3 = 2{,}00\ \mu F$.

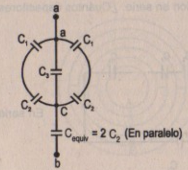


Resolución :

Datos: $C_1 = 5{,}00\ \mu F$ $C_2 = 10{,}0\ \mu F$ $C_3 = 2{,}00\ \mu F$

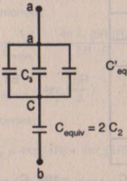
$C_{equiv(a\ y\ b)} = ?$

Primer procedimiento:



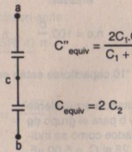
Segundo procedimiento:

$$C'_{equiv} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$



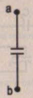
$$C'_{equiv} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2} \text{ (en serie)}$$

Tercer procedimiento:



$$C''_{equiv} = \frac{2C_1.C_2}{C_1 + C_2} + C_3 \text{ (en paralelo)}$$

Cuarto procedimiento:



$$C_{\substack{equivalente \\ sistema}} = \frac{2.C_2\left(2C_1.C_2 + C_3\ [C_1 + C_2]\right)}{2C_1.C_2 + (2C_2.C_3 + C_3)(C_1 + C_2)} \text{ (en serie)}$$

Reemplazando datos:

$$C_{\text{equivalente del sistema}} = \frac{2(10)[2(5)(10)+2(15)]}{2(5)(10)+2(10)(2)(15)} = 6{,}046\ \mu F$$

29. Para la red descrita en el problema previo, si la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de 60,0 V, ¿qué carga se almacena en C_3?

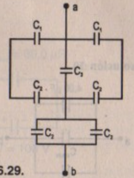


Figura P26.29.

Resolución :

Datos: $\Delta V_{(a\ y\ b)} = 60{,}0\ V$

$Q_B = ?$

Sea: "Q_3" del capacitor: "C_3"

Sabemos que:

$$C_{sistema} = 6{,}046 = \frac{Q_{sistema}}{\Delta V_{(a,b)}} \quad \text{(hallado en el problema n.° 28)}$$

$$\therefore Q_{sistema} = (6{,}046)(60) = 362{,}79\ \mu C$$

Luego:

$$Q_{sistema} = Q_{equiv} = Q''_{equiv} = 362{,}79\ \mu C \quad \text{(están en serie)}$$

Entonces: $Q_{equiv} = C_{equiv} \,.\, \Delta V_{(b\ y\ c)}$

$$\Rightarrow \quad 362{,}79 = (2C_2)(\Delta V_{b\ y\ c}) = 2(10)\,.\,\Delta V_{(b\ y\ c)}$$

$$\therefore \Delta V_{(b\ y\ c)} = 18{,}14\ V$$

Luego: $\Delta V_{(ab)} = \Delta V_{(a\ y\ c)} + \Delta V_{(b\ y\ c)} \Rightarrow 60{,}0\ V = \Delta V_{(a\ y\ c)} + 18{,}14$

$$\therefore \Delta V_{(ayc)} = 41{,}86\ V$$

Como: "C_3" está a una $\Delta V_{(a\ y\ c)}$ entonces: $C_3 = \dfrac{Q_3}{\Delta V_{(ayc)}}$

$$\Rightarrow \quad Q_3 = C_3\,.\,\Delta V_{(a\ y\ c)} = (2{,}00\ \mu F)(41{,}86\ V)$$

$$\therefore Q_3 = 83{,}6 \times 10^{-6}\ C = 83{,}6\ \mu C$$

30. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* en la combinación de capacitores mostrada en la figura P26.30.

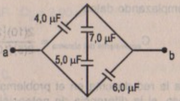
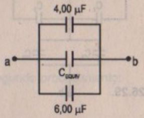


Figura P26.30

Resolución :30



$C_{\text{equivalente sistema}} = ?$

Donde: $C_{equiv} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} = 2{,}92\ \mu F$

En consecuencia los 3 capacitores están en paralelo, luego:

$$C_{\text{total sistema}} = 4{,}00\ \mu F + 2{,}92\ \mu F + 6{,}00\ \mu F$$

$$\therefore\ C_{\substack{\text{total equivalente}\\ \text{del sistema}}} = 12{,}92\ \mu F$$

ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR CARGADO

31. a) Un capacitor de 3,00 μF está conectado a una batería de 12,0 V. ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor? b) Si el capacitor hubiese estado conectado a una batería de 6,00 V, ¿cuánta energía se habría almacenado?

Resolución :

Parte (a)

$\Delta V = 12{,}00\ V$ $\quad C = 3{,}00\ \mu F$ $\quad E = ?$

Sabemos que: $\quad E = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}C.\Delta V^2$

$$\Rightarrow\ E = \frac{1}{2}(3{,}00)(12{,}00)^2 = 216\ \mu J$$

Parte (b)

$\Delta V = 6{,}00\ V$ $\quad C = 3{,}00\ \mu F$ $\quad E = ?$

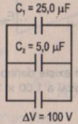
Entonces: $\quad E = \dfrac{1}{2}C.\Delta V^2 = \dfrac{1}{2}(3{,}00)(36) = 54{,}0\ \mu J$

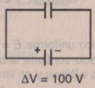
32. Dos capacitores, $C_1 = 25{,}0\ \mu F$ y $C_2 = 5{,}00\ \mu F$, están conectados en paralelo y cargados con un suministro de potencia de 100 V. a) Dibuje un diagrama de circuito y calcule la energía total almacenada en los dos capacitores. b) ¿Qué diferencia de potencial se requeriría a través de los mismo dos capacitores conectados en serie de modo que la combinación almacene la misma energía que en la parte a)? Dibuje un diagrama de circuito de esta configuración.

Resolución :

Parte (a)

En paralelo



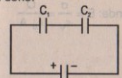


Sabemos que: $\quad E = \dfrac{1}{2}C_E.\Delta V^2 = \dfrac{1}{2}(30{,}0)(100)^2$

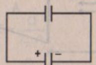
$$\therefore\ E_{total} = 0{,}15\ J$$

Parte (b)

En serie: $\quad C_{equiv} = \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{5} = 0{,}24\ \mu F$



⇒



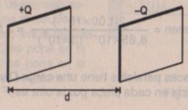
Luego: $\quad E_{total} = \dfrac{1}{2}C.\Delta V^2 \ \Rightarrow 0{,}15 = \dfrac{1}{2}(0{,}24)(\Delta V)^2$

$$\therefore\ \Delta V = 1{,}12\ V$$

33. Se carga un capacitor de placas paralelas y luego se desconecta de una batería. ¿En qué fracción cambia (incrementa o disminuye) la energía almacenada cuando la separación de las placas se duplica?

Resolución :

Sea:



Sabemos que: $E_{total} = \frac{1}{2}Q.\Delta V$

Si d se duplica entonces: $\Delta V_{final} = 2.\Delta V$

Luego: $E_{total\ final} = \frac{1}{2}.Q.(\Delta V_{final}) = \frac{1}{2}Q(2\Delta V) = Q.\Delta V$

Luego: $\dfrac{E_{total\ inicial}}{E_{total\ final}} = \dfrac{Q.\Delta V}{2.Q\Delta V} = 0{,}5 \qquad \therefore E_{final} = 2\,E_{inicial}$

34. Un campo eléctrico uniforme E = 3 000 V/m existe dentro de cierta región. ¿Qué volumen de espacio contiene una energía igual a 1,00 × 10^{-7} J? Exprese su respuesta en metros cúbicos y en litros.

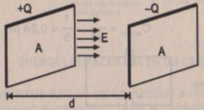
Resolución :

Datos: $E = 3\,000\,\frac{V}{m}$ (uniforme)

$E_{total} = 1{,}00 \times 10^{-7}$ J

Volumen = ?

Sea:



Donde: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o.A}$

Entonces: $E_{total} = \frac{1}{2}Q.\Delta V = \frac{1}{2}C.\Delta V^2$

$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_o.A}{d}\right)(E.d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o(A.d).E^2$

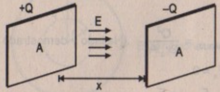
$\Rightarrow \quad \dfrac{2E_{total}}{\varepsilon_o.E^2} = \text{Volumen}$

Entonces: $\text{Volumen} = \dfrac{2(1{,}00\times10^{-7})}{8{,}85\times10^{-12}(3\times10^3)^2} = 2{,}51 \times 10^{-3}\ m^3\ 2{,}51\ L$

35. Un capacitor de placas paralelas tiene una carga Q y placas de área A. Demuestre que la fuerza ejercida en cada placa por la otra es $F = Q^2 / 2\varepsilon_0 A$. (*Sugerencia:* deje que $C = \varepsilon_0 A/x$ para una separación de placas arbitaria x, en ese caso se requiere que el trabajo efectuado en la separación de las dos palcas cargadas sea $W = \int F\,dx$.)

Resolución :

Sea:



Por demostrar que:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o.A} \text{ en cada placa}$$

Sea la placa de "Q" positiva:

Sabemos que: $dF = E.dQ$ ("E" uniforme y constante) ... (1)

Por otro lado: (de la sugerencia)

$$C = \frac{\varepsilon_o.A}{x}$$

Como: $\Delta V = E.x \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q}{\frac{\varepsilon_o.A}{x}} = E.x$

$$\therefore \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_o.A}$$

Luego de (1): $dF = E.dQ = \dfrac{Q}{\varepsilon_o.A}.dQ$

Por lo tanto: $F = \int df = \int_o^Q \dfrac{Q}{\varepsilon_o.A}.dQ = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_o.A}$ Lqqd.

36. La placa *a* de un capacitor de placas paralelas lleno de aire está conectada a un resorte de constante de fuerza *k* y la placa *b* está fija. Ambas descansan sobre la parte superior de una mesa, como se indica (vista de arriba) en la figura P26.36. Si una carga +*Q* se pone en la placa *a* y una carga –*Q* se pone en la placa *b*, ¿cuánto se estira el resorte?

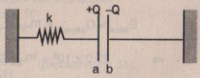
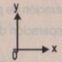


Figura P26.36

Resolución:



$\Delta x = ?$

Sabemos que:

$$F_{\text{ejercida en la placa (a)}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 . A} \quad \text{(Hallado y demostrado en el problema 35)}$$

Entonces: $\quad \Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow \quad F_{recup} = F_{\text{ejercida en la placa (a)}}$$

$$\Rightarrow \quad k.(\Delta x) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 . A}$$

$$\therefore \quad \Delta x = \frac{Q.Q}{2\varepsilon_0 . A.k} \quad \text{(donde "A" es el área de la placa)}$$

37. **Problema de repaso.** Cierto nubarrón tiene una diferencia de potencial de $1{,}00 \times 10^8$ V respecto de un árbol. Si durante una tormenta eléctrica 50,0 C de carga se transfieren a través de esta diferencia de potencial y 1,00% de la energía la absorbe el árbol, ¿cuánta agua (savia en el árbol) inicialmente a 30,0 °C puede hervir? El agua tiene un calor específico de 4 186J/kg °C, un punto de ebullición de 100 °C y un calor de evaporación de $2{,}26 \times 10^6$ J/kg.

Resolución:

Se tiene y se sabe que $\Delta V_{(\text{nubarrón y árbol})} = 1{,}00 \times 10^8$ V

Cuando ocurre una tormenta eléctrica 50,0 C del nubarrón al árbol son transferidos a través de esta diferencia de potencial y 1,00% de la E_{total} la absorve el árbol luego:

$$0{,}01\, E_{total} = E_{árbol}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}01(\frac{1}{2})(Q)(\Delta V) = E_{árbol}$$

$$\therefore E_{árbol} = (0{,}01)(0{,}5)(50)(1{,}00 \times 10^8) = 25 \text{ MJ}$$

Como hay una determinada cantidad de agua en el árbol a 30°C entonces la cantidad de energía absorbida por el árbol se transforma ó la adquiere en forma de calor. Luego; la cantidad de calor que se necesitará para hervir el agua será:

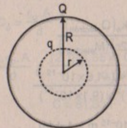
$$E_{árbol} = Q_{ganado} = m_{H_2O}.L_{vaporiz} + m_{H_2O}.C_{H_2O}.\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad 25{,}0 \times 10^6 = m_{H_2O}[2{,}26 \times 10^6 + 4\,186 + (100 - 30)]$$

$$\therefore \quad m_{H_2O} = 9{,}79 \text{ kg}$$

38. Muestre que la energía asociada a una esfera conductora de radio R y carga Q rodeada por el vacío es $U = k_eQ^2/2R$.

Resolución:



Por demostrar que: $\quad U = \dfrac{k_e.Q^2}{2R}$

Sabemos que: $\quad dV = \dfrac{k_e}{R} dQ \quad$ (a una distancia "R")

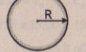
y como: $\quad dV = \dfrac{dU}{q} \Rightarrow dU = q.dV$

Luego: $\quad dU = \dfrac{k_e}{R}.q.da \quad \Rightarrow \quad U_{total} = \int dU = \int_o^Q \dfrac{k_e}{R}.q.dQ$

$$\therefore \quad U_{total} = \frac{k_e.Q^2}{2R} \qquad \text{Lqqd.}$$

39. Con su famosa relación $E = mc^2$, Einstein dijo que la energía está asociada a la masa. Calcule el radio de un electrón, suponiendo que su carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de radio R y que la masa–energía del electrón es igual a la energía total almacenada en el campo eléctrico diferente de cero que resulta entre R y el infinito. (Véase el problema 38. No obstante, de manera experimental, un electrón aparece como una partícula puntual. El campo eléctrico cerca del electrón debe ser descrito por electrodinámica cuántica en lugar de la electrodinámica clásica que aquí se estudia.)

Resolución:



Sabemos que: $\quad U_{total}\,(\text{esfera}) = \dfrac{k_e.Q^2}{2R} \quad$ (problema n.° 38)

Por la relación de Einstein

$$E_{total} = m.c^2$$

Entonces: $\dfrac{k_e.Q^2}{2R} = m.c^2$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{k_e.Q^2}{2c^2.m} = \frac{k_e(Q_{electrón})^2}{2c^2(M_{electrón})}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{8{,}99\times10^9\times(-1{,}6\times10^{-19})^2}{2(3\times10^8)^2\times(9{,}1\times10^{-31})}$$

$$\therefore \quad R = 1{,}4 \times 10^{-15}\ m = 1{,}4\ fm$$

CAPACITORES CON DIELÉCTRICOS

40. Encuentre la capacitancia de un capacitor de placas paralelas que usa baquelita como dieléctrico, si cada una de las placas tiene un área de 5,00 cm² y la separación de placas es de 2,00 mm.

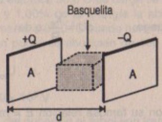
Resolución:

Datos: $k_{basquelita} = 4{,}9$

$d = 2{,}0\ mm \equiv 2{,}0 \times 10^{-3}\ m$

$A = 5{,}00\ cm^2 \equiv 5{,}0 \times 10^{-4}\ m^2$

$C = ?$



Sabemos que: $C = k\,.\,C_o$

Pero: $C_o = \dfrac{\varepsilon_o.A}{d}$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{k.\varepsilon_o.A}{d} = \frac{4{,}9\times(8{,}85\times10^{-12})(5\times10^{-4})}{2{,}00\times10^{-3}}$$

$$\therefore \quad C = 10{,}8\ pF$$

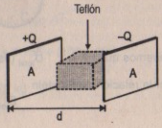
41. Determine a) la capacitancia y b) el voltaje máximo que se puede aplicar a un capacitor de placas paralelas lleno de teflón, que tiene un área de placa de 1,75 cm² y separación de placa de 0,040 mm.

Resolución:

Datos: $A = 1{,}75\ cm^2 \equiv 1{,}75 \times 10^{-4}\ m^2$

$d = 0{,}040\ mm \equiv 0{,}040 \times 10^{-3}\ m$

$k_{teflón} = 2{,}1$



Parte (a)

Sabemos que: $C = k\,C_o$

Pero: $C_o = \dfrac{\varepsilon_o.A}{d}$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{k.\varepsilon_o.A}{d} = \frac{(2{,}1)(8{,}85\times10^{-12})(1{,}75\times10^{-4})}{0{,}040\times10^{-3}}$$

$$\therefore \quad C = 81{,}3\ pF$$

Parte (b)

$\Delta V_{máx} = ? \quad \Rightarrow \quad E_{máximo}$ = Resistencia dieléctrica = 60×10^6 V/m

Luego:

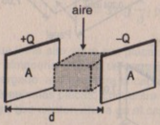
$$\Delta V_{máximo} = E_{máx}\,.\,d = 60 \times 10^6 \times (0{,}040 \times 10^3)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{\substack{máximo\\ del\ teflón}} = 2{,}4\ kV$$

42. a) ¿Cuánta carga se puede colocar en un capacitor con aire entre las placas antes de que pierda la resistencia, si el área de cada una de las placas es de 5,00 cm²? b) Encuentre la máxima carga si se usa poliestireno en lugar de aire entre las placas.

Resolución:

Sea:



Datos:
$A = 5{,}00\ cm^2 \equiv 5{,}00 \times 10^{-4}\ m^2$

Parte (a)

Antes de que pierda la resistencia, el campo eléctrico máximo, será igual a la resistencia dieléctrica del aire, es decir: $E_{máx} = 3 \times 10^6$ V/m ; luego:

$$Q = C.\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{\varepsilon_o.A}{d} \times (E.d) = \varepsilon_o\,.\,A\,.\,E_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad Q = 8{,}85 \times 10^{-12} \times (5{,}00 \times 10^{-4})(3 \times 10^6)$$

$$\therefore Q = 13{,}3\ nC$$

Parte (b)

$k_{poliestireno} = 2{,}56$ $\qquad E_{máx}$ = Resist. dieléctrica = 24×10^6 V/m

Luego: $\qquad Q_{máximo} = k\,.\,C_o\,\Delta V_{máx}$

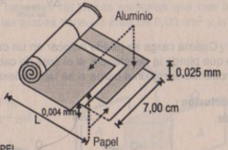
$$\Rightarrow \quad Q_{máximo} = k \cdot \frac{\varepsilon_o . A}{d} \times E_{máx} \cdot d = k.C.A.E_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{máximo} = 2{,}56 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times 5{,}00 \times 10^{-4} \times 24 \times 10^{6}$$

$$\therefore \; Q_{máximo} = 0{,}272 \; \mu C$$

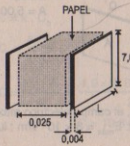
43. Un capacitor comercial se construye como se muestra en la figura 26.15a. Este capacitor particular se enrolla a partir de dos tiras de aluminio separadas por dos tiras de papel cubierto de parafina. Cada tira de lámina y de papel mide 7,00 cm de ancho. La lámina tiene un espesor de 0,00400 mm; el papel tiene un espesor de 0,025 0 mm y una constante dieléctrica de 3,70. ¿Qué longitud deben tener las tiras si se desea una capacitancia de $9{,}50 \times 10^{-8}$ F? (Emplee la fórmula de placas paralelas).

Resolución:



Datos: $k_{papel} = 3{,}70$
$C_{total} = 9{,}5 \times 10^{-8}$ F

Sea:



a = 7,00 cm
d = 0,025 mm

Entonces: $C = k.C_o = \dfrac{k.\varepsilon_o.A}{d} = \dfrac{k.\varepsilon_o.LA}{d}$

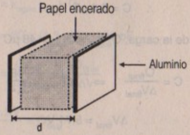
$$\Rightarrow \quad C = \frac{3{,}70 \times (8{,}85 \times 10^{-12})(L)(7{,}0 \times 10^{-2})}{0{,}025 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \quad 9{,}5 \times 10^{-8} = \frac{3{,}70 \times (8{,}85 \times 10^{-12})(7{,}0 \times 10^{-2})}{0{,}025 \times 10^{-3}} . L$$

$$\therefore \; \text{Longitud} = 1{,}04 \text{ m}$$

44. En el supermercado se venden rollos de papel aluminio, plástico par envolver y papel encerado. Describa un capacitor hecho con materiales de supermercado. Calcule una estimación del orden de magnitud para su capacitancia y su voltaje de ruptura.

Resolución:
Sea:



El voltaje de ruptura ocurrirá cuando la resistencia dieléctrica sea igual al campo eléctrico máximo, entonces:

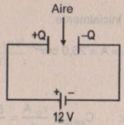
$$\Delta V_{máx} = E_{máx(papel)} \cdot d = 16 \times 10^{6} \cdot dV$$

Luego: $C = \dfrac{k.\varepsilon_o.A}{d} = 3{,}7 \times (8{,}85 \times 10^{-12}) . \dfrac{A}{d}$

$$\therefore \quad C = 32{,}7\left(\frac{A}{d}\right) \text{ pF}$$

45. Un capacitor que tiene aire entre sus placas se conecta a una diferencia de potencial de 12,0 V y almacena 48,0 μC de cara. Entonces se desconecta la fuente mientras aún está cargado. a) Encuentre la capacitancia del capacitor. b) Una pieza de teflón se inserta entre las placas. Encuentre su nueva capacitancia. c) Encuentre el voltaje y la carga que existen ahora en el capacitor.

Resolución:
Sea:
Donde: $Q = 48 \; \mu C$
$k_{aire} = 1$



Parte (a)
Sabemos que: $C = k \cdot C_o$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \text{(cuando está desconectado)}$$

$$\Rightarrow \quad C = 1{,}00 \times \frac{48}{12}$$

$$\therefore \quad C = 4{,}00 \; \mu F$$

Parte (b)

$K_{teflón} = 2,1$

Entonces: $C = k.C_o = (2,1)(4,0)$

$\therefore \quad C = 8,4\ \mu F$

Parte (c)

Por conservación de la carga: $Q_{inicial} = Q_{final} = 48\ \mu C$

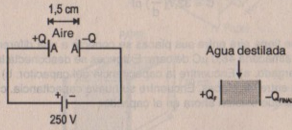
Luego: $C = \dfrac{Q_{final}}{\Delta V_{final}} \Rightarrow \Delta F_{final} = \dfrac{48}{8,4}$

Por lo tanto: $\Delta V_{final} = 5,71\ V$

46. Un capacitor de placas paralelas en aire tiene una separación de placas de 1,50 cm y un área de placas de 25,0 cm². Las placas están cargadas a una diferencia de potencial de 250 V y se encuentran desconectadas de la fuente. Después se sumerge el capacitor en agua destilada. Determine a) la carga en las placas antes y después de la inmersión, b) la capacitancia y el voltaje después de la inmersión, y c) el cambio de la energía del capacitor. Ignore la conductancia del líquido.

Resolución :

Sea:



- Inicialmente Finalmente

Datos: Área = A = 25,0 cm²

Parte (a)

Sabemos que: $C_{inicial} = \dfrac{\varepsilon_o.A}{d} = \dfrac{8,85\times10^{-12}(25,0\times10^{-4})}{1,5\times10^{-2}}$

$\Rightarrow \quad C_{inicial} = 1,5\ pF$

Luego: $C_{inicial} = \dfrac{Q_{inicial}}{\Delta V}$

$\Rightarrow \quad Q_{inicial} = C_{inicial} \times \Delta V = 1,5 \times 10^{-12} \times (250)$

$\therefore \quad Q_{inicial} = 375\ pC$

Por otro lado: $C_{final} = k_{agua\ dest} \times C_{inicial}$

$\Rightarrow \quad C_{final} = 80 \times (1,5\ pF) = 120\ pF$

Luego: $C_{final} = \dfrac{Q_{final}}{\Delta V_{final}} = k.\dfrac{Q_{final}}{\Delta V}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{C_{final}.\Delta V}{k} = Q_{final}$

$\Rightarrow \quad Q_{final} = \dfrac{120\times10^{-12}(250)}{80}$

$\therefore \quad Q_{final} = 375\ pC$ (se conserva la carga)

Parte (b)

De lo hallado en (a) $C_{final} = 120\ pF$

Como: $C_{final} = \dfrac{Q_{final}}{\Delta V_{final}}$

$\Rightarrow \quad \Delta V_{final} = \dfrac{375\,pC}{120\,pC} = 3,125\ V$

Parte (c)

Sabemos que: $U_{inicial} = \dfrac{Q_o^2}{2\,C_{inicial}} = \dfrac{(375\times10^{-12})^2}{2(1,5\times10^{-12})}$

$\therefore \quad U_{inicial} = 4,7 \times 10^{-8}\ J$

Por otro lado: $U_{final} = \dfrac{U_{inicial}}{k} = \dfrac{4,7\times10^{-8}}{80}$

$\therefore \quad U_{final} = 5,9 \times 10^{-10}\ J$

En consecuencia: $|\Delta U| = 46,4\ nJ$

47. Un cascarón esférico conductor tiene radios interior *a* y exterior *c*. El espacio entre las dos superficies se llena con un dieléctrico para el cual la constante dieléctrica es k_1 entre *a* y *b*, y k_2 entre *b* y *c*. (Fig. P26.47). Determine la capacitancia de este sistema.

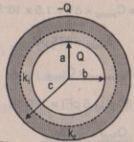
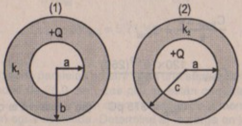


Figura 26.47

Resolución:

El sistema es equivalente a:



Donde la esfera (1) y la esfera (2) están en serie.

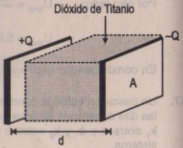
Por otro lado: $C_1 = \dfrac{k_1.4\pi.\varepsilon_o(ab)}{b-a}$ y $C_2 = \dfrac{k_2.4\pi.\varepsilon_o(bc)}{b-c}$

Luego: $\dfrac{1}{C_{equivalente}} = \dfrac{b-a}{k_1.4\pi.\varepsilon_o.ab} + \dfrac{b-c}{k_2.4\pi.\varepsilon_o.bc}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{b-a}{k_1.ab}+\frac{b-a}{k_2.bc}\right]$$

$$\therefore \quad C_{equivalente} = \frac{4\pi.\varepsilon_o.k_1.k_2.abc}{(k_1-k_2)ac+k_2.bc-k_1ab}$$

48. Una oblea de dióxido de titanio (k = 173) tiene un área de 1,00 cm² y un espesor de 0,100 mm. Se evapora aluminio sobre las caras paralelas para formar un capacitor de placas paralelas. a) Calcule la capacitancia. b) Cuando el capacitor se carga con una batería de 12,0 V, ¿cuál es la magnitud de la carga entregada a cada placa? c) Para la situación en la parte b), ¿cuáles son las densidades de carga superficial libre e inducida? ¿Cuál es la magnitud *E* del campo eléctrico?



Resolución:

Datos:
k = 173
A = 1,00 cm² ≡ 1,00 × 10⁻⁴ m²
d = 0,1 mm ≡ 0,1 × 10⁻³ m

Parte (a)

Sabemos que: $C = \dfrac{k.\varepsilon_o.A}{d} \Rightarrow C = \dfrac{173\times(8{,}85\times10^{-12})(1{,}00\times10^{-4})}{0{,}1\times10^{-3}}$

$\therefore \quad C = 1{,}53$ nF

Parte (b)

Sabemos que si: $\Delta V = 12{,}0$ V

Entonces: $Q = C.\Delta V = 1{,}53\times10^{-9}\times(12{,}0)$

$\therefore \quad Q = 18{,}4$ nC

Parte (c)

Sabemos que: $Q = A.\sigma \Rightarrow \sigma = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{18{,}4\times10^{-9}}{1{,}00\times10^{-4}}$

$\therefore \quad \sigma = 184\ \mu C/m^2$

Parte (d)

Sabemos que: $\Delta V = E.d \Rightarrow E = \dfrac{\Delta V}{d} = \dfrac{12{,}0}{0{,}1\times10^{-3}}$

$\therefore \quad E = 120$ kV/m

49. Cada capacitor en la combinación mostrada en la figura P26.49 tiene un voltaje de ruptura de 15,0 V. ¿Cuál es el voltaje de ruptura de la combinación?

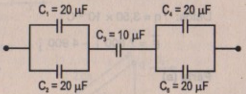
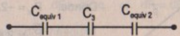


Figura P26.49

Resolución:



$\Delta V_{\substack{ruptura\\combinación}} = ?$

(sistema en serie)

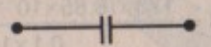
Como el sistema está en serie entonces:

$$Q_{equiv\,1} = Q_S = Q_{equiv\,2} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = 10{,}0\ \mu F \times 15{,}0\ V = 150\ \mu C$$

Luego:

La figura es equivalente a:



$$C_{total} = \frac{20}{3}\mu F$$

Por lo tanto: $$C_{total} = \frac{Q_{total}}{\Delta V_{\substack{ruptura\\total}}}$$

$$\therefore \quad \Delta V_{ruptura\ total} = \frac{3}{20}\mu F \times 150 = 22{,}5\ V$$

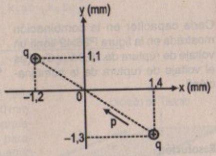
DIPOLO ELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

50. Un pequeño objeto rígido porta cargas positiva y negativa de 3,50 nC. Está orientado de modo que la carga positiva está en el punto (–1,20 mm; 1,10 mm) y la carga negativa está en el punto (1,40 mm; –1,30 mm). a) Encuentre el momento de dipolo eléctrico del objeto. El objeto se coloca en un campo eléctrico E = (7 800i – 4 900j) N/C. b) Encuentre el momento de torsión que actúa sobre el objeto. c) Encuentre la energía potencial del objeto en esta orientación. d) Si la orientación del objeto puede cambiar, encuentre la diferencia entre sus energías potenciales máxima y mínima.

Resolución:

Datos: $q = 3{,}50 \times 10^{-9}$ C

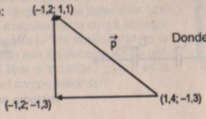
$\vec{E} = 7\,800\ \hat{i} - 4\,900\ \hat{j}$



Parte (a)

Sabemos que: $\tau = \vec{P} \times \vec{E}$

Por otro lado:



Donde: $\vec{P}_x = -2{,}6 \times 10^{-3}\ \hat{i}$ cm

$\vec{P}_y = 2{,}4 \times 10^{-3}\ \hat{j}$ cm

Luego: $\vec{P} = (-2{,}6 \times 10^{-3}\ \hat{i} + 2{,}4 \times 10^{-3}\ \hat{j})$ cm

Como: $\vec{E} = (7{,}8 \times 10^{3}\ \hat{i} - 4{,}9 \times 10^{3}\ \hat{j})\ \dfrac{N}{C}$

Entonces:

$$\tau = \vec{P} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -2{,}6 \times 10^{-3} & 2{,}4 \times 10^{-3} \\ 7{,}8 \times 10^{3} & -4{,}9 \times 10^{3} \end{vmatrix}$$

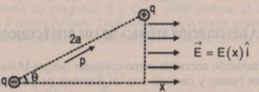
$$\Rightarrow \quad \tau = 12{,}74 - 18{,}72$$

$$\therefore \quad \tau = -5{,}98\ \text{N.m (hacia abajo)}$$

51. Un pequeño objeto con momento de dipolo eléctrico **p** se coloca en un campo eléctrico no uniforme **E** = E(x)**i**. Es decir, el campo está en la dirección x y su magnitud depende de la coordenada x. Sea θ la representación del ángulo entre el momento de dipolo y la dirección x. a) Pruebe que el dipolo experimenta una fuerza neta F = p(dE/dx) cos θ en la dirección hacia la cual se incrementa el campo. b) Considere el campo creado por un globo esférico centrado en el origen. El globo tiene un radio de 15,0 cm y porta una carga de 2,00 μC. Evalúe dE/dx en el punto (16 cm; 0; 0). Suponga que una gota de agua en este punto tiene un momento de dipolo inducido de (6,30**i**) nC. Encuentre la fuerza sobre ella.

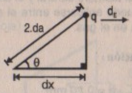
Resolución:

Sea:



Parte (a)

Por demostrar que: $F = p\left(\dfrac{dE}{dx}\right)\cos\theta$



Entonces: $dp = 2(1)q.da$

$$\Rightarrow q = \frac{dp}{2da}$$

Por otro lado: $dF = dE.q \quad \Rightarrow \quad dF = dE\,.\,\dfrac{dp}{2da}$ ... (1)

De la figura mostrada (triángulo)

Tenemos que: $\dfrac{dx}{2da} = \cos\theta$

Luego reemplazando en (1)

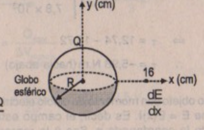
$$\Rightarrow\ dF = \frac{dE}{dx}.\cos\theta.dp \ \Rightarrow\ \int dF = \left(\frac{dE}{dx}\right)\cos\theta.\int dp \quad \text{(E depende de x)}$$

$$\therefore\ F_{neta} = \frac{dE}{dx}.\cos\theta.p \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Datos:

$Q = 2{,}00\ \mu C$
$R = 15\ cm$



Sabemos que: $V = \dfrac{k_e.Q}{x}$

$$\Rightarrow\ \frac{dV}{dx} = -E(x) = -\frac{k_e.Q}{x^2} \qquad \therefore\ \vec{E}(x) = \frac{k_e.Q}{x^2}\,\hat{i}$$

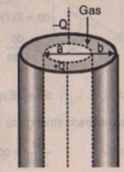
Luego: $\dfrac{dE_x}{dx} = -\dfrac{2k_e.Q}{x^3}$ Evaluando para x = 16,0 cm

Resulta que: $\dfrac{dE}{dx} = \dfrac{-2(8{,}99\times10^{9})(2{,}00\times10^{-6})}{(0{,}16)^3} = -8{,}78\ \dfrac{MN}{cm}\ \hat{i}$

UNA DESCRIPCIÓN ATÓMICA DE LOS DIELÉCTRICOS

52. Un detector de radiación conocido como contador Geiger-Muller se compone de un cilindro conductor hueco y cerrado con un alambre delgado a lo largo de su eje. Suponga que el diámetro interno del cilindro es de 2,50 cm y que el alambre a lo largo del eje tiene un diámetro de 0,200 mm. Si la resistencia dieléctrica del gas entre el alambre central y el cilindro es de $1{,}20 \times 10^6$ V/m, calcule el voltaje máximo que puede aplicarse entre el alambre y el cilindro antes de que ruptura dieléctrica ocurra en el gas.

Resolución:



Datos: $a = 0{,}20\ mm$
$b = 2{,}50\ cm$

Resistencia dieléctrica = $1{,}2 \times 10^6\ \dfrac{V}{m}$

$\Delta V_{máximo} = ?$

Sabemos que el $\Delta V_{máximo}$ ocurre cuando:

$$E_{eléctrico} = \text{Resistencia dieléctrica}$$

$$\Rightarrow\ E_{eléctrico} = 1{,}2 \times 10^6\ \frac{V}{m}$$

Luego: $\Delta V_{máximo} = E_{eléctrico}(b - a)$

$$\Rightarrow\ \Delta V_{máximo} = 1{,}2 \times 10^6 \times [2{,}50 \times 10^{-12} - 0{,}2 \times 10^{-3}]$$

$$\therefore\ \Delta V_{máximo} = 29{,}76 \times 10^3\ V = 29{,}76\ kV$$

53. La forma general de la ley de Gauss describe cómo se crea una carga en un campo eléctrico en un material, así como en el vacío. Esto es

$$\oint E.dA = \frac{q}{\varepsilon}$$

donde $\varepsilon = k\varepsilon_0$ es la permitividad del material. a) Una hoja con carga Q distribuida de manera uniforme sobre su área A es rodeada por un dieléctrico. Demuestre que la hoja crea un campo eléctrico uniforme con magnitud $E = Q/2A\varepsilon$ en puntos cercanos. b) Dos grandes hojas de área A que portan cargas opuestas de igual magnitud Q están separadas una pequeña distancia d. Demuestre que ellas crean un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = Q/A\varepsilon$ entre ambas. c) Suponga que la placa negativa está a potencial cero. Demuestre que la placa positiva está a un potencial $Qd/A\varepsilon$. d) Demuestre que la capacitancia del par de placas es $A\varepsilon/d = kA\varepsilon_0/d$.

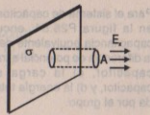
Resolución:

Por dato: $\oint E.dA = \dfrac{q}{\varepsilon}$ donde $\varepsilon = k.\varepsilon_o$

Parte (a)

Por demostrar que: $E = \dfrac{Q}{2A\varepsilon}$ (para una hoja)

Sea:



Por Gauss: $\oint E_o.dA = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_o}$

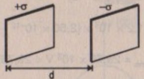
Entonces (por simetría)

$$2\varepsilon_o.A = \frac{\sigma A}{E_o} \qquad \therefore\ E_o = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \ \text{(sin dieléctrico)}$$

Pero: $E = \dfrac{E_o}{k}$ (con dieléctrico)

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2k\varepsilon_o} = \frac{\sigma.A}{2k\varepsilon_o.A} = \frac{Q}{2.A.\varepsilon} \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)



Sabemos que por Gauss:

$$E_{o\ \text{entre las placas}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma.A}{A.\varepsilon_o} = \frac{Q}{A.\varepsilon_o} \quad \text{(sin dieléctrico)}$$

Como: $E = E_o/k$ (con dieléctrico)

$$\therefore \quad E = \frac{Q}{A.k.\varepsilon_o} = \frac{Q}{A\varepsilon} \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (c)

Por capacitancia: $C = k.C_o$

Pero: $C_o = \dfrac{A.\varepsilon_o}{d} = \dfrac{Q}{\Delta V_o} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{k.A.\varepsilon_o}{d}$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{Q.d}{A.\varepsilon}$$

Luego: $\vec{F}_{neta} = \dfrac{dE}{dx}.\cos\theta.p = -8{,}78 \times 10^6 \times (6{,}30 \times 10^{-9})(1)$

$$\therefore \quad \vec{F}_{neta} = -55{,}3 \text{ mN}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

54. Para el sistema de capacitores mostrado en la figura P26.54, encuentre a) la capacitancia equivalente del sistema, b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor, c) la carga sobre cada capacitor, y d) la energía total almacenada por el grupo.

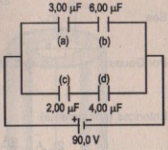
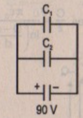


Figura P26.54

Resolución :

Parte (a)

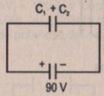


Entonces:

$$C_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2{,}00\ \mu\text{F (en serie)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3}\ \mu\text{F (en serie)}$$

Por último:



$$C_{total} = C_1 + C_2 = 2\mu\text{F} + \frac{4}{3}\ \mu\text{F (en paralelo)}$$

$$\therefore \quad C_{total} = \frac{10}{3}\ \mu\text{F}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{10}{3} = \dfrac{Q_{total}}{\Delta V} = \dfrac{Q_{total}}{90}$

$$\therefore \quad Q_{total} = 300\ \mu\text{C}$$

Por otro lado:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \,.\, \Delta V = 2{,}00\ \mu\text{F} \times (90) = 180\ \mu\text{C} \\ Q_2 &= C_2 \,.\, \Delta V = 4/3 \times (90) = 120\ \mu\text{C} \end{aligned}\right\} \quad \text{Por estar en paralelo}$$

En consecuencia:

$$\Delta V_a = 180/3 = 60\ \text{V} \quad \text{y} \quad \Delta V_b = 180/6 = 30\ \text{V}$$

$$\Delta V_c = \frac{120}{2} = 60\ \text{V} \quad \text{y} \quad \Delta V_d = \frac{120}{4} = 30\ \text{V}$$

Parte (c)

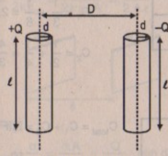
Sabemos que: $E_{total} = \dfrac{Q_{total}^2}{2C_{total}} \Rightarrow E_{total} = \dfrac{(300\mu\text{C})^2}{2(\frac{10}{3}\mu\text{F})}$

$$\therefore \quad E_{total} = 1{,}35 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

55. Considere dos *largos* alambres paralelos y con cargas opuestas, de radio *d* y con sus centros separados por una distancia *D*. Suponiendo que la carga se distribuye de manera uniforme sobre la superficie de cada alambre, muestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres es $\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$

Resolución :

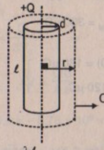
Sea:



Alambres paralelos

Por demostrar que: $\frac{C}{\ell} = \frac{\pi.\varepsilon_o}{\ln(\frac{D-d}{d})}$

Calculando E_{total} entre los alambres



Donde $Q = \lambda.\ell$

Luego por Gauss: $\oint E\,.dA = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi.r).\ell = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{2Q.k_e}{r}\,\hat{r}$$

Luego por simetría: (principio de superposición)

$$\vec{E}_{total} = \frac{4k_e.Q}{\ell.r}.\hat{r}$$

Entonces: $\Delta V = -\int_d^{D-d} E\,ds = -\int_d^{D-d} E\,dr \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\int_d^{D-d} \frac{4k_e.Q}{\ell.r}.dr$

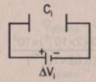
$$\therefore |\Delta V| = \frac{Q}{\pi\varepsilon_o.\ell}\ln(\frac{D-d}{d})$$

Como: $C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{\frac{Q}{\pi.\varepsilon_o.\ell}.\ln(\frac{D-d}{d})}$

$$\therefore \quad \frac{C}{\ell} = \frac{\pi.\varepsilon_o}{\ln(\frac{D-d}{d})} \quad \text{Lqqd.}$$

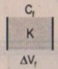
56. Un capacitor de placas paralelas de 2,00 nF está cargado a una diferencia de potencial inicial ΔV_i = 100 V y luego se aísla. El material dieléctrico entre las placas es mica (k = 5,00) . a) ¿Cuánto trabajo se requiere para retirar la mica? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial del capacitor después de que la mica se retira?

Resolución :



Inicialmente: $C_\lambda = 2{,}00$ nF

$\Delta V_\lambda = 100$ V



Finalmente $C_F = C_o.k$

$\Delta V_f = \frac{\Delta V_i}{k}$

Nos piden: $W_{capacitor} = ?$ Dato: $k_{mica} = 5{,}00$

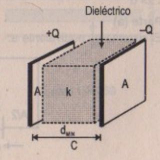
Sabemos que: $U_o = \frac{1}{2}.C_o.\Delta V_0^2 = \frac{1}{2}(2{,}00\times10^{-9})(100)^2 = 10{,}0\ \mu J$

$U_f = \frac{1}{2}C_f.\Delta V_f^2 = \frac{1}{2}(2{,}00\times10^{-9})(5)\frac{(100)^2}{25} = 2{,}0\ \mu J$

Por lo tanto:

$$W_{capacitor} = U_f - U_o = 2{,}0\ \mu J - 10{,}0\ \mu J = |-8\ \mu J| = 8\mu J$$

57. Se construye un capacitor de placas paralelas usando un material dieléctrico cuya constante dieléctrica es 3,00 y cuya resistencia dieléctrica es $2{,}00 \times 10^8$ V/m. La capacitancia deseada es igual a 0,250 μF, y el capacitor debe soportar una diferencia de potencial máxima de 4 000 V. Encuentre el área mínima de las placas del capacitor.



Resolución :

Datos: $k = 3$

E_{max} = Resistencia dieléctrico = $2{,}00 \times 10^8$ V/m

$C = 0{,}250\ \mu F$

$\Delta V_{máximo} = 4 \times 10^3$ V

$A_{mínima} = ?$

Sabemos que: $$C = \frac{k.\varepsilon_o.A_{mín}}{d_{mínimo}} \quad ...(1)$$

Ya que: $$\Delta V_{máx} = E_{máx}\ .\ d_{mín}$$

Luego: $$d_{mínimo} = \frac{\Delta V_{máx}}{E_{máximo}} = \frac{4\times10^3}{2{,}00\times10^8} = 2\times10^{-5}\ m$$

Entonces de (1)

$$A_{mínimo} = \frac{C.d_{mínimo}}{k.\varepsilon_o} = \frac{(0{,}250)(2\times10^{-5})\times10^3}{3\times(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore\ A_{mínimo} = 0{,}188\ m^2$$

58. Se construye un capacitor de placas paralelas utilizando tres materiales dieléctricos, como se muestra en la figura P26.58. Suponga que $\ell >> d$. a) Encuentre una expresión para la capacitancia del dispositivo en términos del área de placa A y d, k_1, k_2 y k_3. b) Calcule la capacitancia utilizando los valores A = 1,00 cm², d = 2,00 mm, $k_1 = 4{,}90$, $k_2 = 5{,}60$ y $k_3 = 2{,}10$.

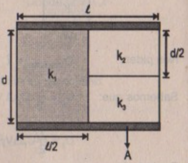


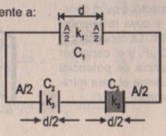
Figura P26.58

Resolución :

$\ell >> d$

Parte (a)

El sistema es equivalente a:



Conductor transversal entre la mitad de las placas

Luego: $$C_1 = \frac{k_1.\varepsilon_o.A}{2d} \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{2}\frac{k_2.\varepsilon_o.A}{\frac{d}{2}} = \frac{2k_2.\varepsilon_o.A}{2\ \ d}$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\frac{k_3.\varepsilon_o.A}{\frac{d}{2}} = \frac{2k_3.\varepsilon_o.A}{2\ \ d}$$

En consecuencia:

Por estar el sistema en paralelo (C_1 con $C_{equiv} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$)

Entonces: $$C_{equiv} = \frac{2\varepsilon_o.A(k_2.k_3)}{2\ d(k_3+k_2)}$$

Por lo tanto: $$C_{sistema} = C_1 + C_{equiv} = \frac{k_1.\varepsilon_o.A}{2d} + \frac{\varepsilon_o.A(k_2.k_3)}{d(k_3+k_2)}$$

$$\therefore\ C_{sistema} = \frac{\varepsilon_o.A}{d}\left[\frac{k_1(k_2+k_3)+2k_2.k_3}{2(k_2+k_3)}\right]$$

Parte (b)

Para: $A = 1{,}00\times10^{-4}\ m^2$; $d = 2{,}00\times10^{-3}$ m ; $k_1 = 4{,}90$
$k_2 = 5{,}60$; $k_3 = 2{,}10$

Entonces: $$C_{sistema} = \frac{8{,}85\times10^{-12}\times(1{,}00\times10^{-4})}{2{,}00\times10^{-3}}\left[\frac{4{,}90(7{,}70)+2(4{,}90)(2{,}10)}{2(5{,}60+2{,}10)}\right]$$

$$\therefore\ C_{sistema} = 2{,}76\ pF$$

59. Una placa conductora de espesor *d* y área *A* se inserta dentro del espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas con espaciamiento *s* y área superficial *A*, como se muestra en la figura P26.59. La placa no necesariamente está a la mitad entre las placas del capacitor. ¿Cuál es la capacitancia del sistema?

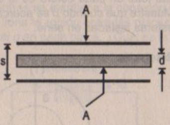
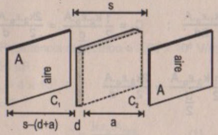


Figura P26.59

Resolución :

Dicho sistema es equivalente a:



Previamente: $C_1 = \dfrac{\varepsilon_o.A}{s-d-a}$; $C_2 = \dfrac{\varepsilon_o.A}{a}$

Como C_1 y C_2 están en serie, entonces:

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_o.A}{s-d-a}} + \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_o.A}{d}}$$

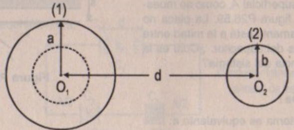
$$\Rightarrow \quad C_{equivalente\ del\ sistema} = \frac{\varepsilon_o.A}{s-d}$$

60. a) Dos esferas tienen radios *a* y *b* y sus centros están a una distancia *d*. Muestre que la capacitancia de este sistema es

$$C \approx \frac{4\pi\varepsilon_o}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{d}}$$

siempre que *d* sea grande comparada con *a* y *b*. (*Sugerencia:* puesto que las esferas están muy alejadas, suponga que la carga sobre una esfera no perturba la distribución de carga sobre la otra esfera. En consecuencia, el potencial de cada esfera es expresado como el de una distribución de carga simétrica, $V = k_eQ/r$, y el potencial total en cada esfera es la suma de los potenciales debidos a cada esfera. b) Muestre que cuando *d* se acerca al infinito, el resultado anterior se reduce al de dos esferas aisladas en serie.

Resolución :



Por demostrar que: $C \approx \dfrac{4\pi\varepsilon_o}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{d}}$

Parte (a)

Para la esfera (1): $\Delta V_1 = \int_a^d \dfrac{k_e.Q}{r^2}.dr \quad \Rightarrow \quad \Delta V_1 = k_e.Q(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{d})$

Para la esfera (2): $\Delta V_2 = \int_b^d \dfrac{k_e.Q}{r^2}.dr \quad \Rightarrow \quad \Delta V_2 = k_e.Q(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{d})$

Entonces por el principio de superposición:

$$\Delta V_{total} = k_e.Q\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}\right)$$

De la definición: $C_{total} = \dfrac{Q}{\Delta V_{total}} = \dfrac{Q}{k_e.Q(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{d})}$

$$\therefore \quad C_{total} \approx \frac{4\pi.\varepsilon_o}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{d}} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

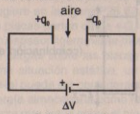
Si $d \to \infty$

$$\Rightarrow \quad C_{total} \approx \frac{4\pi.\varepsilon_o}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{4\pi.\varepsilon_o(ab)}{a+b}$$

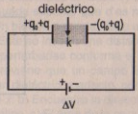
Donde: la esfera (1) y la esfera (2) están en serie

61. Cuando cierto capacitor de placas paralelas lleno de aire se conecta a una batería, adquiere una carga (en cada placa) de q_0. Mientras se mantiene la conexión con la batería, se inserta una lámina dieléctrica y se llena la región entre las placas. Esto origina una acumulación de una carga *adicional* *q* en cada placa. ¿Cuál es la constante dieléctrica de la lámina?

Resolución :



(inicialmente)



(finalmente)

Nos piden k = ?

Sabemos que: $C_o = \dfrac{q_o}{\Delta V_o}$

Además: $C = k.C_o \Rightarrow \dfrac{q_o + q}{\Delta V_o} = k.\dfrac{q_o}{\Delta V_o}$

$$\therefore \quad k = 1 + \frac{q}{q_o}$$

62. Un capacitor se construye a partir de dos placas cuadradas de lados ℓ y separación d. Un material de constante dieléctrica k se inserta una distancia x dentro del capacitor, como se ilustra en la figura P26.62.
a) Encuentre la capacitancia equivalente del dispositivo. b) Calcule la energía almacenada en el capacitor si la diferencia de potencial es ΔV. c) Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo una diferencia de potencial constante ΔV. Ignore la fricción. d) Obtenga un valor numérico para la fuerza suponiendo que ℓ = 5,00 cm, ΔV = 2 000 V, d = 2,00 mm, y que el dieléctrico es vidrio (k = 4,50). (Sugerencia: el sistema puede considerarse como dos capacitores conectados en paralelo).

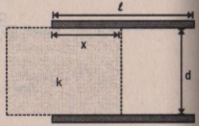
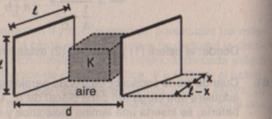


Figura P26.62

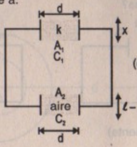
Resolución :

Parte (a)

Vista frontal del capacitor:



El sistema es equivalente a:



(combinación en paralelo)

Luego: $C_1 = \dfrac{k\varepsilon_o A_1}{d} = k\dfrac{\varepsilon_o}{d}(\ell.x)$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_o A_2}{d} = \frac{\varepsilon_o}{d}(\ell)(\ell - x)$$

Por lo tanto: $C_{equivalente} = C_1 + C_2 = \dfrac{\varepsilon_o}{d}[k\ell x - \ell x + \ell^2]$

Parte (b)

Si diferencia de potencial = ΔV

Entonces: $E_{total} = \dfrac{1}{2}C.\Delta V^2 = \dfrac{1}{2}C_{equiv}.\Delta V^2$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2}\Delta V^2.\frac{\varepsilon_o}{d}[(k-1)(\ell x) + \ell^2]$$

Parte (c)

Sabemos que: $E_{total} = U_{total}$

Entonces: $\dfrac{dU}{dx} = -F_x \Rightarrow -F_x = \dfrac{1}{2}\Delta V^2.\dfrac{\varepsilon_o}{d}(k\ell - \ell)$

$$\therefore \quad \vec{F}(x) = -\frac{1}{2}\Delta V^2.\frac{\varepsilon_o}{d}[\ell(k-1)]\ \hat{j} \text{ (hacia adentro del capacitor)}$$

Parte (d)

Si: $\ell = 5{,}00 \times 10^{-2}$ m ; $\Delta V = 2 \times 10^3$ V $d = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m

$k_{vidrio} = 4{,}50$

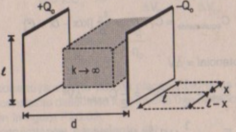
Entonces:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{2}(2 \times 10^3)^2.\frac{8{,}85\times10^{-12}}{2{,}00\times10^{-3}}(5{,}00 \times 10^{-2})(4{,}5 - 1)$$

$$\therefore \quad |F| = 1{,}55 \text{ mN}$$

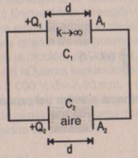
63. Una capacitor se construye a partir de dos placas cuadradas de lados ℓ y separación *d*, como se sugiere en la figura P26.62. Usted puede suponer que *d* es mucho menor que ℓ. Las placas portan carga $+Q_0$ y $-Q_0$. Un bloque de metal tiene un ancho ℓ, un largo ℓ y un espesor ligeramente menor a *d*. Éste se inserta una distancia *x* en el capacitor. Las cargas sobre las placas no son perturbadas conforme el bloque se desliza. En una situación estática, un metal previene que un campo eléctrico lo penetre. El metal puede ser considerado como un dieléctrico perfecto, con $k \to \infty$. a) Calcule la energía almacenada como función de *x*. b) Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza que actúa sobre el bloque metálico. c) El área de la cara frontal del bloque que ingresa en primer lugar es, en esencia, igual a ℓd. Considerando que la fuerza sobre el bloque actúa sobre esta cara, encuentre la tensión (fuerza por área) sobre ella. d) Para comparación, exprese la densidad de energía en el campo eléctrico entre las placas del capacitor en términos de Q_0, ℓ, d y ε_0.

Resolución :



Parte (a)

El sistema es equivalente a:



Donde: $A_1 = \ell.x$

$Q_1 = \sigma . A_1$

$C_1 = k\,\varepsilon_o . A_1/d$

y $A_2 = \ell\,(\ell.x)$

$Q_2 = \sigma . A_2$

$C_2 = \varepsilon_o A_2/d$

Además:

$Q_1 + Q_2 = Q_o$

Entonces: $$U_{almacenada} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q_0^2.A_1^2}{2.\ell^4.C_2} + \frac{Q_0^2.A_2^2}{2.\ell^4.C_2}$$

$$\Rightarrow\ U_{almacenada} = \frac{Q_0^2.A_1^2}{2.\ell^4}\left[\frac{d}{k.\varepsilon_o.A_1}\right] + \frac{Q_0^2.A_2^2}{2.\ell^4}\left[\frac{d}{\varepsilon_o.A_2}\right] \quad \text{si } k \to \infty$$

$$\Rightarrow\ U_{almacenada} = \frac{Q_0^2.d(\ell)(\ell - x)}{2.\ell^4.\varepsilon_o}$$

$$\therefore\ U_{almacenada}\,(x) = \frac{Q_0^2.d}{2.\ell^3.\varepsilon_o}(\ell - x)$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{dU}{dx} = -F(x)$

$$\Rightarrow\ F = \frac{Q_0^2.d}{2.\ell^3.\varepsilon_o} \quad \text{(hacia la derecha) positivamente}$$

Parte (c)

Sabemos que: tensión = $\dfrac{F}{A}$ donde: $A = \ell.d$

$$\Rightarrow\ \text{Tensión} = \frac{\dfrac{Q_o^2.d}{2.\ell^3.\varepsilon_o}}{\ell d} = \frac{Q_o^2}{2.\ell^4.\varepsilon_o}$$

Parte (d)

Sabemos que: $\dfrac{\text{energía}}{\text{volumen}}$ = densidad de energía = $\dfrac{N}{m^2}$ (S.I.)

$$\Rightarrow\ \text{Densidad de energía} = \text{tensión} = \frac{Q_o^2}{2.\ell^4.\varepsilon_o}$$

64. Cuando se considera el suministro de energía para un automóvil, la energía por unidad de masa de la fuente de energía es un parámetro importante. Utilizando los siguientes datos compare la energía por unidad de masa (J/kg) para la gasolina, baterías de plomo-ácido y capacitores. (El ampere A se introducirá en el capítulo 27 y es la unidad del SI de la corriente eléctrica, 1 A = 1 C/s)

Gasolina: 126 000 Btu/gal; densidad = 670 kg/m³.

Batería de plomo-ácido: 12,0 V; 100 A.h; masa = 16,0 kg

Capacitor. diferencia de potencial a máxima carga = 12,0 V; capacitancia = 0,100 F; masa = 0,100 kg.

Resolución :

Datos: Gasolina: 126×10^3 Btu/gal; 1 galón = 3,786 L ; 1Btu = 252 cal

Densidad gasolina: 670 kg/m³

Batería de plomo ácido: 12,0 V ; 100 A.h ; masa = 16,0 kg

Capacitor: $\Delta V_{máximo}$ = 12,0 V ; capacitancia = 0,100 F ; masa = 0,1 kg

1A = 1C/S

Nos piden: Energía/masa (gasolina) = ?

Energía/masa (baterías plomo–ácido) = ?

Energía/masa (capacitor) = ?

Sabemos que:

$$\frac{\text{energía}}{\text{masa}}(\text{gasolina}) = 126 \times 10^3\,\frac{\text{Btu}}{\text{gal}} \times \frac{252\text{ cal}}{1\text{ Btu}} \times \frac{4{,}186\text{ J}}{1\text{ cal}} \times \frac{1\text{ gal}}{3{,}786\text{ L}} \times \frac{1\text{ L}}{10^{-3}\text{m}^3} \times \frac{1\text{ m}^3}{670\text{ kg}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(gasolina)} = 52{,}4 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

Por otro lado:

$$\frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(batería plomo)} = \frac{1}{2}Q.\frac{\Delta V}{\text{masa}} = \frac{1}{2}(12)\frac{(Q)}{16}$$

Como: $100\text{A.h} \equiv 100 \times \frac{C}{S}.\frac{1h}{1h} \times 3\,600 \text{ s} = 3{,}6 \times 10^5 \text{ c} = Q$

Entonces: $$\frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(batería plomo)} = \frac{12}{2} \times \frac{3{,}6\times10^5}{16} = 1{,}35 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Por último: $$\frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(capacitor)} = \frac{1}{2}.C.\frac{\Delta V^2}{\text{masa}} = \frac{1}{2}(0{,}100)\frac{(12)^2}{0{,}1}$$

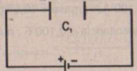
$$\therefore \quad \frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(capacitor)} = 72 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

En conclusión:

$$\frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(gasolina)} > \frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(batería)} > \frac{\text{energía}}{\text{masa}}\text{(capacitor)}$$

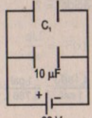
65. Un capacitor aislado de capacitancia desconocida se ha cargado hasta una diferencia de potencial de 100 V. Cuando el capacitor cargado se conecta después en paralelo a un capacitor de 10,0 μF descargado, el voltaje a través de la combinación es igual a 30,0 V. Calcule la capacitancia desconocida.

Resolución :



100 V

Inicialmente



30 V

Finalmente

Nos piden $C_1 = ?$ si $C_2 = 10\ \mu F$

Inicialmente: $$C_1 = \frac{Q_{inicial}}{\Delta V_{inicial}} \quad \text{... (1)}$$

Finalmente:

Por conservación de la carga: $Q_{inicial} = Q_{final}$

Entonces: $$C_{equiv} = C_1 + C_2 = \frac{Q_{final}}{\Delta V_{final}} \quad \text{... (2)}$$

$\Rightarrow$ (1) en (2): $$\frac{Q_{inicial}}{\Delta V_{inicial}} + C_2 = \frac{Q_{inicial}}{\Delta V_{final}}$$

$$\therefore \quad Q_{inicial} = C_2.\frac{\Delta V_{inicial}.\Delta V_{final}}{\Delta V_{inicial} - \Delta V_{final}}$$

Luego reemplazando en (1)

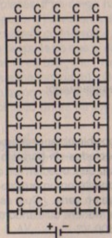
$$C_1 = \frac{C_2.\Delta V_{final}}{\Delta V_{inicial} - \Delta V_{final}} = \frac{10\times20^{-6}(30{,}0)}{100-80}$$

$$\therefore \quad C_1 = 4{,}29\ \mu F$$

66. Cierto circuito electrónico necesita un capacitor con 1,20 pF de capacitancia y un potencial de ruptura de 1 000 V. Si usted tiene una alimentación de capacitores de 6,00 pF, cada uno con un potencial de ruptura de 200 V, ¿Cómo podrá cubrir este requerimiento del circuito?

Resolución :

Si se cuenta o se requiere un capacitor con 12 pF y un potencial de ruptura, entonces se necesitarían 50 capacitores, distribuidos de la siguiente manera:



1 000 V

Donde: C = 6,00 pF

y cada capacitor tiene un potencial de ruptura = 200 V

67. En el arreglo mostrado en la figura P26.67 se aplica una diferencia de potencial ΔV, y C_1 se ajusta de modo que el voltímetro entre los puntos *b* y *d* lea cero. Este "balance" ocurre cuando $C_1 = 4{,}00\ \mu F$. Si $C_3 = 9{,}00\ \mu F$ y $C_4 = 12{,}0\ \mu F$, calcule el valor de C_2.

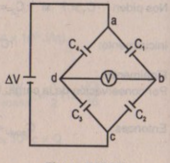


Figura P26.67

Resolución :

Datos: $C_1 = 4{,}00\ \mu F$ $\quad C_2 = ?$

$C_3 = 9{,}00\ \mu F$ $\quad C_4 = 12{,}0\ \mu F$

Como: $V_b = V_d \quad \Rightarrow \quad V_b - V_d = 0$

Por otro lado:
$$C_1 = \frac{Q_1}{|V_b - V_a|} \qquad C_2 = \frac{Q_2}{|V_b - V_c|}$$
$$C_3 = \frac{Q_3}{|V_b - V_c|} \qquad C_4 = \frac{Q_4}{|V_b - V_a|}$$

Luego: $\quad Q_2 \cdot Q_4 = Q_1 \cdot Q_3 = \text{cte}$ ya que: $Q_2 = Q_1$
$\qquad Q_4 = Q_3$

Entonces: $\quad C_2\,(k) \cdot C_4\,(k) = C_1\,(k) \cdot C_3\,(k)$

$$\Rightarrow \quad C_2 \cdot C_4 = C_1 \cdot C_3$$

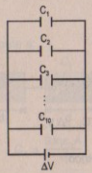
$$\therefore\ C_2 = \frac{C_1 \cdot C_3}{C_4}$$

Reemplazando: $$C_2 = \frac{(9{,}00\mu F)(4{,}00\mu F)}{12{,}00\mu F} = 3{,}00\ \mu F$$

68. Es posible obtener diferencias de potencial cargando primero un grupo de capacitores conectados en paralelo y activando después un arreglo de interruptores que en efecto desconecten los capacitores de la fuente de carga y unos de otros, y que los reconecte en un arreglo en serie. Luego el grupo de capacitores cargados se descarga en serie. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que puede obtenerse de esta manera utilizando diez capacitores cada uno de 500 μF y una fuente de carga de 800 V?

Resolución :

Inicialmente:

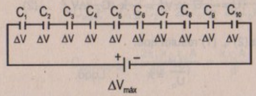


Donde:

$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_{10} = 500\ \mu F$

$\Delta V = 800$ V

Finalmente:



En una combinación en serie se cumple que:

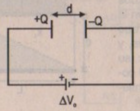
$$C_{equivalente} = \frac{C}{n} = \frac{C}{10} = \frac{500\ \mu F}{10} = 50\ \mu F$$

Por otro lado: $Q_{total} = Q_1 = Q_2 = Q_{10} = 500\ \mu F \times 800\ V = 40\ C$

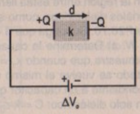
En consecuencia: $\Delta V_{máx} = \dfrac{Q_{total}}{C_{equiv}} = \dfrac{40\ C}{50\ \mu F} = 0{,}8 \times 10^6\ V$

69. Un capacitor de placas paralelas con separación de placas *d* se carga hasta una diferencia de potencial ΔV_0. Una lámina dieléctrica de espesor *d* y constante dieléctrica k se introduce entre las placas *mientras la batería permanece conectada a éstas.* a) Muestre que la proporción entre la energía almacenada después de que el dieléctrico se introduce y la energía almacenada en el capacitor vacío es $U/U_0 = k$. Proporcione una explicación física para este aumento en la energía almacenada. b) ¿Qué sucede con la carga en el capacitor? (Advierta que esta situación no es la misma que la del ejemplo 26.7, en la cual la batería se quitó del circuito antes de introducir el dieléctrico).

Resolución :



Inicialmente



Finalmente

Parte (a)

Por demostrar que: $\dfrac{U}{U_o} = k$

Sabemos que: $U_o = \dfrac{1}{2} Q \,.\, \Delta V_o$

Entonces: $U_o = \dfrac{1}{2} C_o \,.\, \Delta V_o^2$ ... (1)

Luego cuando se introduce el dieléctrico:

$$U = \frac{1}{2}\, C \,.\, \Delta V_o^2 = \frac{1}{2}\, k \,.\, C_o \,.\, \Delta V_o^2 \quad ... (2)$$

En consecuencia (2) ÷ (1) resulta que:

$$\frac{U}{U_o} = k \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} U_o &= \frac{1}{2}\, Q_o \,.\, \Delta V_o \\ U_F &= \frac{1}{2}\, Q_F \,.\, \Delta V_o \end{aligned}\right| \div$$

$$\frac{U_f}{U_o} = \frac{Q_f}{Q_o}$$

Pero: $\dfrac{U_f}{U_o} = k$

$$\therefore \quad Q_{final} = k \,.\, Q_{inicial}$$

En conclusión:

La carga en el capacitor aumenta cuando se introduce en el dieléctrico en un factor "k".

70. Un capacitor de placas paralelas con placas de área *A* y separación de placas *d* tienen la región entre éstas llena con dos materiales dieléctricos, como se ve en la figura P26.70. Suponga que d << L y que d << W. a) Determine la capacitancia, y b) demuestra que cuando $k_1 = k_2 = k$, su resultado se vuelve el mismo que el correspondiente a un capacitor que contiene un solo dieléctrico: $C = k\,\varepsilon_0 A/d$.

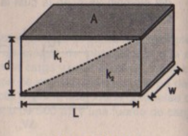
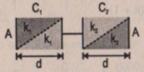


Figura P26.70

Resolución :

Parte (a)

El sistema es equivalente a:



(combinación en serie)

donde: $C_1 = \dfrac{2k_1\varepsilon_o A}{d}$ y $C_2 = \dfrac{2k_2\varepsilon_o A}{d}$

Entonces: $\dfrac{1}{C_{equiv}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{d}{2k_1\varepsilon_o A} + \dfrac{d}{2k_2\varepsilon_o A}$

$$\therefore \quad C_{equivalente} = \frac{2k_1 . k_2 . \varepsilon_o A}{d(k+k)} = \frac{k.\varepsilon_o A}{d}$$

Parte (b)

Si: $k_1 = k_2 = k$

Entonces: $C_{\substack{equivalente\\ del\ sistema}} = \dfrac{2k.k.\varepsilon_o . A}{d(k+k)} = \dfrac{k.\varepsilon_o A}{d}$ Lqqd.

71. Un capacitor de placas paralelas vertical está lleno a la mitad con un dieléctrico para el cual la constante dieléctrica es 2,00 (Fig. P26.71a). Cuando este capacitor se pone horizontalmente, ¿qué fracción de éste debe llenarse con el mismo dieléctrico (Fig. P26.71b) de modo que los dos capacitores tengan igual capacitancia?

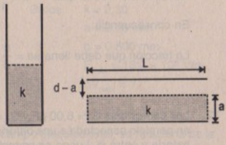
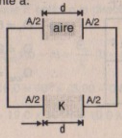


Figura P26.71

Resolución :71

Además: $C_a = C_b$ $\quad k = 2{,}00$

El sistema (a) es equivalente a:

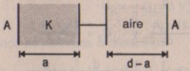


(en paralelo)

entonces: $C_a = \frac{\varepsilon_o}{d}\frac{A}{2} + k\frac{\varepsilon_o}{d}\frac{A}{2}$

$\therefore \quad C_a = \frac{\varepsilon_o . A}{2d}(k+1)$

Por otro lado:
El sistema (b) es equivalente a:



(en serie)

entonces: $\frac{1}{C_b} = \frac{a}{k\varepsilon_o A} + \frac{d-a}{\varepsilon_o A}$

$\therefore \quad C_b = \frac{k\varepsilon_o A}{a + k(d-a)}$

Por dato:

$C_a = C_b$ entonces: $\frac{\varepsilon_o A}{2d}(k+1) = \frac{k.\varepsilon_o A}{a + k(d-a)}$

Resolviendo resulta que: $a = \frac{dk}{1+k}$

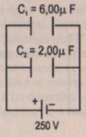
En consecuencia:

La fracción que debe llenarse $= \frac{a}{d} = \frac{\frac{dk}{1+k}}{d} = \frac{k}{1+k} = \frac{2}{3}$

72. Los capacitores $C_1 = 6{,}00\ \mu F$ y $C_2 = 2{,}00\ \mu F$ están cargados como una combinación en paralelo conectada a una batería de 250 V. Los capacitores se desconectan de la batería y entre sí. Luego se conectan placa positiva a placa negativa y placa negativa a placa positiva. Calcule la carga resultante en cada capacitor.

Resolución :

Inicialmente:

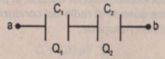


$\Rightarrow \quad Q_1 = 6{,}00(250) = 1\,500\ \mu C$

$Q_2 = 2{,}00\ (250) = 500\ \mu C$

$\therefore \quad Q_{total} = 2\,000\ \mu C$

Finalmente:



$\Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = Q_{total}$

$y\ \Delta V_{ab} = 250\ V$

Por combinación en serie se cumple que:

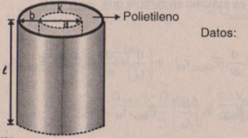
$$C_{equiv} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2} = \frac{6{,}00 \times (2{,}00)}{8{,}00} = 1{,}5\ \mu F$$

Luego: $Q_{total} = Q_1 = Q_2 = 1{,}5\ \mu F \times (250)$

$\therefore Q_{total} = Q_1 = Q_2 = 375\ \mu C$

73. El conductor interior de un cable coaxial tiene un radio de 0,800 mm y el radio interior del conductor exterior es igual a 3,00 mm. El espacio entre los conductores se llena con polietileno, el cual tiene una constante dieléctrica de 2,30 y una resistencia dieléctrica de $18{,}0 \times 10^6$ V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que este cable puede soportar?

Resolución :



Datos:
$k = 2{,}30$
$a = 3{,}00$ mm
$b = 0{,}800$ mm
$E_{máx} = 18{,}0 \times 10^6$ V/m
$\Delta V_{máx} = ?$

Sabemos que:
En un dieléctrico se cumple que el valor del campo eléctrico total, se relaciona de la siguiente manera:

$$E = \frac{E_o}{k}$$

Por otro lado:
$\Delta V_{máx} = E.d = E\ (b - a)$, ya que E está en la dirección radial y hacia fuera

Entonces: $\Delta V_{máx} = E_{máx}\ (b - a) = \frac{E_o}{k}\ (b - a)$

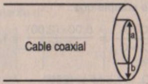
$\Rightarrow \quad \Delta V_{máx} = 18{,}0 \times 10^6 \times (3{,}00 - 0{,}8) \times 10^{-3}$

$\therefore \quad \Delta V_{máx} = 19{,}0 \times 10^3\ V = 19{,}0$ kV

74. Usted es responsable de mejorar el diseño de un cable coaxial para un gran fabricante. Demuestre que para un radio de conductor exterior dado *b*, la máxima capacidad de diferencia de potencial se alcanza cuando el radio del conductor interior es *a = b/e*, donde *e* es la base de los logaritmos naturales.

Resolución:

Sea la figura:



Donde:
Radio exterior = b
Radio interior = a

Por demostrar que: $\boxed{a = \dfrac{b}{e}}$

Del problema anterior (73) se sabe que:

$$\Delta V_{Máx\,(r)} = E_{Máx} \cdot r_M \cdot \ln\left(\frac{b}{r_M}\right); \qquad r_M : \text{radio inferior mínima}$$

Entonces:

Cuando: ΔV es máximo se cumple que: $\dfrac{d\,\Delta V}{dr} = 0$

Luego:

$$0 = \frac{d}{dr}(E_{Máx} \cdot r_M) \cdot \ln\left(\frac{b}{r_M}\right) + \frac{d}{dr}\left[\ln\left(\frac{b}{r_M}\right)\right] \cdot E_{Máx} \cdot r_M$$

$$\Rightarrow \quad 0 = E_{Máx} \cdot \ln\left(\frac{b}{r_M}\right) - E_{Máx} \cdot r_M \cdot \left(\frac{1}{r_M}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_{Máx} = E_{Máx} \cdot \ln\left(\frac{b}{r_M}\right)$$

$$1 = \ln\left(\frac{b}{r_M}\right) \qquad \therefore\ e = \frac{b}{r_M} = a \qquad \therefore\ a = \frac{b}{e} \qquad \text{Lqqd.}$$

75. Calcule la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* en la figura P26.75. Advierta que esto no es una simple combinación en serie o en paralelo. (Sugerencia: suponga una diferencia de potencial ΔV entre los puntos a y b. Escriba expresiones para ΔV_{ab} en función de las cargas y las capacitancias para las diversas trayectorias posibles de *a* a *b*, y establezca conservación de carga para aquellas placas de capacitor que están conectadas entre sí.)

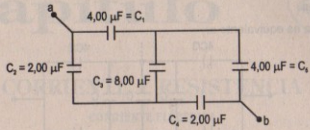


Figura P26.75

Resolución:

Sea: ΔV_{ab} = dato

$C_{\text{EQUIVALENTE DEL SISTEMA}} = ?$

Sabemos que: $\dfrac{C_1.C_5}{C_1 + C_5} = \dfrac{Q_{equiv\,1}}{\Delta V_{ab}} \quad \Rightarrow \quad Q_{equiv\,1} = Q_1 = Q_5 = 2\ .\ \Delta V_{ab}$

Además: $\dfrac{C_2.C_4}{C_2 + C_4} = \dfrac{Q_{equiv\,2}}{\Delta V_{ab}} \quad \Rightarrow \quad Q_{equiv\,2} = Q_2 = Q_4 = 1\ .\ \Delta V_{ab}$

Por último: $\dfrac{C_1.C_3.C_4}{C_3.C_4 + C_1.C_4 + C_1.C_3} = \dfrac{Q_{equiv\,3}}{\Delta V_{ab}} \quad \Rightarrow Q_{equiv\,3} = Q_3 = Q_4 = \dfrac{8}{7}\Delta V_{ab}$

Como: $C_{\substack{\text{equivalente}\\ \text{del sistema}}} = \dfrac{Q_{total}}{\Delta V_{ab}}$

$$\Rightarrow \quad C_{\substack{\text{equivalente}\\ \text{del sistema}}} = \frac{Q_{equiv\,1} + Q_{equiv\,2}}{\Delta V_{ab}} = \frac{2.\Delta V_{ab}}{\Delta V_{ab}} + \frac{1\ V_{ab}}{\Delta V_{ab}}$$

$$\therefore \quad C_{\substack{\text{equivalente}\\ \text{del sistema}}} = 3{,}00\ \mu F$$

76. Determine la capacitancia efectiva de la combinación mostrada en la figura P26.76 (*Sugerencia:* ¡considere la simetría involucrada!).

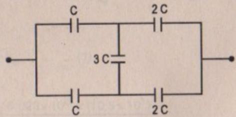
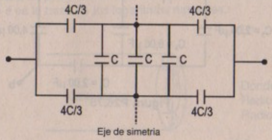


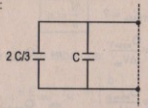
Figura P26.76

Resolución :

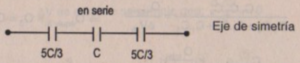
El sistema es equivalente a:



Entonces por simetría:



En consecuencia: el sistema queda de la siguiente manera:



Por lo tanto:

$$C_{\text{sistema equivalente}} = \frac{5}{11}\,.\,C$$

Capítulo 27

CORRIENTE Y RESISTENCIA

CORRIENTE ELÉCTRICA

1. En un tubo de rayos catódicos particular, la corriente medida del haz es de 30,0 μA. ¿Cuántos electrones inciden sobre la pantalla del tuvo cada 40,0 s?

Resolución :

Datos: $I_{prom} = 30{,}0\ \mu A$

$\Delta t = 40{,}0\ s$

$n_{e^-} = ?$

Sabemos que: $I_{prom} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \quad \Delta Q = I_{prom}\,.\,\Delta t = 30\times10^{-6}\times 40 = 1{,}2\times10^{-3}\ C$$

Luego: $\Delta Q = n\,.\,e^- = 1{,}2\times10^{-3}\ C$

$$\Rightarrow \quad n\,.\,|1{,}6\times10^{-19}\ c| = 1{,}2\times10^{-3}\ C$$

$$\therefore \quad n_{e^-} = 7{,}5\times10^{15}\ e^- = 7{,}5\ pe$$

2. Se va a platear tetera con un área superficial de 700 cm². Para este fin se une al electrodo negativo de una celda electrolítica que contiene nitrato de plata ($Ag^+NO_3^-$). Si la celda se potencia con una batería de 12,0 V y tiene una resistencia de 1,80 Ω, ¿cuánto tiempo tarda en formarse una capa de 0,133 mm de plata sobre la tetera? (La densidad de la plata es de $10{,}5\times10^3$ kg/m³).

Resolución :

Datos: $A = 700\ cm^2$ $\quad R = 1{,}80\ \Omega$

$\Delta V = 12{,}0\ V \quad L = 0{,}133\ mm \quad \Delta t = ? \quad \rho_{Ag} = 10{,}5\times10^3\ kg/m^3$

Sabemos que: $\Delta V = I.R$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n.A.L}{\Delta t}q_{e^-} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

$$n = \frac{N_A}{\text{Volumen}} = \frac{N_A\times\text{densidad}}{\text{masa}} = \frac{6{,}023\times10^{23}\times(10{,}5\times10^3)}{107{,}87\,gr\,\dfrac{1\ kg}{10^3\ g}}$$

$$\therefore \quad n = 5{,}86\times10^{28}\ m^{-3}\ \text{electrones}$$

Luego de (1): $\Delta t = \dfrac{n.A.L.q_{e-} \times R}{\Delta V}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{5{,}86\times10^{28}\times700\times10^{-4}\times0{,}133\times10^{-3}\times1{,}6\times10^{-19}\times1{,}80}{12{,}00}$$

$\therefore \quad \Delta t = 130{,}9 \times 10^{2}$ segundos $\equiv$ 3,64 horas

En consecuencia:

Tardará 3,64 horas en formarse 0,133 mm de plata sobre la tetera.

3. Suponga que la corriente que circula por un conductor disminuye exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $I(t)=I_0e^{-t/\tau}$, donde I_0 es la corriente inicial (en t = 0) y τ es una constante que tiene dimensiones de tiempo. Considere un punto de observación fijo dentro del conductor. a) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre t = 0 y t = τ?
b) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre t = 0 y t = 10 τ?
c) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre t = 0 y t = ∞?

Resolución:

Datos: $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$

Parte (a)

Sabemos que: $I = I_0 . e^{-t/\tau} = \dfrac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\tau} dQ = \int_0^{\tau} I_0 . e^{-t/\tau}.dt$

$$\therefore \quad Q(\tau - 0) = -I_0 \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau}\Big|_0^{\tau} = 0{,}632\tau . I_0$$

Parte (b)

Sabemos que: $I = I_0 . e^{-t/\tau} = \dfrac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow$ I . dt = dQ (Integrando)

$$\Rightarrow \quad \int_0^{10\tau} I_0 . e^{-\frac{t}{\tau}}. dt = \int_0^{Q_T} dQ \quad \Rightarrow \quad Q_{total}(10\tau) = -I_0 . \tau . e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_0^{10\tau}$$

$$\therefore \quad Q_{total(10\,\tau)} = 0{,}999\, I_0\, \tau$$

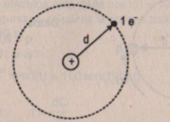
Parte (c)

Sabemos que: $I = \dfrac{dQ}{dt} = I_0 . e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} dQ = \int_0^{\infty} I_0 . e^{-t/\tau}.dt$

$$\therefore \quad Q(\infty - 0) = -I_0 . \tau . e^{-t/\tau}\Big|_0^{\infty} = I_0 . \tau$$

4. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón en el estado de energía más bajo sigue una trayectoria circular a una distancia de $5{,}29 \times 10^{-11}$ m del protón. a) Muestre que la rapidez del electrón es $2{,}19 \times 10^{6}$ m/s. b) ¿Cuál es la corriente efectiva asociada con este electrón orbital?

Resolución:



$d = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m
$k_e = 8{,}99 \times 10^{9}$ N.m²/C²
$q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C
$m_{e-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

Parte (a)

por dinámica circular: $F = \dfrac{m.v^2}{R}$

Pero: $F = F_e = \dfrac{k_e|q^+||q^-|}{d^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_e|q^+||q^-|}{d^2} = \frac{m_{e^-}.v^2}{R} = \frac{m.v^2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k_e|q|^2}{d.m_{e-}}} = \sqrt{\frac{8{,}99\times10^{9}(1{,}6\times10^{-19})^2}{5{,}29\times10^{-11}(9{,}1\times10^{-31})}}$$

$\therefore \quad v = 2{,}19 \times 10^{6}$ m/s Lqqd.

Parte (b)

Sabemos que: $I = n . q_{e-} v_d . A$

Entonces: $I = \dfrac{J_{e-}}{A.L} \times q_e . v_d \times A$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{q_{e^-}.v_{e^-}}{L} = \frac{1{,}6\times10^{-19}(2{,}19\times10^{6})}{2\pi(5{,}29\times10^{-11})}$$

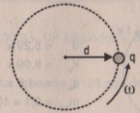
$\therefore \quad I = 1{,}05$ mA

5. Una pequeña esfera que tiene una carga de 8,00 nC se hace girar en un círculo en el extremo de una corriente aislante. La frecuencia angular de rotación es 100 π rad/s. ¿Qué corriente promedio representa esta carga rotatoria?

6. Una pequeña esfera que tiene una carga q se hace girar en un círculo en el extremo de una corriente aislante. La frecuencia angular de rotación es ω. ¿Qué corriente promedio representa es carga rotatoria?

Resolución 5 y 6:

Sea:



Datos:
$q = 8{,}00$ nc
$\omega = 100\,\pi$ rad/s
$I_{prom} = ?$

Sabemos que: $I_{prom} = n.q.v_d.A$

$$\Rightarrow I_{prom} = \frac{1}{A.L} \times q \times v_d \cdot A \quad \Rightarrow \quad I_{prom} = \frac{q.v_d}{L} = \frac{q.\omega.d}{2\pi.d}$$

$$\Rightarrow I_{prom} = \frac{8{,}00 \times 10^{-9} \times 100\pi}{2\pi}$$

$$\therefore \quad I_{prom} = 400 \times 10^{-9} \text{ A} = 400 \text{ nA}$$

7. La cantidad de carga q (en coulombs) que pasa por una superficie de 2,00 cm² de área varía con el tiempo de acuerdo con $q = 4{,}00\,t^3 + 5{,}00\,t + 6{,}00$; donde t está en segundos. a) ¿Cuál es la corriente instantánea que pasa a través de la superficie en t = 1,00 s? b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

Resolución :

Datos: Área = 2,00 cm²
$q(t) = 4{,}00\,t^3 + 5{,}00\,t + 6{,}00$

Parte (a)
$I_{(1,00\,s)} = ?$

Sabemos que: $$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}[4{,}00\,t^3 + 5{,}00\,t + 6{,}00]$$

$$\Rightarrow I = 12{,}00\,t^2 + 5{,}00$$

Luego: $I_{(1,00\,s)} = 12{,}00\,(1{,}00)^2 + 5{,}00$

$$\therefore \quad I_{(1,00\,s)} = 17{,}0 \text{ A}$$

Parte (b)
Sabemos que:

Densidad de corriente: $J = \dfrac{I}{A}$

$$\Rightarrow J = \frac{17{,}0}{2{,}00 \times 10^{-4}} = 8{,}5 \times 10^4 \text{ A/m}^2$$

$$\therefore \quad J = 85{,}0 \text{ k A/m}^2$$

8. Una corriente eléctrica está dada por $I(t) = 100\,\text{sen}(120\,\pi t)$, donde I está en amperes y t está en segundos. ¿Cuál es la cargas total conducida por la corriente desde t = 0 hasta t = 1/240 s?

Solución:

Datos: $I(t) = 100\text{sen}(120\pi t)$ $\quad \Delta Q = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow dQ = I \,.\, dt$

$$\Rightarrow \int_0^{1/240} dQ = \int_0^{1/240} 100\,\text{sen}\,(120\pi t)\,dt = \frac{-100}{120\pi}\cos(120\pi t)\Big|_0^{1/240}$$

$$\therefore \quad \Delta Q = 100/120\pi \text{ C}$$

9. La figura P27.9 representa una sección de un conducto circular de diámetro no uniforme que conduce una corriente de 5,00 A. E radio de la sección transversal A_1 es 0,400 cm. a) ¿Cuál es la carga total conducida por la corriente desde t = 0 hasta t = 1/240 s? b) Si la densidad de corriente a través de A_2 es un cuarto del valor a través de A_1, ¿cuál es el radio del conducto en A_2?

Resolución :

Datos:

I = 5,00 A

$R_1 = 0{,}4$ m

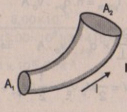


Figura P27.9

Parte (a)

$$J_1 = \frac{I}{A_1} = \frac{5{,}00 \text{ A}}{\pi\left(0{,}4 \times 10^{-2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad J_1 = 99{,}5 \text{ kA/m}^2$$

Parte (b)

Por dato: $J_2 = \dfrac{1}{4} J_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{I}{A_2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{I}{A_1}$

$\Rightarrow \quad A_2 = 4\,A_1 = 4(\pi)(0{,}4 \times 10^{-2})^2$

$\therefore \quad A_2 = 0{,}2 \times 10^{-3}\ m^2$

En consecuencia: $\pi.R_2^2 = 0{,}2 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow \quad R_2^2 = \frac{0{,}2\times10^{-3}}{\pi} = \frac{0{,}2\times10^{-3}}{3{,}1416}$$

$$\therefore \quad R_2 = \sqrt{\frac{0{,}2\times10^{-3}}{3{,}1416}} = 0{,}8 \times 10^{-2}\ m$$

$$\therefore \quad R_2 = 8{,}00\ cm$$

10. Un generador Van de Graaff produce un haz de 2,00 MeV de *deuterones*, los cuales son núcleos de hidrógeno pesado que contienen un protón y un neutrón. a) Si la corriente del haz es 10,0 μA, ¿qué tan separados están los deuterones? b) ¿Su repulsión electrostática es un factor en la estabilidad del haz? Explique.

Resolución :

Datos: $E_k = 2{,}00$ MeV $\qquad M_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

Masa del deuterón $= M_{p+} + M_n \qquad M_n = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

Parte (a)

Si: $\quad I_{prom} = 10{,}0\ \mu A \qquad L = ?$

Sabemos que: $\quad I_{prom} = n.\,q_{p+}\,.\,v_d.A$

$$\Rightarrow \quad I_{prom} = \frac{2}{A.L} \times q_{p+}\ .\,v_d\,.\,A \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2.q_{p+}.v_d}{I_{prom}} \qquad ...(1)$$

Pero: $\quad 2{,}00\ MeV = \frac{1}{2}M_p.v_d^2 = \frac{1}{2}(M_{p+} + M_n)\,.\,V_d{}^2$

Entonces: $\quad v_d = \sqrt{\dfrac{4{,}00\,Mev}{2\times1{,}67\times10^{-27}}} = 15{,}76\ M\ m/s$

Luego de (1): $\quad L = \dfrac{2(1{,}6\times10^{-19})(15{,}76\times10^{6})}{10{,}0\times10^{-6}} = 5{,}04\ \mu m$

Parte (b)

Si; su repulsión electrostática es un factor en la estabilidad del haz ya que debido a que el neutrón no posee carga la fuerza de repulsión la generará solamente los

protones entre ellos, y en consecuencia son ellos los que producirán corriente sobre el haz.

11. El haz de electrones que surge de cierto acelerador de electrones de alta energía tiene una sección transversal circular de 1,00 mm de radio. a) Si la corriente del haz es de 8,00 μA. ¿cuál es la densidad de corriente en el mismo, suponiendo que es uniforme en todas partes? b) La rapidez de los electrones es tan cercana a la rapidez de la luz que puede tomarse como $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s con un error despreciable. Encuentre la densidad de electrones en el haz. c) ¿Cuánto tardaría en emerger del acelerador un número de Avogadro de electrones?

Solución:

Datos: Radio de la sección transversal = 1,00 mm

Parte (a)

Si: $\quad I = 8{,}00\ \mu A \qquad J = ?$

Sabemos que: $A = \pi.R^2 = 3{,}1416 \times (1{,}00 \times 10^{-3})^2 = 3{,}1416\ \mu.m^2$

Luego: $\quad J = \dfrac{I}{A} = \dfrac{8{,}00\times10^{-6}}{3{,}1416\times10^{-6}}$

$$\therefore \quad J = 2{,}55\ A/m^2$$

Parte (b)

Si: $\quad c$ = rapidez de los $e^- \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s ; hallar n = ?

Sabemos que: $\quad I = n.q.v_d.A$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{I}{q.v_d.A} = \frac{8{,}00\times10^{-6}}{(1{,}6\times10^{-19})(3{,}00\times10^{8})(3{,}1416\times10^{-6})}$$

$$\therefore \quad n = 5{,}3 \times 10^{10}\ C.m^{-3}$$

Parte (c)

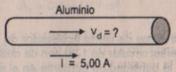
Sabemos que: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = n.q.v_d.A$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{N_A.q}{n.q.v_d.A} = \frac{6{,}023\times10^{23}}{5{,}3\times10^{10}(3\times10^{8})(\pi)(10^{-3})^2}$$

$$\therefore \quad \Delta t = 1{,}2 \times 10^{10}\ s$$

12. Un alambre de aluminio que tiene un área de sección transversal de $4{,}00 \times 10^{-6}\ m^2$ conduce una corriente de 5,00 A. Encuentre la rapidez de arrastre de los electrones en el alambre. La densidad del aluminio es de 2,70 g/cm³. (Suponga que cada átomo proporciona un electrón).

Resolución :



$\rho_{Al} = 2{,}70 \dfrac{g}{cm^3}$ $\qquad A = 4{,}00 \times 10^{-6}\ m^2$

Sabemos que: $\quad \overline{M}_{Al} = 26{,}98\ \dfrac{g}{mol}$

Entonces: $\quad 1\ mol(Al) = 26{,}98\ g$

Luego: $\quad \rho_{Al} = \dfrac{m_{Al}}{Volumen} = \dfrac{26{,}98\ g}{Volumen}$

$$\therefore\ Volumen = \frac{26{,}98\,g}{2{,}70\dfrac{g}{cm^3}} = 10^{-5}\ m^3$$

Luego: $\quad I = n.q.v_d.A$

$$\Rightarrow\ v_d = \frac{I}{n.q.A} = \frac{I}{\dfrac{N_A}{V}.q.A} = \frac{I.V}{N_A.q_{e^-}.A}$$

$$\Rightarrow\ v_d = \frac{5{,}00\times(10^{-5})}{6{,}023\times10^{23}\times(1{,}6\times10^{-19})(4{,}00\times10^{-6})}$$

$$\therefore\ v_{d\ electrones} = 1{,}3\times10^{-3}\ m/s \equiv 1{,}3\ mm/s$$

RESISTENCIA Y LA LEY DE OHM

13. Un foco eléctrico tiene una resistencia de 240 Ω cuando opera a un voltaje de 120 V ¿Cuál es la corriente a través del foco?

Resolución :

Datos: $\quad R = 240\ \Omega \qquad \Delta V = 120\ V \qquad I = ?$

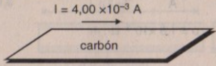
Sabemos que: $\quad \Delta V = I.R \ \Rightarrow\ 120{,}0\ V = I\ .\ (240\ \Omega)$

$$\therefore\ I = 0{,}5\ A$$

14. Un resistor se construye con una barra de carbón que tiene un área de sección transversal uniforme de 5,00 mm². Cuando se aplica una diferencia de potencial de

15,0 V entre los extremos de la barra, hay una corriente de $4{,}00 \times 10^{-3}$ A en la barra. Encuentre a) la resistencia de la barra y b) su longitud.

Resolución :



$A = 5{,}00\ mm^2$

$\Delta V = 15{,}0\ V$

Parte (a)

Sabemos que: $\quad \Delta V = I.R \ \Rightarrow\ 15{,}0\ V = 4{,}00\times10^{-3}\ A.\ R$

$$\therefore\ R = 3{,}75\ k\Omega$$

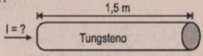
Parte (b)

$$\text{Sea:}\quad R = \rho\frac{Long}{área} = \rho\times\frac{Longitud}{5{,}00\ mm^2\times\dfrac{1\ m^2}{10^6 mm}}\times\frac{1\ m^2}{10^6 mm}$$

$$\Rightarrow\ R = 3{,}75\ k\Omega = \rho\times\frac{Long.}{5\times10^{-6}}\ \Rightarrow\ Long = ...$$

15. Se mantiene una diferencia de potencial de 0,900 V a través de un alambre de tungsteno de 1,50 m de longitud que tiene un área de sección transversal de 0,600 mm². ¿Cuál es la corriente en el alambre?

Resolución :



$\rho_{Tung} = 5{,}6\times10^{-8}\ \Omega.m$

$\Delta V = 0{,}9\ V$

Sabemos que: $\quad I = \Delta V\ .\left(\dfrac{A}{\rho.L}\right) \ \Rightarrow\ I = 0{,}9\left[\dfrac{0{,}6\times10^{-6}}{5{,}6\times10^{-8}\times(1{,}5)}\right]$

$$\therefore\ I = 6{,}43\ A$$

16. Un conductor de 1,20 cm de radio uniforme conduce una corriente de 3,00 A producida por un campo eléctrico de 120 V/m. ¿Cuál es la resistividad del material?

Resolución :

Datos: $\quad$ Radio = 1,20 cm $\qquad I = 3{,}00\ A$

$\qquad\quad E = 120\ V/m \qquad \rho$ = resistividad = ?

Sabemos que: $\Delta V = E.L$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E.L}{I} = \rho\frac{L}{A} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{E.A}{I} = \frac{120 \times \pi\left[1{,}20\times10^{-2}\right]^2}{3{,}00}$$

$$\therefore \quad \rho = 1{,}8 \times 10^{-2}\ \Omega\,.\,m$$

17. Suponga que usted desea fabricar un alambre uniforme a partir de 1,00 g de cobre. Si el alambre va a tener una resistencia de R = 0,500 Ω y se va a usar todo el cobre, ¿cuáles serán a) la longitud y b) el diámetro de este alambre?

Resolución :

Datos: $m_{cobre} = 1{,}00$ g $\qquad \rho_{cobre} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

$R = 0{,}500\ \Omega$ $\qquad$ Densidad del cobre = 8,95 g/cm³

Parte (a)

Sabemos que: $\quad R = \rho\,.\,\dfrac{L}{A} = \dfrac{\rho\,.\,L^2}{\text{volumen}}$

$$\Rightarrow \quad L^2 = \frac{R \times \text{volumen}}{A} = \frac{m \times R}{\text{densidad} \times \rho}$$

$$\Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{1\times10^{-3}\times(0{,}5)\times10^{-6}}{8{,}95\times10^{-3}\times\left(1{,}7\times10^{-8}\right)}}$$

$$\therefore \quad L = 1{,}8\ m$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad$ Volumen = A . long = $\dfrac{\pi}{4}$ (diámetro)² . long

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8{,}95}\times10^{-6} = \frac{\pi}{4}\ (\text{diámetro})^2 \times (1{,}8)$$

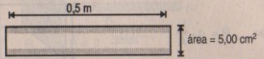
$$\therefore \quad \text{diámetro} = 280\ \mu m$$

18. a) Realice una estimación del orden de magnitud de la resistencia entre los extremos de una banda de caucho. b) Estime el orden de magnitud de la resistencia entre los lados "cara" y "cruz" de una moneda. En cada caso establezca qué cantidades consideró como datos y los valores que midió o estimó para ellos. c) ¿Cuál sería el orden de magnitud de la corriente que cada uno conduce si estuviesen conectados a un suministro de potencia de 120 V? (¡CUIDADO! ¡No intente hacer esto en casa!).

Resolución :

Parte (a)

Sea: la banda de caucho:



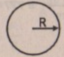
$\rho = 10^{13}\ \Omega.m$

Entonces: $\quad R = \rho_{caucho}\,.\,\dfrac{\text{Longitud}}{\text{área}} \quad \Rightarrow \quad R = 10^{13} \times \dfrac{(0{,}5)}{5{,}00\times10^{-4}}$

$$\therefore \quad R = 1{,}00 \times 10^{16}\ \Omega$$

Parte (b)

Sea: $\quad$ la moneda de plata



$R = 5{,}00$ mm

$\rho_{plata} = 1{,}58 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

Entonces: $\quad R = \rho_{plata} \times \dfrac{\text{Long.}}{\text{área}} = \rho_{plata} \times \dfrac{2\pi\,.\,r}{\pi \times r^2}$

$$R = \frac{1{,}58\times10^{-8}\times2(1)}{5{,}00\times10^{-3}} = 6{,}32 \times 10^{-6}\ \Omega$$

Parte (c)

Si $\quad \Delta V = 120$ V

Entonces: $\quad I_{(caucho)} = \dfrac{\Delta V}{R} = \dfrac{120}{1\times10^{16}} = 1{,}2 \times 10^{-4}$ A.

$$I_{(moneda)} = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120}{6{,}32\times10^{-6}} = 1{,}9 \times 10^{7}\ A.$$

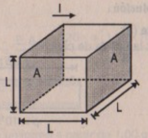
19. Un cubo sólido de plata (densidad = 10,5 g/cm³) tiene una masa de 90,0 g. a) ¿Cuál es la resistencia entre las caras opuestas del cubo? b) Si hay un electrón de conducción por cada átomo de plata, determine la rapidez de arrastre promedio de los electrones cuando una diferencia de potencial de 1,00 × 10⁻⁵ V se aplica a las caras opuestas. (El número atómico de la plata es 47, y su masa molar es 107,87 g/mol.).

Resolución :

Datos: $\quad$ Densidad de la plata = 10,5 g/cm³ $\qquad \rho = 1{,}59 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

Masa de la plata = 90,0 g

Parte (a)



Sabemos que: $R = \rho \cdot \dfrac{L}{A}$ ... (1)

Por otro lado:

$$\text{Volumen} = \frac{\text{masa}}{\text{densidad}} = \frac{90{,}0}{10{,}5} = 8{,}57\ \text{cm}^3 \equiv 8{,}57 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$\Rightarrow \quad L^3 = 8{,}57 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 \qquad \therefore \quad L = 2{,}04 \times 10^{-2}\ \text{m}$

Luego de (1)

$$R = \rho \cdot \frac{L}{L^2} = \frac{\rho}{L} = \frac{1{,}59 \times 10^{-8}\ \Omega.\text{m}}{2{,}04 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 777\ \text{n}\Omega$$

Parte (b)

Si: hay 1 e^- × cada átomo de plata; $\Delta V = 1{,}00 \times 10^{-5}$ V ; $\overline{M} = 107{,}87$ g/mol

$v_d = ? \quad ; \quad Z = 47$

$$\text{Sabemos que: \# moles} = \frac{90{,}0\ \text{g}}{107{,}87\ \text{g/mol}} = 0{,}834\ \text{mol}$$

Entonces existen:

$0{,}834 \times (6{,}023) \times 10^{23}$ electrones = # de portadores

Luego:

$$\Delta V = I.R = n.q.v_d.A.R$$

$$\Rightarrow \quad v_d = \frac{\Delta V}{n.q.A.R} = \frac{\Delta V.L}{(p)(q).R}$$

$$\Rightarrow \quad v_d = \frac{1{,}00 \times 10^{-5}\,\text{V} \times \left(2{,}05 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)}{(0{,}834)\left(6{,}023 \times 10^{23}\right)\left(777 \times 10^{-9}\right)\left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)}$$

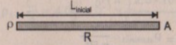
$$\therefore \quad v_d = 3{,}28\ \mu\text{m/s}$$

20. Un alambre metálico de resistencia R se corta en tres pedazos iguales que luego se conectan extremo con extremo para formar un nuevo alambre, cuya longitud es igual a una tercera parte de la longitud original. ¿Cuál es la resistencia de este nuevo alambre?

Resolución:

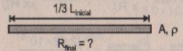
Inicialmente:

Sea:



$$R_{inicial} = R = \rho \cdot \frac{L_{inicial}}{A}$$

Finalmente:



Sabemos que:

$$+\begin{cases} R_{inicial} = R = \rho \cdot \dfrac{L_{inicial}}{A} \\[2ex] R_{final} = \rho \cdot \dfrac{L_{final}}{A} = \rho \cdot \dfrac{L_{inicial}}{3.A} \end{cases}$$

Resulta que: $R_{final} = \dfrac{R}{3}$

21. Un alambre con una resistencia R se alarga hasta 1,25 veces su longitud original jalándolo a través de un pequeño agujero. Encuentre la resistencia del alambre después de que se ha alargado.

Resolución:

Datos: Resistencia = R_o
Long. final = 1,25 long original
Resistencia final = ?

Por dilatación lineal: $L_{final} = L_o\,(1 + \alpha\,\Delta T)$

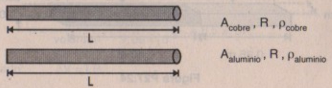
$\Rightarrow \quad 1{,}25\,L_o = L_o\,(1 + \alpha\,\Delta T) \qquad \therefore \quad 1{,}25 = 1 + \alpha\,\Delta T$

Por otro lado: $R_{final} = R_o\,(1 + \alpha\,\Delta T) = R_o\,(1{,}25)$

$\therefore \quad R_{final} = 1{,}25\,R_{inicial} = 1{,}25\,R$

22. Se encuentra que alambres de aluminio y cobre de igual longitud tienen la misma resistencia. ¿Cuál es la relación de sus radios?

Resolución:



Sabemos que: $R = \rho_{cobre} \cdot \dfrac{L}{\pi R_C^2}$

$R = \rho_{aluminio} \cdot \dfrac{L}{\pi R_{Al}^2}$

Entonces, igualando: $\rho_{cobre} \cdot \dfrac{L}{\pi R_C^2} = \rho_{aluminio} \cdot \dfrac{L}{\pi R_{Al}^2}$

$$\Rightarrow \frac{R_{aluminio}}{R_{cobre}} = \sqrt{\frac{\rho_{aluminio}}{\rho_{cobre}}} = \sqrt{\frac{2,82\times10^{-8}}{1,70\times10^{-8}}}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{aluminio}}{R_{cobre}} = 1,28$$

23. Una densidad de corriente de $6,00 \times 10^{-13}$ A/m² existe en la atmósfera donde el campo eléctrico (debido a nubarrones cargados en la vecindad) es de 100 V/m. Calcule la conductividad eléctrica de la atmósfera de la Tierra en esta región.

Resolución:

Datos: $J = 6,00 \times 10^{-13}$ A/m²
$E = 100$ V/m
$\sigma = ?$

Sabemos que: $J = \sigma . E \Rightarrow \sigma = \dfrac{J}{E} = \dfrac{6,00\times10^{-13}}{100 \text{ V/m}} \text{ A/m}^2$

$$\therefore \quad \sigma = 6,00 \times 10^{-15} \frac{1}{\Omega.m}$$

24. La barra en la figura P27.24 (no dibujada a escala) está hecha de dos materiales. Ambos tienen una sección transversal cuadrada de 3,00 mm de lado. El primer material tiene una resistividad de $4,00 \times 10^{-3}$ Ω.m y una longitud de 25,0 cm; en tanto que la resistividad del segundo material es igual a $6,00 \times 10^{-3}$ Ω.m y su longitud es de 40,0 cm. ¿Cuál es la resistencia entre los extremos de la barra?

$\rho_1 = 4,00 \times 10^{-3}$ Ω.m $\rho_2 = 6,00 \times 10^{-3}$ Ω.m

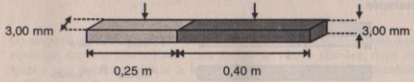


Figura P27.24

Resolución:

Sean: $R_1 = \rho_1 . \dfrac{L_1}{A} = 4,00\times10^{-3} \times \dfrac{[2,5\times10^{-1}]}{[3,0\times10^{-3}]^2}$

$$\therefore \quad R_1 = 111,1 \ \Omega$$

$R_2 = \rho_2 . \dfrac{L_2}{A} = 6,00 \times 10^{-3} \times \dfrac{4\times10^{-1}}{[3,0\times10^{-3}]^2}$

$$\therefore \quad R_2 = 266,7$$

Luego: $\Delta V_{total} = \Delta V_1 + \Delta V_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{I}\Delta V_{total} = \frac{\Delta V_1}{I} + \frac{\Delta V_2}{I}$$

$$\Rightarrow R_{total} = R_1 + R_2 = 111,1 \ \Omega + 266,7 \ \Omega$$

$$\therefore \quad R_{total} = 377,8 \ \Omega$$

UN MODELO PARA LA CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

25. Si la velocidad de arrastre de los electrones libres en un alambre de cobre es de $7,84 \times 10^{-4}$ m/s, ¿cuál es el campo eléctrico en el conductor?

Resolución:

Datos: $v_d = 7,84 \times 10^{-4}$ m/s ; $E = ?$; $\rho = 1,7 \times 10^{-8}$ Ω. m

Sabemos que: $v_d = \dfrac{q.E.t}{m_e} = \dfrac{1,6\times10^{-19}\times E\times t}{9,1\times10^{-31}} = 7,84 \times 10^{-4}$

$$\therefore \quad E \times t = 44,59 \times 10^{-16} \quad ... (1)$$

Como cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre, luego:

En una mol de cobre hay 63,5 g, entonces:

$$\text{Volumen} = \frac{m}{\text{densidad}} = \frac{63,5 \text{ g}}{8,95 \text{ g/cm}^3} = 7.09 \text{ cm}^3 \equiv 7,09 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Por lo tanto:

$$n = \frac{N_A}{\text{volumen}} = \frac{6,023\times10^{23}}{7,09\times10^{-6}} = 8,5 \times 10^{28}$$

por otro lado: $\Delta V = I.R$

$$\Rightarrow \quad E.L = n.q.v_d.A \times \left(\rho \cdot \frac{L}{A}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = n.q.v_d.r = 8{,}5 \times 10^{28} \times (1{,}6 \times 10^{-19})(7{,}84 \times 10^{-4})(1{,}7 \times 10^{-8})$$

$$\therefore \quad E = 0{,}180 \text{ V/m}$$

26. Si la corriente transportada por un conductor se duplica, ¿qué pasa con a) la densidad de los portadores de carga? b) la densidad de corriente? c) la velocidad de arrastre de los electrones? d) el tiempo promedio entre colisiones?

Resolución :

Parte (a) Si la corriente por un conductor se duplica, entonces: "La densidad de los portadores de carga se duplica"

Parte (b) Si la corriente por un conductor se duplica, entonces: "La densidad de corriente se duplica"

Parte (c) Si la corriente por un conductor se duplica, entonces: "La velocidad de arrastre de los electrones se duplica"

Parte (d) Si la corriente por un conductor se duplica, entonces: "El tiempo promedio entre colisiones disminuye en la mitad".

27. Utilice los datos del ejemplo 27.1 para calcular la trayectoria libre media de choque de los electrones en el cobre, si la rapidez térmica promedio de los electrones de conducción es de $8{,}60 \times 10^5$ m/s.

Resolución :

Datos: $\overline{V}_d = 8{,}60 \times 10^5$ m/s $\quad \overline{\ell} = ?$

Utilizando los datos del ejemplo 27,1, tenemos que:

$$n = 8{,}49 \times 10^{28} \text{ electrones /m}^3$$

Entonces:

$$\text{Tiempo promedio} = \frac{m_{e^-}}{\rho.n.q^2} = \frac{9{,}1\times10^{-31}}{1{,}7\times10^{-8}\times\left(8{,}49\times10^{28}\right)\left(1{,}6\times10^{-19}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \text{Tiempo promedio} = 246{,}3 \times 10^{-16} \text{ s}$$

En consecuencia:

$$\overline{\ell} = \overline{V}_d \times \text{tiempo prom} = 8{,}60 \times 10^5 \times (246{,}3 \times 10^{-16})$$

$$\therefore \quad \ell = 21{,}2 \text{ nm}$$

RESISTENCIA Y TEMPERATURA

28. Mientras tomas fotografías en Death Valley un día en que la temperatura es de 58,0 °C, Bill Hiker encuentra que cierto voltaje aplicado a un alambre de cobre produce una corriente de 1,000 A. Luego Bill viaja a la Antártida y aplica el mismo voltaje al mismo alambre. ¿Qué corriente registra si la temperatura es de –88,0 °C? Suponga que no hay cambio en la forma y tamaño del alambre.

Resolución :

Datos: $I_1 = 1{,}00$ A $\quad T_1 = 58°C \quad \alpha_{\text{cobre a }20°C} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$I_2 = ? \quad T_2 = -88°C \quad \Delta V = \text{cte}$

Sabemos que: $R_1 = R_o\,[1 + \alpha\,(T_1 - T_0)]$

$R_2 = R_o\,[1 + \alpha\,(T_2 - T_0)]$

Entonces: $I_1 \,.\, R_1 = I_2 \,.\, R_2$ (ΔV es el mismo)

$$\Rightarrow \quad I_1.\, R_0\,(1 + \alpha\,[T_1 - T_0]) = I_2 \,.\, R_0\,(1 + \alpha\,[T_2 - T_0])$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00)\,[1 + 3{,}9 \times 10^{-3}\,(58 - 20)] = I_2\,[1 - 3{,}9 \times 10^{-3}\,(88 + 20)]$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{1+3{,}9\times10^{-3}\,(38)}{1-3{,}9\times10^{-3}\,(108)} = 1{,}98 \text{ A}$$

29. Cierto foco eléctrico tiene un filamento de tungsteno con una resistencia de 19,0 Ω cuando está frío, y de 140 Ω cuando está caliente. Suponiendo que se puede usar la ecuación 27.21 sobre el amplio intervalo de temperatura involucrado aquí, encuentre la temperatura del filamento cuando está caliente. (Suponga una temperatura inicial de 20,0 °C).

Resolución :

Datos: $R_o = 19{,}0\ \Omega \quad \wedge \quad T_0 = 20°C$

$R_f = 140{,}0\ \Omega \quad \wedge \quad T_0 = ?$

$\alpha_{\text{tungsteno}} = 4{,}5 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Sabemos que: $R_f = R_o\,[1 + \alpha\,(T_c - T_0)]$

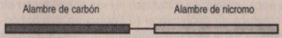
$$\Rightarrow \quad 140{,}0 = 19{,}0\,[1 + 4{,}5 \times 10^{-3}\,(T_c - 20)]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\frac{140}{19} - 1}{4{,}5\times10^{-3}}\right] + 20 = T_C$$

$$\therefore \quad T_{\text{caliente}} = 1{,}44 \times 10^3\ °C$$

30. Un alambre de carbón y un alambre de nicromo se conecta en serie. Si la combinación tiene una resistencia de 10,0 kΩ a 0 °C, ¿cuál es la resistencia de cada alambre a 0 °C de manera que la resistencia de la combinación no cambie con la temperatura? (Advierta que la resistencia equivalente de lso dos resistores en serie es la suma de sus resistencias).

Resolución :

Sean: 

$T_o = 20°C$

Por dato: $R_{equiv}\ (0°C) = R_{carbón} + R_{nicromo} = 10{,}0 \times 10^3\ \Omega$

Entonces: $10{,}0 \times 10^3 = R_o\,[1 - \alpha_{carbón}\,(20)] + R\,[1 - \alpha_{nicromo}\,(20)]$

$\Rightarrow\quad 10{,}0 \times 10^3 = R_{inic} + R_{inicial}\,[1 - 0{,}4 \times 10^{-3}\,(20)]$

$\therefore\quad R_{inicial} = 5{,}02 \times 10^3\ \Omega = R_{carbón}$

En consecuencia:

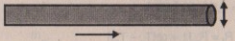
$R_{nicromo} = 10{,}0 \times 10^3 - 5{,}02 \times 10^3\ \Omega$

$\therefore\quad R_{nicromo} = 4{,}98 \times 10^3\ \Omega$

31. Un alambre de aluminio con un diámetro de 0,100 mm tiene un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 0,200 V/m impuesto a lo largo de su longitud. La temperatura del alambre es de 50,0 °C. Suponga un electrón libre por átomo. a) Use la información de la tabla 27.1 y determine la resistividad. b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? c) ¿Cuál es la corriente total en el alambre? d) ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones de conducción? e) ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre los extremos de un alambre de 2,00 m de longitud para producir la intensidad de campo eléctrico establecida?

Resolución :

Alambre de aluminio

$T = 50°C$  Diámetro = $0{,}1 \times 10^{-3}$ m

$$E = 0{,}200\,\frac{V}{m}$$

Parte (a)

Según la tabla 27.1: $\rho = \rho_o\,[1 + \alpha\,(T - T_o)]$

$\Rightarrow\quad \rho = 2{,}82 \times 10^{-8}\,[1 + 3{,}9 \times 10^{-3}\,(50 - 20)]$

$\therefore\quad \rho = 31{,}5\ \Omega \times 10^{-9} = 31{,}5\ n\Omega\ m$

Parte (b)

Sabemos que: $J = \sigma \,.\, E = \dfrac{1}{\rho}\,.\,E$

$$\Rightarrow\quad J = \frac{1}{31{,}5 \times 10^{-9}} \times 0{,}200$$

$$\therefore\quad J = 6{,}35 \times 10^6\ \frac{A}{m^2} \equiv 6{,}35\ MA/m^2$$

Parte (c)

Sabemos que: $J = \dfrac{I}{A}$

$$\Rightarrow\quad I = J \times A = 6{,}35 \times 10^6 \times [\frac{\pi}{4} \times (0{,}1 \times 10^{-3})^2]$$

$$\therefore\quad I = 4{,}99 \times 10^{-2}\ A \equiv 49{,}9\ mA$$

Parte (d)

Sabemos que: $1\ mol = N_A\, e^-$

$$\Rightarrow\quad \frac{m}{\overline{M}} = 1\ mol = N_A$$

$$\Rightarrow\quad m = N_A \,.\, \overline{M}$$

$$\therefore\quad \begin{matrix}\text{Densidad}\\ \text{de carga}\end{matrix} = N_A \Big/ \frac{\overline{M}}{\text{Densidad}} = \frac{6{,}023\times10^{23}\times2{,}70\times10^{6}}{26{,}28} = 6{,}03\times10^{28}\ \text{electrones}/m^3$$

Luego: $I = n.q.v_d.A$

$$\Rightarrow\quad v_d = \frac{I}{n.q.A} = \frac{49{,}9\times10^{-3}}{(6{,}03\times10^{28})(1{,}6\times10^{-19})\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}1\times10^{-3})^2}$$

$$\therefore\quad v_d = 659 \times 10^{-6}\ m/s \equiv 659\ \mu\ m/s$$

Parte (e)

Sabemos que: $\Delta V = I.R = I \,.\, \rho \,.\, \dfrac{Long}{A}$

$$\Rightarrow\quad \Delta V = 49{,}9 \times 10^{-3} \times \left[\frac{31{,}5\times10^{-9}\times2}{0{,}25\pi(0.1\times10^{-3})^2}\right]$$

$$\therefore\quad \Delta V = 0{,}400\ V$$

32. Problema de repaso. Una barra de aluminio tiene una resistencia de 1,234 Ω a 20,0 °C. Calcule la resistencia de la barra a 120 °C al tomar en consideración los cambios tanto en la resistividad como en las dimensiones de la barra.

Resolución :

Datos: $R_o = 1{,}234\ \Omega$ $\quad T_o = 20°C \quad \alpha_{alum\ 20°C} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$R_f = ? \quad T_f = 120°C \quad \underset{lineal}{\alpha_{alum\ 20°C}} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Sabemos que: $R_o = \rho_o \cdot \dfrac{L_o}{A}$

Por otro lado: $R_f = R_o\left[1+\alpha(T_f - T_o)\right]$

Además: $L_f = L_o\,[1 + \alpha'\,(T_f - T_o)]$

Entonces: $R_f = \rho \cdot \dfrac{L_f}{A} = \dfrac{\rho}{A} \times L_o\,[1 + \alpha'\,(T_f - T_o)]$

$\Rightarrow\ R_f = \dfrac{\rho_o}{A}\,(1 + \alpha\,[T_f - T_o]) \cdot L_o\,[1 + \alpha'\,(T_f - T_o)]$

$\Rightarrow\ R_f = R_o\,[1 + \alpha(T_f - T_o)] \cdot [1 + \alpha'\,(T_f - T_o)]$

$\Rightarrow\ R_f = 1{,}234\,[1 + 3{,}9 \times 10^{-3}\,(100)] \cdot [1 + \alpha'\,(100)]$

$\therefore\ R_f = 3{,}774\ \Omega$

33. ¿Cuál es el cambio fraccionario de la resistencia de un filamento de hierro cuando su temperatura cambia de 25,0 °C a 50,0 °C?

Resolución :

Datos: $T_o = 25°C \quad \alpha_{hierro}\,(20°C) = 5{,}0 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$T_f = 50°C \quad \dfrac{\Delta R_o}{R_f} = ?$

Sabemos que: $R_{25} = R_o\,[1 + \alpha_{20°C}\,(5)] = R_o + 5R_o\,\alpha_{20°C}$

$R_{50} = R_o\,[1 + \alpha_{20°C}\,(30)] = R_o + 30R_o\,\alpha_{20°C}$

$R_{50} - R_{25} = 30R_o\,\alpha_{20°C} - 5R_o\,\alpha_{20°C}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\Delta R}{R} = 25 \cdot \alpha_{20°C} = 25 \times (5{,}0 \times 10^{-3})$

$\therefore\ \dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}125$

34. La resistencia de un alambre de platino se va a calibrar para mediciones de baja temperatura. Un alambre de platino con resistencia de 1,00Ω a 20,0 °C se sumerge en nitrógeno líquido a 77 K (–196 °C). Si la respuesta de temperatura del alambre de platino es lineal, ¿cuál es la resistencia esperada del alambre de platino a –196 °C? ($\alpha_{platino} = 3{,}92 \times 10^{-3} / °C$).

Resolución :

Datos: $R_o = 1{,}00\ \Omega \ \wedge\ T_o = 20°C$

$R_f = ? \ \wedge\ T_f = -196°C$

$\alpha_{PLATINO} = 3{,}92 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Sabemos que: $R_f = R_o\,[1 + \alpha\,(T_f - T_o)$

$\Rightarrow\ R_f = 1{,}00\,[1 + 3{,}92 \times 10^{-3}\,(-196 - 20)]$

$\Rightarrow\ R_f = 1{,}00\,[1 - 3{,}92 \times 10^{-3}\,(216)]$

$\therefore\ R_f = 0{,}153\ \Omega$

35. La temperatura de una muestra de tungsteno se incrementa mientras una muestra de cobre se mantiene a 20 °C. ¿A qué temperatura la resistividad de la muestra de tungsteno será cuatro veces la de la muestra de cobre?

Resolución :

Datos: Temperatura del tungsteno se incrementa $\quad T_{tung} = ?$

Temperatura del cobre se mantiene a 20°C

$\alpha_{tungsteno} = 4{,}5 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$\alpha_{cobre} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Por condición: $\rho_{tung} = 4\,\rho_{cobre}$

Entonces: $\underset{(20°C)}{\rho_{tung}}\,(1 + \alpha_{tung}\,[T - 20°]) = 4\,\underset{(20°C)}{\rho_{cobre}}\,\ [1 + \alpha_{cobre}\,(0°C)]$

$\Rightarrow\ 5{,}6 \times 10^{-8}\,[1 + 4{,}5 \times 10^{-3}\,(T - 20)] = 4(1{,}7 \times 10^{-8})$ (según tabla)

$$\Rightarrow\ T_{tungs} = \frac{20\times\left(5{,}6\times10^{-8}\right)\left(4{,}5\times10^{-3}\right)+4\left(1{,}7\times10^{-8}-5{,}6\times10^{-8}\right)}{\left(5{,}6\times10^{-8}\right)\left(4{,}5\times10^{-3}\right)}$$

$\therefore\ T_{tungs} = 67{,}6°C$

36. Un segmento de un alambre de nicromo está inicialmente a 20,0 °C. Utilizando los datos de la tabla 27.1 calcule la temperatura a la cual el alambre debe calentarse para duplicar su resistencia.

Resolución :

Datos: $R_o \wedge T = 20°C$ $\alpha_{nicromo} = 0,4 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$R_f = 2R_o$ a $T_f = ?$

Sabemos que: $R_f = R_o\,[1 + \alpha_{nicromo}\,(T_f - T_o)]$

$$\Rightarrow\quad 2R_o = R_o\,[1 + 0,4 \times 10^{-3}\,(T_f - 2a)] \quad\Rightarrow\quad T_f = \frac{1+\left(0,4\times10^{-3}\right)(20)}{0,4\times10^{-3}}$$

$$\therefore\quad T_f = 2\,520°C$$

ENERGÍA ELÉCTRICA Y POTENCIA

37. Un tostador está nominado a 600 W cuando se conecta a una fuente de 120 V. ¿Qué corriente conduce el tostador, y cuál es su resistencia?

Resolución :

Datos: P = 600 W $\Delta V = 120$ V I = ? ; R = ?

Sabemos que: $\mathscr{P} = I.\Delta V \Rightarrow 600 = 120\,.\,I$

$\therefore\quad I = 500$ A

Luego: $\Delta V = I.R$

$\Rightarrow\quad 120 = 5{,}00\,.\,R \quad\therefore\quad R = 24{,}00\ \Omega$

38. En una instalación hidroeléctrica, una turbina entrega 1 500 hp a un generador, el cual, a su vez, convierte 80,0 % de la energía mecánica en energía eléctrica. En estas condiciones, ¿qué corriente entregará el generador a una diferencia de potencial terminal de 2 000 V?

Resolución :

Datos: $\mathscr{P} = 1\,500\ \text{hp} \equiv 1500 \times (746) = 1{,}12 \times 10^6$ W

$\Delta V = 2\,000$ V

I = ?

Sabemos que: $\mathscr{P} = I.V$

Pero: $80\%\ \mathscr{P} = I.\Delta V$

$$\Rightarrow\quad \frac{80}{100} \times 1{,}12 \times 10^6 = I\,.\,2 \times 10^3$$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{80\times\left(1{,}12\times10^6\right)}{2{,}00\times10^5}$$

$\therefore\quad I = 448$ A (entregará el generador en estas condiciones)

39. **Problema de repaso.** ¿Cuál es la resistencia que necesita un calefactor de inmersión que aumentará la temperatura de 1,50 kg de agua de 10,0 °C a 50,0 °C en 10,0 min mientras opera a 110 V?

40. **Problema de repaso.** ¿Cuál es la resistencia que necesita un calefactor de inmersión que aumentará la temperatura de una masa m de agua de T_1 a T_2 en un tiempo t mientras opera un voltaje ΔV?

Resolución 39 y 40 :

Datos: $m_{H_2O} = 1{,}50$ kg ; Tiempo = 10 min ; $C_{e\,(H_2O)} = 4\,186\ \dfrac{J}{kg°C}$

$T_{inicial} = 10°C$; $\Delta V = 110$ V

$T_{final} = 50°C$; R = ?

Sabemos que: $$\mathscr{P} = \frac{\text{energía consumida}}{t} = \frac{m_{H_2O}.C_e.\Delta T}{t} = \frac{\Delta V^2}{R}$$

$$\Rightarrow\quad R = \frac{\Delta V^2.t}{m_{H_2O}.C_e.\Delta T} = \frac{(110)^2\times600}{(1{,}50)(4\,186)(50-10)}$$

$$\therefore\quad R = 28{,}9\ \Omega$$

41. Suponga que una onda de voltaje produce 140 V durante un momento. ¿En qué porcentaje aumentará la salida de un foco eléctrico de 100 W y 120 V? (Suponga que su resistencia no cambia.)

Resolución :

Datos: $\Delta V = 140$ V

$\mathscr{P} = 100$ W

$\%\ \mathscr{P} = ?$ a 120 V

Sabemos que inicialmente:

$$\mathscr{P}_i = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{(120)^2}{R} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{(120)^2}{100} = 144\ \Omega$$

Luego: $$\mathscr{P}_{final} = \frac{(140)^2}{144} = 136{,}1\ \text{W}$$

En consecuencia:

Si: 100 W ——— 100%

136,1 W ——— x

$\therefore\quad x = 136{,}1\%$ (aumenta en 36%)

42. Una bobina calefactora de 500 W diseñada para operar a 110 V está hecha de alambre de nicromo de 0,500 mm de diámetro). a) Suponiendo que la resistividad del nicromo permanece constante en su valor a 20,0 °C, encuentre la longitud del alambre utilizado. b) Considere luego la variación de la resistividad con la temperatura. ¿Qué potencia entregará en realidad la bobina del inciso a) cuando se caliente hasta 1 200 °C?

Resolución :

Datos: $\mathscr{P} = 500$ W
$\Delta V = 110$ V
Diámetro (nicromo) = 0,500 mm

Parte (a)

$\alpha_{\text{nicromo }(20°C)} = 0,4 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$ $\rho_{\text{nicromo }(20°C)} = 1,5 \times 10^{-6}\ \Omega.\text{m}$

Sabemos que: $\mathscr{P} = \dfrac{\Delta V^2}{R} = \dfrac{\Delta V^2}{\rho \cdot \dfrac{\text{Long.}}{\text{área}}}$

$$\Rightarrow \mathscr{P} = \frac{\Delta V^2 .\text{área}}{\rho_o \cdot \text{Longitud}}$$

$$\Rightarrow \text{Longitud} = \frac{\Delta V^2 .\text{área}}{\mathscr{P}.\rho_{(20°C)}} = \frac{(110)^2 \times \pi (0,5\times10^{-3})^2}{500\times(1,5\times10^{-6})} \times \left(\frac{1}{4}\right)$$

$\therefore$ Longitud del alambre de nicromo = 3,17 m

Parte (b)

Sabemos que: $\rho_{(1\,200°C)} = \rho_o (1 + \alpha[T - T_o])$

$$\Rightarrow \rho = 1,5 \times 10^{-6} [1 + 0,4 \times 10^{-3} (1\,200 - 20)]$$

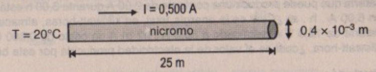
$$\therefore \rho_{(1\,200°C)} = 2,2 \times 10^{-6}\ \Omega.\text{ m}$$

Luego: $\mathscr{P} = \dfrac{\Delta V^2}{R} = \dfrac{\Delta V^2 .\text{área}}{\rho.\text{Longitud}} \Rightarrow \mathscr{P} = \dfrac{(110)^2 \times \pi (0,5\times10^{-3})^2}{4(3,17)(2,2\times10^{-6})}$

$$\therefore \mathscr{P} = 340,6 \text{ W}$$

43. Una bobina de alambre de nicromo mide 25,0 m de longitud. El alambre tiene un diámetro de 0,400 mm y está a 20,0 °C. Si el alambre porta una corriente de 0,500 A, ¿cuáles son a) la magnitud del campo eléctrico en el mismo y b) la potencia que se le entrega? c) Si la temperatura se incrementa a 340 °C y la diferencia de potencial a través del alambre permanece constante, ¿cuál es la potencia entregada?

Resolución :



$$\rho_{\text{nicromo}(20°C)} = 1,50 \times 10^{-6}\ \Omega.\text{ m}$$

$$\alpha_{\text{nicromo}(20°C)} = 0,4 \times 10^{-3}\ C^{-1}$$

Parte (a)

Sabemos que: $J = \sigma.E$

$$\Rightarrow \rho.J = E \Rightarrow \rho \cdot \frac{I}{A} = E$$

$$\Rightarrow E = 1,5 \times 10^{-6} \times \frac{0,500}{\frac{\pi}{4}(0,4\times10^{-3})^2}$$

$$\Rightarrow E = 5,97\ \frac{V}{m}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta V = E \cdot \text{long.}$

Entonces: $\mathscr{P} = \Delta V \cdot I = E \cdot \text{long.}\ I$

$$\Rightarrow \mathscr{P} = 5,97 \times (25) \times (0,500)$$

$$\therefore \mathscr{P} = 74,6 \text{ W}$$

Parte (c)

Sabemos que: $R(340°C) = R_o (1 + \alpha [T - T_o])$

$$\Rightarrow R_{(340°C)} = \frac{\rho_o \text{ long.}}{A} [1 + \alpha (T - T_o)]$$

$$\Rightarrow R_{(340°C)} = \frac{1,5\times10^{-6}\times25}{\frac{\pi}{4}(0,4\times10^{-3})^2} . [1 + 0,4 \times 10^{-3} (340 - 20)]$$

$$\therefore R_{(340°C)} = 336,6\ \Omega$$

Luego: $\mathscr{P} = \dfrac{\Delta V^2}{R} = \dfrac{E^2.\text{Longitud}^2}{R(340°C)} = \dfrac{(5,97)^2 \times (25)^2}{336,6}$

$$\therefore P = 66,1 \text{ W}$$

44. Las baterías se especifican en términos de ampere-horas (A.h). Por ejemplo, una batería que puede producir una corriente de 2,00 A durante 3,00 h está especificada en 6,00 A . h . a) ¿Cuál es la energía total, en kilowatt-horas, almacenada en una batería de 12,0 V especificado a 55,0 A . h? b) A un costo de 0,060 0 dólares por kilowatt-hora, ¿cuál es el valor de la electricidad producida por esta batería?

Resolución:

Datos: $\Delta V = 12{,}0\ V$

Parte (a)

Sabemos que: $\mathscr{P} = I \,.\, \Delta V = \dfrac{\text{energía}}{t}$

Por otro lado: $I \times t = 6{,}00\ A.h$

Luego: energía total $= (I \times t)\,.\,\Delta V = 6{,}00\ A.h \times 12\ V = 0{,}072\ kWh$

Parte (b)

A un costo de: 0,060 dólares/kWh

Entonces:

$$\text{Valor de la energía producida} = 0{,}072\ kWh \times \left(0{,}060\ \frac{\text{dólares}}{kWh}\right)$$

$\therefore$ Valor de energía = 0,00432 dólares

45. Una batería de 10,0 V se conecta a un resistor de 120 Ω. Ignorando la resistencia interna de la batería calcule la potencia entregada al resistor.

Resolución:

Datos: $\Delta V = 10{,}0\ V$
$R = 120\ \Omega$
$P = ?$

Sabemos que: $\mathscr{P} = I\,.\,\Delta V = \dfrac{\Delta V^2}{R} \Rightarrow \mathscr{P} = \dfrac{(10{,}0)^2}{120}$

$\therefore \mathscr{P} = 0{,}833\ W$

46. Se estima que cada persona en Estados Unidos (población = 270 millones) tiene un reloj eléctrico, y que cada reloj utiliza energía a una rapidez de 2,50 W. Para suministrar esta energía, ¿aproximadamente cuántas toneladas métricas de carbón se queman por hora en plantas carboeléctricas que, en promedio, tiene una eficiencia de 25,0%? (El calor de combustión para el carbón es de 33,0 MJ/kg.).

Resolución:

Datos: Energía (consumida por 270 millones de personas) $= 2{,}50\ \dfrac{J}{s}$

$$\frac{\text{Calor de combustión del carbón}}{\text{Masa}} = 33{,}0\ \frac{MJ}{kg}$$

$M_{carbón} = ?$

Sabemos que: $25\%\ \dfrac{\text{consumo de calor del carbón}}{1\ \text{hora}} = \dfrac{\text{energía consumida}}{1\ s}$

$$\Rightarrow \frac{0{,}25 \times 33{,}0 \times 10^6}{\text{masa}} = 2{,}50 \times (3{,}6 \times 10^3)$$

$\therefore$ masa del carbón = 0,92 T.M.

47. Calcule el costo diario de operar una lámpara que toma 1,70 A de una línea de 110 V si el costo de la energía eléctrica es de 0,060 dólares/kWh.

Resolución:

Datos: $I = 1{,}70\ A$
$\Delta V = 110\ V$
Costo de energía = 0,060 dólares/kW h

Sabemos que: $\mathscr{P} = \dfrac{\text{energía consumida}}{1\ s} = \dfrac{1{,}70 \times 110}{1\ s}$

$\Rightarrow$ energía consumida = 0,187 kWh

Luego: El costo de energía consumida por día:

$$0{,}187\ kW.h \times \left(0{,}060\ \frac{\text{dólares}}{kWh}\right) \times 24$$

$\therefore$ Costo de energía elécrica $= 0{,}2690\ \dfrac{\text{dólares}}{\text{día}}$

48. **Problema de repaso**. El elemento calefactor de una cafetera opera a 120 V y conduce una corriente de 2,00 A. Suponiendo que toda la energía transferida desde el elemento calefactor es absorbida por el agua, ¿cuánto tiempo tarda en calentarse 0,500 kg de agua desde la temperatura ambiente (23,0 °C) hasta el punto de ebullición?

Resolución:

Datos: $\Delta V = 120\ V$ $\quad T_o = 23°C$
$I = 2{,}00\ A$ $\quad T_f = 100°C$
$M_{H_2O} = 0{,}500\ kg$ $\quad L_{tarda} = ?$

Sabemos que: $\mathscr{P} = I.\Delta V = \dfrac{\text{energía consumida}}{1 \text{ segundo}}$

$$\Rightarrow \quad (120 \times 2)(t_{tarda}) = M_{H_2O} \,.\, C_E \,.\, \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad t_{tarda} = \frac{(0{,}500)(4\,186)(100-20)}{240}$$

$$\therefore \quad t_{tarda} = 697{,}7 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \equiv 11{,}63 \text{ min}$$

49. Cierto tostador tiene un elemento calefactor hecho de alambre de resistencia de nicromo. Cuando se conecta primero a una fuente de diferencia de potencial de 120 V (y el alambre está a una temperatura de 20,0 °C) la corriente inicial es de 1,80 A. Sin embargo, la corriente empieza a disminuir cuando se calienta el elemento resistivo. Cuando el tostador ha alcanzado la temperatura máxima a la que funciona, la corriente ha disminuido a 1,53 A. a) Determine la potencia que el tostador consume cuando se encuentra a su temperatura de funcionamiento. b) ¿Cuál es la temperatura máxima del elemento calefactor?

Resolución :

Datos:
$\Delta V = 120 \text{ V} \quad \wedge \quad T_o = 20°C$
$I_{inicial} = 1{,}80 \text{ A}$
$I_{final} = 1{,}53 \text{ A} \quad \wedge \quad T_F = ?$
$\alpha_{nicromo}\,(20°C) = 0{,}4 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$
$\rho_{nicromo}\,(20°C) = 1{,}5 \times 10^{-6}\ \Omega.m$

Parte (a)

Sabemos que a la temperatura máxima de funcionamiento la potencia que el tostador consume será:

$$\mathscr{P} = I_{final} \,.\, \Delta V \quad \Rightarrow P = (1{,}53)(120)$$

$$\therefore \quad \mathscr{P} = 184 \text{ W}$$

Parte (b)

Sabemos que: $R_o = \dfrac{\Delta V}{I_o} = \dfrac{120}{1{,}80} \quad \therefore \quad R_o = 66{,}7\ \Omega$

Por otro lado: $R_f = \dfrac{\Delta V}{I_F} = \dfrac{120}{1{,}53} \quad \therefore \quad R_f = 78{,}4$

Luego: $R_f = R_o\,[1 + \alpha_{nicromo}\,(T - T_o)]$

$$\Rightarrow \quad 78{,}4 = 66{,}7\,[1 + 0{,}4 \times 10^{-3}\,(T - 20)]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\dfrac{78{,}4}{66{,}7} - 1}{0{,}4 \times 10^{-3}}\right] + 20 = T \qquad \therefore \quad T = 461°C$$

50. Para calentar un cuarto que tiene un techo de 8,0 pies de alto se requieren aproximadamente 10,0 W de potencia eléctrica por pie cuadrado. A un costo de 0,080 dólares/kWh, ¿cuánto costará, por día, usar electricidad para calentar un cuarto que mide 10,0 × 15,0 pies?

Resolución :

Datos: Altura del cuarto = 8,0 pies

$$\frac{\mathscr{P}}{A} = 10{,}0 \frac{\text{W}}{\text{pie}^2}$$

Costo = 0,080 dólares/kWh

Costo de energía de un cuarto (10,0 × 15 pies) = ?

Sabemos que: $\dfrac{\mathscr{P}}{A} = 10{,}0\ \dfrac{\text{W}}{\text{Pie}^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{energía consumida}}{\text{Area}} = \frac{10.0 \text{ W} \times \text{h}}{\text{Pie}^2} = 0.01 \frac{\text{kW h}}{\text{Pie}^2}$$

Luego: $\dfrac{\text{energía consumida}}{(10 \times 15)} = 0.01 \dfrac{\text{kW .h}}{\text{Pie}^2}$

$\therefore$ Energía consumida = (150)(0,01) = 1,5 kWh

En consecuencia:

$$\text{Costo de energía} \times \text{día} = (1{,}5 \text{ kW})\text{h} \times 24 \times 0{,}080 \ \frac{\text{dólares}}{\text{kWh}}$$

$\therefore$ Costo de energía × día = 2,88 dólares

51. Estime el costo que representa para una persona usar una secadora de cabello durante un año. Si usted no usa secadora, observe o entreviste a alguien que sí lo haga. Establezca las cantidades que estimó y sus valores.

Resolución :

La potencia de la secadora = 400 W

Entonces la energía consumida = 400 W.h

Una persona (entrevistada) utiliza aproximadamente la secadora 0,5 horas × día. Así también el costo de la empresa eléctrica que cobra por kWh es en dólares: 0,086 dólares/kWh

Luego:

$$\text{Energía consumida en un año} \times \text{una persona} = \frac{400\,\text{W}.\text{h} \times 0{,}5}{\text{día}} \times \frac{365\ \text{días}}{1\ \text{año}} =$$

En consecuencia:

$$\text{Costo total que representa} = (400)(0{,}5)(365) \times 0{,}086\ \frac{\text{dólares}}{\text{kWh}}$$

$\therefore$ Costo total = 6 278 dólares/año

PROBLEMAS ADICIONALES

52. Un foco eléctrico está marcado "25 W 120 V", y otro "100 W 120 V"; esto significa que cada foco convierte su respectiva potencia cuando se conecta a una diferencia de potencial constante de 120 V. a) Encuentre la resistencia de cada foco. b) ¿Cuánto tarda 1,00 C en pasar a través del foco encendido? ¿Cómo se diferencia esta carga al momento de su salida en comparación con el tiempo de su entrada? c) ¿Cuánto tarda 1,00 J en pasar a través del foco encendido? ¿Cómo tarda 1,00 J en pasar a través del foco encendido? ¿Cómo se diferencia esta energía en el momento de su salida en comparación con el tiempo de su entrada? d) Encuentre el costo de mantener el foco encendido, de manera continua, durante 30,0 días, si la compañía eléctrica vende su producto a 0,070 0 dólares por kWh. ¿Qué producto vende la compañía eléctrica? ¿Cuál es el precio para una unidad SI de esta cantidad?

Resolución:

Datos: Foco 1 : $\mathscr{P}_1 = 25$ W $\quad \Delta V = 120$ V

Foco 2: $\mathscr{P}_2 = 100$ W $\quad \Delta V = 120$ V

Parte (a)

Sabemos que: $\mathscr{P}_1 = \dfrac{\Delta V^2}{R_1}$ (Foco 1)

$$\Rightarrow\ R_1 = \frac{(\Delta V)^2}{P_1} = \frac{(120)^2}{25} = 576\ \Omega$$

Para el foco 2: $R_2 = \dfrac{(\Delta V)^2}{\mathscr{P}_2} = \dfrac{(120)^2}{100} = 144\ \Omega$

Parte (b)

Sabemos que: $\mathscr{P}_1 = I\,.\,\Delta V$ (foco 1)

$$\Rightarrow\ 25 = I_1\,(120) \qquad \therefore\ I_1 = 0{,}208\ \text{A}$$

Luego: $0{,}208 = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{1}{\Delta t} \qquad \therefore\ \Delta t = 4{,}8$ s

Para el foco (2) $100 = I_2\,.\,(120) \qquad \therefore\ I_2 = 0{,}833$

Luego: $0{,}833 = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \therefore\ \Delta t = 1{,}2$ s

Parte (c)

Sabemos que: $P_1 = \dfrac{\text{energía}}{t_1} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\text{energía}}{P_1} = \dfrac{1{,}00\ \text{J}}{25} = 0{,}04$ s

$$P_2 = \frac{\text{energía}}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\text{energía}}{P_2} = \frac{1{,}00\ \text{J}}{100} = 0{,}01\ \text{s}$$

Parte (d)

Si el costo de mantener el foco encendido = 0,070 dólares/kWh

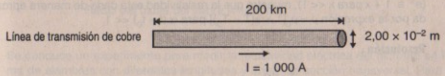
Luego:

$$\text{Foco 1: } 25\ \text{W.h} \times 30\ \text{días}\left(\frac{24}{1\ \text{día}}\right)\times\left(0{,}070\ \frac{\text{dólares}}{\text{kWh}}\right) = 1{,}26\ \text{dólares}$$

$$\text{Foco 2: } 100\ \text{W.h} \times 30\ \text{días}\left(\frac{24}{1\ \text{día}}\right)\times\left(0{,}070\ \frac{\text{dólares}}{\text{kWh}}\right) = 5{,}04\ \text{dólares}$$

53. Una línea de transmisión de alto voltaje con un diámetro de 2,00 cm y una longitud de 200 km conduce una corriente estable de 1 000 A. Si el conductor es alambre de cobre con una densidad de carga libre de $8{,}00 \times 10^{28}$ electrones/m³, ¿cuánto tarda un electrón en viajar la longitud completa del cable?

Resolución:



$$n_{cobre} = 8{,}00 \times 10^{28}\ \frac{\text{electrón}}{\text{m}^3}$$

$$t_{viaje} = ?$$

Sabemos que: $I = n.q.v_d.A = n.q.\dfrac{\text{Long.}}{t}.A$

$$\Rightarrow \quad t_{viaje} = \frac{n.q.Long.A}{I} = \frac{8,00\times10^{23}\times(1,6\times10^{-19})(2\times10^{5})(\pi)\left[2,00\times10^{-2}\right]^2}{4(10^3)}$$

$$\therefore \quad t_{viaje} = 8,04 \times 10^8 \text{ s} \cong 25,5 \text{ años}$$

54. Una línea de transmisión de alto voltaje conduce 1 000 A partiendo a 700 kV durante una distancia de 100 millas. Si la resistencia en el alambre es de 0,500 Ω/mi, ¿cuál es la pérdida de potencia debida a las pérdidas resistivas?

Resolución:

Datos: $I = 1000$ A $\quad L = 100$ millas

$\Delta V = 700$ kV $\quad R = 0,500$ Ω/milla

$\mathscr{P} = ?$

Por cada milla hay una resistencia en el alambre de 0,500 Ω

En 100 millas habrá una resistencia equivalente de 100 (0,500) Ω

Luego: Potencia entregada = potencia perdida = $I^2 . R$

$\Rightarrow$ Potencia perdida = $[10^3]^2 \times (10^2)\ (0,500)$

$\therefore$ Potencia perdida = 50,0 MW

55. Una definición más general del coeficiente de temperatura de resistividad es

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

donde ρ es la resistividad a temperatura T. a) Suponiendo que α es constante, demuestre que

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a temperatura T_0. b) Utilizando la expansión en serie ($e^x \cong 1 + x$ para $x << 1$), muestre que la resistividad está dada de manera aproximada por la expresión $\rho = \rho_0[1 + a(T - T_0)]$ para $\alpha\ (t - t_0) << 1$.

Resolución:

Si: $\quad \alpha = \frac{1}{\rho}.\frac{d\rho}{dT}$

Parte (a)

Por demostrar que: $\quad \rho = \rho_o . e^{\alpha(T-T_o)}$

Según dato: $\quad \alpha = \frac{1}{\rho}.\frac{d\rho}{dT} \Rightarrow \alpha . dT = \frac{1}{\rho}\, d\rho$

$$\Rightarrow \quad \alpha . \int_{T_o}^{T} dT = \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{1}{\rho} . d\rho \quad \Rightarrow \quad \alpha\,(T - T_o) = \ln\left[\frac{\rho}{\rho_o}\right]$$

$$\therefore \quad \rho = \rho_o . e^{\alpha(T-To)} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad \rho = \rho_o . e^{\alpha(T-To)}$

Como: $\quad \alpha(T - T_o) <<< 1 \quad$ (según dato)

Y nos piden usar: $\quad e^x \cong 1 + x \quad$ para $x << 1$

Entonces: $\quad \rho = \rho_o\,[1 + \alpha(T - T_o)]$

$\therefore \quad \rho = \rho_o\,[1 + \alpha(T - T_o)]$ Lqqd.

56. Se diseñará un cable de cobre para conducir una corriente de 300 A con una pérdida de potencia de sólo 2,00 W/m. ¿Cuál debe ser su radio?

Resolución:

Datos: $I = 300$ A $\quad \rho_{cobre} = 1,7 \times 10^{-8}$ Ω.m

$\frac{\mathscr{P}}{L} = 2,00\ \frac{W}{m} \quad$ Radio del cable del cobre = ?

Sabemos que: $\quad \mathscr{P} = I^2 . R = I^2.\rho.\frac{L}{A}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathscr{P}}{L} = \frac{I^2.\rho}{A} = \frac{I^2.\rho}{\pi.R^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{\left(\frac{L}{\mathscr{P}}\right)\times I^2.\frac{\rho}{\pi}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\times(300)^2\times\left(\frac{1,7\times10^{-8}}{3,1416}\right)}$$

$\therefore$ Radio del cable del cobre = 1,56 cm

57. Se conduce un experimento para medir la resistividad eléctrica del nicromo en forma de alambres con diferentes longitudes y áreas de sección transversal. Para un conjunto de mediciones un estudiante utiliza alambre de calibre 30, el cual tiene un área de sección transversal de $7,30 \times 10^{-8}$ m². El estudiante mide la diferencia de potencial a través del alambre y la corriente en el mismo con un voltímetro y un amperímetro, respectivamente. Para cada una de las mediciones dadas en la tabla siguiente, que se efectuaron en tres alambres de diferente longitud, calcule la resistencia de los alambres y los valores correspondientes de la resistividad. ¿Cuál es el valor promedio de la resistividad y cómo se compara ésta con el valor dado en la tabla 27.1?

L(m)	ΔV (V)	I (A)	R (Ω)	ρ (Ω . m)
0,540	5,22	0,500		
1,028	5,82	0,276		
1,543	5,94	0,187		

Resolución :

Datos: Área del alambre (nicromo) = $7,30 \times 10^{-8}$ m²

	L(m)	ΔV(V)	I(A)	R(Ω)	ρ(Ω. m)
(A)	0,540	5,22	0,500	10,44	$141,1 \times 10^{-8}$
(B)	1,028	5,82	0,276	21,09	$149,76 \times 10^{-8}$
(C)	1,543	5,94	0,187	31,76	$150,28 \times 10^{-8}$

Sabemos que: $\Delta V = I.R$

$$\Rightarrow \Delta V_A = I_A \cdot \rho_A \cdot \frac{L_A}{A}$$

$$\Rightarrow 5,22 = 0,500 \times \frac{0,540}{7,30\times10^{-8}} \cdot \rho_A$$

$$\therefore \rho_A = 141,1 \times 10^{-8}\ \Omega\ .\ m$$

Por otro lado: $21,09 = \dfrac{\rho_B \cdot (1,028)}{7,30\times10^{-8}}$

$$\therefore \rho_B = 149,76 \times 10^{-8}\ \Omega\ .\ m$$

Por último: $5,94 = 0,187 \times \rho_c \cdot \dfrac{(1,543)}{7,30\times10^{-8}}$

$$\therefore \rho_c = 150,28 \times 10^{-8}\ \Omega.m$$

En consecuencia:

$$\rho_{promedio} = \frac{141,13\times10^{-8}+149,76\times10^{-8}+150,28\times10^{-8}}{3}$$

$$\therefore \rho_{promedio} = 1,47 \times 10^{-6}\ \Omega\ .\ m$$

esta resistividad promedio experimental en comparación con el valor dado en la tabla 27,1 es % 0,04 de incertidumbre menor.

58. Una empresa eléctrica alimenta la casa de un cliente a partir de las líneas de transmisión principales (120 V) con dos alambres de cobre, cada uno de 50,0 m de largo y una resistencia de 0,108 Ω por cada 300 m. a) Encuentre el voltaje en la casa del consumidor para una corriente de carga de 110 A. Para esta corriente de carga encuentre b) la potencia que el consumidor recibe, y c) la pérdida de potencia en los alambres de cobre.

Resolución :

Datos: $\dfrac{\text{Resistencia}}{500\text{ m}} = 0,108\ \Omega$ $\Delta V = 120$ V

$I = 110$ A

Parte (a)

Sabemos que: $\mathscr{P} = I.\Delta V \Rightarrow \mathscr{P} = (110)(120)$

$\therefore \mathscr{P} = 13,2$ kW (potencia que el consumidor recibe)

Parte (b)

Sabemos que resistencia en los alambres es 0,108 Ω × cada 300 m

Entonces: resistencia en el alambre de cobre de 50 m será:

R = 0,018 Ω para cada alambre

Entonces: $\mathscr{P}_{\text{perdida × los 2 alambres}} = \dfrac{\Delta V^2}{R} + \dfrac{\Delta V^2}{R}$

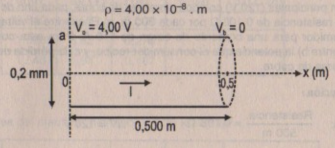
$$\Rightarrow \mathscr{P}_{\text{perdida × los 2 alambres}} = \frac{100^2}{0,018} + \frac{(120)^2}{0,018}$$

$$\therefore \mathscr{P}_{\text{perdida × los 2 alambres}} = 1\ 600\text{ kW}$$

59. Un alambre cilíndrico recto colocado sobre el eje x tiene una longitud de 0,500 m y un diámetro de 0,200 mm. Está hecho de un material descrito por la ley de Ohm con una resistividad de $\rho = 4,00 \times 10^{-8}$ Ω.m. Suponga que un potencial de 4,00 V se mantiene en x = 0, y que V = 0 en x = 0,500 m. Encuentre a) el campo eléctrico **E** en el alambre, b) la resistencia del alambre, c) la corriente eléctrica en el alambre, y d) la corriente eléctrica en el alambre, y d) la densidad de corriente J en el alambre. Exprese los vectores en notación vectorial. e) Demuestre que E = ρJ.

60. Un alambre cilíndrico recto que está sobre el eje x tiene una longitud L y un diámetro. Está hecho de un material descrito por la ley de Ohm con una resistividad ρ. Suponga que un potencial V se mantiene en x = 0, y que V = 0 en x = L. En término de L, d, V, ρ y constantes físicas, derive expresiones para a) el campo eléctrico en el alambre, b) la resistencia del alambre, c) la corriente eléctrica en el alambre, y d) la densidad de corriente en el alambre. Exprese los vectores en notación vectorial. e) Demuestre que E = ρJ.

Resolución 59 y 60 :



Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = -\int_a^b E.ds = -\int_0^{\ell} E\,dx$

$\Rightarrow \quad 0 - 400 = -E\,.\,\ell = E\,(0{,}500)$

$\therefore \quad \vec{E} = 8{,}00\ \hat{i}\ \text{V/m}$

Parte (b)

Tenemos que: Área (A) = $\frac{\pi}{4}\,(0{,}2 \times 10^{-3})^2 = 3{,}14 \times 10^{-8}\ m^2$

Luego: $R = \rho\,.\,\frac{\text{Long.}}{A} = 4{,}00 \times 10^{-8} \times \frac{(0{,}500)}{3{,}14 \times 10^{-8}}$

$\therefore \quad R = 0{,}637\ \Omega$

Parte (c)

Sabemos que: $\Delta V = I.R$

$\Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{4{,}00}{0{,}637} \qquad \therefore \quad I = 6{,}28\ A$

Parte (d)

Sabemos que: $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{6{,}28}{3{,}14 \times 10^{-8}}$

$\therefore \quad \vec{J} = 2{,}00 \times 10^{+8}\ A/m^2\ \hat{i}$

Parte (e)

Como: $\vec{E} = 8{,}00\ \frac{V}{m}\ \hat{i}$

Luego: $\vec{J} \times \rho = 2{,}00 \times 10^{8} \times (4{,}00 \times 10^{-8})\ \hat{i}\ \frac{A}{m^2} \times \Omega.m$

$\Rightarrow \quad \vec{J} \times \rho = 8{,}00\ \frac{A.\Omega}{m}\ \hat{i}$

En consecuencia: $\vec{E} = \rho.\vec{J}$ Lqqd.

61. La diferencia de potencial a través del filamento de una lámpara se mantiene a un nivel constante mientras se alcanza la temperatura de equilibrio. Se observa que la corriente en estado estable en la lámpara sólo es un décimo de la corriente tomada por la lámpara cuando se enciende por primera vez. Si el coeficiente de temperatura de resistividad para la lámpara a 20,0 °C es 0,004 50 (°C)⁻¹ y la resistencia aumenta linealmente con el incremento de temperatura, ¿cuál es la temperatura de operación final del filamento?

Resolución :

Datos: $\alpha_{\text{lámpara (20°C)}} = 0{,}00450°C^{-1}$

$R_f = 10\ R_o$

$T_{final} = ?$

Sabemos que: $R_f = R_o\,[1 + \alpha(T - T_o)]$

$\Rightarrow \quad 10\ R_o = R_o\,[\,1 + 0{,}00450\,(T - 20)]$

$\Rightarrow \quad T = \frac{9}{0{,}00450} + 20$

$\therefore \quad T_{final} = 2\,020°C$

62. La corriente en un resistor disminuye 3,00 A cuando la diferencia de potencial aplicada a través del resistor se reduce de 12,0 V a 6,00 V. Encuentre la resistencia del resistor.

Resolución :

Datos: $I_F - I_i = 3{,}00\ A$

$V_F - V_i = 6{,}00 - 12{,}00 = |6{,}00\ V|$

$R = ?$

Sabemos que: $\Delta V = I.R \quad \Rightarrow \quad 6{,}00 = 3{,}00\,.\,R$

$\therefore \quad R = 2{,}00\ \Omega$

63. Un auto eléctrico se diseña para operar por medio de un banco de baterías de 12,0 V con un almacenamiento de energía total de 2,00 × 10⁷ J. a) Si el motor eléctrico toma 8,00 kW, ¿cuál es la corriente entregada al motor? b) Si el motor eléctrico consume 8,00 kW a media que el auto se mueve a una rapidez estable de 20,0 m/s, ¿qué distancia recorrerá el auto antes de que se le "agote el combustible"?

Resolución :

Datos: $\Delta V = 12{,}0\ V$

Energía total = $2{,}00 \times 10^7\ J$

Parte (a)

Si: $\mathscr{P} = 8{,}00\ kW \qquad I = ?$

Sabemos que: $\mathscr{P} = I \cdot \Delta V \Rightarrow 8{,}00 \times 10^3 = I \times (12{,}0)$

$\therefore \quad I = 667\ A$

Parte (b)

En cada segundo el auto consume 8 000 J de la batería

Luego en "t" segundos consumirá $2{,}00 \times 10^7$ J de la batería.

Aplicando una regla de tres resulta que:

$$t = 2{,}5 \times 10^3\ s$$

En consecuencia:

A una rapidez de 20,0 m/s el auto recorrerá una distancia de

$$20{,}0 \times (2{,}5 \times 10^3) = \text{distancia}$$

$$\therefore \quad \text{Distancia} = 50{,}0\ km$$

64. **Problema de repaso**. Cuando un alambre recto se calienta, su resistencia está dada por la expresión $R = R_o\,[1 + \alpha(T - T_0)]$, de acuerdo con la ecuación 27.21; donde α es el coeficiente de temperatura de resistividad. a) Muestre que un resultado más preciso, uno que incluya el hecho de que la longitud y el área del alambre cambian cuando se calientan, es

$$R = \frac{R_o\left[1+\alpha(T-T_o)\right]\left[1+\alpha'(T-T_o)\right]}{\left[1+2\alpha'(T-T_o)\right]}$$

donde α' es el coeficiente de expansión lineal (véase el capítulo 19). b) Compare estos dos resultados para un alambre de cobre de 2,00 m de largo y 0,100 mm de radio, inicialmente a 20,0 °C y después calentado hasta 100,0 °C.

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $R = \dfrac{R_o\left[1+\alpha(T-T_o)\right]\left[1+\alpha'(T-T_o)\right]}{\left[1+2\alpha'(T-T_o)\right]}$.

Donde: α : coeficiente de temperatura de resistividad

α': coeficiente de expansión lineal

Sabemos que: $R_o = \rho_o \cdot \dfrac{L_o}{A_o}$

Además: $R = \rho \cdot \dfrac{L}{A}$

Como: $\rho = \rho_o\,(1 + \alpha\,[T - T_o])$

y: $L = L_o\,(1 + \alpha'\,[T - T_o])$

$A = A_o\,(1 + 2\alpha'\,[T - T_o])$

Entonces: $R = \rho_o\,[1 + \alpha(T - T_o)] \cdot \dfrac{L_o\left[1+\alpha'(T-T_o)\right]}{A_o\,(1+2\alpha'\,(T-T_o))}$

$$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{\rho_o L_o}{A_o}\right)\frac{\left[1+\alpha(T-T_o)\right]\left[1+\alpha'(T-T_o)\right]}{\left[1+2\alpha'(T-T_o)\right]}$$

$$\therefore \quad R = \frac{R_o\left[1+\alpha(T-T_o)\right]\left[1+\alpha'(T-T_o)\right]}{\left[1+2\alpha'(T-T_o)\right]} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si: Long. cobre = 2,00 m Radio = $0{,}1 \times 10^{-3}$ m $T_o = 20°C$ a $T = 100°C$

Entonces: $R = R_o\,[1 + \alpha\,(T - T_o)] = \rho_o \cdot \dfrac{L}{A}\,[1 + \alpha\,(T - T_o)]$

$$\therefore \quad R = 1{,}7 \times 10^{-8} \times \frac{2{,}00}{\pi\left(0{,}1\times10^{-3}\right)^2} \times [1 + 3{,}9 \times 10^{-3}\,(100 - 20)]$$

$$\therefore \quad R = 1{,}42\ \Omega$$

Para la forma más precisa será:

$$R_o = \rho_o \cdot \frac{L_o}{A_o} = 1{,}7 \times 10^{-8} \times \frac{(2{,}00)}{\pi\left(0{,}1\times10^{-3}\right)^2}$$

$$\therefore \quad R_o = 1{,}08\ \Omega$$

Considerar: $\alpha_{cobre} = 3{,}9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

$\rho_{o\ cobre} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

Luego: $R = 1{,}08\,[1 + 3{,}9 \times 10^{-3}\,(100 - 20)]^2$

$\therefore \quad R = 3{,}17$ (mayor que la ideal en un factor de 2,2)

65. Los coeficientes de temperatura de resistividad en la tabla 27.1 fueron determinados a una temperatura de 20 °C. ¿Cómo serían a 0 °C? (Sugerencia: los coeficientes de temperatura de resistividad a 20 °C satisfacen la expresión $\rho = \rho_0\,[1 + \alpha(T - T_0)]$, donde ρ_0 es la resistividad del material a T_0 = 20 °C. El coeficiente de temperatura de resistividad α' a 0 °C debe satisfacer la expresión $\rho = \rho'_0[1 + \alpha'T]$ donde ρ'_0 es la resistividad del material a 0 °C.)

Resolución :

Sabemos que: $\rho' = \rho_o\,[1 + \alpha\,(T - T_o)]$ a 20°C

Donde: ρ_o = resistividad a 20°C

α = coeficiente de temperatura a 20°C

T_o = 20°C

Entonces: $\rho' = \rho_o' \, [1 + \alpha' \, T]$ a 0°C donde:

α' = coeficiente de temperatura a 0°C

ρ_o' = resistividad a 0°C

En consecuencia:

$$\rho' = \rho_o \, (1 - 20\alpha_{20°C}) \, (1 + \alpha' \, T)$$

$$\therefore \quad \rho' = \rho_o \, [1 - 20\alpha_{20°C} + \alpha' \, T \, (1 - 20\, \alpha_{20°C})]$$

Luego: $$\alpha'_{0°C} = \frac{\alpha_{20°C}}{1 - 20\,\alpha_{20°C}}$$

Por lo tanto:

Algunos coeficientes de temperatura de resistividad en la tabla 27,1 serán:

Material	α'
Plata	$4{,}1 \times 10^{-3}$ °C^{-1}
Cobre	$4{,}2 \times 10^{-3}$ °C^{-1}
Oro	$3{,}6 \times 10^{-3}$ °C^{-1}
Aluminio	$4{,}2 \times 10^{-3}$ °C^{-1}

66. Un resistor se construye moldeando un material de resistividad ρ dentro de un cilindro hueco de longitud L y radios interior y exterior r_a y r_b, respectivamente (figura P27.66). Mientras se usa, una diferencia de potencial aplicada entre los extremos del cilindro produce una corriente paralela al eje. a) Encuentre una expresión general para la resistencia de un dispositivo de dichas características en términos de K, ρ, r_a y r_b. b) Obtenga un valor numérico para R cuando L = 4,00 cm, r_a = 0,500 cm, r_b = 1,20 cm y $\rho = 3{,}50 \times 10^5$ Ω. m. c) Suponga después que la diferencia de potencial se aplica entre las superficies interna y externa de modo que la corriente resultante fluye radialmente hacia afuera. Encuentre una expresión general para la resistencia del dispositivo en términos de L, ρ, r_a y r_b. d) Calcule el valor de R usando los parámetros dados en el inciso b).

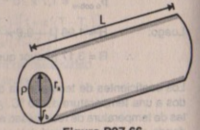


Figura P27.66

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que como la corriente fluye paralelamente al eje del cilindro hueco

Entonces: $$R = \rho \cdot \frac{L}{A} = \rho \cdot \frac{L}{\pi\left(r_b^2 - r_a^2\right)} = \rho \cdot \frac{L}{\pi(r_b - r_a)(r_b + r_a)}$$

Parte (b)

Si: L = $4{,}00 \times 10^{-2}$ m , $r_a = 0{,}5 \times 10^{-2}$ m , $r_b = 1{,}2 \times 10^{-2}$ m

$$\rho = 3{,}5 \times 10^5 \ \Omega.\text{m}$$

Entonces: $$R = \frac{4{,}00 \times 10^{-2} \times 3{,}5 \times 10^5}{\pi\left(0{,}7 \times 10^{-2}\right)\left(1{,}7 \times 10^{-2}\right)}$$

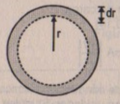
$$\therefore \quad R = 34{,}4 \ \text{M}\Omega$$

Parte (c)

Si la corriente fluye radialmente hacia fuera entonces:

Sabemos que:

$$dR = \frac{dr}{2\pi.r.L}$$



$$\Rightarrow \quad \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r}\, dr$$

$$\therefore \quad R = \frac{\rho}{2\pi.L} \cdot \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

Parte (d)

Si: L = $4{,}00 \times 10^{-2}$ m, $r_a = 0{,}5 \times 10^{-2}$ m , $r_b = 1{,}20 \times 10^{-2}$ m

$$\rho = 3{,}50 \times 10^5 \ \Omega.\text{m}.$$

Entonces: $$R = \frac{\rho}{2\pi.L}.\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = \frac{3{,}50 \times 10^5}{2\pi \times \left(4{,}00 \times 10^{-2}\right)}.\ln\left(\frac{1{,}20 \times 10^{-2}}{0{,}5 \times 10^{-2}}\right)$$

$$\therefore \quad R = 3{,}34 \times 10^6 \ \Omega = 3{,}34 \ \text{M}\Omega$$

67. En cierto sistema estéreo cada bocina tiene una resistencia de 4,00 Ω. El sistema tiene un valor nominal de 60,0 W en cada canal, y cada circuito de altavoz incluye un fusible especificado a 4,00 A. ¿Este sistema está protegido en forma adecuada contra una sobrecarga? Exponga sus razones.

Resolución :

Datos: $R_{(\text{cada bocina})} = 4{,}00 \ \Omega$

$\mathscr{P}_{(\text{cada canal})} = 60{,}0$ W

$I_{(\text{cada circuito})} = 4{,}00$ A

No está protegido debido a que como cada fusible que conforma un circuito conduce una corriente de 4 A, entonces la potencia de cada canal a 60,0 W de resistencia 4,00 implica una corriente de 15,49 A que se tendría que distribuir en 3,87 circuitos lo cual es imposible.

En consecuencia en cada circuito debería de fluir una corriente máxima de 3,87 A

68. Hay una gran semejanza entre el flujo de energía debido a una diferencia de temperatura (véase la sección 20.7) y el flujo de carga eléctrica debido a una diferencia de potencial. La energía dQ y la carga eléctrica dq son transportadas por electrones libres en el material conductor. Consecuentemente, un buen conductor eléctrico suele ser también un buen conductor térmico. Considere una delgada placa conductora de espesor dx, área A y conductividad eléctrica σ, con una diferencia de potencial dV entre caras opuestas. Demuestre que la corriente I = dq/dt está dada por la ecuación a la izquierda:

Conducción de carga (Ec. 20,14)

$$\frac{dq}{dt} = \sigma A \left|\frac{dV}{dx}\right|$$

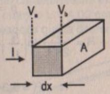
Conducción térmica análoga.

$$\frac{dQ}{dt} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right|$$

En la ecuación de conducción térmica semejante a la derecha, la rapidez de flujo de energía dQ/dt (en unidades SI joules por segundo) se debe a un gradiente de temperatura dT/dx, en un material de conductividad térmica k. Establezca reglas similares que relacionen la dirección de la corriente eléctrica con el cambio en potencial y que relacionen la dirección del flujo de energía con el cambio en temperatura.

Resolución :

Para la conducción de carga:



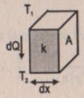
Sabemos que: $dV = -E.dx$

Por otro lado: $J = \frac{I}{A} = \sigma . E$

$$\Rightarrow \quad I = \sigma.A.E = \sigma.A.\left|\frac{dV}{dx}\right|$$

$$\therefore \quad \frac{dq}{dt} = \sigma.A\left|\frac{dV}{dx}\right| \quad \text{Lqqd}$$

Para la conducción térmica análoga:



Si $T_1 > T_2$

Sabemos que: $\frac{dQ}{dt} = -k.A\frac{dT}{dx}$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = k.A\left|\frac{dT}{dx}\right| \quad \text{Lqqd.}$$

69. Material con resistividad uniforme ρ se forma como una cuña de la manera indicada en la figura P27.60. Muestre que la resistencia entre las caras A y B de esta cuña es

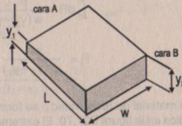


Figura P27.69

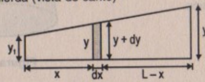
Resolución :69

Para demostrar que:

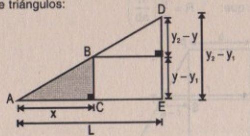
$$\boxed{R = \rho . \frac{L}{w\,(y_2 - y_1)} . \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}$$

Vista lateral izquierda (vista de canto)

Sea:



Por semejanza de triángulos:



$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$$\Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad yL - y_1L = x.y_2 - y_1.x$$

$$\therefore \quad L\,dy = (y_2 - y_1) . dx$$

Luego: $dR = \dfrac{\rho \,.\, dx}{yw + \dfrac{w}{2}\, dy} = \rho.\dfrac{dx}{y.w}$

$$\Rightarrow \quad dR = \frac{\rho}{w} \times \frac{L.dy}{(y_2 - y_1).\,y}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L dR = \frac{\rho \,.\, L}{w(y_2 - y_1)} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\, dy$$

$$\therefore \quad R = \frac{\rho.L}{w(y_2 - y_1)} \,.\, \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

70. Un material de resistividad ρ se forma como un cono truncado de altitud h, según se indica en la figura P27.70. El extremo del fondo tiene un radio b y el extremo superior un radio a. Suponiendo que la corriente está distribuida de manera uniforme sobre cualquier sección transversal particular del cono, de modo que la densidad de corriente no es una función de la posición radial (aunque sí varíe con la posición a lo largo del eje del cono), muestra que la resistencia entre los dos extremos está dada por la expresión.

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right)$$

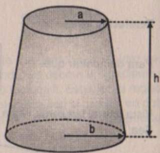
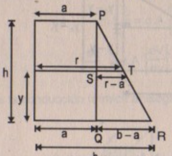


Figura P27.70

Resolución :

Por demostrar que: $R = \dfrac{\rho}{\pi}\left(\dfrac{h}{ab}\right)$

Sea:



Por semejanza de triángulos: $\triangle$ PST ~ $\triangle$ PQR

Entonces: $\dfrac{r-a}{b-a} = \dfrac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad yb - ya = hb - hr$

$$\therefore \quad (b - a)\, dy = -hdr$$

Luego: $dR = \dfrac{\rho.dy}{\pi.r^2} = -\dfrac{\rho h.dr}{\pi(b-a)r^2}$

$$\Rightarrow \quad R = \int_0^h dR = -\frac{\rho h}{\pi(b-a)} \int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho.h}{\pi\,(b-a)} \times \frac{1}{r}\Bigg|_b^a = \left[\frac{\rho h}{\pi(b-a)}\right]\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$\therefore \quad R = \frac{\rho.h}{ab} \qquad \text{Lqqd.}$$

Capítulo 28

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

FUERZA ELECTROMOTRIZ

1. **Una batería tiene una fem de 15,0 V. El voltaje terminal de la batería es 11,6 V cuando está entregando 20,0 W de potencia a un resistor de carga externo *R*. a) ¿Cuál es el valor de *R* ? b) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?**

Resolución :

Parte (a)

Datos: $\varepsilon = 15{,}0\ \text{V}$ $\quad \mathscr{P} = 20{,}0\ \text{W}$ $\quad \Delta V = 11{,}6\ \text{V}$ $\quad R = ?$

Sabemos que: $\mathscr{P} = \dfrac{\Delta V^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{(\Delta V)^2}{\mathscr{P}} = \frac{(11{,}6)^2}{20{,}0}$$

$$\therefore \quad R = 6{,}73\ \Omega$$

Parte (b)

Sabemos que: $R.I = \Delta V$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{11{,}6}{6{,}73} = 1{,}72\ \text{A}$$

Luego: $\varepsilon = \Delta V + I.r$

$$\Rightarrow \quad 15{,}0\ \text{V} = 11{,}6\ \text{V} + 1{,}72\ r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{15{,}0\ \text{V} - 11{,}6\ \text{V}}{1{,}72} = r \qquad \therefore \ r = 1{,}97\ \Omega$$

2. **a) ¿Cuál es la corriente en un resistor de 5,60 Ω conecta a una batería que tiene una resistencia interna de 0,200 Ω si el voltaje terminal de la batería es de 10,0 V? b) ¿Cuál es la fem de la batería?**

Resolución :

Parte (a)

Si $R_{(externa)} = 5{,}60\ \Omega$ $\quad r_{(batería)} = 0{,}200\ \Omega$ $\quad \Delta V = 10{,}0\ \text{V}$ $\quad I = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{\Delta V}{R} = \dfrac{10,0}{5,60}$ $\therefore$ $I = 1,78\ A$

Parte (b)

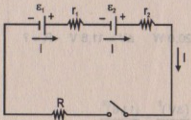
Sabemos que: $\Delta V = \varepsilon - Ir$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \Delta V + Ir = 10,0 + 1,78\,(0,200)$

$$\therefore\quad \varepsilon = 10,36\ V$$

3. Dos baterías de 1,50 V –con sus terminales positivas en la misma dirección– se insertan en serie dentro del cilindro de una linterna. Una batería que tiene una resistencia interna de 0,255 Ω, y la resistencia interna de la otra es igual a 0,153 Ω. Cuando el interruptor se cierra se produce una corriente de 600 mA en la lámpara. a) ¿Cuál es la resistencia de la lámpara? b) ¿Qué porcentaje de la potencia de las baterías aparece en las baterías mismas, representada como un incremento en la temperatura?

Resolución:

Sea:



Datos:

$\varepsilon_1 = 1,50\ V = \varepsilon_2$

$r_1 = 0,255\ \Omega$

$r_2 = 0,153\ \Omega$

$I = 600\ mA$

Parte (a)

Tenemos que:

$$\begin{array}{l} \Delta V_1 = -Ir_1 \\ \Delta V_2 = -Ir_2 \quad + \\ \hline \Delta V_{total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 2.\varepsilon_1 - I\,(r_1 + r_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad I.R = 2\varepsilon_1 - I(r_1 + r_2)$$

$$\Rightarrow\quad R = \frac{2\varepsilon_1}{I} - (r_1 + r_2)$$

Luego: $$R = \frac{2\,(1,5)}{0,6} - (0,255 + 0,153)$$

$$\therefore\quad R = 4,59\ \Omega$$

4. Una batería de automóvil tiene una fem de 12,6 V y una resistencia interna de 0,0800. Los faros tienen una resistencia total de 5,00 Ω (supuesta constante). ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de los focos de los faros a) cuando son la única carga en la batería, y b) cuando el motor de la marcha está operando y toma 35,0 A adicionales de la batería?

Resolución:

Datos: $\varepsilon = 12,6\ V$ $r = 0,080\ \Omega$

$R_{total} = 5,00\ \Omega$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = \varepsilon - I.r$

$$\Rightarrow\quad I.R = \varepsilon - I.r \quad\Rightarrow\quad I(R + r) = \varepsilon$$

$$\therefore\quad I = \frac{12,6}{5,0 + 0,080} = 2,48\ A$$

Luego: $\Delta V = I.R = 2,48 \times (5) = 12,4\ V$

Parte (b)

Si se agrega 35,0 A adicionales

$$\Rightarrow\quad \Delta V = (35,0 + 2,48)\,(5,00)$$

$$\therefore\quad \Delta V = 187,4\ V$$

RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

5. La corriente en un lazo de circuito que tiene una resistencia de R_1 es de 2,00 A. La corriente se reduce a 1,60 A cuando un resistor adicional $R_2 = 3,00\ \Omega$ se añade en serie con R_1. ¿Cuál es el valor de R_1?

Resolución:

Datos: $I_{inicial} = 2,00\ A$ a $R_1 = ?$

$I_{final} = 1,60\ A$ a $R_1 + R_3$ con $R_2 = 3,00\ \Omega$

Tenemos que: $\Delta V_{total} = I_{inicial} \times R_1$

Por otro lado: $\Delta V_{total} = \Delta V_1 + \Delta V_2$

$$\Rightarrow\quad \Delta V_{total} = I_{final} \times R_1 + I_{final} \cdot R_2$$

Luego: $I_{inicial} \cdot R_1 = I_{final} \cdot R_1 + I_{final} \cdot R_2$

$$\Rightarrow\quad R_1 = \frac{I_{final} \cdot R_2}{I_{inicial} - I_{final}} = \frac{(1,6)\times(3,00)}{2,00 - 1,60}$$

$$\therefore\quad R_1 = 12,0\ \Omega$$

6. a) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* en la figura P28.6. b) Si una diferencia de potencial de 34,0 V se aplica entre los puntos *a* y *b*, calcule la corriente en cada resistor.

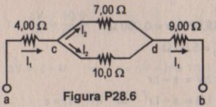
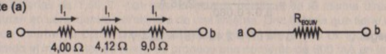


Figura P28.6

Resolución :

Parte (a)



$\therefore \quad R_{equivalente} = 4{,}00 + 4{,}12 + 9{,}00 = 17{,}12\ \Omega$

Parte (b)

Si: $\Delta vab = 34{,}0\ V$

Entonces: $\Delta Vab = I_1 \cdot R_{equiv} \quad \Rightarrow \quad 34{,}0\ V = I_1 \times (17{,}12)$

$\therefore \quad I_1 = 1{,}98\ A$

Luego: $I_1 = I_2 + I_3 = 1{,}98\ A \quad \Rightarrow \quad 4 \times (1{,}98) = \Delta V_{ac}$

$\therefore \quad \Delta V_{ac} = 7{,}94\ V$

Luego: $4{,}12 \times (1{,}98) = \Delta V_{cd}$

$\therefore \quad \Delta V_{cd} = 8{,}16\ V$

De ello se deduce que:

$$\Delta V_{db} = \Delta V_{ab} - \Delta V_{ac} - \Delta V_{cd}$$

$$\therefore \quad \Delta V_{db} = 17{,}9\ v$$

En consecuencia: $I_1 = 1{,}98\ A \quad ; \quad I_2 = \dfrac{8{,}16}{7{,}0} = 1{,}16\ A$

$$I_3 = \frac{8{,}16}{10{,}0} = 0{,}816\ A$$

7. Un técnico en reparación de televisores necesita un resistor de 100 Ω para componer un equipo defectuoso. Por el momento no tiene resistores de este valor. Todo lo que tiene en su caja de herramientas son un resistor de 500 Ω y dos resistores de 250 Ω. ¿Cómo puede obtener la resistencia deseada usando los resistores que tiene a mano?

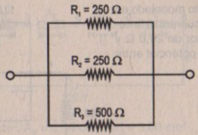
Resolución :

Nos piden $R_{equivalente} = 100\ \Omega$

Utilizando: $R_1 = 250\ \Omega \quad R_2 = 250\ \Omega$

$R_3 = 500\ \Omega$

Entonces:



Luego: $$R_{equivalente} = \frac{1}{\dfrac{1}{250} + \dfrac{1}{250} + \dfrac{1}{500}}$$

$\therefore \quad R_{equivalente} = 100\ \Omega$

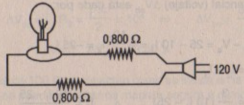
En conclusión:

Si se cuenta con un resistor de 500 Ω y 2 resistores de 250 Ω, entonces para tener una resistencia de 100 Ω se tienen que colocar en paralelo.

8. Un foco marcado "75 W [a] 120 V" se atornilla en un portalámpara al extremo de un largo cable de extensión en el cual cada uno de los dos conductores tiene una resistencia de 0,800 Ω. El otro extremo del cable de extensión está conectado a un tomacorriente de 120 V. Dibuje un diagrama de circuito y encuentre la potencia real entregada al foco en este circuito.

Resolución :

Sea:



Donde: $\mathscr{P}_{foco\ nominal} = 75\ W$

Nos piden $\mathscr{P}_{real\ entregada\ al\ foco} = ?$

Sabemos que: $\mathscr{P}_{foco\ nominal} = 75{,}00\ W = \Delta V \cdot I = 120 \cdot I$

$\Rightarrow \quad I = 0{,}625\ A$

Luego:

$$P_{total} = \mathscr{P}_{R_1} + \mathscr{P}_{R_2} + P_{entregada\ al\ foco} = (0{,}625)^2\,(0{,}800) + (0{,}625)^2\,(0{,}800) + \mathscr{P}_{foco}$$

$$\Rightarrow \quad (120)\,(0{,}625) = 2(0{,}800)\,(0{,}625)^2 + P_{entregada\ al\ foco}$$

$$\therefore \quad \mathscr{P}_{entregada\ al\ foco} = 74{,}375\ W$$

9. Considere el circuito modelado en la figura P28.9. Encuentre a) la corriente en el resistor de 20,0 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

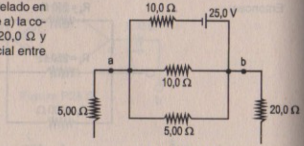
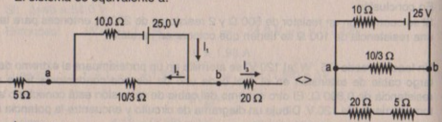


Figura P28.9

Resolución :

Parte (a)

El sistema es equivalente a:



Luego en:

El sistema el potencial (voltaje) ΔV_{ab} está dado por:

$$V_b - V_a = 25 - 10\, I_1 = -\frac{10}{3}\, I_2 = -25\, I_3$$

Como: $I_1 = I_2 + I_3$

Entonces: $I_2 = \frac{3}{10}(10\, I_1 - 25) \quad \wedge \quad I_3 = \frac{10\, I_1 - 25}{25}$

Luego: $I_1 = 3I_1 - 7{,}5 + 0{,}4\, I_1 - 1 \quad \therefore \quad I_1 = 3{,}54 \text{ A}$

En consecuencia: $I_3 = 0{,}416 \text{ A} \cong 416 \text{ mA}$

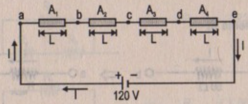
Parte (b)

$$\Delta V_{ab} = 10{,}4 \text{ V}$$

10. Cuatro alambres de cobre de igual longitud están conectados en serie. Sus áreas de sección transversal son 1,00 cm²; 2,00 cm²; 3,00 cm² y 5,00 cm². Si se aplica un voltaje de 120 V al arreglo, ¿cuál es el voltaje a través del alambre de 2,00 cm²?

Resolución :

Sean: los alambres de cobre



Donde: $A_1 = 1{,}00 \text{ cm}^2$, $A_2 = 2{,}00 \text{ cm}^2$, $A_3 = 3{,}00 \text{ cm}^2$, $A_4 = 5{,}00 \text{ cm}^2$

Sabemos que:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{L}{A_1} = \frac{\rho . L \times 10^4}{1} \qquad R_2 = \rho \cdot \frac{L}{A_2} = \frac{\rho . L \times 10^4}{2}$$

$$R_3 = \rho \cdot \frac{L}{A_3} = \frac{\rho . L \times 10^4}{3} \qquad R_4 = \rho \cdot \frac{L}{A_4} = \frac{\rho . L \times 10^4}{5}$$

Como el sistema está en serie, entonces:

$$R_{equiv} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{61}{30} \cdot \rho \cdot L \times 10^4$$

Entonces: $\frac{61}{30} \cdot \rho \cdot L \times 10^4 = \frac{\Delta V_{total}}{I} = \frac{120{,}0 \text{ V}}{I}$

Como nos piden: ΔV_{bc}

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{bc} = I \cdot R_2 = \frac{\rho . L}{2} \times 10^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{bc} = \frac{30 \times 120}{61} \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

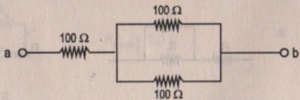
$$\therefore \quad \Delta V_{bc} = 29{,}50 \text{ V}$$

11. Tres resistores de 100 Ω se conectan como se indica en la figura P28.11. La máxima potencia que se puede entregar de manera segura a cualquiera de los resistores es 25,0 W. a) ¿Cuál es el máximo voltaje que se puede aplicar a las terminales *a* y *b*? b) Para el voltaje determinado en el inciso a), ¿cuál es la potencia entregada a cada resistor? ¿Cuál es la potencia total entregada?

Resolución :

Datos:

$\mathscr{P}$ c/resistor = 25,0 W

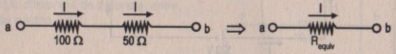


Parte (a)

Como: $P_{C/R} = 25 \text{ W}$

$$\Rightarrow \quad I^2 \cdot R = 25{,}0 \text{ W} \quad \therefore \quad I = \sqrt{\frac{25}{100}} = 0{,}5 \text{ A}$$

Por otro lado:
El sistema es equivalente a:



$$\therefore \quad R_{equiv} = 150\ \Omega$$

En consecuencia:

$$\Delta V_{ab} = I \cdot R_{equiv} = (0{,}5) \times 150 = 75{,}0\ V$$

Parte (b)

Como: $\Delta V_{ab} = I \cdot R_{equiv}$

$\Rightarrow \quad 75{,}0\ V = I \times (150) \qquad \therefore \quad I = 0{,}5\ A$

Luego:

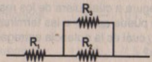
$$\mathscr{P}_{total\ entregada} = I \cdot \Delta V_{ab} = 0{,}5 \times (75{,}0)$$

$$\therefore \quad \mathscr{P}_{total\ entregada} = 37{,}5\ W$$

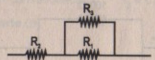
12. **Utilizando sólo tres resistores –2,00 Ω; 3,00 Ω y 4,00 Ω –encuentre 17 valores de resistencia que se pueden obtener mediante diversas combinaciones de uno o más resistores. Tabule las combinaciones en orden de resistencia creciente.**

Resolución:

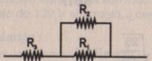
Sea: $R_1 = 2{,}00\ \Omega$
$R_2 = 3{,}00\ \Omega$
$R_3 = 4{,}00\ \Omega$

1. 

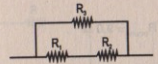
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 3{,}71\ \Omega$

2. 

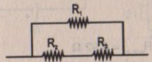
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 4{,}33\ \Omega$

3. 

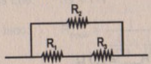
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 5{,}2\ \Omega$

4. 

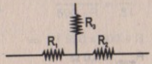
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 2{,}22\ \Omega$

5. 

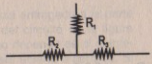
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 1{,}56\ \Omega$

6. 

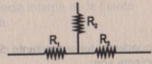
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 2{,}0\ \Omega$

7. 

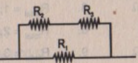
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 5{,}0\ \Omega$

8. 

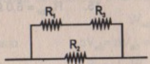
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 7{,}0\ \Omega$

9. 

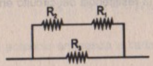
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 6{,}0\ \Omega$

10. 

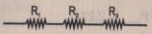
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 1{,}56\ \Omega$

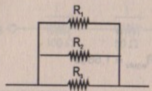
11. 

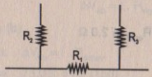
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 2{,}0\ \Omega$

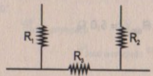
12. 

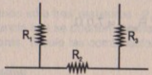
$\Rightarrow \quad R_{equiv} = 2{,}22\ \Omega$

13.  $\Rightarrow \quad R_{equiv} = 9{,}0\ \Omega$

14.  $\Rightarrow \quad R_{equiv} = 0{,}92\ \Omega$

15.  $\Rightarrow \quad R_{equiv} = 2{,}0\ \Omega$

16.  $\Rightarrow \quad R_{equiv} = 4{,}0\ \Omega$

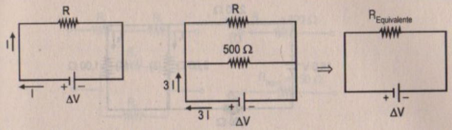
17.  $\Rightarrow \quad R_{equiv} = 3{,}0\ \Omega$

Luego los 17 valores de resistencia que se pueden obtener mediante diversas combinaciones de los 3 resistores en orden creciente son:

1. $R_{total} = 0{,}92\ \Omega$	2. $R_{total} = 1{,}56\ \Omega$	3. $R_{total} = 1{,}56\ \Omega$
4. $R_{total} = 2{,}0\ \Omega$	5. $R_{total} = 2{,}0\ \Omega$	6. $R_{total} = 2{,}0\ \Omega$
7. $R_{total} = 2{,}22\ \Omega$	8. $R_{total} = 2{,}22\ \Omega$	9. $R_{total} = 3{,}0\ \Omega$
10. $R_{total} = 3{,}71\ \Omega$	11. $R_{total} = 4{,}0\ \Omega$	12. $R_{total} = 4{,}33\ \Omega$
13. $R_{total} = 5{,}0\ \Omega$	14. $R_{total} = 5{,}2\ \Omega$	15. $R_{total} = 6{,}0\ \Omega$
16. $R_{total} = 7{,}0\ \Omega$	17. $R_{total} = 9{,}0\ \Omega$	

13. La corriente en un circuito se triplica conectando un resistor de 500 Ω en paralelo con la resistencia del circuito. Determine la resistencia del circuito en ausencia del resistor de 500 Ω.

Resolución:
Por condición:



Sabemos que: $\Delta V = I.R$

Por otro lado: $R_{equiv} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{500} + \dfrac{1}{R}} = \dfrac{500R}{500 + R} = \dfrac{\Delta V}{3I}$

Entonces: $\dfrac{500R}{500 + R} = \dfrac{IR}{3I}$

$\Rightarrow \quad 1\,500 = 500 + R \qquad \therefore \quad R = 1\,000\ W = 1{,}00\ kW$

14. La potencia entregada a la parte superior del circuito de la figura P28.14 no depende de si el interruptor está abierto o cerrado. Si R = 1,00 Ω, determine R'. Ignore la resistencia interna de la fuente de voltaje.

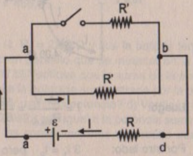


Figura P28.14

Resolución :14

Datos: $R = 1{,}00\ \Omega$
$R' = ?$

Si el interruptor está abierto, entonces:

$$\Delta V_{ab} = I\,.\,R'$$

Por otro lado: $\Delta V_{ab} = \Delta V_{ad} = \varepsilon - I.R$

Entonces: $I.R' = \varepsilon - IR$

$\Rightarrow \quad R' = \dfrac{\varepsilon}{I} - R = \dfrac{\varepsilon}{I} - 1$

15. Calcule la potencia entregada a cada resistor en el circuito mostrado en la figura P28.15.

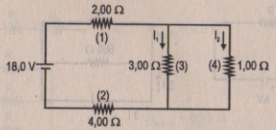
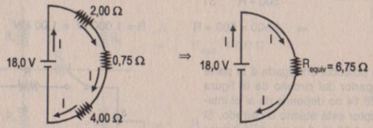


Figura P28.15

Resolución :

$\mathscr{P}_{C/resistor} = ?$

El sistema es equivalente a:



Luego: $I = \dfrac{\Delta V}{R_{equiv}} = \dfrac{18,0}{6,75} = 2,67$ A

Por otro lado: $3\,I_1 = I_2$ pero $I_1 + I_2 = I = 2,67$

$I_1 = 0,6675$ A y $I_2 = 2,0025$ A

En consecuencia: $\mathscr{P}_1 = I^2 \,.\, R_1 = (2,67)^2 \,.\, 2 = 14,3$ W

$\mathscr{P}_2 = I^2 \,.\, R_2 = (2,67)^2 \,.\, 4 = 28,5$ W

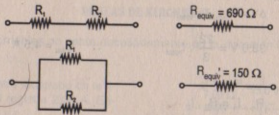
$\mathscr{P}_3 = I_1^2 \,.\, R_3 = (0,6675)^2 \,.\, 3 = 1,33$ W

$\mathscr{P}_4 = I_2^2 \,.\, R_4 = (2,0025)^2 \,.\, (1) = 4,00$ W

16. Dos resistores conectados en serie tienen una resistencia equivalente de 690 Ω. Cuando se conectan en paralelo su resistencia equivalente es igual a 150 Ω. Determine la resistencia de cada resistor.

Resolución :

Sean:



Luego: $R_1 + R_2 = 690\ \Omega$

$\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = [150\ \Omega]^{-1} \Rightarrow 150\ \Omega = \dfrac{R_1 \,.\, R_2}{R_1 + R_2}$

Entonces: $150 \times 690 = R_1 \times (690 - R_1)$

$\Rightarrow R_1^2 - 690\,R_1 + 150 \,.\, 690 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta que:

Si: $R_1 = 469,6 \Rightarrow R_2 = 220,4$

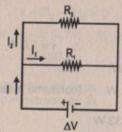
Si: $R_1 = 220,4 \Rightarrow R_2 = 469,6$

17. En las figuras 28.4 y 28.5, haga $R_1 = 11,0\ \Omega$, $R_2 = 22,0\ \Omega$ y que la batería tenga un voltaje terminal de 33,0 V. a) En el circuito en paralelo que se muestra en la figura 28.5, ¿cuál resistor consume más potencia? b) Verifique que la suma de la potencia (I^2R) consumida por cada resistor sea igual a la potencia suministrada por la batería ($I\,\Delta V$). c) En el circuito en serie, ¿cuál resistor usa más potencia? d) Verifique que la suma de la potencia (I^2R) usada por cada resistor sea igual a la potencia suministrada por la batería ($\mathscr{P} = I\,\Delta V$). e) ¿Cuál de las configuraciones de circuito usa más potencia?

Resolución :

Parte (a)

Sea:



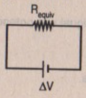
Con: $R_1 = 11,0\ \Omega$

$R_2 = 22,0\ \Omega$

$\Delta V = 33,0$ V

$\mathscr{P}_{C/resistor} = ?$

El sistema es equivalente a:



Donde: $R_{equiv} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{22}}$

$R_{equiv} = \dfrac{22}{3}\ \Omega$

Luego: $\Delta V = R_{equiv} \cdot I_{total}$

$\Rightarrow \quad 33{,}0\ V = \dfrac{22}{3} \cdot I_{total} \qquad \therefore \quad I_{total} = 4{,}5\ A$

Como: $I_{total} = I_1 + I_2$

Así también: $R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2$

$\Rightarrow \quad 11\ I_1 = 22\ I_2 \qquad \therefore \quad I_1 = 2I_2$

Por lo tanto: $I_1 = 3{,}0\ A \quad \wedge \quad I_2 = 1{,}5\ A$

En consecuencia:

$\mathscr{P}_1 = I_1^2 \cdot R_1 = (3{,}0)^2 \times (11) = 99{,}0\ W$ (consume más)

$\mathscr{P}_2 = I_2^2 \cdot R_2 = (1{,}5)^2 \times (22) = 49{,}5\ W$

Parte (b)

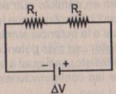
$\mathscr{P}_{total} = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = 99{,}0\ W + 49{,}5\ W = 148{,}5\ W$

Pero:

$\mathscr{P}_{total} = I_{total} \cdot \Delta V = 4{,}5 \times 33 = 148{,}5\ W$

En consecuencia:
La potencia consumida por cada resistor es igual a la potencia suministrada por la batería.

Parte (c)
Sea:



Donde:
$R_1 = 11{,}0\ \Omega$
$R_2 = 22{,}0\ \Omega$

$\Delta V = 33{,}0\ V$

Entonces: $\Delta V = I \cdot R_1 + IR_2$

$\Rightarrow \quad 33{,}0 = I\,(11 + 22) \qquad \therefore \quad I = 1{,}0\ A$

Luego: $\mathscr{P}_1 = I^2 \cdot R_1 = (1)^2 \times 11 = 11\ W$

$\mathscr{P}_2 = I^2 \cdot R_2 = (1)^2 \times 22 = 22\ W$ (consume más)

Parte (d)

$\mathscr{P}_{total} = P_1 + P_2 = 11 + 22 = 33\ W$

Pero: $\mathscr{P}_{total} = I \cdot \Delta V = (1) \times 33 = 33\ W$

En consecuencia:
La suma de las potencias de cada resistor es igual a la potencia total suministrada por la batería.

Parte (e)
La configuración en paralelo usa más potencia.

REGLAS DE KIRCHHOFF

Nota: las corrientes no están necesariamente en la dirección indicada en algunos circuitos.

18. El amperímetro mostrado en la figura P28.18 registra 2,00 A. Encuentre I_1, I_2 y ε.

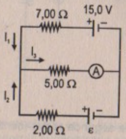


Figura P28.18

Resolución:

Datos: A = 2,00 A. Hallar: I_1, I_2, ε

Sea: I_3 la corriente que registra el amperímetro entonces: $I_3 = 2{,}00\ A$ luego por la primera ley de Kirchhoff:

$$\Sigma I_{entra} = \Sigma I_{sale}$$

$\Rightarrow \quad I_3 = I_1 + I_2 \qquad \therefore \quad I_1 + I_2 = 2{,}00\ A$

Por la segunda regla de Kirchhoff (sentido horario)

$-15V + 5I_3 - 7I_1 = 0 \quad \ldots (1)$

$\Rightarrow \quad 7I_1 = 5(2) - 15 \qquad \therefore \quad I_1 = -0{,}71\ A$

En consecuencia: $I_2 = 2 + 0{,}71 = 2{,}71\ A$

Por otro lado: $\varepsilon - 2I_2 - 5\,I_3 = 0$

$\Rightarrow \quad \varepsilon - 2\,(2{,}71) - 5(-0{,}71) = 0$

$\therefore \quad \varepsilon = 1{,}87\ V$

19. Dertermine la corriente en cada rama del circuito mostrado en la figura P28.19.

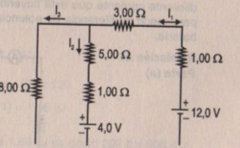
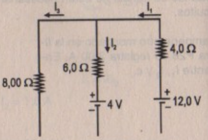


Figura P28.19. Problemas 19, 20 y 21.

Resolución :

Usando las reglas de Kirchhoff: $I_1 = I_3 + I_2$

Por otro lado
(el sistema es equivalente a)



Aplicando la segunda regla: (sentido horario)

$$4 + 6I_2 + 4I_1 - 12 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$8I_3 - 6I_2 - 4 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

Sumando (1) + (2) resulta: $I_1 + 2I_3 = 6$

Pero: $I_1 = I_2 + I_3$

Entonces: $I_2 + I_3 + 2I_3 = 6$

$$\Rightarrow \quad 3I_3 + I_2 = 3 \qquad (\times 3)$$

Resulta que: $9I_3 + 3I_2 = 9$

De (2): $4I_3 - 3I_2 = 2$ (+)

$$\Rightarrow \quad 13\, I_3 = 11 \qquad \therefore \quad I_3 = 0{,}846 \text{ A} \equiv 846 \text{ mA}$$

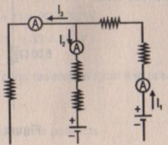
Luego: $3(0{,}846) + I_2 = 3 \qquad \therefore \quad I_2 = 0{,}462 \text{ A} \equiv 462 \text{ mA}$

Por lo tanto: $I_1 = 0{,}846 + 0{,}462 = 1{,}3$ A

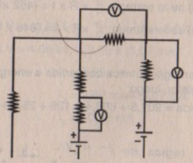
20. En la figura P28.19 muestre cómo añadir suficientes amperímetros para medir cada diferente corriente que está fluyendo. Muestre cómo añadir suficientes voltímetros para medir la diferencia de potencial a través de cada resistor y a través de cada batería.

Resolución :20

Parte (a)

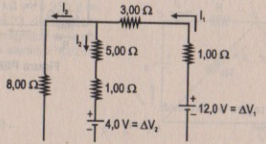


Parte (b)



21. El circuito considerado en el problema 19 y mostrado en la figura P28.19 está conectado durante 2,00 min. a) Encuentre la energía suministrada por cada batería. b) Encuentre la energía entregada a cada resistor. c) Encuentre la cantidad total de energía convertida en energía química en la batería a energía en la resistencia del circuito.

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $\mathscr{P} = \dfrac{\text{energía}}{t} = -I_2 \cdot \Delta V_2$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía} = -I_2 \times \Delta V_2 \times t = -462 \times 10^{-3} \times (4{,}00) \times \left(2 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Energía (batería 2)} = -222 \text{ J}$$

Para la batería (1)

Sabemos que: $\dfrac{\text{energía}}{t} = I_1 \cdot \Delta V_1$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía} = I_1 \cdot \Delta V_1 \times t = 1{,}3 \times (12) \times 120$$

$$\therefore \quad \text{Energía (batería 1)} = 1{,}88 \text{ kJ}$$

Parte (b)

Al resistor de (1 Ω y 3,00 Ω) se le entrega 1,88 kJ es decir: 202,8 y 608,4 J

Al resistor de (5,00 Ω) se le entrega: $I_2^2 \times R \times t = (462 \times 10^{-3})^2 \times (5)(120) = 128$ J

Al resistor de (1,00 Ω) se le entrega: $I_2^2 \times R \times t = (462 \times 10^{-3})^2 \times (1)(120) = 25{,}6$ J

Al resistor de (8,00 Ω) se le entrega: $I_3^2 \times R \times t = (846 \times 10^{-3})^2 \times (8)(120) = 687$ J

Parte (c)

La cantidad total de energía química convertida a energía interna, será la suma de energías de cada resistor, luego:

Energía total convertida = 202,8 + 608,4 + 128 + 25,6 + 687 = 1,66 kJ

22. a) Utilizando las reglas de Kirchhoff encuentre la corriente en cada resistor mostrado en la figura P28.22 y b) encuentre la diferencia de potencial entre los puntos c y f. ¿Qué punto está al potencial más alto?

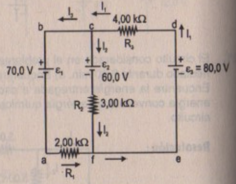


Figura P28.22

Resolución:

Parte (a)

Aplicando las reglas de Kirchhoff:

$$I_1 = I_3 + I_2 \qquad \text{... (3)}$$

Además: $\quad \Sigma\,\Delta V$ (circuito cerrado antihorario) = 0

$\Rightarrow$ edcfe: $\quad \varepsilon_3 - I_1 \cdot R_3 - \varepsilon_2 - I_2 \cdot R_2 = 0$

$\therefore \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 \qquad \text{... (1)}$

fcbaf: $\quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - I_3 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = 0$

$\therefore \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_1 \qquad \text{... (2)}$

Luego:

Ecuación (1): $\quad 20{,}0\ V = 4{,}00\ I_1 + 3{,}00\ k\ J_2$

Ecuación (2): $\quad 10{,}0\ V = 3{,}00\ k\ I_2 - 2{,}00\ k\ I_3$

Ecuación (3): $\quad I_3 = I_1 - I_2$

Reemplazando (3) en (2)

$10{,}0\ V = 3{,}00\ k\ I_2 - 2{,}00\ k\ (I_1 - I_2)$

$10{,}0\ V = 5{,}00\ k\ I_2 - 2{,}00\ k\ I_1$

$\therefore \quad 20{,}0\ V = 10{,}00\ k\ I_2 - 4{,}00\ k\ I_1 \qquad \text{... (4)}$

Sumando (1) + (4)

$40{,}0\ V = 13{,}00\ k\ I_2 \qquad \therefore \quad I_2 = 3{,}07$ mA

Luego: $\quad 20{,}0\ V = 4{,}00\ k\ I_1 + 3{,}00\ k\ (3{,}07\ mA)$

$\therefore \quad I_1 = 2{,}69$ mA

En consecuencia: $\quad I_3 = 2{,}69\ mA - 3{,}07\ mA$

$\therefore \quad I_3 = -0{,}38$ mA

Parte (b)

Sabemos que: $\quad \Delta V_{cf} = -I_2 \cdot R_2$

$\Rightarrow \quad \Delta V_{cf} = -60{,}0\ V - 3{,}07 \times 10^{-3}\ (3{,}00 \times 10^3)$

$\therefore \quad \Delta V_{cf} = -69{,}21$ V

En consecuencia:

El punto c está a un mayor potencial que f

23. Si R = 1,00 kΩ y ε = 250 V en la figura P28.23, determine la dirección y magnitud de la corriente en el alambre horizontal entre a y e.

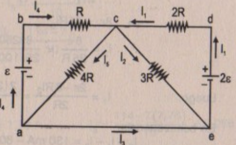


Figura P28.23

Resolución:

Datos: $\quad R = 1{,}00$ kΩ ; $\varepsilon = 250$ V

Aplicando las reglas de Kirchhoff:

$I_2 = I_1 - I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_1 - I_2 \qquad \text{... (1)}$

$I_3 + I_4 = I_5 \qquad \text{... (2)}$

Por la segunda regla: (sentido horario)

abca: $\quad \varepsilon - RI_4 - 4RI_5 = 0 \qquad \text{... (3)}$

cdec: $\quad 2RI_1 - 2\varepsilon + 3RI_2 = 0 \qquad \text{... (4)}$

acea: $\quad 4RI_5 - 3RI_2 = 0 \qquad \text{... (5)}$

De la ecuación (5): $\quad I_5 = \dfrac{3I_2}{4} \qquad \text{... }(\alpha)$

De la ecuación (3): $\varepsilon = RI_4 + 4RI_5 = RI_4 + 4R\left(\dfrac{3I_2}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad I_4 = \frac{\varepsilon - 3RI_2}{R} \qquad \dots (\beta)$$

De la ecuación (4)

$$2RI_1 + 3RI_2 = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{2\varepsilon - 3RI_2}{2R} \qquad \dots (\theta)$$

Por otro lado:
Reemplazando la ecuación (1) en (2)

$$I_1 - I_2 + I_4 = I_5 \Rightarrow I_1 + I_4 = I_2 + I_5 \qquad \dots (\omega)$$

Luego: (a), (b) y (θ) en (ω)

$$\frac{2\varepsilon - 3RI_2}{2R} + \frac{\varepsilon - 3RI_2}{R} = I_2 + \frac{3I_2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 8\varepsilon = 25RI_2$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{8\varepsilon}{25R} = \frac{8\times 250}{25\times 1000} = 80\times 10^{-3}\text{ A} = 80{,}0\text{ mA}$$

Luego: $I_1 = \dfrac{2\varepsilon - 3RI_2}{2R} = \dfrac{2(250) - 3(1000)(80\times 10)^{-3}}{2(1000)} = 130{,}0\text{ mA}$

En consecuencia:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 130\text{ mA} - 80{,}0\text{ mA} = 50{,}0\text{ mA}$$

Nota:
Este problema también se pudo resolver utilizando matrices.

24. En el circuito de la figura P28.24 determine la corriente en cada resistor y el voltaje a través del resistor de 200 Ω.

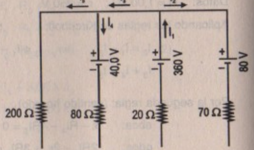


Figura P28.24

Resolución :24

Aplicando las reglas de Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_3 \quad \dots (1)$

$I_3 = I_4 + I_5 \quad \dots (2)$

Por la segunda regla (sentido antihorario)

$$70(I_2) + 80 - 360 + 20\,I_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 28 = 7I_2 + 2I_1 \qquad \dots (3)$$

$$-20\,I_1 + 360 - 40 - 80\,.\,I_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16 = 2I_4 + I_1 \qquad \dots (4)$$

$$80\,I_4 + 40 - 200\,I_5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 5I_5 - 2I_4 \qquad \dots (5)$$

$$70\,I_2 + 80 - 40 - 80\,I_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 8I_4 - 7I_2 \qquad \dots (6)$$

De (3): $I_2 = \dfrac{28 - 2I_1}{7}$ $\qquad I_5 = \dfrac{1 + 2I_4}{5} = \dfrac{17 - I_1}{5}$

De (4): $I_4 = \dfrac{16 - I_1}{2}$ $\qquad$ De (2) $\quad I_3 = \dfrac{114 - 7I_1}{10}$

Luego de (1): $I_1 = I_2 + I_3 = \dfrac{28 - 2I_1}{7} + \dfrac{114 - 7I_1}{10}$

$$139\,I_1 = 1078$$

$$\therefore \quad I_1 = 7{,}76\text{ A}$$

Por lo tanto: $I_2 = \dfrac{28 - 2(7{,}76)}{7} = 1{,}78\text{ A}$ $\qquad I_3 = \dfrac{114 - 7(7{,}76)}{10} = 5{,}968\text{ A}$

$I_4 = \dfrac{16 - I_1}{2} = \dfrac{16 - 7{,}76}{2} = 4{,}12\text{ A}$ $\qquad I_5 = \dfrac{17 - 7{,}76}{5} = 1{,}848\text{ A}$

En consecuencia:

El voltaje a través del resistor de 200 Ω será:

$$200\,.\,I_5 = 200\,(1{,}848) = 369{,}6\text{ V}$$

25. Una batería descargada se carga conectándola a una batería en funcionamiento de otro auto (Fig. P28.25). Determine la corriente en el mecanismo de arranque y en la batería descargada.

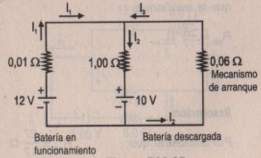


Figura P28.25

Resolución :

Aplicando las reglas de Kirchhoff:

$$I_3 = I_2 - I_1$$

Por la segunda regla: (sentido horario)

$$12 - 0{,}01\ I_1 - 1{,}00\ I_2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 0{,}01\ I_1 + 1{,}00\ I_2 \qquad \text{... (1)}$$

$$1{,}00\ I_2 + 0{,}06\ I_3 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}00\ I_2 + 0{,}06\ (I_2 - I_1) + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10 = 0{,}06\ I_1 - 1{,}06\ I_2 \qquad \text{... (2)}$$

Ecuación (1) × 6 : tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 0{,}06\ I_1 + 6{,}00\ I_2 \\ 10 = 0{,}06\ I_1 + 1{,}06\ I_2 \end{array}\right\}(-)$$

$$2 = 7{,}06\ I_2 \ \therefore \quad I_2 = 0{,}238\ A$$

Luego: $$I_1 = \frac{10 + 1{,}06(0{,}283)}{0{,}06} = 171{,}7\ A$$

Por lo tanto:

$$I_3 = I_2 - I_1 = 0{,}283 - 171{,}7 = -171\ A \text{ (sentido contrario)}$$

En consecuencia:

La corriente en el mecanismo de arranque es 171 A

La corriente en la batería descargada es 0,283 A

26. Para la red mostrada en la figura P28.26 demuestre que la resistencia

$$R_{ab} = \frac{27}{17}\ \Omega.$$

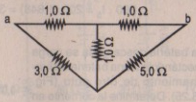
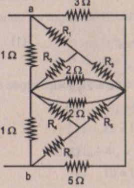


Figura P28.26

Resolución :

Por demostrar que: $$R_{ab} = \frac{27}{17}\ \Omega$$

Sea:



Donde: $$R_1 = \frac{1\times 3}{6} = \frac{1}{2}\ \Omega$$

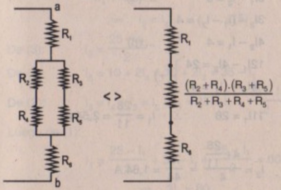
$$R_2 = \frac{1\times 2}{6} = \frac{1}{3}\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{2\times 3}{6} = 1\ \Omega$$

$$R_4 = \frac{1\times 2}{8} = \frac{1}{4}\ \Omega$$

$$R_5 = \frac{2\times 5}{8} = \frac{5}{4}\ \Omega$$

$$R_6 = \frac{1\times 5}{8} = \frac{5}{8}\ \Omega$$



En consecuencia:

$$R_{equiv} = R_{ab} = R_1 + R_6 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{(7/12)(9/4)}{4/3 + 6/4}$$

$$\therefore \quad R_{ab} = 27/17 \qquad \text{L q q d.}$$

27. Para el circuito mostrado en la figura P28.27, calcule a) la corriente en el resistor de 2,00 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

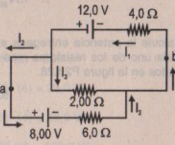


Figura P28.27

Resolución:

Parte (a)

Aplicando las reglas de Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_3$ ... (1)

Por la segunda regla (sentido antihorario)

$$-4I_1 + 12 - 2I_3 = 0 \Rightarrow 12 = 2I_3 + 4I_1$$

$$\therefore \quad I_3 + 2I_1 = 6 \qquad \text{... (2)}$$

Además: $8 - 6I_2 + 2I_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3I_2 - I_3 = 4 \qquad \text{... (3)}$$

Ecuación (1) en (2): $I_1 - I_2 + 2I_1 = 6$

$$\therefore \quad 3I_1 - I_2 = 6 \qquad \text{... }(\alpha)$$

Ecuación (1) en (3): $3I_2 - (I_1 - I_2) = 4$

$$\therefore \quad 4I_2 - I_1 = 4 \qquad \text{... }(\beta)$$

Multiplicando $(\alpha) \times 4$

$$\left.\begin{aligned} 12I_1 - 4I_2 &= 24 \\ 4I_2 - I_1 &= 4 \end{aligned}\right\}(+)$$

$$11I_1 = 28 \quad \therefore \quad I_1 = \frac{28}{11} = 2{,}54\text{ A}$$

Luego: $$I_2 = \frac{4 + \frac{28}{11}}{4} = \frac{72}{44} = 1{,}64\text{ A}$$

En consecuencia: $$I_3 = \frac{28}{11} - \frac{72}{44} = \frac{40}{44} = 0{,}909\text{A} \equiv 909\text{ mA}$$

Parte (b)

$$\Delta V_{ab} = \varepsilon - 6 \,.\, I_2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{ab} = 8{,}00\text{ V} - 6\left[\frac{72}{44}\right] = 8{,}00\text{ V} - 9{,}818$$

$$\therefore \quad \Delta V_{ab} = -1{,}82\text{ V}$$

28. Calcule la potencia entregada a cada uno de los resistores mostrados en la figura P28.28.

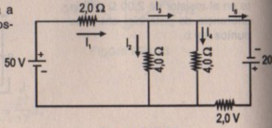


Figura P28.28

Resolución:

Aplicando las reglas de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{... (1)}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 \quad \text{... (2)}$$

Por la segunda regla (sentido horario)

$$50 - 2I_1 - 4I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 25 = I_1 + 2I_2 \quad \text{... (3)}$$

$$20 - 2I_5 + 4I_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10 = I_5 - 2I_4 \quad \text{... (4)}$$

$$-4I_4 + 4I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = I_4 \quad \text{... (5)}$$

De (3): $$I_2 = \frac{25 - I_1}{2}$$

De (4): $$I_5 = 10 + 2I_4 = 10 + 2I_2 = 35 - I_1$$

De (2): $$I_3 = I_4 + I_5 = I_2 + I_5 = 35 - I_1 + \frac{25 - I_1}{2}$$

Luego de (1):

$$I_1 = \frac{25 - I_1}{2} + 35 - I_1 + \frac{25 - I_1}{2} = 60 - 2I_1$$

$$\Rightarrow \quad 3I_1 = 60$$

$$\therefore \quad I_1 = 20\text{ A}$$

Luego: $$I_2 = \frac{25 - 20}{2} = 2{,}5\text{ A} = I_4$$

$$I_3 = 35 - 20 + \frac{25 - 20}{2} = 17{,}5\text{ A}$$

$$I_5 = 35 - 20 = 15\text{ A}$$

En consecuencia:

$$\mathscr{P}_1 \text{ (resistor } 2{,}0\ \Omega) = I_1^2 \,.\, R_1 = (20)^2\,(2) = 800\text{ W}$$

$$\mathscr{P}_2 \text{ (resistor } 4{,}0\ \Omega) = I_2^2 \,.\, R_2 = (2{,}5)^2\,(4) = 25{,}0\text{ W}$$

$$\mathscr{P}_3 \text{ (resistor } 4{,}0\ \Omega) = I_4^2 \,.\, R_3 = (2{,}5)^2\,(4) = 25{,}0\text{ W}$$

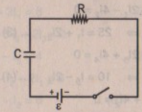
$$\mathscr{P}_4 \text{ (resistor } 2{,}0\ \Omega) = I_5^2 \,.\, R_4 = (15)^2\,(2) = 450{,}0\text{ W}$$

CIRCUITOS RC

29. Considere un circuito RC en serie (véase la Fig. 28.16) para el cual $R = 1{,}00\ M\Omega$, $C = 5{,}00\ \mu F$ y $\varepsilon = 30{,}0\ V$. Encuentre a) la constante de tiempo del circuito y b) la carga máxima en el capacitor después de que se cierra el interruptor. c) Si el interruptor se cierra en $t = 0$, determinar la corriente en el resistor 10,0 s después.

Resolución:

Datos: $R = 1{,}00\ M\Omega$
$C = 5{,}00\ mF$
$e = 30{,}0\ V$



Parte (a)

Sabemos que la constante de tiempo está definida por RC, entonces:

$$RC = 1{,}00 \times 10^6\ \Omega \times 5 \times 10^{-6}\ F = 5{,}00\ s$$

Parte (b)

Sabemos que $\quad Q_{máxima} = C\ .\ \Delta V = C.\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad Q_{máxima} = 5{,}00\ mF \times 30{,}0\ V$$

$$\therefore \quad Q_{máxima} = 150\ \mu C$$

Parte (c)

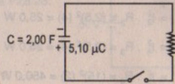
Sabemos que la corriente para cualquier instante de tiempo está dada por:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\ .\ e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad I(10\ s) = \frac{30{,}0}{1{,}00 \times 10^6} \times e^{-\frac{10}{5}}$$

$$\therefore \quad I(10{,}0\ s) = 4{,}06\ \mu A$$

30. Un capacitor de 2,00 nF con una carga inicial de 5,10 μC se descarga por medio de un resistor de 1,30 kΩ, a) Calcule la corriente a través del resistor 9,00 μs después de que el resistor se conecta en las terminales del capacitor. b) ¿Qué carga permanece en el capacitor después de 8,00 μs? c) ¿Cuál es la corriente máxima en el resistor?.

Resolución:



Parte (a)

Sabemos que en una descarga, la corriente para cualquier instante de tiempo está dada por:

$$I(t) = -\frac{Q}{RC}\ .\ e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad I(9{,}00\ \mu s) = \frac{5{,}10 \times 10^{-6}}{1{,}3 \times 10^3 \times \left(2 \times 10^{-9}\right)}\ .\ e^{\frac{-9 \times 10^{-6}}{1{,}3 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9}}}$$

$$\therefore \quad I(9{,}00 \times 10^{-6}\ s) = -6{,}15 \times 10^{-2}\ A \ \equiv -61{,}5\ mA$$

Parte (b)

Sabemos que en una descarga, la carga está dada por:

$$q(t) = Q\ .\ e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad q(8{,}00 \times 10^{-6}\ s) = 5{,}10 \times 10^{-6} \times e^{-\frac{8{,}00 \times 10^{-6}}{1{,}3 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9}}}$$

$$\therefore \quad q(8{,}00\ \mu s) = 235\ nC$$

Parte (c)

$I_{máxima}$ habrá en $t = 0$, luego:

$$I_{máxima} = -\frac{Q}{RC} = \frac{-5{,}10 \times 10^{-6}}{1{,}30 \times 10^3 \times \left(2{,}00 \times 10^{-9}\right)}$$

$I_{máxima} = -1{,}92\ A$ (el signo menos indica que la corriente va en dirección opuesta)

31. Un capacitor completamente cargado almacena una energía U_0. ¿Cuánta energía queda cuando su carga se ha reducido a la mitad de su valor original?

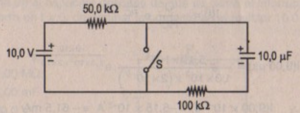
Resolución:

Sabemos que: $U_o = \dfrac{Q_0^2}{2\ .\ C}$

$$\text{Si:}\quad Q_f = \frac{Q_o}{2} \quad \Rightarrow \quad U_{final} = \frac{1}{2C} \times Q_f^2 = \frac{1}{2C} \times \left(\frac{Q_o}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad U_{final} = \frac{1}{2C} \times \frac{Q_0^2}{4} = \frac{U_o}{4}$$

32. En el circuito de la figura P28.32 el interruptor S ha estado abierto durante un largo tiempo. Luego se cierra repentinamente. Calcule la constante de tiempo a) antes de cerrar el interruptor y b) después de cerrarlo. c) Si el interruptor se cierra en t = 0, determine la corriente a través de él como una función del tiempo.



Resolución :

Parte (a)

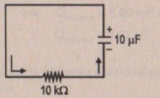
Antes de cerrar el interruptor la constante de tiempo está dada por:

$$\tau = RC = 50{,}0 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}$$

$$\therefore \quad \tau = 500{,}0 \text{ ms}$$

Parte (b)

Analizando previamente con Kirchhoff (segunda regla)



(el capacitor se está descargando)

Luego: $\tau = R.C = \dfrac{100}{2} \times 10^3\ \Omega\ (10 \times 10^{-6}\ F)$

$$\therefore \quad \tau = 500 \text{ ms}$$

Parte (c)

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (sentido horario)

$\varepsilon - RI - \dfrac{q}{C} = 0$ Donde: R = 50 kΩ , e = 10,0 V y C = 10 μF

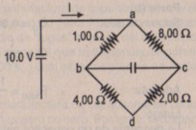
Entonces: $\varepsilon C = RC\,.\,\dfrac{dq}{dt} + q$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q - C\varepsilon}\,dq = -\frac{1}{RC}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^q \frac{1}{q - C\varepsilon}\,dq = \int_0^t -\frac{1}{RC}\,dt$$

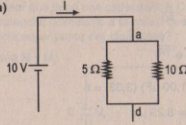
$$\therefore \quad q(t) = \varepsilon c\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100\ \mu C\,(1 - e^{\frac{-t}{0.5}})$$

33. El circuito mostrado en la figura P.28.33 ha estado conectado duante largo tiempo. a) ¿Cuál es el voltaje a través del capacitor? b) si se desconecta la batería, ¿cuánto tarda el capacitor en descargarse hasta un décimo de su voltaje inicial?



Resolución :

Parte (a)

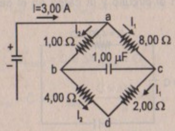


Primeramente hallaremos la corriente total I:

Sistema en paralelo, luego: $10{,}0\ V = R_{equiv}\,.\,I = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}\right)^{-1}.\ I$

$$\therefore \quad I = 3{,}00\ A$$

Luego:



Aplicando las reglas de Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2$$

Además:

Sentido horario: acdba: $-8I_1 - 2I_1 + 4I_2 + I_2 = 0$

$$\therefore \quad I_2 = 2I_1$$

Luego: $3 = I_1 + 2I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 1{,}00\ A \text{ y } I_2 = 2{,}00\ A$

aplicando nuevamente la segunda regla de Kirchhoff,

acba: $-8I_1 + \Delta V_{cap} + I_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{cap} = 8I_1 - I_2 = 8(1{,}00\ A) - 2{,}00\ A\Omega$$

$$\therefore \quad \Delta V_{cap} = 6{,}00\ V$$

Parte (b)

Sabemos que: $Q_0 = 6{,}00 \times 1{,}00\ \mu F = 6{,}00\ \mu C$

$$Q_f = \frac{1}{10}\,(6{,}00\ V) \times 1{,}00\ \mu F = 0{,}6\ \mu C$$

Además: $R_{total} = \frac{10}{3} = 3{,}33\ \Omega$

Luego:

La descarga de un capacitor está dada por:

$$q(t) = Q_o \,.\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

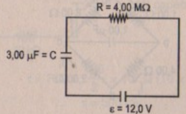
$$\Rightarrow \quad 0{,}6 = 6{,}0 \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left(\frac{0{,}6}{6{,}0}\right)(1{,}00\ \mu F)\,(3{,}33) = t$$

$$\therefore \quad t_{\text{tarda en descargarse}} = 8{,}29\ \mu s$$

34. Un resistor de 4,00 MΩ y un capacitor de 3,00 mF se conectan en serie a un suministro de potencia de 12,0 V. a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? b) Exprese la corriente en el circuito y la carga en el capacitor como funciones del tiempo.

Resolución :



Parte (a)

La constante de tiempo está dada por:

$$\tau = RC = 4 \times 10^{6}\ \Omega \times 3{,}00 \times 10^{-6}\ F$$

$$\therefore \quad \tau = 12{,}00\ s$$

Parte (b)

La carga en función del tiempo de un capacitor está dada por:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Donde: $Q = 12 \times 3{,}00 = 36{,}00\ \mu C$ y $RC = 12{,}0\ s$

$$\Rightarrow \quad q(t) = 36\ \mu C\ [1 - e^{\frac{-t}{12}}]$$

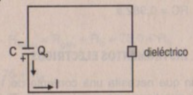
Entonces: $$I(t) \therefore \frac{dq}{dt} = 3\,.\,e^{-\frac{t}{12}}$$

35. Los materiales dieléctricos empleados en la manufactura de capacitores se caracterizan por conductividades que son pequeñas pero no cero. Por tanto, un capacitor cargado pierde lentamente su carga por medio de "fugas" a través del dieléctrico. Si cierto capacitor de 360 μF tiene una fuga de carga tal que la diferencia de potencial disminuye a la mitad de su valor inicial en 4,00 s, ¿cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

36. Los materiales dieléctricos empleados en la manufactura de capacitores se caracterizan por las conductividades que son pequeñas pero no cero. Por tanto, un capacitor cargado pierde lentamente su carga por medio de "fugas" a través del dieléctrico. Si un capacitor que tiene una capacitancia C tiene una fuga de carga tal que la diferencia de potencial disminuye a la mitad de su valor inicial en un tiempo t, ¿cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

Resolución 35 y 36 :

Sea:



Datos:

$C = 360\ \mu F \qquad \Delta V_{final} = \frac{1}{2}\,\Delta V_{inicial}$ en $t = 4{,}00\ s$

$R_{dieléctrico} = ?$

Sabemos que: $Q_{inicial} = C \times \Delta V_{inicial} = Q_o$

$$\Rightarrow \quad Q_{final} = C \times \Delta V_{final} = \frac{C \times \Delta V_{inicial}}{2} = \frac{Q_o}{2}$$

Por otro lado:

La descarga de un capacitor para cualquier instante de tiempo está dada por:

$$q(t) = Q\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_o}{2} = Q_o\,.\,e^{-\frac{4}{R.C}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(0{,}5) \times R \times (360\ \mu F) = -4$$

$$\Rightarrow \quad \text{Resistencia} = \frac{-4}{\ln(0{,}5) \times 360 \times 10^{-6}}$$

$$\therefore \quad \text{Resistencia} = 1{,}6\ \ M$$

37. Un capacitor en un circuito RC se carga hasta 60,0% de su valor máximo en 0,900 s. ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

Resolución :

Datos: $Q(0{,}900\ s) = 0{,}6\ Q_{máx}$ $RC = ?$

Sabemos que: $q(t) = Q_{máx}\ (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ cuando se carga

Luego por dato: $q(0{,}900\ s) = 0{,}6\ Q_{máx} = Q_{máx}\ [1 - e^{-\frac{t}{RC}}]$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

$$\Rightarrow \quad -(0{,}900\ s) = \ln(0{,}4)\ .\ RC$$

$$\Rightarrow \quad RC = -\frac{0{,}900\,s}{\ln 0{,}4}$$

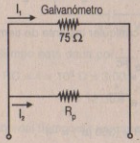
$$\therefore \quad RC = 0{,}982\ s$$

INSTRUMENTOS ELÉCTRICOS

38. Un galvanómetro común que necesita una corriente de 1,50 mA para la máxima desviación de escala, y que tiene una resistencia de 75,0 Ω, puede usarse para medir corrientes de valores mucho más grandes. Para permitir a un operador medir grandes corrientes sin dañar el galvanómetro un resistor en derivación relativamente pequeño se cablea en paralelo con el galvanómetro (considere la figura 28.24a). La mayor parte de la corriente fluye entonces por el resistor en derivación. Calcule el valor del resistor en derivación que permite emplear al galvanómetro para medir una corriente de 1,00 A a máxima desviación de escala. (Sugerencia: emplee las reglas de Kirchhoff)

Resolución :

Sea:



Donde:

$I_1 = 1{,}50 \times 10^{-3}$ A

$I_2 = 1{,}00$ A

$R_P = ?$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (sentido horario)

$$-75 \times I_1 + R_P\, I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_P = \frac{75.I_1}{I_2} = \frac{75 \times 1{,}5 \times 10^{-3}}{1{,}00}$$

$$\therefore \quad R_P = 112{,}5\ m\Omega$$

39. El galvanómetro descrito en el problema anterior puede utilizarse para medir voltajes. En este caso se conecta a un gran resistor en serie con el galvanómetro de modo similar al indicado en la figura 28.24b. Este arreglo, en efecto, limita la corriente que fluye a través del resistor puesto en serie. Calcule el valor del resistor que permite al galvanómetro medir un voltaje aplicado de 25,0 V a máxima desviación de escala.

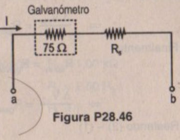


Figura P28.46

Resolución :

Donde: $\Delta V_{ab} = 25{,}0$ V $\quad I = 1{,}50$ mA

$R_S = ?$

Tenemos que: $R_{equiv} = R_{galv} + R_S = 75{,}0 + R_S$

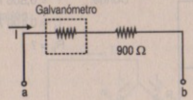
$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_{ab}}{I} = 75 + R_S$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25{,}0}{1{,}5 \times 10^{-3}} - 75 = R_S \qquad \therefore \quad R_S = 16{,}6\ k\Omega$$

40. Un galvanómetro que tiene una sensibilidad de máxima escala de 1,00 mA requiere un resistor en serie de 900 Ω para efectuar una lectura de máxima escala de voltímetro cuando se mide 1,00 V en las terminales. ¿Qué resistor en serie se requiere para convertir el mismo galvanómetro en un voltímetro de 50,0 V (máxima escala)?

Resolución :

Inicialmente:

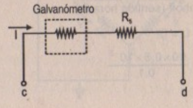


Donde:

$\Delta V_{ab} = 1{,}00$ V

$I = 1{,}00 \times 10^{-3}$ A

Finalmente:



Donde:

$\Delta V_{cd} = 50{,}0$ V

$R_S = ?$

$I = 1{,}00 \times 10^{-3}$ A

Sabemos que: (inicialmente)

$$R_{equiv} = R_{galv} + 900$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_{ab}}{I} = R_{galvan} + 900 \quad \text{... (1)}$$

Finalmente:

$$R_{equiv} = R_{galvan} + R_S$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_{cd}}{I} = R_{galvan} + R_S \quad \text{... (2)}$$

Restando (2) – (1)

$$\frac{1}{I}(\Delta V_{cd} - \Delta V_{ab}) = R_S - 900$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1{,}00\times10^{-3}}[50{,}0 - 1{,}00] = R_S - 900$$

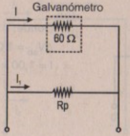
$$\Rightarrow \quad \frac{49{,}00}{1{,}00\times10^{-3}} + 900 = R_S$$

$$\therefore \quad R_S = 49{,}9\ k\Omega$$

41. Suponga que un galvanómetro tiene una resistencia interna de 60,0 Ω y necesita una corriente de 0,500 mA para producir la desviación de máxima escala. ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con el galvanómetro si la combinación va a servir como un amperímetro que tiene una desviación de máxima escala para una corriente de 0,100 A?

Resolución :

Sea:



Donde: $I = 0{,}500$ mA

$I_1 = 0{,}100$ A

$R_P = ?$

Entonces:

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (sentido horario)

$$-60\,I + R_P \cdot I_1 = 0$$

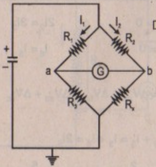
$$\Rightarrow \quad R_P = \frac{60I}{I_1} = \frac{60\times0{,}5\times10^{-3}}{0{,}1}$$

$$\therefore \quad R_P = 0{,}3\ \Omega$$

42. Un puente de Wheatstone del tipo mostrado en la figura 28.25 se usa para realizar mediciones precisas de la resistencia de un conector de alambre. Si $R_3 = 1{,}00$ kΩ, y el puente se equilibra ajustando R_1 de manera tal que $R_1 = 2{,}50\ R_2$, ¿cuál es el valor de R_x?

Resolución :

Sea:



Donde: $R_3 = 1{,}00$ kΩ

$R_1 = 2{,}50\ R_2$

$R_x = ?$

En un puente wheatstone se cumple que:

$$R_2 \cdot R_3 = R_1 \cdot x$$

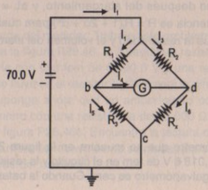
$$\Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2 . R_3}{R_1} = \frac{1{,}00\times10^3}{2{,}50}$$

$$\therefore \quad R_x = 400\ \Omega$$

43. Considere el caso en que el puente de Wheatstone mostrado en la figura 28.25 está desbalanceado. Calcule la corriente a través del galvanómetro cuando $R_x = R_3 = 7{,}00\ \Omega$, $R_2 = 21{,}0\ \Omega$ y $R_1 = 14{,}0\ \Omega$. Suponga que el voltaje a través del puente es de 70,0 V, e ignore la resistencia del galvanómetro.

Resolución :

Sea:



Donde: $R_x = R_3 = 7{,}00\ \Omega$

$R_2 = 21{,}0\ \Omega$

$R_1 = 14{,}0\ \Omega$

$I_4 = ?$

Por la primera regla de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \ldots (1)$$
$$I_2 = I_5 + I_4 \quad \ldots (2)$$

Por la segunda regla (sentido horario)

adba: $I_2\,14 - I_3 \,.\, 21 = 0 \qquad \therefore \qquad 2I_2 = 3I_3$

bdab: $-I_6\,.7 + I_5 \,.\, 7 = 0 \qquad \therefore \qquad I_6 = I_5$

Por otro lado:

$$70{,}0\ \text{V} = \Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = \Delta V_{ad} + \Delta V_{dc}$$

además del gráfico:

$$I_1 = I_2 + I_3 = I_5 + I_6 = 2I_5$$

$$\Rightarrow \quad 2I_5 = I_2 + \frac{2}{3}I_2 \qquad \therefore \quad I_5 = \frac{5}{6}I_2$$

Luego:

$$70{,}0\ \text{V} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = 14I_2 + 7I_5 = 14I_2 + 7\left(\frac{5}{6}I_2\right)$$

$$\therefore \quad I_2 = 3{,}529\ \text{A}$$

Entonces: $\quad I_5 = \frac{5}{6}\, I_2 = \frac{5}{6}\,(3{,}529) = 2{,}941\ \text{A}$

En consecuencia de (2):

$$I_4 = I_2 - I_5 = 3{,}529\ \text{A} - 2{,}941\ \text{A} = 0{,}588\ \text{A}$$

44. **Problema de repaso.** Un puente de Wheatstone se puede usar para medir el esfuerzo ($\Delta L/L_i$) de un alambre (véase la sección 12.4), donde L_i es la longitud antes del alargamiento, L es la longitud después del alargamiento, y $\Delta L = L - L_i$. Sea $\alpha = \Delta L/L_i$. Demuestre que la resistencia es $R = R_i(1 + 2\alpha + \alpha^2)$ para cualquier longitud, donde $R_i = \rho L_i/A_i$. Suponga que la resistividad y el volumen del alambre permanecen constantes.

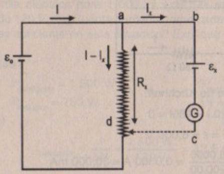
Resolución:

Datos incorrectos.

45. Considere el circuito de potenciómetro que se muestra en la figura 28.27. Si se emplea una batería estándar de 1,018 6 V de fem en el circuito y la resistencia entre a y b es de 36,0 Ω, el registro del galvanómetro es cero. Cuando la batería estándar se sustituye por una fem desconocida, el galvanómetro registra cero si la resistencia se ajusta a 48,0 Ω. ¿Cuál es el valor de la fem?

Resolución:

Sea:



Donde: $\varepsilon_o = 1{,}0186\ \text{V}$
$R_x = 48{,}0\ \Omega$
$R_s = 36{,}0\ \Omega$
$\varepsilon_x = ?$

Cuando el registro del calvanómetro registra cero se cumple que:

$$\varepsilon_x = I \,.\, R_x \qquad \text{(por Kirchhoff)}$$

Al reemplazar la batería desconocida por una batería estandar, el procedimiento anterior, aplicando la segunda regla de Kirchhoff se repite y se cumple:

$$\varepsilon_s = I \,.\, R_s$$

Entonces reemplazando se cumple que:

$$\varepsilon_x = \frac{R_x}{R_s} \,.\, \varepsilon_s$$

$$\varepsilon_x = \frac{48{,}00\ \Omega}{36{,}00\ \Omega} \times (1{,}0186\ \text{V})$$

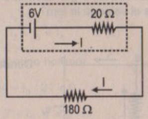
$$\therefore \quad \varepsilon_x = 1{,}36\ \text{V}$$

46. La carga del medidor: Trabaje este problema a una precisión de cinco dígitos. Refiérase a la figura P28.46. a) Cuando un resistor de 180,00 Ω se pone a través de una batería con una fem de 6,000 0 V y una resistencia interna de 20,000 Ω ¿qué corriente fluye en el resistor? ¿Cuál será la diferencia de potencial a través del mismo? b) Suponga ahora que un amperímetro con una resistencia de 0,500 00 Ω y un voltímetro con una resistencia de 20 000 Ω se añaden al circuito, como se muestra en la figura P28.46b. Encuentre la lectura de cada uno de ellos. c) Una terminal de un alambre se mueve como se muestra en la figura P28.46c. Encuentre las nuevas lecturas del medidor.

Resolución :

Parte (a)

Sea:



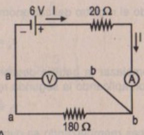
Partimos de la segunda regla de Kirchhoff:

$$\varepsilon - 20.I - 180I = 0$$

$$\Rightarrow \quad 200I = \varepsilon = 6{,}000 \text{ V}$$

$$\therefore \quad I = \frac{6{,}0000}{200{,}00} = 0{,}0300 \text{ A} \equiv 30{,}000 \text{ mA}$$

Parte (b)



Aplicando la segunda regla de Kirchhoff:

$$6{,}0000 \text{ V} - 20{,}000\ I - 180{,}00\ I = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{6{,}0000}{200{,}00} = 0{,}0300 \text{ A} \equiv 30{,}000 \text{ mA}$$

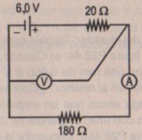
Luego: la lectura del amperímetro será: 30,000 mA

Por otro lado:

La lectura del voltímetro será: 180,00 × I

$$\therefore \quad V = 180{,}00 \times (0{,}0300) = 5{,}4\,000 \text{ V}$$

Parte (c)



Sabemos que por la segunda regla de Kirchhoff la lectura del amperímetro es de 30,000 mA, entonces:

$$V = \varepsilon - 20I = 6{,}000 - 20{,}000\ (0{,}0300)$$

$\therefore$ La lectura del voltímetro será: 5,4000 V

CABLEADO DOMÉSTICO Y SEGURIDAD ELÉCTRICA

47. Un calefactor eléctrico está especificado para 1 500 W, un tostador para 750 W y una parrilla eléctrica para 1 000 W. Los tres aparatos se conectan a un circuito común de 120 V. a) ¿Cuánta corriente toma cada uno? b) ¿Un circuito interruptor de 25,0 A es suficiente en esta situación? Explique su respuesta.

Resolución :

Datos: $\mathscr{P}_{\text{calefactor}} = 1\,500$ W $\qquad \mathscr{P}_{\text{parrilla}} = 1\,000$ W

$\mathscr{P}_{\text{tostador}} = 750$ W $\qquad \Delta V = 120$ V

Parte (a)

$$I_{\text{calefactor}} = \frac{\mathscr{P}}{\Delta V} = \frac{1\,500 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 12{,}5 \text{ A}$$

$$I_{\text{tostador}} = \frac{\mathscr{P}}{\Delta V} = \frac{750 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 6{,}25 \text{ A}$$

$$I_{\text{parrilla}} = \frac{\mathscr{P}}{\Delta V} = \frac{1\,000 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 8{,}33 \text{ A}$$

Parte (b)

Sabemos que si los tres aparatos se conectan a un circuito común simultáneamente conduce una corriente total de 27,08 A en consecuencia un circuito interruptor de 25,0 A no es suficiente para esta situación.

48. Un cordón de 8,00 pies de extensión tiene dos alambres de cobre de calibre 18, cada uno con un diámetro de 1,024 mm. ¿Cuál es la pérdida I^2R en este cable cuando conduce una corriente de a) 1,00 A y b) 10,0 A?

Resolución :

Datos:

Long (cordón) = 8 pies 8 × (30,54 cm) = 2,44 m

Diámetro: 1,024 mm ≡ 1,024 × 10^{-3} m

Parte (a)

Si: I = 1,00 A

Entonces la pérdida en éste cable será:

$$I^2 \,.\, R_{\text{cobre}} = I^2 \,.\, \rho_{\text{cobre}} \times \frac{\text{Long.}}{\frac{\pi}{4}(\text{diam.})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Pérdida} = (1{,}00)^2 \times 1{,}7 \times 10^{-8} \times \frac{2{,}44}{\frac{\pi}{4}\times\left(1{,}024\times 10^{-3}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \text{Pérdida} = 50{,}4 \text{ mW}$$

Parte (b)

Si: $I = 10{,}0$ A

Entonces:

La pérdida de potencia en este cable será: $50{,}4 \times 10^{-3} \times (10{,}0)^2$

$$\therefore \quad \text{Pérdida} = 5{,}036 \text{ W}$$

49. Por razones económicas algunas veces se usa cableado de aluminio en lugar de cobre. De acuerdo con el código eléctrico nacional de Estados Unidos la máxima corriente permisible para un alambre de cobre de calibre 12 con aislamiento de caucho es de 20 A. ¿Cuál debe ser la máxima corriente permisible en un alambre de aluminio de calibre 12 si va a tener la misma pérdida I^2R por unidad de longitud que el alambre de cobre?

Resolución :

Datos: $I_{cobre} = 20{,}0$ A

$I_{aluminio} = ?$ $\qquad \dfrac{I^2.R_{(cobre)}}{\text{Long.}} = \dfrac{I^2.R_{(aluminio)}}{\text{Long.}}$

Por condición:

$$\frac{I^2_{cobre}}{\text{Long}_{(cobre)}} \times \rho_{cobre} \times \frac{\text{Long}_{(cobre)}}{\text{área}_{(cobre)}} = \frac{I^2_{Al} \times \rho_{Al} \times \text{Long}_{Al}}{\text{Long(Al)} \times \text{área(Al)}}$$

Como son del mismo calibre, entonces área del aluminio = área del cobre

Luego: $\quad I^2_{cobre} \times \rho_{cobre} = I^2_{Aluminio} \times \rho_{aluminio}$

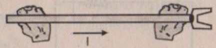
$$\Rightarrow \quad (20{,}0)^2 \times 1{,}7 \times 10^{-8} = I^2_{Aluminio} \times 2{,}82 \times 10^{-8}$$

$$\therefore \quad I_{aluminio} = 15{,}5 \text{ A}$$

50. Encienda su lámpara de escritorio. Levante el cable con sus dedos índice y pulgar sosteniéndolo a lo ancho. a) Calcule una estimación del orden de magnitud para la corriente que fluye a través de su mano. usted puede suponer que en un instante típico el conductor dentro del cordón de la lámpara cerca de su pulgar está a un potencial $\sim 10^2$ V y que el conductor cerca de su dedo índice está a potencial de tierra (0 V). La resistencia de su mano depende fuertemente del grosos y contenido de humedad de las capas externas de su piel. Suponga que la resistencia de su mano entre las puntas de los dedos índice y pulgar es $\sim 10^4\ \Omega$. Puede modelar el cordón como si tuviese un aislante de goma. Establezca las otras cantidades que mida o estime y sus valores Explique su razonamiento. b) Suponga que su cuerpo está aislado de cualesquiera otras cargas o corrientes. En términos del orden de magnitud describa el potencial de su pulgar donde está en contacto con el cordón y el potencial de su índice donde toca el cordón.

Resolución :

Sea el cable de la lámpara de escritorio:



Parte (a)

Si: $\quad \Delta V = 100$ V $\qquad R_{manos} = 10^4$

Sabemos que por la ley de Ohm:

$\Delta V = I.R$

$\Rightarrow \quad 100 \text{ V} = I(10\,000) \qquad \therefore \quad I = 0{,}01$ A

Si: $\quad \Delta V = 120$ V

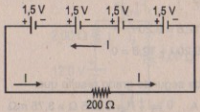
$\Rightarrow \quad 120 \text{ V} = (0{,}01) \,.\, R \qquad \therefore \quad R = 12\,000\ \Omega = 1{,}2 \times 10^4\ \Omega$

PROBLEMAS ADICIONALES

51. Cuatro baterías AA de 1,50 V en serie se usan para dar potencia a un radio de transistores. Si las baterías pueden proporcionar una carga total de 240 C, ¿cuánto tiempo duran si el radio tiene una resistencia de 200 Ω?

Resolución :

Sea:



$Q_{total} = 240$ C

$t_{duración} = ?$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff tenemos que:

$$+1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 - 200\,I = 0$$

$$\therefore \quad I = 0{,}03 \text{ A}$$

Por otro lado: $\qquad I = \dfrac{\Delta Q_{total}}{\Delta t} = \dfrac{240}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{240}{I} = \frac{240}{0{,}03}$$

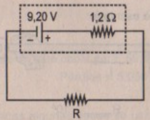
$$\therefore \quad \Delta t \text{ (duración)} = 8\,000 \text{ s} = 2{,}22 \text{ horas}$$

52. Una batería tiene una fem de 9,20 V y una resistencia interna de 1,20 Ω. a) ¿Qué resistencia a través de la batería extraerá de ella una potencia de 12,8 W? b) ¿Una potencia de 21,2 W?

Resolución :

Parte (a)

Sea:



Donde:

$\mathscr{P}_{(\text{entregada}/R)} = 12,8 \text{ W}$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff, tenemos que:

$$9,20 - I(1,2) - I.R = 0$$

$$\Rightarrow \quad I(1,2 + R) = 9,20 \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado:

$$\mathscr{P}_{\substack{\text{entregada al}\\ \text{resistor}}} = I^2 . R = 12,8$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{12,8}{I^2} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$I\left[1,2 + \frac{12,8}{I^2}\right] = 9,20$$

$$\Rightarrow \quad 1,2\, I^2 + 12,8 = 9,20\, I$$

$$\therefore \quad 1,2\, I^2 - 9,20\, I + 12,8 = 0$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado resulta que:

Si: $\quad I = 5,84 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad R = 0,375\ \Omega \equiv 3,75 \text{ m}\Omega$

Si: $\quad I = 1,83 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad R = 3,827\ \Omega$

Parte (b)

Si la potencia entregada al resistor es: 21,2 W; entonces:

$$I^2 . R = 21,2$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{21,2}{I^2}$$

Luego:

Al reemplazar en (1) resulta que:

$$I\left(1,2 + \frac{21,2}{I^2}\right) = 9,20$$

$$\therefore \quad 1,2\, I^2 - 9,20\, I + 21,2 = 0$$

Desarollando la ecuación de segundo grado resulta que:

Si: $\quad I = 5,57\, i \text{ A} \quad \Rightarrow \quad R = \text{imaginario (no cumple)}$

Si: $\quad I = 2,109\, i \text{ A} \quad \Rightarrow \quad R = \text{imaginario (no cumple)}$

53. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la figura P28.53 e identifique cuál punto está al potencial más alto.

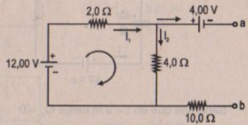


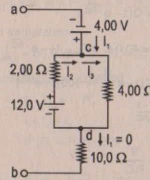
Figura P28.53

Resolución :

Por la primera regla de Kirchhoff tenemos que:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \ldots (\alpha)$$

Por otro lado:



$\therefore \quad V_a > V_b$

Tenemos que por la resistencia de 10,0 Ω no fluye corriente es decir I = 0

Luego:

$$I_1 = I_3 - I_2 = 0 \qquad \therefore \quad I_3 = I_2$$

Entonces por la segunda regla de Kirchhoff:

$$12 - 2I_2 - 4I_3 = 0 \qquad \therefore \quad I_2 = I_3 = 2,0 \text{ A}$$

Luego: $\quad \Delta V_{cd} = 8,00 \text{ V}$

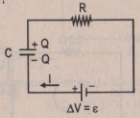
En consecuencia:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_{ac} + \Delta V_{cd} + \Delta V_{db} = 4,00 \text{ V} - 8,00 \text{ V} + 0 = -4,00 \text{ V}$$

54. Un capacitor de 10,0 μF se carga con una batería de 10,0 V a través de una resistencia R. El capacitor alcanza una diferencia de potencial de 4,00 V en 3,00 s a partir del inicio de la carga. Encuentre R.

Resolución :

Sea:



Donde:
$C = 10{,}0\ \mu F$
$\varepsilon = 10{,}0\ V$
$\Delta V_{cap} = 4{,}00\ V$ en $t = 3{,}00\ s$
$R = ?$

Sabemos que en $t = 0$ la carga $Q_o = 0$

En $t = 3{,}00$ s la carga será: $Q_f = C.\Delta V_{cap} = 10{,}0\ \mu F \times (4{,}00\ V)$

$\therefore \quad Q_f = 40{,}0\ \mu C$

Luego:

Sabemos que cuando una carga aumenta en un capacitor para cualquier instante de tiempo la ecuación está dada por:

$$q(t) = Q(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\Rightarrow \quad q(3{,}00\ s) = 40{,}0\ C = Q_{máx}\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$40{,}0 = \varepsilon.C(1 - e^{\frac{-3}{R\times C}}) = 100[1 - e^{\frac{-3}{RC}}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{60{,}0}{100} = e^{\frac{-3}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{R.C}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{-3}{\ln(0{,}6)\times 10\ \mu F} = \frac{-3\times 10^6}{(-0{,}5108)\times 10}$$

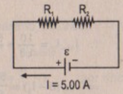
$$\therefore \quad R = 587\ k\Omega$$

55. Cuando dos resistores desconocidos se conectan en serie con una batería se entregan 225 W a la combinación, con un corriente total de 5,00 A. Para la misma corriente total se entregan 50,0 W cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

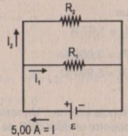
56. Cuando dos resistores desconocidos se conectan en serie con una batería, se entrega una potencia total $\mathscr{P}_s$ a la combinación con una corriente total de I. Para la misma corriente total se entrega una potencia total $\mathscr{P}_p$ cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

Resolución 55 y 56 :

Por condición:



$\mathscr{P}_{total} = 225\ W$



$\mathscr{P}_{total} = 50{,}0\ W$

Tenemos que:

$$\mathscr{P}_{total(en\ serie)} = 225\ W = I^2 . R_1 + I^2 . R_2 = \varepsilon . I \qquad ...(1)$$

para la combinación en paralelo:

$$\mathscr{P}_{total\ (en\ paralelo)} = 50{,}0\ W = I_1^2 . R_1 + I_2^2 . R_2 = \varepsilon . I \qquad ...(2)$$

Además por la segunda regla de Kirchhoff:

$$I_2 . R_2 = I_1\, R_1$$

Como: $\quad I = I_1 + I_2$

Entonces de (1) $\quad I^2\,(R_1 + R_2) = 225$

$$\Rightarrow \quad I^2\left(R_1 + \frac{I_1 R_1}{I_2}\right) = 225$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I^2}{I_2}(R_1)\,[I_2 + I_1] = 225$$

$$\therefore \quad \frac{R_1}{I_2} = 1{,}8 \qquad ...(\alpha)$$

Además de (2) $\quad I_1^2 . R_1 + I_2^2\left[\frac{I_1 . R_1}{I_2}\right] = 50$

$$\Rightarrow \quad I_1\, R_1\,(I_1 + I_2) = 50 \quad \therefore \quad I_1\, R_1 = 10 ...(\beta)$$

Luego sabemos que:

$$I_2 R_2 = I_1 . R_1$$

De (α) y (β)

Decimos que: $\frac{R_1}{I_2} = \frac{R_2}{I_1} = 1{,}8$

Además dividiendo (β) ÷ (α)

$$I_1 = \frac{10}{1{,}8 I_2} \qquad \therefore\ I_1 \cdot I_2 = \frac{10}{1{,}8} = \frac{50}{9}$$

Como: $I_1 + I_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad I_1(5 - I_1) = \frac{50}{9}$

Resolviendo la ecuación resulta que:

$$I_1 = 3{,}33\ \text{A} \qquad I_2 = 1{,}67\ \text{A}$$

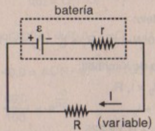
En consecuencia: $R_1 = 1{,}8 \times (1{,}67) = 3{,}006\ \Omega$

$R_2 = 1{,}8 \times (3{,}33) = 5{,}994\ \Omega$

57. Una batería tiene una fem ε y resistencia interna r. Un resistor variable R se conecta en las terminales de la batería. Encuentre el valor de R de modo que a) la diferencia de potencial en las terminales sea un máximo, b) la corriente en el circuito sea un máximo y c) la potencia entregada al resistor sea un máximo.

Resolución:

Sea:



Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = \varepsilon - Ir$

$\Rightarrow \quad \Delta V_{\text{máximo}}$ si $I_r \to 0$

Por otro lado (por la segunda regla de Kirchhoff)

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon}{I} - r$$

Luego $\quad R = \frac{\varepsilon . r}{Ir} - r^2$

Si $\quad Ir \to 0$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon . r}{0} - r^2 = \infty$$

$$\therefore \quad R \to \infty$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta V = \varepsilon - Ir$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon - \Delta V}{r}$$

Si: I es máximo, entonces $r \to 1$ y $\Delta V \to 0$

$$\therefore \quad I_{\text{máximo}} \to \varepsilon$$

Luego: $R = \frac{\varepsilon}{I} - r$ (por Kirchhoff)

$$\Rightarrow \quad R \to \frac{\varepsilon}{\varepsilon} - 1 \qquad \therefore\ R \to 0$$

Parte (c)

Sabemos que: $\mathscr{P} = I.\Delta V$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P} = I(\varepsilon - Ir) = I . \varepsilon - I^2.r$$

Si $\mathscr{P}_{\text{es máximo}} \Rightarrow I^2 r \to 0$

$$\therefore \quad I_{\text{es máximo}} \wedge r \to 0$$

Luego: $R = \frac{\varepsilon}{I} - r$

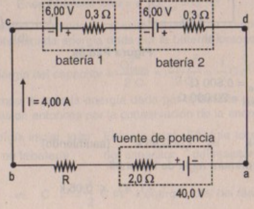
Si $\quad I_{\text{es máximo}} \to I \to \infty$

$$\therefore \quad R \to r$$

58. Una fuente de potencia que tiene un voltaje en circuito abierto de 40,0 V y una resistencia interna de 2,00 Ω se emplea para cargar dos baterías de almacenamiento conectadas en serie, cada una con una fem de 6,00 V y resistencia interna de 0,300 Ω. Si la corriente de carga será de 4,00 A, a) ¿qué resistencia adicional debe agregarse en serie? b) Determine la potencia entrega a la resistencia interna del suministro, la pérdida I^2R en las baterías y la potencia entregada a las resistencias sumadas en serie. c) ¿A qué rapidez aumenta la energía química en las baterías?

Resolución:

Sea:



Parte (a)

Se tiene por la segunda regla de Kirchhoff (horario)

abcda: $40 - 2I - I.R + 6 - 0,3I + 6 - 0,3\,I = 0$

$\Rightarrow (40 + 12) - 2,6I - I.R = 0$

$$\therefore \quad R = \frac{52 - 2,6(4)}{4} = 10,4\,\Omega$$

Parte (b)

$\mathcal{P}_{\substack{\text{entregada a la}\\ \text{resistencia interna}}} = I^2 . R = 4^2 \times (2,0) = 32,00 \text{ W}$

$\mathcal{P}_{\substack{\text{entregada a las resistencias}\\ \text{sumadas en serie}}} = I^2 (R_1 + R_2 + R_3 + R) = 4^2 (2,0 + 0,3 + 0,3 + 10,4) = 208 \text{ W}$

$\mathcal{P}_{\text{pérdida en cada batería}} = I^2 . R_1 + I^2 . R_2 = 4^2 (0,3) + 4^2 (0,3) = 9,6 \text{ W}$

Parte (c)

$\text{rapidez de la energía}_{\text{química en la batería 1}} = 6(4) - (0,3)(4)^2 = 19,2 \text{ W}$

$\text{rapidez de la energía}_{\text{química en la batería 2}} = 6(4) - (0,3)(4)^2 = 19,2 \text{ W}$

59. El valor de un resistor R se determinará utilizando el arreglo amperímetro-voltímetro mostrado en la figura P28.59. El amperímetro tiene una resistencia de 0,500 Ω, y la resistencia del voltímetro es de 20 000 Ω. ¿Dentro de qué intervalo de valores reales de R los valores medidos serán correctos, hasta dentro de 5,00 %, si la medición se realiza utilizando a) el circuito mostrado en la figura P28.59a y b) la figura P28.59b?

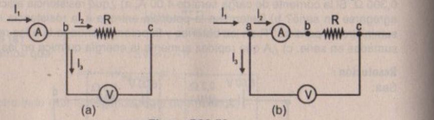


Figura P28.59

Resolución:

Datos: $R_{amp} = 0,500\ \Omega$

$R_{voltim} = 20\,000\ \Omega$

Parte (a)

Si: $I_1 = k \quad \Rightarrow \quad I_2 = 0,95\text{ k}$ (asumiendo)

Luego por la primera regla de Kirchhoff:

$$I_1 - I_2 = I_3 \leq 0,05\text{ k}$$

Entonces:

$\Delta V_{ab} = I_3 . R_{VOLTIM} \leq (0,05\text{ k})(20\,000)$

$\Rightarrow R . I_2 \leq (0,05\text{ k})(20\,000)$

$\Rightarrow R\,(0,95\text{ k}) \leq (0,05\text{ k})(20\,000)$

$\therefore R \leq 1050\ \Omega$

Parte (b)

Según el gráfico sabemos que:

$\Delta V_{ac} = I_2 . R_{AMP} + I_2 . R \geq I_3 . R_{VOLTIM}$

$\Rightarrow (0,95\text{ k})(0,500) + (0,95\text{ k}) . R \geq (0,05\text{ k})(20\,000)$

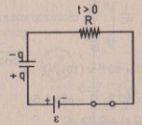
$$\Rightarrow R \geq \frac{(0,05)(20\,000) - (0,95)(0,500)}{0,95}$$

$\therefore R \geq 10,0\ \Omega$

60. Con una batería se carga un capacitor mediante un resistor, como se ve en la figura 28.16. Muestre que la mitad de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor y la otra mitad se almacena en el capacitor.

Resolución:

Sea:



Sabemos que la energía total almacenada en la batería está dada por:

$$\text{Energía inicial total} = \varepsilon . Q_{total} = C . \varepsilon^2$$

Después de un tiempo "t" cuando el capacitor se carga por completo, dicho capacitor almacena una determinada energía dada por la batería, entonces:

$$\text{Energía del capacitor} = \frac{Q_{total}^2}{2C} = \frac{(C\varepsilon)^2}{2C} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

Como: en un tiempo "t" toda la energía dada por la batería es almacenada por el capacitor y el resistor, entonces por la conservación de la energía decimos que:

$$\begin{matrix}\text{Energía inicial total}\\ \text{en la batería}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Energía total}\\ \text{del capacitor}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Energía total}\\ \text{del resistor}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow C . \varepsilon^2 = \frac{1}{2} C . \varepsilon^2 + \text{energía total del resistor}$$

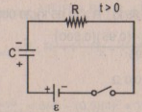
Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}C \cdot e^2 = \text{Energía total del resistor} = \frac{\text{energía total de la batería}}{2}$$

Lqqd.

61. Los valores de los componentes en un circuito RC en serie simple que contiene un interruptor (Fig. 28.16) son: $C = 1{,}00\ \mu F$, $R = 2{,}00 \times 10^6\ \Omega$, y $\varepsilon = 10{,}0$ V. En el instante 10,0 s después de que se cierra el interruptor, calcule a) la carga en el capacitor, b) la corriente en el resistor, c) la rapidez a la cual se almacena la energía en el capacitor, y d) la rapidez a la cual la batería entrega su energía.

Resolución:



Datos:

$R = 2{,}00 \times 10^6\ \Omega$

$\varepsilon = 10{,}0$ V

$C = 1{,}00\ \mu F$

$t = 10{,}0$ s

Parte (a)

Sabemos que la cantidad de carga que se almacena en un capacitor en un determinado instante de tiempo está dado por:

$$q(t) = C.\varepsilon\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad q(10{,}0\ s) = 1{,}00 \times 10^{-6} \times (10)\,.\,[1 - e^{\frac{-10}{(2\times10^6)(1\times10^{-6})}}]$$

$$\Rightarrow \quad q(10{,}0\ s) = 10 \times 10^{-6}\,.\,[1 - \exp(-5)]$$

$$\therefore \quad q(10{,}0\ s) = 9{,}93\ \mu C$$

Parte (b)

Sabemos que $\quad I(t) = \dfrac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow \quad I(10{,}0\ s) = \frac{\varepsilon}{R}\,.\,e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{10}{2\times10^6}\exp[-5]$$

$\therefore$ I(10,0 s) = +33,7 nA (el signo solo indica que la corriente es positiva)

Parte (c)

Sabemos que: $\quad \mathscr{P}_{capacitor} = \dfrac{\text{energía}}{t}$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P}_{capacitor} = \frac{q(10{,}0\,s)^2}{2C\times t} = \frac{(9{,}93\times10^{-6})^2}{2(1{,}00\times10^{-6})(10{,}0)}$$

$$\mathscr{P}_{capacitor} = 4{,}93\ \mu W$$

Por otro lado: $\quad \mathscr{P}_{total\ capacitor} = \dfrac{1}{2}\,.\,C\,.\,\varepsilon^2$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P}_{total\ capacitor} = \frac{1}{2}(1{,}00\times10^{-6})(10{,}0)^2$$

$$\therefore \quad \mathscr{P}_{total\ capacitor} = 50{,}0\ \mu W$$

Parte (d)

Sabemos que la rapidez a la cual la batería entrega su energía, es la potencia entregada por la batería y está dada por:

$$\mathscr{P}_{batería} = I\,.\,\Delta V = I\,.\,\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P}_{batería} = 33{,}7\ nA \times (10{,}0\ V)$$

$$\therefore \quad \mathscr{P}_{entregada \times la\ batería} = 337\ nW$$

62. El interruptor en la figura P28.62a se cierra cuando $V_c > 2V/3$ y se abre cuando $V_c < V/3$. El voltímetro registra un voltaje como el que se grafica en la figura P28.62b. ¿Cuál es el periodo t de la forma de onda en función de R_A, R_B y C?

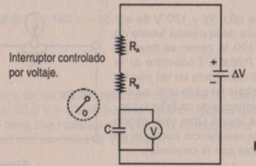


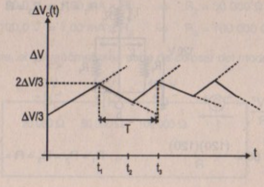
Figura P28.62

Resolución:

Nota:

El interruptor se cierra cuando $V_c > 2v/3$

El interruptor se abre cuando $V_c < v/3$



Nos piden: T en función de R_A, R_B y C

Según el gráfico (a): $R_{total} = R = R_a + R_b$ (están en serie)

Según el gráfico (b): $Q(t_1) = C \cdot \frac{2V}{3}$ y $Q(t_3) = C \cdot \frac{V}{3}$

Luego en un tiempo de $(t_1) \wedge (t_3)$ se produce una descarga, entonces:
La descarga de un capacitor para cualquier instante de tiempo está dada por:

$$q(t) = Q \cdot e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \quad q(t_3) = q(t_1) \cdot e^{\frac{-(t_3 - t_1)}{RC}}$$

$$\frac{C \cdot V}{3} = \frac{2 \cdot C \cdot V}{3} \cdot e^{-\Delta t/RC}$$

$$\therefore \quad \Delta t = (R_A + R_B) \cdot C \cdot (0{,}693)$$

En consecuencia:
Según el gráfico: $T = 2\Delta t = 1{,}386\ C\ (R_A + R_B)$

63. Tres focos de 60,0 W y 120 V se conectan a través de la misma fuente de potencia de 120 V, como se muestra en la figura P28.63. Encuentre a) la potencia total entregada en los tres focos, y b) el voltaje en cada uno. suponga que la resistencia de cada foco concuerda con la ley de Ohm (aun cando en realidad la resistencia aumenta de manera notable con la corriente).

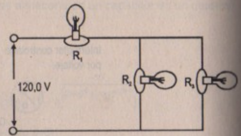
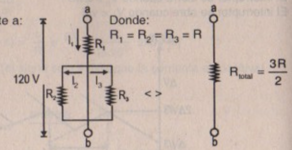


Figura P28.63

Resolución :

Parte (a)

El sistema es equivalente a:



Se sabe que:

$$P_{cada\ foco} = \frac{\Delta V^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 60 = \frac{(120)(120)}{R} \qquad \therefore\ R_1 = R_2 = R_3 = R = 240\ \Omega$$

Por tanto:

$$P_{entregada\ a\ los\ 3\ focos} = I_{total} \cdot \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R_{total}} = \frac{(120)(120)}{\frac{3}{2} \times (240)}$$

$$\therefore \quad P_{entregada\ a\ los\ 3\ focos} = 40\ W$$

Parte (b)

Sabemos que: $P_{entregada\ a\ los\ 3\ focos} = I_{total} \cdot \Delta V_{total}$

$$\Rightarrow \quad 40\ W = I_{total} \cdot (120\ V)$$

$$\therefore \quad I_{total} = I_1 = \frac{1}{3}\ A$$

Luego:

El voltaje en el resistor 1 = $(I_1) \cdot R_1 = \left(\frac{1}{3} A\right)(240\ \Omega) = 80\ V$

El voltaje en el resistor 2 = 120 V – 80 V = 40 V

El voltaje en el resistor 3 = 120 V – 80 V = 40 V

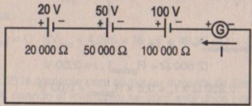
64. Diseñe un voltímetro de escala múltiple con capacidad de desviación de máxima escala para 20,0 V; 50,0 V y 100 V. Suponga que el medidor del movimiento es un galvanómetro que tiene una resistencia de 60,0 Ω y proporciona una desviación de máxima escala para una corriente de 1,00 mA.

Resolución :

Se tiene que cumplir que: 170 V ≡ 60,0 Ω × 1,00 mA

Luego:
$20{,}0\ V = 1{,}00\ mA \times R_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 20\ 000\ \Omega$
$50{,}0\ V = 1{,}00\ mA \times R_2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 50\ 000\ \Omega$
$100{,}0\ V = 1{,}00\ mA \times R_3 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 100\ 000\ \Omega$

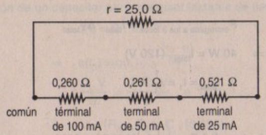
En consecuencia, el galvanómetro se debe de colocar del modo siguiente:



65. Diseñe un amperímetro de escala múltiple con capacidad de desviación de máxima escala para 25,0 mA; 50,0 mA y 100 mA. suponga que el medidor del movimiento es un galvanómetro que tiene una resistencia de 25,0 Ω y brinda una desviación de máxima escala para una corriente de 1,00 mA.

Resolución :

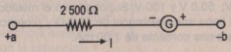
El arreglo se debe de realizar de la siguiente manera:



66. Un galvanómetro particular sirve como un voltímetro de máxima escala de 2,00 V cuando un resistor de 2 500 Ω se conecta en serie con él. Sirve como un amperímetro de máxima escala de 0,500 A cuando un resistor de 0,220 Ω se conecta en paralelo con él. Determine la resistencia interna del galvanómetro y la corriente requerida para producir una desviación de máxima escala.

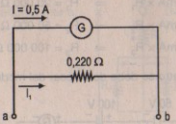
Resolución :

Un galvanómetro funciona como voltímetro cuando:



Donde: $V_a - V_b = 2,00$ V

Un galvanómetro funciona como amperímetro cuando:



Donde $V_b - V_a = 2,00$ V

Nos piden: $R_{galvanómetro} = ?$ y $I = ?$

Sabemos que: $(2\,500\ \Omega + R_{galvan}) \cdot I = 2,00$ V ... (1)

Además: $0,220\ \Omega \times I_1 = 0,5 \times R_{galvan} = 2,00$ V ... (2)

Entonces de (2): $R_{galvan} = \dfrac{2,00\ \text{V}}{0,500\ \text{A}} = 4,00\ \Omega$

Luego de (1) $(2\,500\ \Omega + 4,00\ \Omega) \cdot I = 2,00$

$\therefore\quad I = 0,8$ mA

67. En la figura P28.67 suponga que el interruptor se ha cerrado durante un tiempo tan largo como para que el capacitor quede completamente cargado. Determine a) la corriente en estado estable a través de cada resistor. b) La carga Q en el capacitor. c) El interruptor se abre en t = 0. Escriba una ecuación para la corriente I_{R2} a través de R_2 = 15 kΩ como una función del tiempo, y d) encuentre el tiempo que tarda la carga en el capacitor para disminuir a un quinto de su valor inicial.

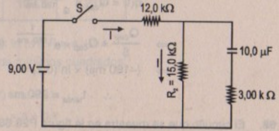


Figura P28.67

Resolución :

Parte (a)

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (horario)

$$9,00\ \text{V} - 12,0\ \text{k}\Omega\, I - 15,0\ \text{k}\Omega\, I = 0$$

$$\therefore\quad I = \frac{9,00\ \text{V}}{27,0\ \text{k}\Omega} = 0,33\ \text{mA} \approx 333\ \text{mA}$$

Esto quiere decir:

Cuando el interruptor se cierra un largo tiempo, la corriente que fluye por el resistor de 12,0 kΩ y 15,0 kΩ es 333 mA. Mientras que por el resistor de 3,00 kΩ no fluye corriente, es decir I = 0.

Parte (b)

Aplicando nuevamente la segunda regla de Kirchhoff (segunda malla o espira)

$$-\Delta V_{cap} + I \cdot 15,0\ \text{k}\Omega = 0$$

$$\Rightarrow\quad \Delta V_{cap} = 15,0\ \text{k}\Omega \times 333\ \mu\text{A} = 4,995\ \text{V}$$

En consecuencia:

$$Q_{capacitor} = C \cdot \Delta V_{cap} = 4,995 \times 10\ \mu\text{F} = 49,95\ \mu\text{C} \approx 50\ \mu\text{C}$$

Parte (c)

Según la espira (2) la corriente para cualquier instante de tiempo cuando se produce una descarga, cuando el interruptor se abre está dada por:

$$I(t) = \frac{Q_{cap}}{RC} \times e^{\frac{-t}{RC}}$$

Donde: $Q_{cap} = 50\ \mu C$ y $RC = (15\ k\Omega + 3k\Omega)(10\ mF) = 180\ ms$

Por lo tanto: $I(t) = \dfrac{50{,}0\ \mu C}{180\ ms} \cdot e^{-\frac{t}{180\ ms}} = 278\ \mu A \cdot e^{-\frac{t}{180\ ms}}$

Parte (d)

Sabemos que la descarga en un capacitor en el tiempo está dada por:

$$q(t) = Q_{cap} \times e^{-\frac{t}{180\ ms}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_{cap}}{5} = Q_{cap} \times e^{-\frac{t}{180\ ms}} \quad \text{(por condición)}$$

$$\Rightarrow \quad (-180\ ms) \times \ln(0{,}2) = t$$

$$\therefore \quad t_{tarda} = 290\ ms$$

68. El circuito que se muestra en la figura P28.68 se colocó en el laboratorio para medir una capacitancia desconocida C empleando un voltímetro de resistencia R = 10,0 MΩ y una batería cuya fem es de 6,19 V. Los datos dados en la tabla siguiente son los voltajes medidos en el capacitor como una función del tiempo, donde t = 0 representa el momento en que se abre el interruptor. a) Construya una gráfica de ln (ε / ΔV) *versus* t y haga un ajuste lineal de mínimos cuadrados sobre los datos. b) A partir de la pendiente de su gráfica obtenga un valor para la constante de tiempo del circuito y un valor para la capacitancia.

ΔV (V)	t (s)	ln(ε / ΔV)
6,19	0	
5,55	4,87	
4,93	11,1	
4,34	19,4	
3,72	30,8	
3,09	46,6	
2,47	67,3	
1,83	102,2	

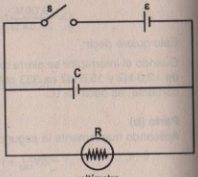


Figura P28.68

Resolución:

Sea:

Donde: ε = 6,19 V
R = 10,0 MΩ
C = desconocida

Parte (a)

Construyendo una gráfica ln (ε/ΔV) versus t con los siguientes datos:

ΔV(v)	t(s)	ln (ε/ΔV)
6,19	0	0
5,55	4,87	0,109
4,93	11,1	0,227
4,34	19,4	0,355
3,72	30,8	0,509
3,09	46,6	0,695
2,47	67,3	0,919
1,83	102,2	1,218

Sea: la ecuación lineal dada por: ln (ε/ΔV) = a + b.t

Entonces aplicando el método de mínimos cuadrados:

Tenemos que:

$$\ln(\varepsilon/\Delta V) = a + b.t$$

$$y \ = a + b.x$$

Luego: $$b = \frac{n.\Sigma x.y - \Sigma x.\Sigma y}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Desarrollando:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 0 + 0{,}53 + 2{,}52 + 6{,}89 + 15{,}68 + 32{,}4 + 61{,}85 + 124{,}5 = 244{,}37$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 0 + 4{,}87 + 11{,}1 + 19{,}4 + 30{,}8 + 46{,}6 + 67{,}34 + 102{,}2 = 282{,}27$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 0 + 0{,}109 + 0{,}227 + 0{,}355 + 0{,}509 + 0{,}695 + 0{,}919 + 1{,}218 = 4{,}032$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 0^2 + 4{,}87^2 + 11{,}1^2 + 19{,}4^2 + 30{,}8^2 + 46{,}6^2 + 67{,}3^2 + 102{,}2^2 = 18\ 617{,}6$$

$$y = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = \frac{4{,}032}{8} = 0{,}504$$

$$x = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{282{,}27}{8} = 35{,}28$$

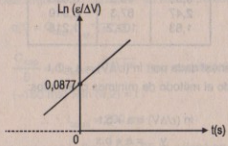
Entonces: $b = \dfrac{8(244,37)-(282,27)(4,032)}{8(18\ 617,6)-(282,27)^2} = \dfrac{816,85}{69\ 264,5} = 0,0118$

$a = 0,504 - (0,0118)(35,28) = 0,0877$

En consecuencia: $y = 0,0118.x + 0,0877$

Por lo tanto: $\boxed{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\Delta V}\right) = 0,0118.t + 0,0877}$

Graficando:



Parte (b)

Sabemos que: $\tau = R.C$ = pendiente de la recta

$\Rightarrow \quad \tau = 0,0118\ s \equiv 11,8\ ms$

Luego:

$0,0118\ s = R.C = 10,0 \times 10^6\ \Omega \times C$

$\therefore \quad C = 1,18 \times 10^{-9}\ F \equiv 1,18\ nF$

69. a) Con argumentos de simetría, muestre que la corriente que pasa por cualquier resistor en la configuración de la figura P28.69 es I/3 o I/6. Todos los resistores tienen la misma resistencia r. b) Muestra que la resistencia equivalente entre los puntos a y b es (5/6) r.

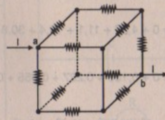
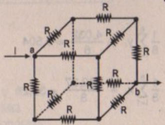


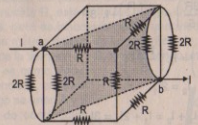
Figura P28.69

Resolución :

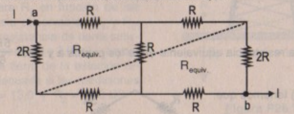
Dada la figura:



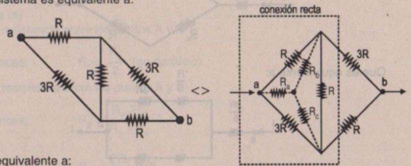
Intersectando un plano diagonal al sistema tenemos que:



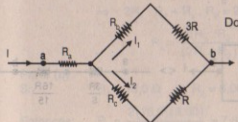
Haciendo ahora un corte transversal tenemos que:



Este sistema es equivalente a:



Y es equivalente a:



Donde: $R_a = \dfrac{3R.R}{R+R+3R} = \dfrac{3R}{5}$

$R_b = \dfrac{R.R}{R+R+3R} = \dfrac{R}{5}$

$R_c = \dfrac{3R.R}{R+R+3R} = \dfrac{3R}{5}$

Luego:

$I = I_1 + I_2$ ... (Primera regla de Kirchhoff)

$I_1 . R_b + I_1 . 3R - I_2 R - I_2 R_c = 0$ (Segunda Regla de Kirchhoff)

Entonces:

$$I_2 \cdot R + I_2 \cdot \left(\frac{3R}{5}\right) = I_1 \cdot \left(\frac{R}{5}\right) + I_1 \cdot 3R$$

$$\Rightarrow \quad I_2 \cdot \left(\frac{8R}{5}\right) = I_1 \cdot \left(\frac{16R}{5}\right)$$

$$\therefore \quad I_2 = 2I_1$$

Por tanto:

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + 2I_1 = 3I_1$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{I}{3} \quad \text{(corriente que pasa por cualquier resistor)}$$

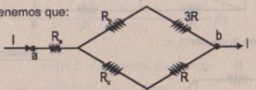
Lqqd.

Parte b

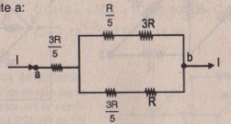
Muestre que la resistencia equivalente entre los puntos a y b es: $\frac{5R}{6}$

Resolución:

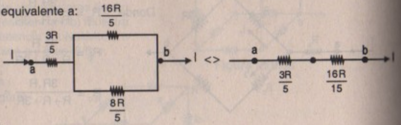
De la parte (b) tenemos que:



Que es equivalente a:



Y que es equivalente a:



Por tanto:

$$2R_{equiv} = \frac{3R}{5} + \frac{16R}{15} \qquad \therefore \; R_{equiv} = \frac{5}{6}R$$

Lqqd.

70. Un estudiante de ingeniería de la estación de radio de un campus universitario desea verificar la eficacia del pararrayos en el mástil de la antena (Fig. P28.70). La resistencia desconocida R_x está entre los puntos C y E. El punto E es una conexión a tierra verdadera, pero es inaccesible para una medición directa debido a que se encuentra a varios metros debajo de la superficie de la tierra. Dos barras idénticas se clavan dentro de la tierra en A y B, introduciendo una resistencia desconocida R_y. El procedimiento es como sigue. Se mide la resistencia R_1 entre los puntos A y B, luego se unen A y B con un alambre de conducción grueso y se mide la resistencia R_2 entre A y C. a) Obtenga una fórmula para R_x en función de las resistencia observables R_1 y R_2. b) Una resistencia de tierra satisfactoria sería $R_x < 2{,}00\ \Omega$. ¿La conexión a tierra de la estación resulta adecuada si las mediciones dan $R_1 = 13{,}0$ y $R_2 = 6{,}00\ \Omega$?

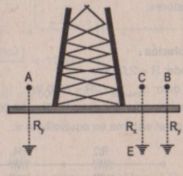


Figura P28.70

Resolución :

Parte (a)

R_1 = resistencia entre los puntos A y B

Entonces: $\quad R_1 = \frac{R_y}{2}$ (en paralelo)

R_2 = resistencia entre los puntos A y C

Entonces: $\quad R_2 = \frac{R_y \cdot R_x}{R_y + R_x}$

$$\Rightarrow \quad R_2 = \frac{2R_1 \cdot R_x}{2R_1 + R_x}$$

$$\Rightarrow \quad 2R_1 \cdot R_2 + R_x \cdot R_2 = 2R_1 \cdot R_x$$

$$\therefore \quad R_x = \frac{2R_1 \cdot R_2}{(2R_1 - R_2)}$$

Parte (b)

Si: $\quad R_1 = 13{,}0\ \Omega \quad$ y $\quad R_2 = 6{,}00\ \Omega$

Entonces: $\quad R_x = \frac{2(13{,}0)(6{,}00)}{2(13{,}0) - 6{,}00} = 7{,}8\ \Omega$

En consecuencia:

La conexión A tierra de la estación no resulta adecuada debido a que

$$R_x > 2{,}00\ \Omega$$

71. Tres resistores de 2,00 Ω se conectan como se muestra en la figura P28.71. Cada uno puede soportar una potencia máxima de 32,0 W sin calentarse excesivamente. Determine la máxima potencia que puede ser entregada a la combinación de resistores.

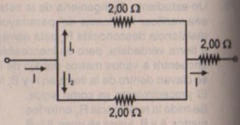


Figura P28.71

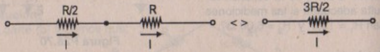
Resolución :

Donde: R = 2,00 Ω

Por dato: $\mathscr{P}_{\text{máxima}}$ C/R = 32,0 W

Tenemos que: por dato: $I^2 \cdot R = 32{,}00$ W

Luego el sistema es equivalente a:



Luego: $\mathscr{P}_{\text{total máxima de la combinación}} = \dfrac{3}{2}\, I^2 \cdot R$

$\therefore \quad \mathscr{P}_{\text{total máxima de la combinación}} = \dfrac{3}{2}(32{,}00) = 48{,}00$ W

72. El circuito en la figura P28.72 contiene dos resistores, $R_1 = 2{,}00$ kΩ y $R_2 = 3{,}00$ kΩ, y dos capacitores, $C_1 = 2{,}00$ μF y $C_2 = 3{,}00$ μF, conectados a una batería con fem ε = 120 V. Si no hay cargas en los capacitores antes de que se cierre el interruptor S, determine las cargas q_1 y q_2 en los capacitores C_1 y C_2, respectivamente, después de que se cierra el interruptor. (Sugerencia: primero reconstruya el circuito de manera que se vuelva un circuito RC simple que contenga un solo resistor y un solo capacitor en serie, conectados con la batería, y determine después la carga total q almacenada en el circuito equivalente).

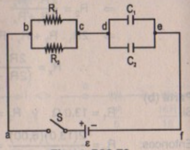


Figura P28.72

Resolución :

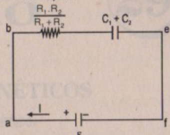
Donde: $R_1 = 2{,}00$ kΩ $\quad R_2 = 3{,}00$ kΩ

$C_1 = 2{,}00$ μF $\quad C_2 = 3{,}00$ μF

ε = 120,0 V

Nos piden: q_1 y q_2 después de que se cierra el interruptor.

El sistema es equivalente a un circuito "RC" de la siguiente manera:



Donde: $\dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{(2{,}00\,\text{k}\Omega)(3{,}00\,\text{k}\Omega)}{5{,}00\,\text{k}\Omega} = 1{,}2\ \text{k}\Omega = R$

$C_1 + C_2 = 2{,}00\ \mu\text{F} + 3{,}00\ \mu\text{F} = 5{,}00\ \mu\text{F} = C$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff:

abefa: $\quad \varepsilon - I.R - \dfrac{q}{C} = 0$

cuando el interruptor se cierra en t = 0 la carga en el capacitor es "cero". Después de un largo tiempo "t" la carga en el capacitor es $Q_{\text{MÁXIMA}}$, en consecuencia ya no fluye corriente. Luego:

$\varepsilon - 0 = \dfrac{Q_{\text{máx}}}{C} \qquad \therefore\ Q_{\text{máxima}} = \varepsilon \cdot C = (120{,}0\ \text{V})(5{,}00\ \mu\text{F}) = 600\ \mu\text{C}$

Por otro lado:

Según la figura 1: $\left.\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cdot \Delta V de \\ q_2 &= C_2 \cdot \Delta V de \end{aligned}\right\} \div$

$\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

$\Rightarrow \quad q_1 = q_2 \cdot \dfrac{C_1}{C_2}$

Pero: $\quad Q_{\text{máxima}} = q_1 + q_2 = 600\ \mu\text{C}$

Entonces: reemplazamos y resulta que:

$q_2 \cdot \dfrac{C_1}{C_2} + q_2 = 600\ \mu\text{C}$

$\Rightarrow \quad q_2\ \dfrac{(C_1 + C_2)}{C_2} = 600\ \mu\text{C}$

$\Rightarrow \quad q_2 \left(\dfrac{2{,}00\,\mu\text{F} + 3{,}00\,\mu\text{F}}{3{,}00\ \mu\text{F}}\right) = 600\ \mu\text{C}$

$\therefore \quad q_2 = 360\ \mu\text{C} \quad \text{y} \quad q_1 = 240\ \mu\text{C}$

Capítulo 29

CAMPOS MAGNÉTICOS

EL CAMPO MAGNÉTICO

1. **Indique la dirección inicial de la desviación de las partículas cargadas cuando éstas entran en los campos magnéticos indicados como se muestra en la figura P29.1.**

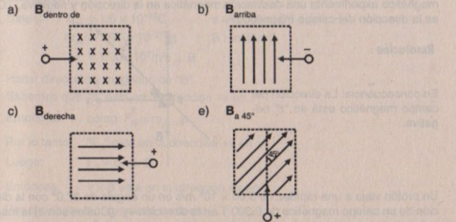


Figura P29.1

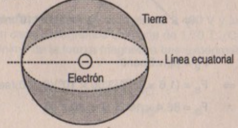
Resolución :

Figura (a): Hacia arriba.
Figura (b): Hacia afuera de la página.
Figura (c): No hay desviación.
Figura (d): Hacia el plano de la página.

2. **Considere un electrón cerca del ecuador de la Tierra. ¿En que dirección tendería a desviarse si su velocidad está dirigida a) hacia abajo, b) rumbo al norte, c) hacia el este o d) hacia el sureste?**

Resolución :

Sea:



Parte (a)
No hay desviación.

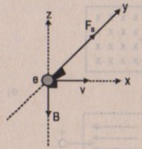
Parte (b)
Hacia fuera de la página o plano

Parte (c)
Hacia afuera de la página o plano.

Parte (d)
Hacia el plano de la página.

3. Un electrón que se mueve a lo largo del eje x positivo perpendicular a un campo magnético experimenta una desviación magnética en la dirección **y** negativa. ¿Cuál es la dirección del campo magnético?

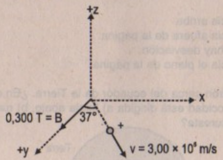
Resolución :



En consecuencia: La dirección del campo magnético está en "z" negativa.

4. Un protón viaja a una rapidez de $3{,}00 \times 10^6$ m/s en un ángulo de 37,0° con la dirección de un campo magnético de 0,300 T en la dirección +y. ¿Cuáles son a) la magnitud de la fuerza magnética sobre el protón y b) su aceleración?

Resolución :
Sea:



Parte (a)
Sabemos que: $F_B = |q|.v.B\text{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad F_B = (1{,}6 \times 1^{-19})(3{,}00 \times 10^6)(0{,}300)(\text{sen}37°)$

$\therefore \quad F_B = 86{,}4 \times 10^{-15}\ \text{N} \approx 86{,}4\ \text{fN}$

Parte (b)
Hacia arriba en "z" positiva es su dirección. Su aceleración es:
$F_B = m_{p+}.a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F_B}{m_{p+}} = \frac{86{,}4\times10^{-15}\text{N}}{1{,}67\times10^{-27}\text{kg}}$$

$$\therefore \quad a = 51{,}74 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2 \approx 51{,}74\ \text{T m/s}^2$$

5. Un protón se mueve perpendicular a un campo magnético uniforme **B** a $1{,}00 \times 10^7$ m/s y experimenta una aceleración de $2{,}00 \times 10^{13}$ m/s² en la dirección +x cuando su velocidad está en la dirección +z. Determine la magnitud y la dirección del campo.

Resolución :

Datos: $q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$C ; $a = 2{,}00 \times 10^{13}$ m/s²
$m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$kg ; B : uniforme
$v = 1{,}00\times 10^7\text{m/s} \perp B$

Hallar dirección y magnitud de "B"

Sabemos que: "a" está en la dirección +x en $\hat{i}$

Entonces: como: $F_B = m_{p+} . a$

Por lo tanto: "F_B" está en la dirección +x en $\hat{i}$

Luego: $F_B = q.v \times B$

Entonces: $v \times B$ está en la dirección +x en $\hat{i}$

Por otro lado: por producto vectorial

$\hat{i} = \hat{j} \times \hat{k} = +\hat{k} \times (-\hat{j})$ (por propiedad)

En consecuencia: La dirección de B está en la dirección $-\hat{j}$ es decir en – y debido a que "v" está en la dirección +z es decir en $\hat{k}$

Por lo tanto: $F_B = q.v \times B$

$\Rightarrow \quad m_{p+} . a = q . v \times B$

$\Rightarrow \quad 1{,}67 \times 10^{-27} \times (2{,}0 \times 10^{13}) = (1{,}6 \times 10^{-19})(1{,}0 \times 10^7) \times B$

$\therefore \quad B = (-20{,}9\hat{j})\text{mT}$

6. Un electrón se acelera desde el reposo a través de 2 400 V y luego ingresa a una región donde existe un campo magnético uniforme de 1,70 T. ¿Cuáles son los valores a) máximo y b) mínimo de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

Resolución :

Datos: B = 1,70 T ; $q_{e-} = -1{,}6 \times 10^{-19}$C
V = 2 400 V ; $m_{e-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

Parte (a)

Sabemos que: $|F_B| = |q| \cdot v \cdot B \operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad F_{B\,máx} = |q| \cdot v \cdot B(1)\ ; \quad \theta = 90°$

$\therefore \quad F_{B\,máx} = (1{,}6 \times 10^{-19})(2\,400V)(1{,}70) = 0{,}653\ V.fN$

Parte (b)

Sabemos que: $|F_B| = |q| \cdot v \cdot B \operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad F_{B\,mínimo} = |q| \cdot v \cdot B \operatorname{sen}(\theta°)$

$\downarrow$

$\theta = 0$ ó $\theta = 180°$

$\therefore \quad F_{B\,mínimo} = 0$

7. En el ecuador, cerca de la superficie de la Tierra, el campo magnético es aproximadamente de 50,0 μT con dirección norte y el campo eléctrico es cercano a 100 N/C hacia abajo en clima favorable. Encuentre las fuerzas gravitacional, eléctrica y magnética sobre un electrón que se mueve a una velocidad instantánea de $6{,}00 \times 10^6$ m/s en dirección este en dicho ambiente.

Resolución :

Datos: B = 50,0 μT (dirección norte)

E = 100 N/C (dirección sur)

$V_{e-} = 6{,}00 \times 10^6$ m/s (dirección este)

Nos piden: F_g ; F_e ; F_B

Cerca de la superficie $g = 9{,}81\ m/s^2$ aprox.

Entonces: $F_g = m_{e-} \cdot g = 9{,}1 \times 10^{-31}kg \times (9{,}81\ m/s^2)$

$\therefore \quad F_g = 8{,}93 \times 10^{-30}N$ (hacia abajo)

Por otro lado:

Sabemos que: $E = \dfrac{F_e}{q}$

$\Rightarrow \quad F_e = E \cdot q = -100\ \dfrac{N}{C}\ J \times (-1{,}6 \times 10^{-19}C)$

$\therefore \quad |F_e| = 1{,}6 \times 10^{-17}$ N (hacia arriba)

Por último: $F_B = |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen}90°$

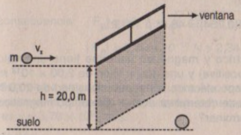
$\Rightarrow \quad F_B = 1{,}6 \times 10^{-19} \cdot (6{,}00 \times 10)^6\ (50{,}0 \times 10^{-6})$

$\therefore \quad F_B = 4{,}80 \times 10^{-17}$ N (hacia abajo)

8. Una bola metálica de 30,0 g que tiene una carga neta Q = 5,00 μC se lanza horizontalmente por una ventana a una rapidez v = 20,0 m/s. La ventana está a una altura h = 20,0 m sobre el suelo. Un campo magnético horizontal uniforme de magnitud B = 0,010 T es perpendicular al plano de la trayectoria de la bola. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre la bola antes de que ésta golpee el suelo.

Resolución :

Sea:



Datos:

m = 30,0 g

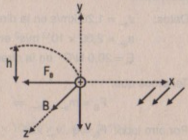
$v_x = 20$ m/s

Q = 5,00μC

B = 0,010 T ⊥ trayectoria

F_B (antes que toque el suelo) = ?

Graficando:



Sabemos que:

Inicialmente la bola al entrar al campo tiene una velocidad igual a 20 m/s, entonces:

$$F_B = Q \cdot v_x \cdot B = 5{,}00\ \mu C(20)(0{,}010) = 1{,}00\ \mu N.$$

Luego: La bola antes de llegar al suelo tendrá otra velocidad dada por:

$$\frac{m.v^2}{h} = q.v.B = F_B$$

Como "F_B" es la misma dentro del campo; en consecuencia:

$$F_B = 1{,}00\ \mu N = 1{,}00 \times 10^{-6}\ N$$

9. Un protón que se mueve a $4{,}00 \times 10^6$ m/s a través de un campo mágnético de 1,70 T experimenta una fuerza magnética de $8{,}20 \times 10^{-13}$ N de magnitud. ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad del protón y el campo?

Resolución :

Datos: $m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$V_{p+} = 4{,}00 \times 10^6$ m/s ; θ entre v y B = ?

B = 1,70 T

$F_B = 8{,}20 \times 10^{-13}$ N

Sabemos que: $|F_B| = |q|.v.B.\text{sen}\theta$

$\Rightarrow\ 8{,}20 \times 10^{-13} = (1{,}6 \times 10^{-19})(4{,}00 \times 10^{6})(1{,}70)\ \text{sen}\theta$

$\Rightarrow\ \text{sen}\theta = \dfrac{8{,}20}{(1{,}6)(4{,}00)(1{,}70)}$

$\therefore\ \theta = \text{arcsen}(0{,}754) = 48{,}8°\ \text{ó}\ 131{,}2°$

10. Un electrón en campos eléctrico y magnético uniforme tiene una velocidad de 1,20 km/s (en la dirección x positiva) y una aceleración de 2,00 × 10^{12} m/s² (en la dirección z positiva). Si el campo eléctrico tiene una intensidad de 20,0 N/C (en la dirección z positiva), ¿qué puede determinar acerca del campo magnético en la región? ¿Qué no se puede determinar?

Resolución :

Datos: $v_{e^-} = 1{,}20$ km/s en la dirección x positiva

$a_{e^-} = 2{,}00 \times 10^{12}\ m/s^2$ en la dirección z positiva

E = 20,0 N/C en la dirección z positiva

Tenemos que:

$F_B = m_{e^-} . a_{e^-}\ \Rightarrow\ F_B$ está en la dirección z positiva

Por otro lado: $F_B = q\ .\ v_{e^-} \times B$

$\Rightarrow\ F_B$ está en la dirección $v_{e^-} \times B$

$\therefore\ v_{e^-} \times B$ está en la dirección z positiva

Como: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ (producto vectorial)

Además: Ve está en la dirección x positiva es decir en $\hat{i}$

$\Rightarrow\ -\hat{i} \times B = \hat{k}$

$\therefore$ «B» estará en la dirección «y» negativa es decir en $-\hat{j}$

11. Un protón se mueve a una velocidad v = (2i – 4 j + k) m/s en una región donde el campo magnético es B = (i + 2j – 3k) T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que esta carga experimenta?

Resolución :

Datos: $v = 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ m/s $\qquad q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$B = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ T $\qquad |F_B| = ?$

Sabemos que: $F_B = q.v \times B$

$\Rightarrow\ F_B = 1{,}6 \times 10^{-19} . (2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$\therefore\ F_B = 1{,}6 \times 10^{-19}\ (10\hat{i} - 7\hat{j} + 8\hat{k})$ N

En consecuencia: $|F_B| = 10^{-19} \times \sqrt{(16)^2 + (11{,}2)^2 + (12{,}8)^2}$

$\therefore\ |F_B| = 2{,}34 \times 10^{-18}\ N \equiv 2{,}34$ aN

12. Un electrón se proyecta dentro de un campo magnético uniforme B = (1,40i + 2,10j) T. Encuentre la expresión vectorial para la fuerza sobre el electrón cuando su velocidad es v = 3,70 × 10^5 j m/s.

Resolución :

Datos: $q_{e^-} = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$B = 1{,}4\hat{i} + 2{,}10\hat{j}$ T ; $F_B = ?$

$v = 3{,}70 \times 10^5\hat{j}$ m/s

Sabemos que: $F_B = q_e\ .\ v \times B$

$\Rightarrow\ F_B = 1{,}6 \times 10^{-19} \times (0\hat{i} + 3{,}70 \times 10^5\hat{j}) \times (1{,}4\hat{i} + 2{,}10\hat{j})$

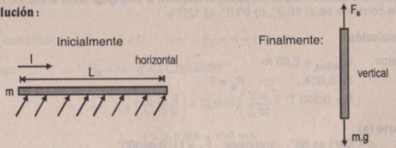
$\therefore\ F_B = 8{,}3 \times 10^{-14}\ N \equiv 83$ fN

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR QUE LLEVA CORRIENTE

13. Un alambre con una masa por unidad de longitud de 0,500 g/cm conduce una corriente de 2,00 A horizontalmente hacia el sur. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo magnético mínimo necesario para levantar verticalmente este alambre?

Resolución :

Sea:



Datos: I = 2,00 A

$m/L = 0{,}500\ g/cm \equiv \dfrac{0{,}5\ km}{10\ m}$

B = ?

Tenemos que $F_{B\,mínimo} = m.g$

$$\Rightarrow \quad I.L.B\ sen90° = m.g$$

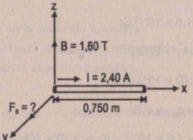
$$\Rightarrow \quad |B| = \frac{mg}{IL} = \left(\frac{m}{L}\right).\frac{g}{I} = \frac{0,5}{10}\times\left(\frac{9,8}{2,0}\right)$$

$$\therefore \quad |B| = 0,245\ T \text{ (al este)}$$

14. Un alambre conduce una corriente estable de 2,40 A. Una sección recta del alambre mide 0,750 m de largo y se encuentra a lo largo del eje x dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B = 1,60 T en la dirección z positiva. Si la corriente está en la dirección +x, ¿cuál es la fuerza magnética sobre la sección de alambre?

Resolución :

Sea:



Sabemos que: $F_B = I\,.\,L \times B$

$$\Rightarrow \quad |F_B| = I.L.B sen\theta = I.L.B\ sen90°$$

$$\therefore \quad |F_B| = (2,40)(0,0750)(1,60) = 2,88\ N$$

15. Un alambre de 2,80 m de longitud conduce una corriente de 5,00 A en una región donde un campo magnético uniforme tiene una magnitud de 0,390 T. Calcule la magnitud de la fuerza magnética sobre el alambre si el ángulo entre el campo magnético y la corriente es a) 60,0°, b) 90,0°, c) 120°

Resolución :

Datos: $L_{alambre} = 2,80$ m

$I = 5,00A \quad ; \quad F_B = ?$

$B = 0,390$ T

Parte (a)

Si: $\angle$ + B e I es 60°, entonces: $F_B = I.L.B.sen60°$

$$\Rightarrow \quad F_B = (5,00)(2,80)(0,390)\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad F_B = 4,73\ N$$

Parte (b)

Si: $\angle$ + B e I es 90°, entonces: $F_B = I.L.B.sen90°$

$$\Rightarrow \quad F_B = (5,00)(2,80)(0,390)(1)$$

$$\therefore \quad F_B = 5,46\ N$$

Parte (c)

Si: $\angle$ + B e I es 120°, entonces:

$$\Rightarrow \quad F_B = I.L.B.sen120° = I.L.Bcos30°$$

$$\therefore \quad F_B = 4,73\ N$$

16. Un conductor suspendido por dos alambres flexibles, como se muestra en la figura P29.16, tiene una masa por unidad de longitud de 0,040 kg/m. ¿Qué corriente debe existir en el conductor para que la tensión en los alambres de soporte sea cero cuando el campo magnético es de 3,60 T hacia el interior de la página? ¿Cuál es la dirección requerida por la corriente?

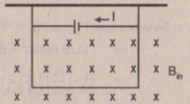
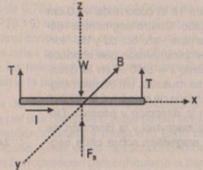


Figura P29.16

Resolución :



Datos: $\frac{m}{L} = 0,040$ kg/m

$B_{int} = 3,60$ t

$I = ?$

Por condición: $T = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = w = m\,.\,g$

Luego: $F_B = m\,.\,g = I.L.B.sen90° \qquad (I \perp B)$

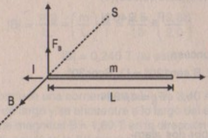
$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{m}{L}\right).\left(\frac{g}{B}\right) = (0,040)\left(\frac{9,8}{3,60}\right)$$

$$\therefore \quad I = 0,109A \equiv 109\ mA$$

17. Suponga un alambre uniforme muy largo que tiene una densidad lineal de masa de 1,00 g/m y que circunda la Tierra por el ecuador magnético. Suponga que el campo magnético del planeta es de 50,0 μT horizontalmente hacia el norte a través de esta región. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la corriente en el alambre que lo mantienen levitando?

Resolución :

Sea:



Datos: $\frac{m}{L} = 1{,}00\ \frac{g}{m}$

$B = 50{,}0\ \mu T$

$F_B = ?$

Tenemos que: $F_B = m \cdot g$

$\Rightarrow \quad I.L.B\ sen90° = m.g$

$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{m}{L}\right) \cdot \left(\frac{g}{B}\right) = 1{,}00 \times 10^{-3} \times \left(\frac{9{,}8}{50 \times 10^{-6}}\right)$

$\therefore$ I = 196 A (con dirección al este magnético es decir al oeste geográfico)

18. En la figura 18 el cubo mide 40,0 cm en cada lado. Cuatro segmentos rectos de alambre –ab, bc, cd y da– forman una espira cerrada que conduce una corriente I = 5,00 A en la dirección que se muestra. Un campo magnético uniforme de magnitud B = 0,020 T está en la dirección y positiva. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre cada segmento.

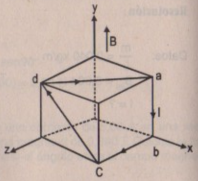


Figura P29.18

Resolución :

Datos: ab = bc = 0,4 m
I = 5,00 A
B = 0,0200 T
$F_B = ?$

* Hallando la fuerza magnética sobre el segmento ab:

  Tenemos que: I y B forman un ángulo de 180°

  Luego: $F_{B\ (en\ ab)} = 0$

* Hallando la fuerza magnética sobre el segmento bc:

  Tenemos que: I y B forman un ángulo de 90°

  Luego: $F_{B\ (en\ bc)} = I.L.Bsen90° = (5{,}00)(0{,}4)(0{,}0200)$

  $\therefore \quad F_{B\ (en\ bc)} = 0{,}04\ N \equiv 40\ mN$ (en dirección +x)

* Hallando la fuerza magnética sobre el segmento cd:

  Según el gráfico: I y B forman un ángulo de 45°

  Entonces: $cd = 0{,}4\sqrt{2}$

  Luego: $F_{B\ (en\ cd)} = I.L.Bsen45° = (5{,}00)\left(0{,}4\sqrt{2}\right)(0{,}0200)\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\therefore \quad F_{B\ (en\ cd)} = 0{,}04\ N \equiv 40\ mN$ (en dirección −z)

* Hallando la fuerza magnética sobre el segmento da:

  Según el gráfico: I y B forman un ángulo de 45°

  Entonces: $da = 0{,}4\sqrt{2}\ m$

  Luego: $F_{B\ (en\ da)} = I.L.Bsen45° = (5{,}00)\left(0{,}4\sqrt{2}\right)(0{,}0200)\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\therefore \quad F_{B\ (en\ da)} = 0{,}04\ N \equiv 40\ mN$ (en dirección +x y z)

19. Problema de respaso. Una barra de 0,720 kg de masa y 6,00 cm de radio descansa sobre dos rieles paralelos (Fig. P29.19) separados por una distancia d = 12,0 cm y tienen longitud L = 45,0 cm. La barra conduce una corriente I = 48,0 A en la dirección indicada y rueda a lo largo de los rieles sin deslizarse. Si la barra parte del reposo, ¿cuál es su rapidez cuando deja los rieles si hay un campo magnético uniforme de 0,240 T en dirección perpendicular a la barra y los rieles?

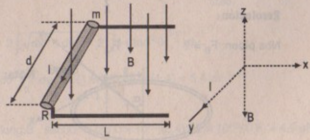
20. **Problema de repaso**. Una barra de masa m y radio R descansa sobre dos rieles paralelos (Fig. P29.19) separados por una distancia d y que tienen longitud L. La barra conduce una corriente I en la dirección indicada y rueda a lo largo de los rieles sin deslizarse. Si la barra parte del reposo, ¿cuál es su rapidez cuando deja los rieles si hay un campo magnético uniforme B en dirección perpendicular a la barra y los rieles?

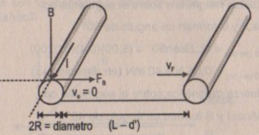
Resolución 19 y 20 :

Sea:

Donde:

Radio de la barra = R
Masa de la barra = m
Velocidad inicial = 0





Sabemos que: $F_B = I.d.B$ ...(definición)

Por otro lado: Por cinemática

$$v_F^2 = v_0^2 + 2a.d = 2.a.(L - d') = 2a(L - 2R)$$

Pero:

$$A = \frac{F_B}{m} \quad \text{... (2.° Ley)}$$

Luego: $$v_F^2 = 2\,\frac{F_B}{m}.(L - 2R) = \frac{2}{m}.I.d.B\,(L - 2R)$$

$\Rightarrow$ Por lo tanto: $$v_F = \sqrt{\frac{2I.d.B(L-2R)}{m}}$$

21. *Un campo magnético no uniforme ejerce una fuerza neta sobre un dipolo magnético.* Un imán de gran intensidad se pone bajo un anillo conductor horizontal de radio r que conduce una corriente I, como muestra la figura 29.21. Si el campo magnético B forma un ángulo θ con la vertical en la posición del anillo, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el anillo?

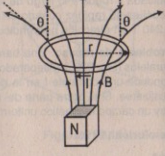
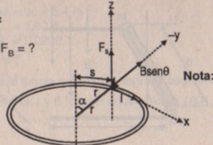


Figura 29.21

Resolución:

Nos piden: $F_B = ?$



Nota: "α" está en un plano horizontal. (plano xy)

Tenemos que: $d\,F_B = I.ds \times B\,\text{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad |d\,F_B| = I.ds.B\text{sen}\theta.\text{sen}90°$

$\Rightarrow \quad \int d\,F_B = |\,F_B| = I.B\text{sen}\theta \int d\,s = I.B\text{sen}\theta \int_0^{2\pi} r.d\alpha$

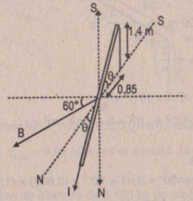
$\Rightarrow \quad F_B = I\,.\,B\text{sen}\theta.r\,\alpha\,\Big|_0^{2\pi}$

$\therefore \quad F_B = I.B.r.2\pi.\text{sen}\theta$ (en dirección de "z" positiva)

22. Suponga que en Atlanta, Georgia, el campo magnético de la Tierra es de 52,0 μT hacia el norte y 60,0° bajo la horizontal. Un tubo es una señal de neón conduce una corriente de 35,0 mA entre las dos esquinas opuestas diagonalmente de la ventana de una tienda, la cual está en el plano vertical norte-sur. La corriente ingresa al tubo en la esquina inferior sur de la ventana. Sale en la esquina opuesta, que está 1,40 m más al norte y 0,850 m más alto. Entre estos dos puntos el tubo fosforescente indica DONAS. Use el teorema proporcionado en el texto como "Caso 1" para determinar el vector total de la fuerza magnética sobre el tubo.

Resolución:

Sea:



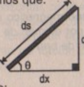
Datos:

B = 52 μT

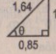
I = 35,0 mA

$F_B = ?$

Tenemos que: ds . cosθ = dx y ds senθ = dy



$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1,4}{0,85}$ Donde:



Luego:

$$\text{Long. total} = 2\int ds = 2\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\int\left(1 + \tan^2\theta\right)^{1/2}.dy$$

$$\therefore \quad \text{Long. total} = 2\sec\theta \int_0^{1,4} dy = 2(1,64)/0,85 \times (1,4) = 5,4 \text{ m}$$

Por lo tanto:

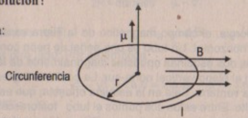
$$F_{\text{total B}} = I(2\int ds) \times B = I\,.\,\text{long}.B\,.\,\text{sen}30° = (35,0 \times 10^{-3})(5,4)(52 \times 10^{-6})(0,5) = 4,9\ \mu\text{N}$$

MOMENTO DE TORSIÓN SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

23. Una corriente de 1,70 mA se mantiene en una espira de circuito individual de 2,00 m de circunferencia. Un campo magnético de 0,800 T se dirige paralelo al plano de la espira. a) Calcule el momento magnético de la espira. b) ¿cuál es la magnitud del momento de torsión ejercido sobre la espira por el campo magnético?

Resolución:

Sea:



Donde: $I = 17,9$ mA
Long = 2,00 m
B = 0,800 T

Parte (a)

Sabemos que: $\mu = I \cdot A$

Por otro lado: $2\pi \cdot r = 2,00\ m \Rightarrow r = \frac{1}{\pi} \cdot m$

Luego: $\text{Área} = A = \pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2$

Entonces: $\mu = I \cdot A = 17,0 \times 10^{-13} \times \frac{1}{\pi}$

$\therefore \quad \mu = 5,41 \times 10^{-3}\ A \cdot m^2 = 5,41\ mA \cdot m^2$

Parte (b)

Sabemos que: $\tau = \mu \times B$

$\Rightarrow \quad |\tau| = \mu \cdot B\text{sen}90° = 5,41 \times 10^{-3} \times (0,800) \times (1)$

$\therefore \quad |\tau| = 4,33\ mN.m$

24. Un pequeño imán de barra está suspendido en un campo magnético uniforme de 0,250 T. El momento de torsión máximo experimentado por el imán de barra es de $4,60 \times 10^{-3}$ N.m. Calcule el momento magnético del imán de barra.

Resolución:

Datos: B = 0,250T

$\tau_{máx} = 4,60 \times 10^{-3}\ N \cdot m \quad ; \quad \mu = ?$

Sabemos que: $\tau_{máx} = I \cdot A \cdot B \cdot = \mu \cdot B$

$\Rightarrow \quad 4,60 \times 10^{-3} = \mu \cdot (0,250)$

$\therefore \quad \mu = 18,4\ m.A.m^2$

25. Una espira rectangular consta de N = 100 vueltas enrolladas muy próximas entre sí y tiene dimensiones a = 0,400 m y b = 0,300 m. La espira se articula a lo largo del eje y, y su plano forma un ángulo θ = 30,0° con el eje x (Fig. P29.25). ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercido sobre la espira por un campo magnético uniforme B = 0,800 T dirigido a lo largo del eje x cuando la corrientes es I = 1,20 A en la dirección indicada? ¿Cuál es la dirección esperada de rotación de la espira?

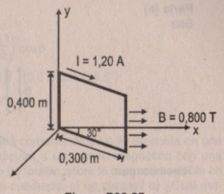
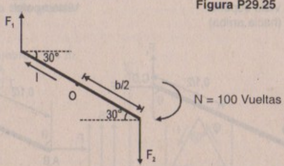


Figura P29.25

Resolución:



Luego:

$\tau_{máx} = N.I.A.B.\cos30° = 100 \times (1,20)(0,400)(0,300)(0,800) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \tau_{máx} = 9,98$ N.m (en el sentido de las agujas del reloj)

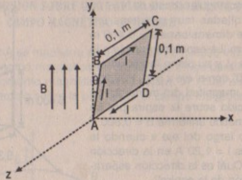
26. Un largo pedazo de alambre de 0,100 kg de masa y 4,00 m de longitud se usa para formar una bobina cuadrada de 0,100 n de lado. La bobina se articula a lo largo de un lado horizontal, conduciendo una corriente de 3,40 A y se coloca en un campo magnético vertical de 0,0100 T de magnitud. a) Determine el ángulo que el plano de la bobina forma con la vertical cuando la bobina está en equilibrio. b) Encuentre el momento de torsión que actúa sobre la bobina debido a la fuerza magnética en equilibrio.

Resolución:

Datos: Long. del alambre = 4,00 m
Masa del alambre = 0,100 kg
Lado de la bobina cuadrada = 0,100 m
I = 3,40 A ; B = 0,0100 T

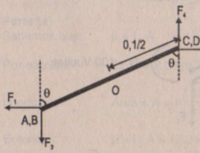
Parte (a)

Sea:

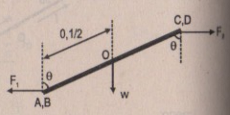


Tenemos que:

Vista superior (hacia arriba)



Vista frontal:



Por otro lado:

Tenemos que: densidad lineal = $\dfrac{\text{masa total}}{\text{long. total}} = \dfrac{M_{\overline{AD}}}{\text{Long. } \overline{AD}}$

$$\Rightarrow M_{\overline{AD}} = \frac{0{,}1\text{kg}}{4{,}00\text{ m}} \times (0{,}100) = 2{,}45 \times 10^{-3}\text{ kg}$$

$$\therefore \quad w_{AD} = 2{,}45 \times 10^{-3}\text{ kg} \,.\, (8{,}8\text{ m/s}^2) = 2{,}45 \times 10^{-2}\text{ kg}$$

Luego: por condición:

$$\Sigma\tau_{C,D} = 0 \quad \text{(Vista frontal)}$$

$$\Rightarrow F_1\,(0{,}1)\cos\theta = w_{\overline{AD}} \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow (3{,}4)(0{,}1)(0{,}01) \times [(0{,}1)\cos\theta] = 2{,}45 \times 10^{-2} \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\text{sen}\theta$$

$$\therefore \quad \theta = \arctan(0{,}277) = 15{,}5°$$

Parte (b)

Tenemos que: $\tau_0 = F_1 \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\cos\theta + F_2 \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \tau_0 = \text{I.área.B.cos}\theta = (3{,}4)(0{,}1)^2 \,.\, (0{,}01)\cos(15{,}5°)$$

$$\therefore \quad \tau_0 = 32{,}76 \times 10^{-3}\text{ N.m} \equiv 32{,}76\text{ mN.m}$$

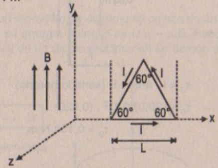
27. Un alambre de 40,0 cm de largo conduce una corriente de 20,0 A. Se dobla en una espira y se coloca con su normal perpendicular a un campo magnético con una intensidad de 0,520 T. ¿Cuál es el momento de torsión sobre la espira si se dobla en la forma de a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un círculo? d) ¿Cuál momento de torsión es más grande?

Resolución:

Datos: Long. alambre = 0,4 m
I = 20,0 A
B = 0,520 T

Parte (a)

Sea:

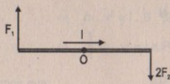


Donde:

Área = $L^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Donde: $L = \dfrac{0{,}4}{3}$ m y I = 20,0 A; B = 0,520 T

Proyectando el triángulo (vista superior, arriba)



Con: $F_2 = \text{I.L.Bcos}60°$

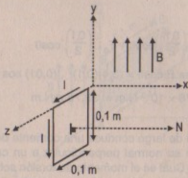
$F_1 = \text{I.L.B}$

Luego: $\tau_0 = F_1.d + 2F_2.d = \text{I.L.B} + 2\text{I.L.B.}(0{,}5) = 2\text{ I.L.Bd}$

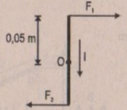
$$\Rightarrow \tau_0 = \text{I.A.B} = (20{,}0)\left(\frac{0{,}4}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \times (0{,}520) \qquad \therefore \; \tau_0 = 80{,}1\text{ mN.m}$$

Parte (b)

Sea:



Entonces: (Vista superior hacia arriba)



Donde $F_1 = F_2$

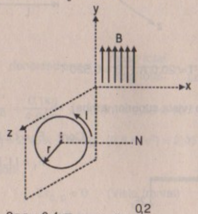
Luego: $\tau_0 = I$. área . B (sentido horario)

$\Rightarrow \quad \tau_0 = (20{,}0)(0{,}1)^2 \cdot (0{,}520)$

$\therefore \quad \tau_0 = 0{,}104$ N.m

Parte (c)

Sea:

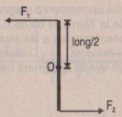


Tenemos que: $2\pi . r = 0{,}4$ m $\Rightarrow$ $r = \dfrac{0{,}2}{\pi}$

Luego: área: $\pi \times \left(\dfrac{0{,}2}{\pi}\right)^2 = \dfrac{(0{,}2)^2}{\pi}$

Por otro lado:

Proyectando (visita lateral derecha) ó (vista superior arriba)



Donde: $F_1 = F_2$

Luego: $\tau_0 = F_1 \cdot \text{long}/2 + F_2 \cdot \text{long}/2 = I.A.B$

$$\Rightarrow \quad \tau_0 = (20{,}0)\frac{(0{,}2)^2}{\pi} \cdot (0{,}520) = 0{,}132 \text{ N . m}$$

Parte (d)

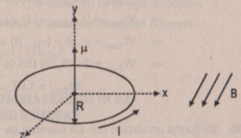
La espira circular tiene un momento de torsión más grande.

28. Una espira de corriente con un momento de dipolo μ se coloca en un campo magnético uniforme B. Pruebe que su energía potenial es U = – μ.B. Puede reproducir el análisis de la energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico proporcionado en el capítulo 26.

Resolución:

Por demostrar que: $\boxed{U = -\mu \cdot B}$

Sea: "La espira una circunferencia de radio (R)"



Sabemos que:

$$F_B = m \cdot \frac{v^2}{R} = I \cdot \text{long} \cdot B$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot v^2 = I \cdot B \cdot (2\pi . R) \cdot R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \cdot v^2 = I.\pi.R^2.B = I.A.B = \mu.B$$

Decimos que:

Un aumento en la energía cinética corresponde a una disminución en la energía potencial (por la conservación de la energía). Luego:

$$-U = E_K = \mu . B$$

$\therefore \quad U = -\mu . B$ Lqqd.

29. La aguja de una brújula magnética tiene un momento magnético de 9,70 mA . m^2. En esta ubicación el campo magnético de la Tierra es de 55,0 μT hacia el norte a 48,0° bajo la horizontal. a) Identifique las orientaciones a las cuales la aguja de la brújula tiene energías potenciales mínima y máxima. b) ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre la aguja para que ésta se mueva desde la primera hasta la última orientación?

Resolución :

Datos: $\mu = 9{,}70\ \text{mA} \cdot \text{m}^2$

$B = 55{,}0\ \mu\text{T}$ (hacia el norte $\wedge$ 48° bajo la horizontal)

Parte (a)

Se sabe que: $U = -\mu . B$

Entonces:

U será mínima cuando μ y B estén en la misma dirección formando un $\angle$ de 0°.

U será máxima cuando μ y B estén en direcciones opuestas formando un $\angle$ de 180°.

Luego:

$U_{mínima} = -\mu . B$ (apuntando al norte 48°)

$U_{máxima} = \mu . B$ (apuntando al sur 48°)

Parte(b)

$W_{Total} = \Delta U$ (Teorema del trabajo y la energía)

$\Rightarrow W_{Total} = U_{máxima} - U_{mínima}$

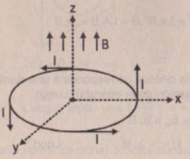
$\Rightarrow W_{Total} = \mu . B - (-\mu . B) = 2.\mu.B$

$\Rightarrow W_{Total} = 2 . (9{,}70)\ (55{,}0)$

$\therefore W_{Total} = 1{,}07\ \mu J$

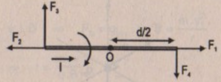
30. Se forma un círculo con un alambre de 10,0 cm de diámetro y se pone en un campo magnético uniforme de 3,00 mT. Una corriente de 5,00 A circula por el alambre. Determine a) el momento de torsión máximo sobre el alambre y b) el intervalo de energía potencial del alambre para diferentes orientaciones del círculo en el campo.

Resolución :



Donde: diámetro: 10,0 cm
I = 5,00 A
B = 3,00 mT

Parte (a)
Vista superior



Tenemos que: $\tau_0 = F_3 \cdot \frac{d}{2} + F_4 \cdot \frac{d}{2}$ (sentido horario)

$\Rightarrow \tau_0 = I\ .\ \text{área}\ .\ B = I.B.\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \tau_0 = (5{,}00)(3{,}00 \times 10^{-3})\ \frac{(\pi)}{4}\ (0{,}1)^2$

$\therefore \tau_0 = 0{,}12\ \text{mN.m}$

Parte (b)

Tenemos que: $\mu = I.A = 5{,}00 \times \frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 = 3{,}93 \times 10^{-2}\ \text{A.m}^2$

Por otro lado:

$U = \mu.B = -(3{,}93)(10^{-2})(3{,}00 \times 10^{-3})$ si están en la misma dirección.

ó $U = \mu.B = (3{,}93 \times 10^{-2})(3{,}00 \times 10^{-3})$ si están en dirección opuesta.

Por lo tanto: $U \in [-118\ \mu J\ ;\ 118\ \mu J]$

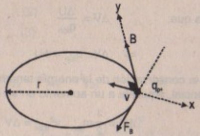
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

31. El campo magnético de la Tierra en cierta localidad está dirigido verticalmente hacia abajo y tiene una magnitud de 50,0 μT. Un protón se mueve horizontalmente hacia el oeste en este campo a una rapidez de 6,20 × 10^6 m/s. a) ¿Cuáles son la dirección y magnitud de la fuerza magnética que el campo ejerce sobre esta carga? b) ¿Cuál es el radio del arco circular que sigue este protón?

Resolución :

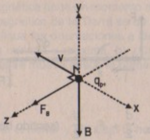
Sea:

Donde: $B = 50\ \mu T$
$v = 6{,}2 \times 10^6$ m/s



Parte (a)

Tenemos que:



$$F_B = q.v.B = 1{,}6 \times 10^{-19} \times (6{,}2 \times 10^6) \times (50 \times 10^{-6})$$

$$\therefore \quad F_B = 49{,}7 \times 10^{-18}\ N \equiv 49{,}7\ aN$$

Si la dirección de la velocidad está dirigida hacia el norte, y el campo magnético hacia abajo, entonces la fuerza magnética está dirigida hacia el sur.

Parte (b)

Tenemos que: $F_B = m.\dfrac{v^2}{r} = m_{Protón} \cdot \dfrac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad F_B = 1{,}67 \times 10^{-27} \times \frac{\left(6{,}2\times10^6\right)^2}{r}$$

$$\Rightarrow 49{,}7 \times 10^{-18} = \frac{1{,}67\times33{,}44\times10^{-15}}{r}$$

$$\therefore \quad r = 1{,}29 \times 10^3 m \equiv 1{,}29\ km$$

32. Un ion positivo con una sola carga tiene una masa de $3{,}20 \times 10^{-26}$ kg. Después de que es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 833 V, el ion entra a un campo magnético de 0,920 T a lo largo de una dirección perpendicular a la dirección del campo. Calcule el radio de la trayectoria del ion en el campo.

Resolución :

Datos: Masa del ión = $3{,}20 \times 10^{-26}$ kg.

$V_{Inicial} = 0$ $\qquad V = 833$ V

$B = 0{,}920$ T $\qquad r = ?$

Tenemos que: $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_{ión}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta V \cdot q_{ión} = \Delta U$$

Por la conservación de la energía tenemos que, una disminución en su energía potencial, equivale a un aumento en su energía cinética, luego:

$$\Delta U = \frac{1}{2} m_{ion} \cdot V^2_{final} = \Delta V \cdot q_{ion} \quad \dots (1)$$

Por otro lado:

Sabemos que: $v \perp B \quad \Rightarrow \quad F_B = q_{ion} \cdot v \cdot B = \dfrac{m.v_f^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m.v}{q.B}$$

Luego: $\quad r = \dfrac{m}{q_{ion}.B} \times \sqrt{\dfrac{2\,\Delta V \cdot q_{ion}}{m_{ion}}}$

Reemplazando, tenemos que:

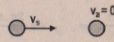
$$r = \frac{3{,}20\times10^{-26}}{1{,}6\times10^{-19}\times(0{,}920)} \times \sqrt{\frac{2(8{,}33)\times\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{3{,}20\times10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad r = 85{,}3\ cm$$

33. Problema de repaso. Un electrón choca en forma elástica con un segundo electrón inicialmente en reposo. Después del choque los radios de sus trayectorias son 1,00 cm y 2,40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme de 0,044 0 T de magnitud. Determine la energía (en keV) del electrón incidente.

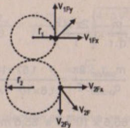
Resolución :

Sea: Inicialmente



$\vec{P}_{x\ inicial} = \vec{P}_{x\ final}$

Finalmente



$\vec{P}_{y\ final} = \vec{P}_{y\ inicial}$

Choque elástico

$E_{k\ inicial} = E_{k\ final}$

Luego: $\quad V_{1ix} = V_{1Fx} + V_{2Fx} \quad \dots (1)$

$\qquad V_{1Fy} = V_{2Fy} \quad \dots (2)$

$\qquad V_{1i}^{\ 2} = V_{2F}^{\ 2} + V_{1F}^{\ 2} \quad \dots (3)$

(1) y (2) en (3) resulta que:

$$V^2_{1i} = V^2_{F1x} + V^2_{F2x} + V^2_{F1y} + V^2_{F2y} \quad \dots (\alpha)$$

Por otro lado:

$$V_{F1} = \frac{q.B.r_1}{m} \ \text{ y } \ V_{F2} = \frac{q.B.r_2}{m} \quad \therefore \ V^2_{F1} + V^2_{F2} = \left(\frac{q.B}{m}\right)^2 (r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2}) \dots (\beta)$$

Nos piden: $\frac{1}{2}m.v^2_{1i}$, entonces: (β) en (3)

$$\therefore\ E_{k\,(e-inicio)} = \left(\frac{q.B}{m}\right)^2.(r_1^2+r_2^2)\times\left(\frac{1}{2}.m\right) = \frac{\left[(1{,}6\times10^{-19})(0{,}044)\right]^2}{2(9{,}1\times10^{-31})}$$

$$= \left([0{,}01]^2+[0{,}024]^2\right) = 115\,keV$$

34. **Un protón que se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante tarda 1,00 μs para completar una revolución. Determine la magnitud del campo magnético.**

Resolución:

Datos: $q_{Protón} = 1{,}6\times10^{-19}C$

$T = 1{,}00\ \mu s$ (tiempo para completar una revolución)

$B = ?$

Sabemos que: $F_B = q\,.\,v\,.\,B = m\,\frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow\ B = \frac{m.v}{q.r}\quad ...\ (1)$$

Por otro lado: $T = \frac{2\pi.r}{v}\ \Rightarrow\ v = \frac{2\pi.r}{T}\quad ...\ (2)$

Luego: (2) en (1) $B = \frac{m}{q.r}\times\left(\frac{2\pi.r}{T}\right)$

$$\Rightarrow\ B = \frac{m_{proton}.2\pi}{q_{proton}.T} = \frac{1{,}67\times10^{-27}.(2\pi)}{1{,}6\times10^{-19}\times(1{,}00\times10^{-6})}$$

$$\therefore\ B = 65{,}6\times10^{-3}\,T \equiv 65{,}6\,mT$$

35. **Un protón (carga + e, masa m_p), un deuterón (carga + e, masa $2m_p$) y una partícula alfa (carga + 2e, masa $4m_p$) se aceleran a través de una diferencia de potencial común ΔV. Las partículas entran a un campo magnético uniforme B con una velocidad en dirección perpendicular a B. El protón se mueve en una trayectoria circular de radio r_p. Determine los valores de los radios de las órbitas circulares para el deuterón r_d y la partícula alfa r_d y la partícula alfa r_α en términos de r_p.**

Resolución:

Datos: $q_{p+} = +1e$ masa del proton $= m_{p+}$

$q_D = +1e$ masa del deuteron $= 2\,m_{p+}$

$q_\alpha = +2e$ masa de alfa $= 4m_{p+}$

ΔV, B ; nos piden: r_D y r_α en función de r_P

Tenemos que: $\Delta V.q_{p+} = \Delta U_{P+} = \frac{1}{2}m_p.v_p^2$ (conservación de la energía)

$\Delta V.q_D = \Delta U_D = \frac{1}{2}(2m_p).v_D^2$ (conservación de la energía)

$\Delta V.q_\alpha = \Delta U_\alpha = \frac{1}{2}(4m_p).v_\alpha^2$ (conservación de la energía)

Entonces:

$$v_p = \sqrt{\frac{2.\Delta V.q_{p+}}{m_{p+}}}\ ;\ v_D = \sqrt{\frac{2.\Delta V.q_{p+}}{2m_{p+}}}\ ;\ v_\alpha = \sqrt{\frac{4.\Delta V.q_{p+}}{4m_{p+}}}$$

Por otro lado:

$$r_p = \frac{m_{p+}.v_{p+}}{q_{p+}.B} = \frac{m_{p+}}{q_{p+}.B}\times\sqrt{\frac{2\Delta V.q_{p+}}{m_{p+}}}$$

Además: $$r_D = \frac{m_D.v_D}{q_D.B} = \frac{2.m_{p+}}{q_{p+}.B}\times\sqrt{\frac{2.\Delta V.q_{p+}}{2m_{p+}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right).r_p$$

Por último: $\therefore\ r_D = \sqrt{2}.r_p$

Por último: $$r_\alpha = \frac{m_\alpha.v_\alpha}{q_\alpha.B} = \frac{4.m_{p+}}{2.q_{p+}.B}\times\sqrt{\frac{4.\Delta V.q_{p+}}{4m_{p+}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.r_p$$

$$\therefore\ r_\alpha = \sqrt{2}.r_p$$

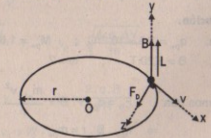
36. **Problema de repaso.** **Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante de magnitud 1,00 mT. Si el *momentum* angular del electrón respecto del centro del círculo es $4{,}00\times10^{-25}$ J . s, determine a) el radio de la trayectoria circular y b) la rapidez del electrón.**

Resolución:

Datos: $B = 1{,}00\ mT$

$L = 4{,}00\times10^{-25}\ J.s$

$|q_e| = 1{,}6\times10^{-19}C$



Parte (a)

Sabemos que: $F_B = q_{e^-}.v.B = m_e \cdot \dfrac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m_{e^-}.v}{q_{e^-}.B} \quad ...(1)$$

Además:

Sabemos que: $|L|$ = momento angular $= I_0 \cdot \omega = I_0 \cdot \dfrac{v}{r}$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{I_0 . v}{L} = \frac{m . r^2 . v}{L} \quad \therefore \quad v = \frac{L}{m . r} \quad ....(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$r = \frac{m_{e^-}}{q_{e^-} . B} \times \left(\frac{L}{m_{e^-} . r} \right)$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{L}{q_e . B}} = \sqrt{\frac{4,00 \times 10^{-25}}{1,6 \times 10^{-19} \times \left(1,00 \times 10^{-3}\right)}}$$

$$\therefore \quad r = 5,00 \times 10^{-12} m \equiv 5,00 \text{ cm}$$

Parte (b)

De la ecuación 2: $v = \dfrac{L}{m_{e^-} . r}$

$$v = \frac{4,00 \times 10^{-25}}{9,1 \times 10^{-31} . \left(5,00 \times 10^{-2}\right)}$$

$$\therefore \quad v = 8,8 \times 10^6 \text{ m/s} \equiv 8\,800 \text{ km/s}$$

37. Calcule la frecuencia de ciclotrón de un protón en un campo magnético con una magnitud de 5,20 T.

Resolución:

Datos: $q_{p+} = 1,6 \times 10^{-19} C$; $M_{p+} = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

$B = 5,20$ T ; $\omega = ?$

Sabemos que: $F_B = q_{p+} v . B = \dfrac{m_{p^+} . v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad q_{p+} . B . r = m_{p+} . v$$

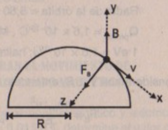
$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{q_{p+} . B}{m_{p+}} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times (5,20)}{1,67 \times 10^{-27}}$$

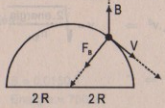
$$\therefore \quad \omega = 4,99 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

38. Un ion de masa m con una sola carga se acelera desde el reposo por medio de una diferencia de potencial ΔV. Después se desvía por un campo magnético uniforme (perpendicular a la velocidad del ion) hacia un semicírculo de radio R. Después de esto un ion doblemente cargado de masa m' se acelera a través de la misma diferencia de potencial y se desvía mediante el mismo campo magnético hacia un semicírculo de radio R' = 2R. ¿Cuál es la relación de las masas de los iones?

Resolución:

* Para el ión de masa "m" y carga "q", que parte del reposo, y se acelera por medio de una diferencia de potencial ΔV.





* Para el ion de masa "m" y carga "2q", que parte del reposo, y se acelera a traves de la misma diferencia de potencial ΔV.

Luego: Por la conservación de la energía:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_1}{q} \Rightarrow \Delta V . q = \Delta U_1 = \frac{1}{2} . m . v_1^2 \qquad \text{(carga "q" y masa "m")}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U_2}{2q} \Rightarrow 2q . \Delta V = \Delta U_2 = \frac{1}{2} . m' . v_2^2 \qquad \text{(carga "2q" y masa "m")}$$

Entonces: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2 . q . \Delta V}{m}}$ y $v_2 = \sqrt{\dfrac{4 . q . \Delta V}{m'}}$

Por otro lado:

Sabemos que: $v_1 = \dfrac{q . B}{R}$ y $v_2 = \dfrac{2 . q . B}{2 R}$

$$\therefore \quad v_1 = v_2$$

Luego: $\dfrac{2.q.\Delta V}{m} = \dfrac{4.q.\Delta V}{m'}$

$\therefore \quad \dfrac{m'}{m} = 2$ (relación entre las masas de cada ion)

39. Un protón de rayos cósmicos en el espacio interestelar tiene una energía de 10,0 MeV y ejecuta una órbita circular con un radio igual al de la órbita de Mercurio alrededor del Sol ($5{,}80 \times 10^{10}$ m). ¿Cuál es el campo magnético en esta región del espacio?

Resolución :

Datos: Energía del protón = 10,0 MeV

Radio de la órbita = $5{,}80 \times 10^{10}$ m

$Q_{protón} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C , Masa p+ = $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$J; hallar B = ?

Si consideramos $V \perp B$, entonces:

$$F_B = \frac{m_{p+}.v^2}{R} = q_{p+}\,v.B \quad \Rightarrow \quad v = \frac{q_{p+}.B.R}{m_{p+}}$$

Por otro lado:

$$\text{Energía del protón} = \frac{1}{2}.m_{p+}.v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2.\text{energía}}{m_{p+}}}$$

Igualando: $\sqrt{\dfrac{2.\text{energía}}{m_{p+}}} = \dfrac{q_{p+}.R.B}{m_{p+}} \Rightarrow$

$$B = \frac{m_{p+}}{q_{p+}.R}\sqrt{\frac{2.\text{energía}}{m_{p+}}} = \frac{1{,}67\times10^{-27}}{1{,}6\times10^{-19}\times(5{,}80\times10^{10})} \times \sqrt{\frac{2(10{,}0\times10^{6})(1{,}6\times10^{-19})}{1{,}67\times10^{-27}}}$$

$\therefore \quad B = 7{,}88 \times 10^{-12}\ \text{T} \equiv 7{,}88$ pT

40. Un ion positivo con una sola carga que se mueve a $4{,}60 \times 10^5$ m/s sale de una trayectoria circular de 7,94 mm de radio a lo largo de una dirección perpendicular a un campo magnético de 1,80 T de una cámara de burbujas. Calcule la masa (en unidades de masa atómica) de este ion, y, a partir de ese valor, identifíquelo.

Resolución :

Datos: $v \perp B$

$v = 4{,}60 \times 10^5$ m/s ; $q_{ión}^{+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Radio = r = 7,94 mm ≡ $7{,}94 \times 10^{-3}$ m

B = 1,80 T ; Masa del ion = ? en umas

Sabemos que: $F_B = q.v.B = \dfrac{m_{ion}.v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad m_{ion} = \frac{q.B.r}{v} = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times(1{,}80)(7{,}94\times10^{-3})}{4{,}60\times10^{5}}$$

$\therefore \quad m_{ion} = 4{,}97 \times 10^{-27}$ kg

En unas será:

$$m_{ion} = 4{,}97 \times 10^{-27}\ \text{kg} \times \frac{1{,}00\,\text{umas}}{1{,}66\times10^{-27}\,\text{kg}}$$

$\therefore \quad m_{ion} = 2{,}99$ umas ≡ 3,00 umas

Entonces el elemento será : "Tritio"

APLICACIONES QUE INVOLUCRAN EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO

41. Un selector de velocidades se compone de campos magnético y eléctrico descritos por las expresiones E = Ek y B = Bj. Si B = 0,015 0 T, determine el valor de E tal que un electrón de 750 eV que se mueve a lo largo del eje x positivo no se desvíe.

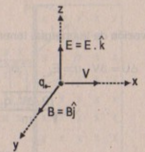
Resolución :

Sea:

Donde: B = 0,0150 T

Energía = 750 eV

E = ?



Para que el electrón que se mueve a lo largo del eje x no se desvíe, se tiene que cumplir que:

$$F_B = F_e$$

$$\Rightarrow \quad q_e.v.B = q_{e-}E$$

$$\therefore \quad v.B = E \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado: Energía = 750 eV = 750 × ($1{,}6 \times 10^{-19}$) = $\dfrac{1}{2}m_{e-}.v^2$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2(750)(1{,}6\times10^{-19})}{9{,}1\times10^{-31}}} = 16{,}2 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

Luego reemplazando en (1)

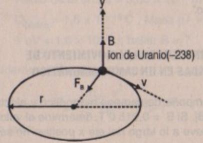
$$E = 16{,}2 \times 10^{6} \times (0{,}0150)$$

$$\therefore \quad E = 244 \text{ kV/m}$$

42. a) Iones de uranio-238 con una sola carga se aceleran a través de una diferencia de potencial de 2,00 kV y entran a un campo magnético uniforme de 1,20 T dirigido perpendicular a sus velocidades. Determine el radio de su trayectoria circular. b) Repita para iones de uranio-235. ¿Cómo depende la relación de radios de trayectoria del voltaje de aceleración y de la intensidad del campo magnético?

Resolución :

Sea:



Datos:
$\Delta V = 2{,}00$ kV
$B = 1{,}20$ T
$v_0 = 0$

Parte (a)

Por la conservación de la energía, tenemos que:

$$\Delta U = \Delta V \,.\, q = E_k \quad \Rightarrow \quad \Delta V \,.\, q = \frac{1}{2} \,.\, m \,.\, v^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2 \,.\, \Delta V \,.\, q}{m}} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado: $F_B = q \,.\, v \,.\, B = \dfrac{m \,.\, v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m \,.\, v}{q \,.\, B} \quad \text{... (2)}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$r = \frac{m}{q \,.\, B} \times \sqrt{\frac{2 \,.\, \Delta V \,.\, q}{m}}$$

Tenemos que: $m_{uranio}\,(-238) = 238 \text{ uma} \times \dfrac{1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ uma}}$

Entonces: $$r = \frac{238 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times (1{,}20)} \times \sqrt{\frac{2\left(2{,}00 \times 10^{3}\right)\left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)}{298 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}}$$

$$\therefore \quad r = 8{,}3 \times 10 \text{ m}^3 \equiv 8{,}3 \text{ km}$$

Parte (b)

Para el Uranio (–235) tenemos que:

$$m_{uranio\,(-235)} = 235 \text{ uma} \times \frac{1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ uma}}$$

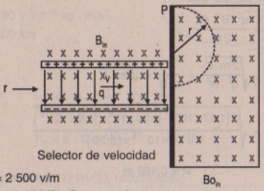
Luego: $$r = \frac{235 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}{1{,}66 \times 10^{-19} \times (1{,}20)} \times \sqrt{\frac{2\left(2{,}00 \times 10^{3}\right)\left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)}{235 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}}$$

$$\therefore \quad r = 8{,}3 \times 103 \text{ m} \equiv 8{,}3 \text{ km}$$

43. Considere el espectrómetro de masas que se muestra esquemáticamente en la figura P29.23. El campo eléctrico entre las placas de selector de velocidad es de 2 500 V/m y el campo magnético tanto en el selector de velocidad como en la cámara de desviación tiene una magnitud de 0,035 T. Calcule el radio de la trayectoria para un ion con una sola carga que tiene una masa $m = 2{,}18 \times 10^{-26}$ kg.

Resolución :

Sea:



Donde: $E = 2\,500$ v/m
$B_{IN} = 0{,}035 \text{ T} = B_{0in}$; $r = ?$
$q_{ion} = 1{,}6 \times 10^{-19}$C
$m_{ion} = 2{,}18 \times 10^{-26}$ kg

En el segundo campo magnético tenemos que:

$$F_B = q.v.B_0 = \frac{m \,.\, v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m.v}{q.B_0} \quad \text{... (1)}$$

El primer campo magnético, como la velocidad no se desvía y se mantiene horizontal se cumple que:

$$F_B = F_e \;\Rightarrow\; q \cdot v \cdot B_{in} = q \cdot E$$

$$\Rightarrow\; v \cdot B = E \;\; \ldots (2)$$

Luego : (2) en (1)

$$r = \frac{m}{q.B_o}\times\left(\frac{E}{B}\right) = \frac{2{,}18\times10^{-26}}{1{,}6\times10^{-19}\times(0{,}035)}\times\left(\frac{2\,500}{0{,}035}\right)$$

$$\therefore\; r = 0{,}278 \text{ m}$$

44. ¿Cuál es el radio requerido de un ciclotrón diseñado para acelerar protones hasta energías de 34,0 MeV empleando un campo magnético de 5,20 T?

Resolución :

Datos : $K = 34\text{MeV}$

$B = 5{,}20$ T

$q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$1\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J

$R = ?$

En un ciclotrón se cumple que :

$$K = \frac{q^2 . B^2 . R^2}{2\,m}$$

$$\Rightarrow\; R = \sqrt{\frac{2\,m.K}{q^2 . B^2}} = \frac{1}{q.B} \times \sqrt{2m.K}$$

$$\Rightarrow\; R = \sqrt{\frac{2\left(1{,}67\times10^{-27}\right)\times34\times10^{6}\times\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{1{,}6\times10^{-19}\times(5{,}20)}}$$

$$\therefore\; R = 0{,}162 \text{ m}$$

45. Un ciclotrón diseñado para acelerar protones tiene un campo magnético de 0,450 T de magnitud sobre una región de 1,20 m de radio. ¿Cuáles son a) la frecuencia de ciclotrón y b) la rapidez máxima adquirida por los protones?

Resolución :

Datos: $q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$B = 0{,}450$ T

$R = 1{,}20$ m

Parte (a)

Se sabe que: $F_B = q.v.B = \dfrac{m.v^2}{R}$

$$\Rightarrow\; v = \frac{q.B.R}{m}$$

$$\Rightarrow\; \frac{v}{R} = \omega = \frac{q.B}{m} = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times(0{,}450)}{1{,}67\times10^{-27}}$$

$$\therefore\; \omega = 0{,}431 \times 10^{8} \text{ rad/s}$$

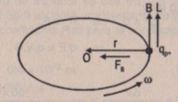
Parte (b)

Sabemos que: $v = \omega.R \;\Rightarrow\; v = 0{,}431 \times 10^{8} \times (1{,}20)$

$$\therefore\; v = 0{,}517 \times 10^{8} \text{ m/s}$$

46. En el acelerador Fermilab en Batavia, Illinois, protones que tienen un momentum de $4{,}80 \times 10^{-16}$ kg . m/s se mantienen en una órbita circular de 1,00 km de radio mediante un campo magnético hacia arriba. ¿Cuál es la magnitud de este campo?

Resolución :



Sea:

Donde: $L = 4{,}80 \times 10^{-16}$ kg . m/s

$r = 1{,}00$ km

$B = ?$

Sabemos que: $L = m.v.r \;\Rightarrow\; v = \dfrac{L}{m.r}$ ... (1)

Además: $F_B = q.v.B = \dfrac{m.v^2}{r} \;\Rightarrow\; B = \dfrac{m.v}{q.r}$ ... (2)

Luego: Reemplazamos (1) en (2), resulta que:

$$B = \frac{m_{p+}}{q_{p+}.r}\times\left(\frac{L}{m_{p+}.r}\right) = \frac{4{,}80\times10^{-16}}{1{,}6\times10^{-19}\times\left(10^{3}\right)^{2}}$$

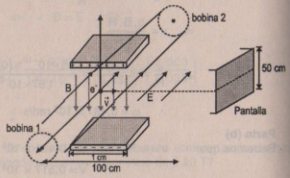
$$\therefore\; B = 3{,}00 \times 10^{-3} \text{ T} = 3{,}00 \text{ mT}$$

47. El tubo de imagen en una televisión emplea bobinas de desviación magnética en lugar de placas de desviación eléctrica. Suponga que un haz de electrones se acelera a través de una diferencia de potencial de 50,0 kV y luego viaja a través de una región de campo magnético uniforme de 1,00 cm de ancho. La pantalla se localiza a

10,0 cm del centro de las bobinas y mide 50,0 cm de ancho. Cuando se desactiva el campo, el haz de electrones incide en el centro de la pantalla. ¿Qué intensidad de campo es necesaria para desviar el haz al lado de la pantalla? Ignore correcciones relativistas.

Resolución :

Sea la figura:



$\Delta V = 50$ kV

Nos piden: B = ?

Por conservación de energía se cumple que:

$$E_K = \Delta U \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m_{e^-} \cdot V^2 = q \cdot \Delta V$$

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{2q.\Delta V}{m_{e^-}}}$$

Por otro lado:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; F_e = F_B$$

$$\Rightarrow\; q.E = q.V.B \qquad \therefore \quad B = \frac{E}{V} = \frac{\Delta V}{d.V}$$

Luego:

$$B = \frac{\Delta V}{d.\sqrt{\frac{2q.\Delta V}{m}}} = \frac{50\times10^3}{(0{,}5)\times\sqrt{\frac{2(1{,}6\times10^{-19})(5\times10^4)}{9{,}1\times10^{-31}}}} = 70{,}1\times10^{-3}\text{T} = 70{,}1 \text{ mT}$$

EL EFECTO HALL

48. Una tira plana de plata que tiene un espesor t = 0,200 mm se usa en una medición de efecto Hall de un campo magnético uniforme perpendicular a la tira, como se muestra en la figura P29.48. El coeficiente Hall para la plata es $R_H = 0{,}840\times10^{-10}$ m³/C. a) ¿Cuál es la densidad de los portadores de carga en la plata? b) Si una corriente I = 20,0 A produce un voltaje Hall ΔV_H = 15,0 μV, ¿cuál es la magnitud del campo magnético aplicado?

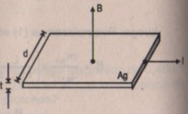


Figura P29.48

Resolución :

Datos: t = 0,200 mm
$R_H = 0{,}840\times10^{-10}$ m³/C

Parte (a)

Sabemos que: $R_H = \dfrac{1}{n.q}$

$$\Rightarrow\; n = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{R_H} = \frac{1}{-1{,}6\times10^{-19}}\times\left(\frac{1}{0{,}840\times10^{-10}}\right)$$

$$\therefore \quad n = |-7{,}44\times10^{-28}\text{ m}^{-3}|$$

Parte (b)

Si: I = 20,0 A y ΔV_H = 15,0 μV ⇒ B = ?

Sabemos que: $\Delta V_H = \dfrac{R_H.I.B}{t}$

$$\Rightarrow\; B = \frac{\Delta V_H.t}{R_H.I} = \frac{(15{,}0\times10^{-6})(0{,}200\times10^{-3})}{(0{,}840\times10^{-10})(20{,}0)}$$

$$\therefore \quad B = 1{,}78\times10 = 17{,}8\text{ T}$$

49. Una sección de conductor de 0,400 cm de espesor se usa en una medición del efecto Hall. Si se mide un voltaje Hall de 35,0 μV para una corriente de 21,0 A en un campo magnético de 1,80 T, calcule el coeficiente Hall para el conductor.

Resolución :

Datos: Sea: espesor (t) = 0,400 cm ≡ 0,4 × 10⁻² m

$\Delta V_H = 35{,}0\ \mu\text{V} = 35{,}0\times10^{-6}$ V

I = 21,0 A

B = 1,8 T

Nos piden R_H = ?

Sabemos que: $\Delta V_H = \dfrac{1}{n.q.t}\times I.B$

$$\Rightarrow\; \Delta V_H = \frac{R_H.I.B}{t}$$

$$\Rightarrow\; R_H = \frac{\Delta V_H.t}{I.B}$$

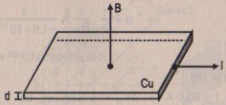
$$\Rightarrow\; R_H = \frac{35{,}0\times10^{-6}\times(0{,}4\times10^{-2})}{(21{,}0)(1{,}8)}$$

$$\therefore \quad R_H = 3{,}7\times10^{-9}\text{ m}^3/\text{C} \equiv 3{,}7\text{ nm}^3/\text{C}$$

50. Una tira de cobre plana de 0,330 mm de espesor conduce una corriente estable de 50,0 A y se localiza en un campo magnético uniforme de 1,30 T en dirección perpendicular al plano de la tira. Si un voltaje Hall de 9,60 μV se mide a través de la tira, ¿cuál es la densidad de carga de los electrones libres? ¿Qué número efectivo de electrones libres por átomo indica este resultado?

Resolución :

Sea: La tira de cobre:



Donde: $d = 0{,}330$ mm

$I = 50{,}0$ A

$B = 1{,}30$ T

$\Delta V_H = 9{,}60\ \mu V$

Nos piden n.° e^- libres × átomo = ? y densidad de carga (n) = ?

Sabemos que: $\Delta V_H = \dfrac{I.B}{n.q.t} = \dfrac{I.B}{n.q.d}$

$$\Rightarrow \quad n \text{ (densidad de carga)} = \frac{I.B}{q_{e^-}.\Delta V_n . d}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{(50{,}0)(1{,}30)}{1{,}6\times10^{-19}\times\left(9{,}60\times10^{-6}\right)\left(0{,}330\times10^{-3}\right)}$$

$$\therefore \quad n = 1{,}28\times10^{29}\ m^{-3}$$

Por otro lado:

En $1 m^3$ hay $1{,}28\times10^{29}$ e^- libres

Por cada átomo hay $6{,}023\times10^{23}$ e^- libres

$$\therefore \quad \text{n.° electrones efectivo libres} = \frac{1{,}28\times10^{29}}{6{,}02\times10^{23}} = 2\times10^{6}\ e^-$$

51. En un experimento diseñado para medir el campo magnético de la Tierra utilizando el efecto Hall, una barra de cobre de 0,500 cm de espesor se coloca a lo largo de una dirección este-oeste. Si una corriente de 8,00 A en el conductor da como resultado un voltaje Hall de 5,10 pV, ¿cuál es la magnitud del campo magnético terrestre? (Suponga que $n = 8{,}48\times10^{28}$ electrones/m^3 y que el plano de barra se gira hasta quedar perpendicular a la dirección de B.)

Resolución :

Datos: Sea la barra de cobre:

Espesor: 0,500 cm	;	$n = 8{,}48\times10^{28}$ e/m^3
$I = 8{,}00$ A	;	$I \perp B$
$\Delta V_H = 5{,}10$ pV	;	B = ?

Sabemos que: $\Delta V_H = \dfrac{I.B}{n.q.t}$ Donde: "t": espesor

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\Delta V_H . n|q|t}{I}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\left(5{,}10\times10^{-12}\right)\left(8{,}48\times10^{28}\right)\left(1{,}6\times10^{19}\right)\left(0{,}5\times10^{-2}\right)}{8{,}00}$$

$$\therefore \quad B = 43{,}2\times10^{-6}\ T \equiv 43{,}2\ \mu T$$

52. Una sonda de efecto Hall funciona con una corriente de 120 mA. Cuando la sonda se pone en un campo magnético uniforme de 0,080 0 T de magnitud, produce un voltaje Hall de 0,700 μV. a) Cuando se mide un campo magnético desconocido, el voltaje Hall es de 0,330 μV. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético desconocido? b) Si el espesor de la sonda en la dirección de B es 2,00 mm, encuentre la densidad de portadores de carga (cada uno de carga e).

Resolución :

Datos: $I = 120$ mA

Si $B = 0{,}0800$ T produce $\Delta V_H = 0{,}700\ \mu V$

Parte (a)

Si : $\Delta V_H = 0{,}330\ \mu V \Rightarrow B_1 = ?$

Sabemos que : $\Delta V_H = \dfrac{I.B}{n.q.t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_H}{B} = \frac{I}{n.q.t} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{\Delta V_H}{B} = \frac{\Delta V_{H1}}{B_1}$$

$$\therefore \quad B_1 = \frac{B.\Delta V_{H1}}{\Delta V_H} = \frac{(0{,}0800)(0{,}330)\times10^{-6}}{(0{,}700)\times10^{-6}} = 0{,}038\ T$$

Parte (b)

Si : t (espesor) = 2,00 mm ≡ $2{,}00\times10^{-3}$ m. Hallar n = ?

Sabemos que: $n.q.t.\Delta V_H = I.B$

$$\text{Entonces:} \quad n = \frac{I.B}{q.t.\Delta V_H} = \frac{\left(120\times10^{-3}\right)(0{,}0800)}{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(2\times10^{-3}\right)\left(0{,}700\times10^{-6}\right)}$$

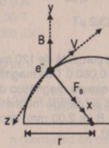
$$\therefore \quad n = 4{,}3\times10^{25}\ e/m^3$$

PROBLEMAS ADICIONALES

53. Un electrón entra a la región de un campo magnético de 0,100 T de magnitud, desplazándose perpendicularmente a la frontera lineal de la región. La dirección del campo es perpendicular a la velocidad del electrón. a) Determine el tiempo que tarda el electrón en salir de la región "llena de campo", dado que recorre una trayectoria semicircular. b) Encuentre la energía cinética del electrón si la profundidad de penetración máxima en el campo es de 2,00 cm.

Resolución :

Sea:



Donde: B = 0,100 T

Parte (a)

Tenemos que: $\pi = \omega \, . \, T \Rightarrow \dfrac{\pi . r}{v} = T$ ... (1)

Por otro lado: $F_B = q_{e^-} . v . B = \dfrac{m_{e^-} \times v^2}{r}$

$\Rightarrow v = \dfrac{q_e . B . r}{m_e}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$T = \frac{\pi . r}{\frac{q_e . B . r}{m_{e^-}}} = \frac{\pi . m_{e^-}}{q_e . B} = \frac{3{,}1416 \times \left(9{,}1 \times 10^{-31}\right)}{1{,}6 \times 10^{-19} \times (0{,}100)}$$

$\therefore \quad T = 179 \times 10^{-12}\ s \equiv 179\ ps$

Parte (b)

Si r = 2,00 cm ≡ 2,00 × 10^{-2} m

Entonces: $K = \dfrac{1}{2} . m_{e^-} . v^2 = \dfrac{1}{2} . m_{e^-} . \left(\dfrac{r . \omega}{1}\right)^2 = \dfrac{1}{2} . m_{e^-} . \dfrac{\pi^2 . r^2}{T^2}$

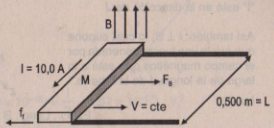
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \times \frac{\left(9{,}1 \times 10^{-31}\right) \times (3{,}1416)^2 \times \left(2{,}00 \times 10^{-2}\right)^2}{\left(179 \times 10^{-12}\right)^2}$$

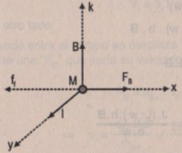
$\therefore \quad K = 5{,}6 \times 10^{-14} J \equiv 351\ keV$

54. Una barra metálica de 0,200 kg que conduce una corriente de 10,0 A se desliza sobre dos rieles horizontales separados 0,500 m. ¿Qué campo magnético vertical se requiere para mantener la barra en movimiento a una rapidez constante si el coeficiente de fricción cinética entre la barra y los rieles es de 0,100?

Resolución :

Datos: μ_k = 0,100
M = 0,200 kg
B = ?





Tenemos que la barra se desplaza horizontalmente a una rapidez constante, entonces:

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = f_r$

$\Rightarrow \quad I.L.B = \mu_k . N = \mu_k . m.g$

$\Rightarrow \quad (10{,}0)(0{,}500) . B = (0{,}100)(0{,}200)(9{,}8)$

$\therefore \quad B = 39{,}2 \times 10^{-3}\ T \equiv 39{,}2\ mT$

55. El sodio se funde a 99° C. El sodio líquido, un excelente conductor término, se emplea en algunos reactores nucleares para enfriar el núcleo del reactor. El sodio líquido se mueve a través de tuberías mediante bombas que aprovechan la fuerza sobre una carga móvil en un campo magnético. El principio es el siguiente: suponga que el metal líquido está dentro de una tubería aislada eléctricamente con una sección transversal rectangular de ancho w y altura h. Un campo magnético uniforme perpendicular a la tubería afecta una sección de longitud L (Fig. P29.55). Una corriente eléctrica en dirección perpendicular a la tubería y al campo magnético produce una densidad de corriente J en el sodio líquido. a) Explique por qué este arreglo produce en el líquido una fuerza que está dirigida a lo largo de la longitud de la tubería. b) Muestre que la sección de líquido en el campo magnético experimenta un aumento de presión JLB.

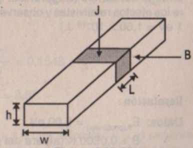
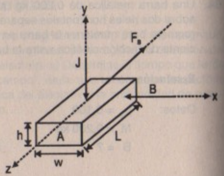


Figura P29.55

Resolución :

Parte (a)



En vista que: $J = \dfrac{I}{\text{área}}$ implica que:

"I" está en la dirección de J

Así también: $I \perp B$; lo cual supone que existe una fuerza generada por el campo magnético que está a lo largo de la longitud de la tubería.

Luego:
$$F_B = I \,.\, \text{Long} \,.\, B$$

Pero: $I = J \times \text{área} = J \,.\, (L \,.\, w)$

$$\therefore \quad F_B = J \,.\, (L \,.\, w) \,.\, h \,.\, B$$

Parte (b)

Por demostrar que: $\Delta_{\text{presión}} = J.L.B$

De la figura en la parte (a) tenemos que:

$$\frac{F_B}{A} = \Delta_{\text{presión}} \Rightarrow \frac{F_B}{A} = \frac{J.(L.w).h.B}{h.w}$$

$$\therefore \quad \Delta_{\text{presión}} = J.L.B. \text{ (Lqqd.)}$$

56. Protones Que tienen una energía cinética de 5,00 MeV se mueven en la dirección x positiva y entran a un campo magnético B = (0,050 0 k) dirigido hacia fuera del plano de la página y que se extiende de x = 0 a x = 1,00 m, como se muestra en la figura P29.56. a) Calcule la componente y del *momentum* de los protones conforme salen del campo magnético. b) Encuentre el ángulo α entre el vector de velocidad inicial del haz de protones y el vector de velocidad después de que el haz emerge del campo (Sugerencia: ignore los efectos relativistas y observe que 1 eV = 1,60 × 10^{-19} J.)

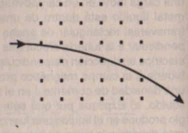


Figura P29.56

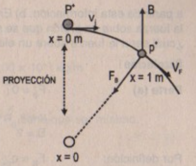
Resolución :

Datos: $E_{K(\text{protones})} = 5{,}00$ eV

B = 0,0500 K (afuera del plano apunta)

Extensión: x = 0 a x = 1,00 m

Parte (a)



Tenemos que antes de entrar al campo los protones tienen una E_K dada por:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{p+} \,.\, V_i^2$$

$$\Rightarrow \quad 5{,}00 \times 10^6 \times (1{,}6 \times 10^{-19}) = \frac{1}{2} \,.\, (1{,}67 \times 10^{-27}) \,.\, V_i^2$$

$$\therefore V_i = 3{,}1 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Por otro lado:

Cuando entra al campo se desplaza 1,00 m, variando su velocidad, vista que ahora existe una "F_B" que varía su velocidad, luego:

$$F_B = q_{p+} \,.\, V_f \,.\, B = \frac{m_{p+} . V_f^2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad V_f = \frac{q_{p+} . B . d}{m_{p+}} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times (0{,}050) \times (1{,}00)}{1{,}67 \times 10^{-27}}$$

$$\therefore \quad V_f = 0{,}48 \times 10^7 \text{ m/s}$$

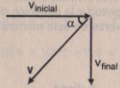
En consecuencia:

$$P_y = m_{p+} V_y = m_{p+} V_f = 1{,}67 \times 10^{-27} \times (0{,}48 \times 10^7)$$

$$\therefore P_y = 8{,}0 \times 10^{-21} \text{ kg . m/s} \;\approx\; 8{,}02 \text{ kg . m/s}$$

Parte (b)

(Proyectando)



Entonces: $$\tan\alpha = \frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{inicial}}} = \frac{0{,}48 \times 10^7}{3{,}1 \times 10^7} = 0{,}1548$$

$$\therefore \quad \alpha = \arctan(0{,}1548) = 8{,}8°$$

57. a) Un protón que se mueve en la dirección + x a una velocidad $v = v_i i$ experimenta una fuerza magnética $F = F_i j$. Explique qué puede y qué no puede inferir acerca de B a partir de esta información. b) En términos de F_i, y en el mismo campo, ¿cuál sería la fuerza sobre un protón que se mueve a velocidad $v = -v_i i$? c) En el mismo campo, ¿cuál sería la fuerza sobre un electrón que se mueve a velocidad $v = v_i i$?

Resolución:

Parte (a) $F_B = 0\hat{i} + F_i\hat{j} + 0\hat{k}$ (En vector)

$v = v_i\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$B = ?$

Por definición: $F_B = q_{p+} . v \times B$ Si: $B = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

Entonces:

$$0\hat{i} + F_i\hat{j} + 0\hat{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_i & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} v_i & 0 \\ a & c \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} v_i & 0 \\ a & b \end{vmatrix}$$

Igualando: $0 = 0.c - b.0$; $-v_i . c = F_i$; $0 = v_i . b$

Por lo tanto: $C = -F_i/v_i$; $b = 0$ y a = indeterminado

En consecuencia: B_x = indeterminado ; $B_y = 0$; $B_z = -F_i/v_i\, k\, ./q_{p+}$

Parte (b)

Si $V = -v_i\, i \Rightarrow F_B = q_p . v \times B = q_p . (-v_i\, i) \times (-F_i/v_{i.q}).k$

$$\therefore\ F_B = -F_i\, j$$

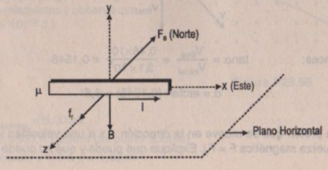
Parte (c)

Si: $v = v_i\, i \Rightarrow F_B = -F_i\, j$

58. Problema de repaso. Un alambre que tiene una densidad de masa lineal de 1,00 g/cm se pone sobre una superficie horizontal que tiene un coeficiente de fricción de 0,200. El alambre conduce una corriente de 1,50 A hacia el este y se mueve horizontalmente hacia el norte. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético más pequeño que permite al alambre moverse de esta manera?

Resolución:

Sea :



Donde : $\mu_e = 0{,}200$

$I = 1{,}50$ A

μ = Densidad lineal = $1{,}00\ \dfrac{g}{cm} = 1{,}00 \times 10^{-1}$ kg/m

B = ? magnitud y dirección

Para que B sea mínimo o pequeño, entonces F_B tiene que ser mínimo.

En consecuencia: $F_B = f_r$

$\Rightarrow I.L.B = \mu_e.N = \mu_e.M.g$

$$\Rightarrow B_{pequeño} = \mu_e\left(\frac{M}{L}\right)\frac{g}{I} = \mu_e\left(\frac{g}{I}\right)\mu$$

$$\therefore B_{pequeño} = 0{,}200 . 10^{-1} . \left(\frac{9{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}13\ T \text{ (en la dirección } -y\text{, es decir hacia abajo)}$$

59. Una carga positiva $q = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C se mueve a una velocidad $v = (2i + 3j - 1k)$ m/s a través de una región donde existen tanto un campo magnético uniforme como un campo eléctrico uniforme. a) ¿Cuál es la fuerza total sobre la carga móvil (en notación de vectores unitarios si $B = (2i + 4j + 1k)$ T y $E = (4i - 1j - 2k)$ V/m? b) ¿Qué ángulo forma el vector fuerza con el eje x positivo?

Resolución:

Datos: $q = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C

$v = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 1\hat{k})$ m/s

Parte (a)

Si $B = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 1\hat{k})$ T nos piden $F_B = ?$ y $E = (4\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k})$ v/m ; $+F_e = ?$

Sabemos que: $F_B = q . v \times B$

Entonces: $F_B = 3{,}20 \times 10^{-19} . (2i + 3\hat{j} - 1\hat{k}) \times (2i + 4\hat{j} + 1\hat{k})$

$\Rightarrow F_B = (6{,}4 \times 10^{-19} + 9{,}6 \times 10^{-19}\hat{j} - 3{,}20 \times 10^{-19}\hat{k}) \times (2\hat{i} + 4\hat{j} + 1\hat{k})$

Luego:

$$F_B = 3{,}2 \times 10^{-19}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow F_B = 3{,}2 \times 10^{-19}\left[\hat{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right]$$

$$\therefore\ F_B = 3{,}2 \times 10^{-19}(7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ N$$

Por otro lado:

$$F_e = q \cdot E = 3{,}2 \times 10^{-19} \cdot (4\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k})N$$

En consecuencia:

$$F_{Total} = F_B + F_e = 3{,}2 \times 10^{-19}\,(7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - 1\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\therefore\ F_{Total} = 10^{-18}\,(3{,}52\hat{i} - 1{,}6\hat{j})N \equiv (3{,}53\hat{i} - 1{,}6\hat{j})\ aN$$

Parte (b)

Tenemos que: $|F_{Total}| = 10^{-18} \times \sqrt{(3{,}52)^2 + (-1{,}6)^2} = 3{,}87 \times 10^{-18}\ N$

Por otro lado: $F_{Total\ en\ x} = |F_{Total}| \cos\theta$

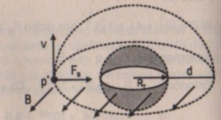
$$\Rightarrow\ 3{,}52 \times 10^{-18} = (3{,}87 \times 10^{-18}) \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow\ \cos\theta = \frac{3{,}52}{3{,}87} = 0{,}909$$

$$\therefore\ \theta = \text{arc}\cos(0{,}909) = 24{,}5°$$

60. Un protón de rayos cósmicos que viaja a la mitad de la rapidez de la luz se dirige directamente hacia el centro de la Tierra en el plano del ecuador terrestre. ¿Golpeará al planeta? Suponga que la magnitud del campo magnético terrestre es uniforme sobre el plano del ecuador de 50,0 μT y que se extiende hacia el exterior $1{,}30 \times 10^7$ m a partir de la superficie de la Tierra. Suponga que el campo es cero a grandes distancias. Calcule el radio de curvatura de la trayectoria del protón en este campo magnético. Ignore efectos relativistas.

Resolución:



Sea:

Donde: $B = 50\ \mu T$

$d = 1{,}30 \times 10^7$ m

$q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$v_{Protón} = \frac{1}{2}$ velocidad de la luz

Velocidad de la luz $= 3{,}00 \times 10^8$ m/s

Tenemos que: $$F_B = q_{p+} \cdot v \cdot B = \frac{m.v^2}{r}$$

$$\Rightarrow\ r = \frac{m_{p+}.v}{q_{p+}.B} = \frac{1{,}67\times10^{-27}\times(0{,}5)(3{,}00\times10^8)}{1{,}6\times10^{-19}\times(50\times10^{-6})}$$

$$\therefore\ r = 0{,}03 \times 10^6\ m$$

En vista que:

"d" donde se extiende el campo es mayor que "r", en consecuencia sí golpeará al planeta Tierra dicho protón.

61. El circuito en la figura P29.61 se compone de alambres en la parte superior y en la inferior y de resortes metálicos idénticos en los lados izquierdo y derecho. El alambre en el fondo tiene una masa de 10,0 g y mide 5,00 cm de longitud. Los resorte se alargan 0,500 cm bajo el peso del alambre y el circuito tiene una resistencia total de 12,0 Ω. Cuando se activa un campo magnético, que apunta hacia fuera de la página, los resortes se alargan 0,300 cm adicionales. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético? (La parte superior del circuito está fija).

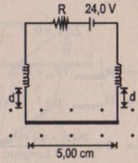


Figura P29.61

Resolución:

Sea: Masa del alambre = 10,0 g

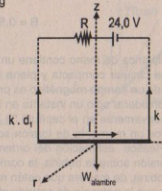
$R = 12{,}0\ \Omega$

$d_i = 0{,}500$ cm

"B" = apunta hacia fuera

B = ?

dF = 0,300 cm



Inicialmente:

En primer lugar:

Aplicaremos la segunda regla de Kirchhoff al circuito cerrado (antihorario)

$$24{,}0\ V - I(R) = 0 \qquad \therefore\ I = \frac{24{,}0\ v}{12{,}0\ \Omega} = 2{,}00\ A$$

Por otro lado:

Al retirarse los resortes por acción del peso del alambre en el fondo, se cumple que:

$$\sum F_z = 0$$

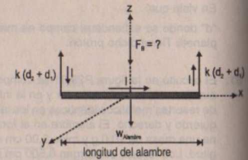
$$\Rightarrow\ w_{Alambre} = 2.k.d_1 \qquad \Rightarrow M_{Alambre} \cdot g = 2.k.d_1$$

$$\therefore\ k = \frac{M_{Alambre}.g}{2.d_1} = \frac{10\times10^{-3}\times(9{,}8)}{2(0{,}5\times10^{-2})} = 9{,}8\ N/m$$

Finalmente:

Se cumple que:

$$\sum F_z = 0$$



$$\Rightarrow\ w_{Alambre} + F_B = 2 \,.\, k \,.\, (d_2 + d_1)$$

$$\Rightarrow\ M_{Alambre} \,.\, g + I \,.\, Long \,.\, B = 2k.\, (d_2 + d_1)$$

$$\Rightarrow\ B = \frac{2k(d_2 + d_1) - M_{Alambre} . g}{I.Longitud}$$

$$\Rightarrow\ B = \frac{2(9,8)(0,5+0,3)\times 10^{-2} - (9,80)(10\times 10^{-3})}{(2,00)(5,0\times 10^{-2})}$$

$$\therefore\ B = 0{,}588\ T$$

62. Una batidora eléctrica de mano contiene un motor eléctrico. Modele el motor como una sola bobina circular compacta y plana que conduce una corriente eléctrica en una región donde un campo magnético es producido por un imán permanente externo. Necesita considerar sólo un instante en la operación del motor. (Los motores se considerarán nuevamente en el capítulo 31) La bobina se mueve porque el campo magnético ejerce un momento de torsión sobre la misma, como se describió en la sección 29.3. Realice estimación del orden de magnitud del campo magnético, el momento de torsión sobre la bobina, la corriente sobre ella, su área y el número de vueltas en la bobina, de manera que estén relacionadas de acuerdo con la ecuación 29.11. Advierta que la potencia de entrada al motor es eléctrica, dada por $P = I\,\Delta V$, y la potencia de salida útil es mecánica, dada por $P = \tau\omega$.

Resolución :

Nos piden un valor aproximado de: B, τ, I, A, N que se aproxime a la realidad, con una batidora eléctrica.

NOTA:

Este problema lo puede realizar una persona en su casa que contenga dicho aparato eléctrico. La potencia que se le entrega a la batidora, es eléctrica y se verifica al fondo de la base del aparato. Fórmulas a emplear:

$$P_{ent.} = I \,.\, \Delta V \quad y \quad P_{salida} = \tau \,.\, w$$

63. Una barra metálica con una masa por unidad de longitud de 0,0100 kg/m conduce una corriente de I = 5,00 A. La barra cuelga de dos alambres en un campo magnético vertical uniforme, como se ve en la figura P29.63. Si los alambres forman un ángulo θ = 45,0° con la vertical cuando están en equilibrio, determine la intensidad del campo magnético.

64. Una barra metálica con una masa por unidad de longitud μ conduce una corriente I. La barra cuelga de dos alambres en un campo magnético vertical uniforme como se ve en la figura P29.63. Si los alambres forman un ángulo θ con la vertical cuando están en equilibrio, determine la intensidad del campo magnético.

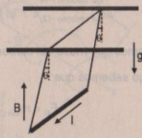


Figura P29.63 Problemas 63 y 64

Resolución 63 y 64 :

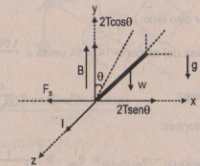
Datos:

Masa × unidad de longitud = μ

B = ?

I, g,

(Vista frontal)



Hemos proyectado la tensión en los alambres en el plano xy

Tenemos que:

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \quad 2T\cos\theta = M.g = \mu \,.\, Long \,.\, g \qquad \ldots (1)$$

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow \quad 2T\text{sen}\theta = F_B = I \,.\, Long \,.\, B \qquad \ldots (2)$$

Dividiendo (2) × (1) resulta que:

$$\frac{I.Long.B}{\mu.Long.g} = \tan\theta$$

$$\therefore\quad B = \frac{\mu.g.\tan\theta}{I}$$

65. Los ciclotrones se utilizan algunas veces para determinar la época con carbono, la cual se considera en la sección 44.6. Los iones de carbono -14 y carbono -12 son obtenidos de una muestra del material a ser fechado y acelerado en el ciclotrón. Si el ciclotrón tiene un campo magnético de 2,40 T de magnitud, ¿cuál es la diferencia en las frecuencias del ciclotrón para los dos iones?

Resolución :

Datos: $B_{ciclotrón} = 2,40$ T

$\omega_{ion\ carbono\ -14} = ?$ y $f_{carbono\ -14} = ?$

$\omega_{ion\ carbono\ -12} = ?$ y $f_{carbono\ -12} = ?$

Sabemos que masa del carbono -12 = 12 umas × $\dfrac{1,66\times10^{-27}\text{kg}}{1\text{uma}} = 1,99\times10^{-26}$ kg

Luego sabemos que:

$$F_B = m_{ion\ C\text{-}12}\cdot\frac{v^2}{r} = q_{ion}\cdot v\cdot B$$

$$\Rightarrow\quad m_{ion\ C\text{-}12}\cdot v = q_{ion}\cdot B\cdot r$$

$$\therefore\quad w_{ion\ (C\text{-}12)} = \frac{q_{ion}.B}{M_{ion(C-12)}}$$

Por otro lado:

Masa del carbono-14 = 14 umas × $\dfrac{1,66\times10^{-27}\text{kg}}{1\text{ uma}} = 2,32\times10^{-26}$ kg

Luego: $\omega_{ion\ (C\text{-}14)} = \dfrac{q_{ion}.B}{M_{ion(C-14)}}$

Entonces:

$$\omega_{ion\ (C-12)} - \omega_{ion\ (C-14)} = q_{ion}\cdot B\left[\frac{1}{M_{ion(C-12)}} - \frac{1}{M_{ion(C-14)}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\omega = q_{ion}\cdot B\left[\frac{M_{ion(C-14)} - M_{ion(C-12)}}{M_{ion(C-14)}.M_{ion(C-12)}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\omega = 1,66\times10^{-19}\times(2,40)\left[\frac{10^{-26}(2,32-1,99)}{10^{-52}(2,32)(1,99)}\right]$$

$$\therefore\quad \Delta\omega = 2,74\times10^{6}\text{ rad/s} = 2,74\text{ M rad/s}$$

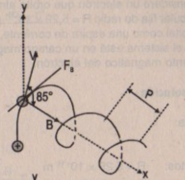
En consecuencia:

Sabemos que: $\Delta\omega = 2\pi\,.\,\Delta f$

$$\Rightarrow\quad \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{2,74\times10^{6}}{2(3,1416)}$$

$$\therefore\quad \Delta f = 0,436\times10^{6}\text{ Hz} = 436\text{ kHz}$$

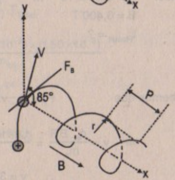
66. Un campo magnético uniforme de magnitud 0,150 T apunta a lo largo del eje x positivo. Un positrón que se mueve a $5,00\times10^{6}$ m/s ingresa al campo a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 85,0° con el eje x (Fig. P29.66). El movimiento de la partícula se espera que sea una hélice, como se describe en la sección 29.4. Calcule a) el paso p y b) el radio r de la trayectoria.



Resolución :

Datos: B = 0,150 T

$v_{positrón} = 5,00\times10^{6}$ m/s



Parte (a)

Tenemos que: $v\,.\,T = p$

Pero: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Entonces: $v\times\dfrac{2\pi}{\omega} = p \quad\Rightarrow\quad \dfrac{5,00\times10^{6}\times(2)(3,1416)}{1,43\times10^{6}} = p$

$\therefore$ Paso (p) = 21,97 m

Parte (b)

Sabemos que:

$$F_B = q_{p+} = v.B\text{sen}85° = m_{p+}.\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow q_{p+}.B.\text{sen}85° = M_{p+}.\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{q_{p+}.B.\text{sen}85°}{M_{p+}} = \frac{1,6\times10^{-19}\times(0,150)\times(0,996)}{1,67\times10^{-27}}$$

$$\therefore\ \omega = 1,43\times10^{6}\text{ rad/s}$$

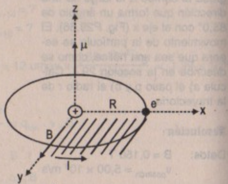
Como: $v = \omega\,.\,\text{Radio} \quad\Rightarrow\quad \text{Radio} = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{5,00\times10^{6}\text{ m/s}}{1,43\times10^{6}\text{ rad/s}}$

$\therefore$ Radio (r) = 3,5 m

67. Considere un electrón que orbita alrededor de un protón y mantiene una trayectoria circular fija de radio $R = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m por la fuerza de Coulomb. Tratando a la carga orbital como una espira de corriente, calcule el momento de torsión resultante cuando el sistema está en un campo magnético de 0,400 T dirigido perpendicular al momento magnético del electrón.

Resolución:

Sea:



Datos: $R = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m

$B = 0{,}400$ T

$t_{Result} = ?$

Sabemos que : $F_B = q_{e^-}.v.B = m_{e^-} \cdot \dfrac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{q_{e^-}.B.R}{m_{e^-}} = \frac{1{,}6\times10^{-19}(0{,}400)(5{,}29\times10^{-11})}{9{,}1\times10^{-31}}$$

$$\therefore \quad v = 3{,}72 \text{ m/s}$$

Por otro lado:

Sabemos que: $F_B = I.Long.B = q_e.v.B$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{q_e.v}{Long.} = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times(3{,}72)}{2\pi(5{,}29\ 10^{-11})}$$

$$\therefore \quad I = 1{,}79 \times 10^{-19} \text{ A} \equiv 1{,}79 \text{ nA}$$

Entonces: $\tau_{Resultante} = \mu.B = I \cdot A \cdot B$

$$\Rightarrow \quad \tau_{Result} = (1{,}79 \times 10^{-9})\ (\pi)\ (5{,}29 \times 10^{-11})^2.(0{,}400)$$

$$\therefore \quad \tau_{Resultante} = 6{,}3 \times 10^{-30} \text{ N.m}$$

68. Un ion con una sola carga completa cinco revoluciones en un campo magnético uniforme de magnitud $5{,}00 \times 10^{-2}$ T en 1,50 ms. Calcule la masa del ion en kilogramos.

Resolución:

Datos: $\theta_{ion} = 1{,}6 \times 10^{-19}$C ; N = 5 revoluciones

$B = 5{,}00 \times 10^{-2}$ T ; $t = T_{total} = 1{,}50$ ms

$m_{ion} = ?$

Sabemos que : $F_B = q_{ion} \cdot v \cdot B = \dfrac{m_{ion}.v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{q_{ion}.B.r}{M_{ion}}$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{q_{ion}.B}{M_{ion}}$$

Por otro lado: N = 5 revoluciones = 10π

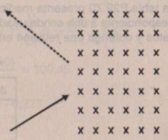
$$\Rightarrow \quad 10\ \pi = \omega \times T_{total} = \frac{q_{ion}.B}{m_{ion}}.T_{Total}$$

$$\Rightarrow \quad 10\ \pi = \frac{1{,}6\times10^{-19}(5{,}00\times10^{-2})\times(1{,}50\times10^{-3})}{m_{ion}}$$

$$\Rightarrow \quad m_{ion} = \frac{1{,}6(5{,}00)(1{,}50)10^{-24}}{10\times(3{,}1416)}$$

$$\therefore \ m_{ion} = 3{,}82 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

69. Un protón que se mueve en el plano de la página tiene una energía cinética de 6,00 MeV. Entra en un campo magnético de magnitud B = 1,00 T dirigido hacia el interior de la página a un ángulo $\theta = 45{,}0°$ con la frontera lineal recta del campo, como se muestra en la figura P29.69. a) Encuentre la distancia x desde el punto de entrada hasta donde el protón abandona el campo. b) Determine el ángulo θ' entre la frontera y el vector de velocidad del protón cuando éste sale del campo.

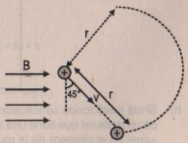


Resolución:

Datos: $E_{K\ (Protón)} = 6{,}00$ MeV

B = 1,00 T

θ = 45°



Parte (a)

Vista superior (arriba)

Sabemos que: $E_K = \frac{1}{2} m_{p+} \cdot v^2$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2.E_k}{m_{p+}}} \quad ...(1)$$

Por otro lado:

$$F_B = q_{p+} \times v \times B = \frac{m_{p+}.v^2}{r} = q_{p+} .\, v \,.\, B\, sen45°$$

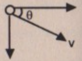
$$\Rightarrow r = \frac{m_{p+}.v^2}{q_{p+}.B.sen45°} \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2)

$$\Rightarrow r = \frac{m_{p+}.v^2}{q_{p+}.B.sen45°}\times\sqrt{\frac{2.E_k}{m_{p+}}} = \frac{1,67\times10^{-27}}{(1,6\times10^{-19})(1)(\sqrt{2}/2)}\times\sqrt{\frac{2(10^6)(1,6\times10^{-19})}{1,67\times10^{-27}}}$$

$$\therefore \quad r = 0,501 \text{ m}$$

Parte (b)



$$Tan\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = tan^{-1}(1) = 45°$$

70. La tabla P29.70 presenta mediciones de un voltaje Hall y del campo magnético correspondiente a una sonda usada para medir campos magnéticos. a) Grafique estos datos y obtenga una relación entre las dos variables.

TABLA P29.70

ΔV_H (μV)	B(T)
0	0,00
11	0,10
19	0,20
28	0,30
42	0,40
50	0,50
61	0,60
68	0,70
79	0,80
90	0,90
102	1,00

b) Si las mediciones se tomaron con una corriente de 0,200 A y la muestra se tomó de un material que tiene una densidad de portadores de carga de $1,00 \times 10^{26}$ / m³, ¿cuál es el espesor de la muestra?

Resolución :

Parte (a)

Aplicando el método de mínimos cuadrados:

Sea la ecuación lineal dada por: $\Delta V_H = a + b.B$

Entonces: $\Delta V_H = a + b.B$

$y = a + b.x$

Luego: $b = \frac{n.\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$ y $a = \bar{y} - b.\bar{x}$

Desarrollando:

$$\sum_{i=1}^{11} x_i.y_i = 0 + 1,1 + 3,8 + 8,4 + 16,8 + 25 + 36,6 + 47,6 + 63,2 + 81 + 102 = 385,5$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 0 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,9 + 1,0 = 5,5$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0 + 11 + 19 + 28 + 42 + 50 + 61 + 68 + 79 + 90 + 102 = 550$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 0a^2 + (0,1)^2 + (0,2)^2 + (0,3)^2 + (0,4)^2 + (0,5)^2 + (0,6)^2 + (0,7)^2 + (0,8)^2 + (0,9)^2 + (0,10)^2 = 3,85$$

$$\bar{y} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} y_i = \frac{550}{11} = 50\,; \qquad \bar{x} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{5,5}{11} = 0,5$$

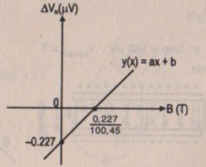
Luego: $b = \frac{11(385,5) - (5,5)(550)}{11(3,85) - (5,5)^2} = 100,45$

$0 = 50 - 100,45\,(0,5) = -0,227$

En consecuencia: $y = 0,227 + 100,45\,x$

Por lo tanto: $\Delta V_H\,(B) = (100,45)B - 0,227$

Graficando:



Parte (b)

Si: $I = 0{,}200$ A ; $n = 1{,}00 \times 10^{26}/m^3$; espesor (t) = ? ; masa de la barra = ?

Sabemos que: $\Delta V_H = \left(\dfrac{I}{q.n.t}\right) . B$ (ecuación lineal)

Entonces por el ajuste del m.m.c :

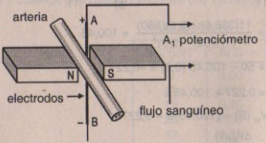
$$100{,}45 \times 10^{-6}\ \frac{V}{T} = \frac{0{,}200}{1{,}6\times10^{-19}\times(1{,}00\times10^{26}).t}$$

$$\Rightarrow \text{Espesor (t)} = \frac{0{,}200}{\left(100{,}45\times10^{-6}\right)\left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(1{,}00\times10^{26}\right)}$$

$$\therefore \quad \text{Espesor (t)} = 1{,}24 \times 10^{-4}\ m$$

71. Un cardiólogo vigila la rapidez de flujo de sangre a través de una arteria usando un medidor electromagnético de fluido (Fig. P29.71). Los electrodos A y B hacen contacto con la superficie exterior del vaso sanguíneo, el cual tiene 3,00 mm de diámetro interno. a) Para un campo magnético de 0,040 0 T de magnitud, una fem de 160 μV aparece entre los electrodos. Calcule la rapidez de la sangre, b) Verifique que el electrodo A es positivo, como se muestra. El signo de la fem depende de si los iones móviles en la sangre están predominantemente cargados de manera positiva o negativa? Explique.

Resolución :

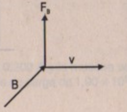


Datos:
Diámetro del vaso = 3,00 mm
sanguíneo

Parte (a)

Si: $B = 0{,}400$ T y fem = 160 uV ; v_{sangre} = ?

Vista lateral izquierda



Sabemos que : $\Delta V = \varepsilon = \text{fem} = E.\text{diámetro}$

Además: Para que la rapidez de la sangre no se desvíe por el tubo se debe de cumplir:

$$F_B = F_e = q.E$$

$$\Rightarrow \quad q \,.\, v_{sangre} \,.\, B = q \,.\, \frac{\text{fem}}{\text{diámetro}}$$

$$\therefore \quad v_{sangre} = \frac{\text{fem}}{B.\text{diámetro}} = \frac{160\times10^{-6}}{(0{,}040)\left(3\times10^{-3}\right)} = 1{,}33\ m/s$$

En vista que:
La "F_B" está dirigida hacia arriba, entonces debe existir una fuerza hacia abajo, para que la rapidez del flujo de sangre no se desvíe y se mantenga horizontal. En conclusión, el punto "A" tiene que ser positivo como se muestra en la figura.

Parte (b)

No. Los iones positivos que se mueven hacia la persona, cuyo campo está dirigido hacia la derecha experimenta una fuerza magnética hacia arriba en el tubo o vaso sanguíneo.
Los iones negativos que se mueven hacia la persona experimentan una fuerza descendente y se acumulan en el fondo. Por lo tanto ambas pueden generar una fem.

72. Como está ilustrado en la figura P29.72, una partícula de masa m que tiene carga positiva q inicialmente viaja hacia arriba a velocidad vj. En el origen de coordenadas ingresa a una región entre y = 0 y y = h que contiene un campo magnético uniforme Bk dirigido perpendicular hacia fuera de la página. a) ¿Cuál es el valor crítico de v tal que la partícula apenas alcance y = h? Describa la trayectoria de la partícula bajo esta condición y prediga su velocidad final. b) Especifique la trayectoria de la partícula y su velocidad final si v es menor que el valor crítico. c) Especifique la trayectoria de la partícula y su velocidad final si v es mayor que el valor crítico.

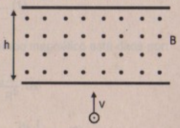


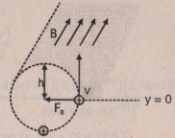
Figura P29.72

Resolución :

Datos: m, q,

Velocidad inicial = $v\hat{j}$

$B = B\hat{k}$



Parte (a)

Sea:

El valor crítico se alcanzará cuando la fuerza magnética se equilibre con el peso, entonces:

$$F_B = m.g$$

$$\Rightarrow \quad q \,.\, v_c \,.\, B = mg \qquad \therefore \qquad v_c = \frac{m.g}{B.q}$$

Luego: Por movimiento de proyectiles

$$v_F^2 = v^2 - 2g.h \qquad \therefore \qquad v_F = \sqrt{v^2 - 2g.h}$$

Parte (b)
Si $v_F < v_C$ entonces:

$$F_B = \frac{m.v_f^2}{h} = q \,.\, v_f \,.\, B \quad \therefore \quad v_f = \frac{h.q.B}{m}$$

Trayectoria: circunferencia

Parte (c)
Si: $v_F > v_C$ entonces:

$$F_B - mg = \frac{m.v_f^2}{h}$$

$$\Rightarrow \quad m \,.\, q + \frac{m.v_f^2}{h} = q \,.\, v_f \,.\, B \qquad \therefore \quad v_f = \frac{h\,qB}{2.m} \pm \sqrt{q^2.B^2 - 4\,m^2.g/h}$$

Capítulo 30

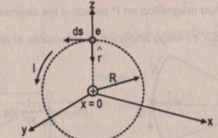
FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO

LA LEY DE BIOT-SAVART

1. En el modelo del átomo de hidrógeno de Niels Bohr de 1913, un electrón circunda el protón a una distancia de $5{,}29 \times 10^{-11}$ m a una rapidez de $2{,}19 \times 10^{6}$ m/s. Calcule la intensidad del campo magnético que este movimiento produce en la posición del protón.

Resolución :

Sea:



Donde:
$R = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m
$v = 2{,}19 \times 10^{6}$ m/s
$B_{x=0} = ?$

Sabemos que: $\quad F_B = q_e.v.B = I \,.\, Long.B$

$$\therefore \quad I = \frac{q_e \,.\, v}{Long.} \qquad ...(1)$$

Por otro lado:
En la posición del protón. La magnitud del campo magnético está dada por:

$$dB_{x=0} = \frac{\mu_o \,.\, I|ds \times \hat{r}\,|}{4\,\pi.R^2} = \frac{\mu_o \,.\, I}{4\pi.R^2}.ds$$

$$\Rightarrow \quad B_{x=0} = \int dB = \frac{\mu_o \,.\, I}{4\pi.R^2}\oint ds = \frac{\mu_o \,.\, I}{2.R} \quad ...(2)$$

Entonces: (1) en (2) resulta que:

$$B = \frac{\mu_o}{2.R} \times \frac{(q_e \,.\, v)}{Long.}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o \,.\, q_e \,.\, v}{4\pi.(R^2)} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(3{,}6\times10^{-19})(2{,}19\times10^{6})}{4\pi\times(5{,}29\times10^{-11})^2}$$

$$\therefore \quad B \text{ en } (x, y, z = 0) = 12{,}5 \text{ T}$$

2. Una trayectoria de corriente con la forma mostrada en la figura P30.2 produce un campo magnético en P, el centro del arco. Si el arco subtiende un ángulo de 30,0° y el radio del arco es de 0,600 m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo producido en P si la corriente es de 3,00 A?

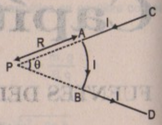
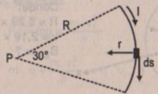


Figura P30.2

Resolución :

Donde: $\theta = 30° = \pi/6$; $R = 0{,}600$ m
$I = 3{,}00$ A ; B en P = ?

Tenemos que: el campo magnético en P debido a los segmentos rectos CA y BD es cero, debido a que ds // $\hat{r}$; luego analizamos solamente el arco. Así:



$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}|ds \times r| = \frac{\mu_o . I . ds}{4\pi . R^2}$$

Como: $s = \theta . R \;\Rightarrow\; ds = R . d\theta$

Luego: $B = \int dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}\int ds = \frac{\mu_o . I . R}{4\pi . R^2}\int d\theta$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R}.\theta = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R}\times\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(4\pi\times 10)^{-7}(3{,}00)}{(24)(0{,}600)}$$

$$\Rightarrow \quad B = 262 \times 10^{-9}\ T \equiv 262\ nT$$

3. a) Un conductor en forma de cuadrado de longitud de lado $\ell = 0{,}400$ m conduce una corriente I = 10,0 A (Fig. P30.3). Calcule la magniud y dirección del campo magnético en el centro del cuadrado. b) Si este conductor se forma como una sola vuelta circular y conduce la misma corriente, ¿cuál es el valor del campo magnético en el centro?

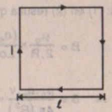
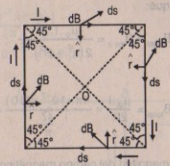


Figura P30.3

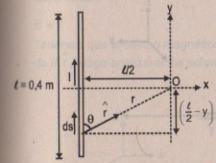
Resolución :

Datos: $\ell = 0{,}400$ m
I = 10,0 A



Parte (a)
Sea:

Vemos que en cada lazo del cuadrado de longitud $\ell = 0{,}400$ m; el campo magnético producido apunta hacia adentro de la página. Luego analizando un lazo:



$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}.|ds\times\hat{r}| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}.dy\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Donde:

$$\tan\theta = \frac{\ell/2}{(\ell/2 - y)} \;\Rightarrow\; \frac{\ell}{2} - y = \frac{\ell}{2}.\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} - y\right)^2 \;\Rightarrow\; r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2.\csc^2\theta$$

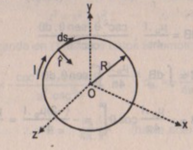
Luego: $B = \int dB = \frac{\mu_o . \ell}{4\pi}\times\frac{(\ell/2)\csc^2\theta.\mathrm{sen}\theta.d\theta}{(\ell/2)^2\csc^2\theta} = \frac{\mu_o . I}{2\pi . \ell}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$

$$B = \frac{\mu_o . I}{2\pi\ell}\times\sqrt{2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times(10)\times\sqrt{2}}{2\pi\times(0{,}400)} = 7{,}07 \times 10^{-6}\ T$$

En consecuencia:

$$B_{total\ en\ 0} = 4B = 4(7{,}07 \times 10^{-6}) = 28{,}3\ \mu T \text{ (hacia adentro)}$$

Parte (b)
Sea:



Sabemos que:

$$B_{total} = B_{en\ x} = \frac{\mu_o . I . R^2}{2\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} \quad ; \qquad \text{donde: } R = 2\ell/\pi$$

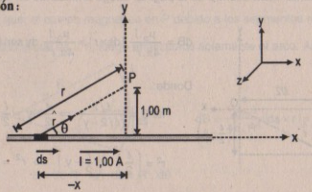
En x = 0

$$B_{total} = \frac{\mu_o . I}{2R} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(10)}{\frac{4\ell}{\pi}} = 24{,}7\times10^{-6}\ \text{T} \equiv 24{,}7\ \mu\text{T (hacia adentro)}$$

4. Calcule la magnitud del campo magnético en un punto a 100 cm de un largo y delgado conductor que porta una corriente de 1,00 A.

Resolución :

Sea:



Como "B" en todo momento del conductor largo apunta hacia afuera tenemos que:

$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds\times\hat{r}| = \frac{\mu_o . I . dx}{4\pi . r^2}\,\text{sen}\,\theta$$

Por otro lado: $r^2 = 1^2 + x^2$

$$\tan\theta = \frac{1}{-x} \Rightarrow dx = +\csc^2\theta\,.\,d\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{r} = (x^2+1)^{-1/2} = (\csc^2\theta)^{-1/2}$$

Reemplazando : $$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\,.\,\frac{\csc^2\theta\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\theta}{\csc^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad B = \int dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta\,.\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{\mu_o . I}{4\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{(-2)\mu_o . I}{4\pi} = \frac{\mu_o . I}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(1{,}00)}{2\pi}$$

$$\therefore \quad B = 0{,}2\times10^{-6}\ \text{T} \equiv 0{,}2\ \mu\text{T}$$

5. Determine el campo magnético en un punto P localizado a una distancia x de la esquina de un alambre infinitamente largo doblado en un ángulo recto, como se muestra en la figura P30.5. Por el alambre circula una corriente estable ℓ.

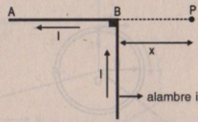
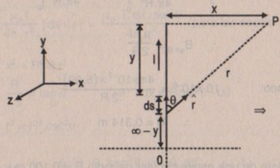


Figura P30.5

Resolución :

B = ?

Tenemos que el campo magnético en P debido al segmento BA es cero, en vista que $ds\ //\ \hat{r}$, luego analizaremos solamente el segmento CB infinito.



$$\Rightarrow \quad |ds| = dy$$

Entonces: $$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\,\frac{|ds\times\hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\,\frac{ds\,.\,\text{sen}\,\theta}{r^2} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $\tan\theta = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = \text{ctg}\theta\,.\,x \qquad \therefore\ dy = -\csc^2\theta . d\theta . x$

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \therefore\ r^2 = y^2.\sec^2\theta = x^2.\csc^2\theta$

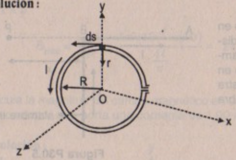
Luego reemplazando en (1) dichos datos tenemos:

$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\times -\frac{\csc^2\theta . x . \text{sen}\theta . d\theta}{x^2 . \csc^2\theta} \Rightarrow \int d_B = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . x}\int_0^{\pi/2}\text{sen}\,\theta\,.\,d\theta$$

$$\therefore \quad B = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . x}\,\hat{k} \quad \text{(hacia adentro)}$$

6. A un alambre que conduce una corriente de 5,00 A se le va a dar la forma de una espira circular de una vuelta. Si el valor requerido del campo magnético en el centro de la espira es 10,0 μT, ¿cuál es el radio requerido?

Resolución :



Datos:
$I = 5{,}00$ A
$B_{en\ 0} = 10{,}0\ \mu T$
$R = ?$

Sabemos que: $\quad dB_{en\ 0} = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}\,|ds \times \hat{r}| = \dfrac{\mu_o . I . ds}{4\pi . R^2}$

$$\Rightarrow \quad B \text{ en } (0) = \int dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}\int_0^{2\pi} R . d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi . R}\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$\therefore \quad B_{en\ 0} = \frac{\mu_o . I}{2R}$$

Luego, reemplazando: $\quad 10 \times 10^{-6} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times (5{,}00)}{2.R}$

$$\therefore \quad R = 0{,}314 \text{ m}$$

7. Un conductor consiste de una espira circular de radio R = 0,100 m y de dos largas secciones rectas, como se muestra en la figura P30.7. El alambre yace en el plano del papel y conduce una corriente I = 7,00 A. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el centro de la espira.

8. Un conductor consta de una espira circular de radio R y dos largas secciones rectas, como se ve en la figura P30.7. El alambre está en el plano del papel y conduce una corriente I. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el centro de la espira.

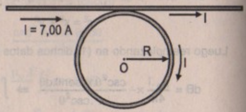


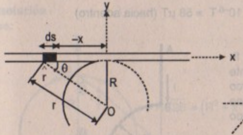
Figura P30.7 Problemas 7 y 8

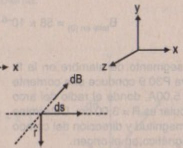
Resolución 7 y 8:

Donde: $\quad R = 0{,}100$ m
$\quad B_{en\ 0} = ?$

Sabemos que el campo magnético producido por las secciones rectas en "0" no es cero puesto que $ds \neq \hat{r}$, en consecuencia $|ds \times \hat{r}| \neq 0$

Por otro lado:





$$dB_{en(0)} = \frac{\mu_o I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o . I . dx . \operatorname{sen}\theta}{4\pi . r^2} \quad \text{(para las secciones rectas)}$$

Como: $\quad x^2 + R^2 = r^2$

$\quad \dfrac{R}{-x} = \tan\theta \qquad \Rightarrow \quad dx = R\csc^2\theta . d\theta$

$\quad \therefore r^2 = R^2.\csc^2\theta$

Luego: $\quad dB_{en\ (0)} = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi} . \dfrac{R . \csc^2\theta . \operatorname{sen}\theta . d\theta}{R^2 . \csc^2\theta} = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . R} . \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \quad B \text{ en } (0) = \frac{\mu_o . I}{4\pi R} . \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi . R} \quad \dots (1)$$

Así también:

$$dB_{en\ (0)} = \frac{\mu_o I\,|ds \times \hat{r}|}{4\pi . R^2} = \frac{\mu_o . I . R d\theta}{4\pi . R^2} \quad \text{(para la espira circular)}$$

$$\Rightarrow \quad B_{en\ (0)} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R}\oint d\theta = \frac{\mu_o I}{2R} \quad \dots (2)$$

Entonces:

$$B_{total\ en\ (0)} = B_{en\ (0)\ sección\ recta} + B_{en\ (0)\ espira\ circular}$$

$$\Rightarrow \quad B_{\text{total en }(0)} = \frac{\mu_o I}{2\pi . R} + \frac{\mu_o . I}{2R} = \frac{\mu_o . I}{2R}\left(\frac{1+\pi}{\pi}\right)$$

Reemplazando datos resulta que:

$$B_{\text{total en }(0)} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(7{,}00)}{2(0{,}100)}\left[\frac{1+3{,}1416}{\pi}\right]$$

$$\therefore \quad B_{\text{total en }(0)} = 58\times10^{-6}\,T \equiv 58\,\mu T \text{ (hacia adentro)}$$

9. El segmento de alambre en la figura P30.9 conduce una corriente I = 5,00A, donde el radio del arco circular es R = 3,00 cm. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el origen.

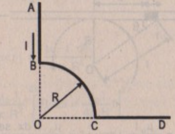


Figura P30.9

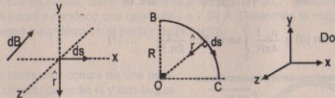
Resolución:

Datos: I = 5,00 A

R = 3,00 cm = 0,03 m

$B_{en\,(0)} = ?$

Tenemos que el campo producido por las secciones rectas de los segmentos AB y CD es cero puesto que: $|ds\times\hat{r}| = 0$ ya que $ds \parallel \hat{r}$. Luego:



Donde: ds = R.dθ

Tenemos que:

$$dB_{en\,(0)} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}|ds\times\hat{r}| = \frac{\mu_o . I . ds}{4\pi . R^2} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . R^2}(R . d\theta)$$

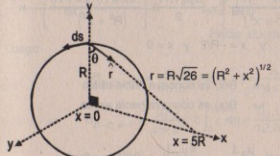
$$\Rightarrow \quad B_{en(0)} = \int dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi R}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_o I}{8R}$$

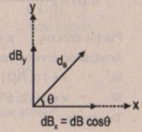
$$\therefore \quad B_{en(0)} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5{,}00)}{8(0{,}03)} = 26{,}2\times10^{-6}\,T \equiv 26{,}2\,\mu T \text{ (hacia adentro)}$$

10. Considere una espira de corriente circular y plano de radio R que conduce una corriente I. Elija el eje x a lo largo del eje de la espira, con el origen en el centro del mismo. Grafique la relación de la magnitud del campo magnético en la coordenada x a la del origen, para x = 0 a x = 5R. Puede ser útil emplear una calculadora programable o una computadora para resolver este problema.

Resolución:

Sea:





Sabemos que: $dB = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}|ds\times\hat{r}| = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} . ds$

Por otro lado: $dB_y = 0$

Entonces: $dB = dBx = dB\cos\theta = \dfrac{\mu_o I}{4\pi . r^2}\, ds . \cos\theta$

$$\Rightarrow \quad B = \oint dB\cos\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi . r^2} . \cos\theta \oint ds$$

Como: $r^2 = R^2 + x^2$ y $\cos\theta = \dfrac{R}{(R^2+x^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o . I . R}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}}\oint ds = \frac{\mu_o . I . R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Por lo tanto:

$$B(x) = \left(\frac{\mu_o . I . R^2}{2}\right)\times\left(\frac{1}{[R^2+x^2]^{3/2}}\right)$$

Graficando:

Analizando la función B(x); derivando:

Tenemos que: $$B'(x) = \left(\frac{\mu_o . I . R^2}{2}\right)\left[\frac{-3x}{(R^2+x^2)^{5/2}}\right]$$

$$\forall\, x \in [0; 5R] \Rightarrow B'(x) < 0$$

$\therefore$ B(x) es estrictamente decreciente

Por otro lado:

$$B''(x) = \frac{3\mu_o . I . R^2}{2}\left[\frac{4x^2 - R^2}{(R^2+x^2)^{7/2}}\right] = \frac{3\mu_o I . R^2}{2}\left[\frac{(2x-R)(2x+R)}{(R^2+x^2)^{7/2}}\right]$$

Puntos críticos: $x = R/2$ y $x = -R/2$ y $x = 0$

Analizando concavidad:

Si: $x \in\ ]\,0; R/2\,[$ $\Rightarrow$ B(x) es cóncava hacia abajo

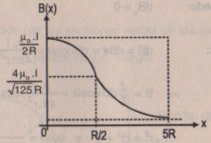
Si: $x \in\ ]\,R/2; 5R\,[$ $\Rightarrow$ B(x) es cóncava hacia arriba

Tabulando:

$$B(0) = \frac{\mu_o . I}{2R}\ ;\ B(R/2) = \frac{\mu_o . I}{2R\sqrt{\frac{125}{64}}} = \frac{4\mu_o . I}{R\sqrt{125}}\ ;\ B(5R) \to 0$$

La función B(x) es simétrica con respecto del eje y, y con el eje x.

En consecuencia la gráfica será la siguiente.



11. Considere la espira que conduce corriente mostrada en la figura P30.11, formada de líneas radiales y segmentos de círculos cuyos centros están en el punto P. Encuentra la magnitud y dirección de B en P.

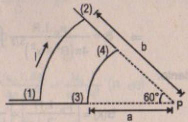
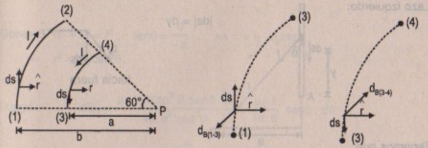


Figura P30.11

Resolución :

$B_p = ?$

Los segmentos rectos no producen campo magnético. Luego analizando los arcos.



Hacia afuera Hacia adentro

Luego:

$$dB_{(1-3)\text{ en P}} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . b^2}\,|ds \times \hat{r}\,| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . b^2} . b.d\theta$$

$$\Rightarrow\quad B_{(1-3)\text{ en P}} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . b^2}\, b\int_0^{\pi/3} d\theta = \frac{\mu_o . I}{12.b}\ \text{(hacia afuera)}$$

$$dB_{(3-4)\text{ en P}} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a^2}\,|ds \times \hat{r}\,| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a^2} . (adq)$$

$$\Rightarrow\quad B_{(3-4)\text{ en P}} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_o . I}{12a}\qquad \text{(hacia adentro)}$$

Como:

$B_{(3-4)}$ en P hacia adentro es mayor que el $B_{(1-2)}$ en P hacia fuera, en consecuencia el campo magnético total estará dirigido hacia adentro. Luego:

$$B_{total} = \frac{\mu_o . I}{12\,a} - \frac{\mu_o . I}{12\,b} = \frac{\mu_o . I}{12}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

12. Determine el campo magnético (en términos de I, a y d) en el origen debido a la espira de corriente mostrada en la figura P30.12.

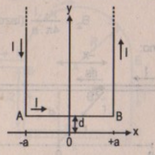


Figura P30.12

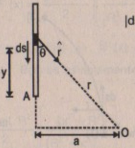
Resolución :

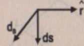
$B_{en\,(0)} = ?$

Hallaremos $B_{en(0)}$ por partes:

Lazo izquierdo:

$|ds| = dy$





hacia fuera

Tenemos que:

$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,dysen\theta$$

Donde: $dy = ds = acsc^2.\theta.d\theta$

$$r^2 = y^2 + a^2 ; \quad \tan\theta = -\frac{a}{y}$$

Luego:
$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} . sen\theta . dy = \frac{\mu_o . I . a csc^2\theta . sen\theta . d\theta}{4\pi . csc^2\theta . a^2}$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = \int d_B = \frac{\mu_o . I}{4\pi a}\int_0^{\pi/2} sen\theta\, d\theta = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . a}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

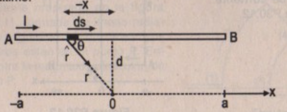
$$\therefore \quad B_1 = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a} \quad \text{(lazo izquierdo; hacia fuera)}$$

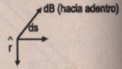
Lazo derecho:

En vista que $|B_1| = |B_2|$; además la dirección del campo magnético en el lazo derecho está dirigido hacia fuera de la página, entonces:

$$\therefore \quad B_2 = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a} \quad \text{(lazo derecho; hacia fuera)}$$

Por último:





Tenemos que:

$$dB_{3\,en\,(0)} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} . dx . sen\theta$$

Donde : $d^2 + x^2 = r^2$; $\tan\theta = \frac{d}{-x} \quad \Rightarrow \quad x = -d.ctg\theta$

$\Rightarrow \quad r^2 = d^2.csc^2\theta$

Luego :
$$dB_3 = \frac{\mu_o . I . d csc^2\theta . sen\theta . d\theta}{4\pi . d^2 . csc^2\theta} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\, sen\theta . d\theta$$

$$\Rightarrow \quad B_3 = \int dB_3 = \frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sen\theta\, d\theta = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\,[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

donde:
$$\cos\theta_1 = \frac{-a}{r} = \frac{-a}{\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}} ; \quad \cos\theta_2 = \frac{a}{\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}}$$

Por lo tanto:

$$B_3 = \frac{-\mu_o . I}{4\pi . d}\left[\frac{a}{\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}} + \frac{a}{\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{\mu_o\, I . a}{2\pi . d\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}} \quad \text{(hacia adentro)}$$

En consecuencia:

$$B_{total\,en\,(0)} = B_1 + B_2 - B_3 = \frac{\mu_o . I}{4\pi . a} + \frac{\mu_o . I}{4\pi . a} - \frac{\mu_o . I . a}{2\pi . d\left(a^2 + d^2\right)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad B_{total\,en\,(0)} = \frac{\mu_o . I}{2\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{d\sqrt{a^2 + d^2}}\right] \quad \text{hacia fuera}$$

13. La espira en la figura P30.13 conduce una corriente I. Determine el campo magnético en el punto A en función de I, R y L.

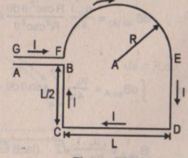


Figura P30.13

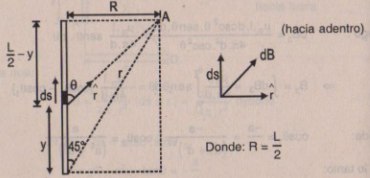
Resolución :

Nos piden: $B_{en\ A} = ?$

Tenemos que el campo producido por el segmento de recta $\overline{GF}$ y $\overline{BA}$ son iguales en magnitud, pero en distintas direcciones. Luego ambos se anulan.

Por otro lado:

El campo producido por el segmento $\overline{ED}$ y $\overline{CB}$ son iguales en magnitud y en dirección. Analizando:



Tenemos que:

$$dB_{en\,(A)} = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}\,| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,dy sen\theta$$

donde:

$$\tan\theta = \frac{R}{\frac{L}{2} - y} \Rightarrow \left(\frac{L}{2} - y\right) = R\,.\,ctg\theta \quad \therefore\ dy = Rcsc^2\theta . d\theta$$

$$r^2 = R^2 + \left(\frac{L}{2} - y\right)^2 \Rightarrow r^2 = R^2(ctg^2\theta + 1) = R^2 . csc^2\theta$$

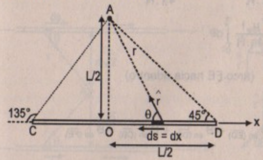
Luego: $$dB_{\ en\,(A)} = \frac{\mu_o . I}{4\pi} . \frac{R\csc^2\theta\, d\theta}{R^2\csc^2\theta} sen\,\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi . R}\ sen\,\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \int dB_{en\ A} = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} sen\,\theta\, d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi . R}\ [\cos(\pi/4) - \cos(\pi/2)]$$

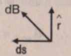
$$\therefore \quad B_{\ en\ A} = \frac{\mu_o . I}{8\pi . R}\sqrt{2} \quad (\text{lazo } \overline{ED} \text{ y } \overline{CB} \text{ hacia adentro})$$

Por otro lado:

Analizamos el lazo $\overline{DC}$ de la espira:



d_B (hacia adentro)



Entonces: $$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}\,| = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,dx\,.\,sen\theta$$

Donde:

$$\frac{L}{2x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2}\,.\,ctg\theta \qquad \therefore\ dx = -\frac{L}{2}\,.\,csc^2\theta\, d\theta$$

$$r^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 . csc^2\theta$$

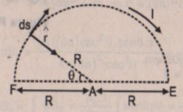
Luego: $$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi}\ \frac{(-L/2) . \csc^2\theta . sen\,\theta\, d\theta}{(L/2)^2 . \csc^2\theta} = -\frac{\mu_o . I}{2\pi . L} . sen\,\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad B_{en\ A} = \int dB = -\frac{\mu_o . I}{2\pi . L}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} sen\,\theta\, d\theta = \frac{\mu_o . I}{2\pi . L}\ [\cos\pi/4 - \cos 3\pi/4]$$

$$\therefore \quad B_{en\ A} = \frac{\mu_o . I}{2\pi . L}\sqrt{2} \quad (\text{lado } \overline{DC} \text{ hacia adentro})$$

Por último:

Analizando el semicírculo FE:



$ds = R.d\theta$

Entonces: $dB_{\text{en A}} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi . R^2}\,|ds \times \hat{r}| = \dfrac{\mu_o I}{4\pi . R^2}\,.\,R.\,d\theta$

$$\Rightarrow \int dB_{\text{en A}} = \frac{\mu_o I}{4\pi . R}\int_0^{\pi} d\theta$$

$$\therefore \quad B_{\text{en A}} = \frac{\mu_o I}{4R} \text{ (arco FE hacia adentro)}$$

En consecuencia:

$$B_{\text{total en A}} = B_{\text{en }(\overline{ED})} + B_{\text{en }(\overline{DC})} + B_{\text{en }(\overline{CB})} + B_{\text{en }(\overline{FE})}$$

$$B_{\text{total en A}} = \frac{\mu_o . I . \sqrt{2}}{8\pi . R} + \frac{\mu_o . I\sqrt{2}}{2\pi . L} + \frac{\mu_o . I\sqrt{2}}{8\pi . R} + \frac{\mu_o . I}{4R}$$

$$B_{\text{total en A}} = \frac{\mu_o . I . \sqrt{2}}{4\pi . R} + \frac{\mu_o . I\sqrt{2}}{2\pi \times (2R)} + \frac{\mu_o . I}{4\,R}$$

$$B_{\text{total en A}} = \frac{\mu_o I}{R}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right]$$

$$\therefore \quad B_{\text{total en A}} = 0{,}475\,.\,\frac{\mu_o I}{R} \text{ (hacia adentro)}$$

14. Tres largos conductores paralelos llevan corrientes de I = 2,00 A. La figura P30.14 es una vista de los extremos de los conductores, con cada una de las corrientes saliendo de la página. Si a = 1,00 cm, determine la magnitud y dirección del campo magnético en los puntos A, B y C.

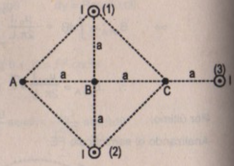


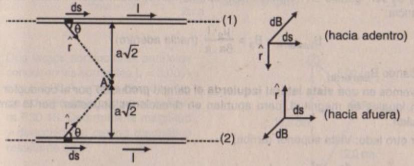
Figura P30.14

Resolución :

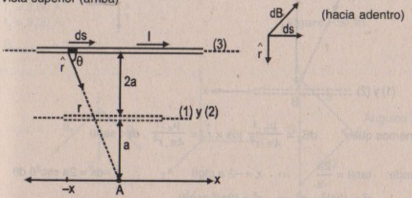
Datos: I = 2,00 A ; a = 1,00 cm
$B_{\text{en A}} = ?$; $B_{\text{en B}} = ?$
$B_{\text{en C}} = ?$

Hallaremos $B_{\text{total en (A)}}$

Vista lateral izquierda:



Vista superior (arriba)



Tenemos que: $dB_3 = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}| = \dfrac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,dx\,.\,\text{sen}\theta$

Donde: $\tan\theta = \dfrac{3a}{-x} \Rightarrow -x = 3a\,.\,\text{ctg}\theta \qquad \therefore\; dx = 3a.\csc^2\theta d\theta$

$$r^2 = (3a)^2 + x^2 \Rightarrow r^2 = (3a)^2\csc^2\theta$$

Luego : $dB_3 = \dfrac{\mu_o I(3a)\csc^2\theta . \text{sen}\theta\, d\theta}{4\pi(3a)^2 . \csc^2\theta} = \dfrac{\mu_o . I}{12\pi . a}\text{sen}\theta d\theta$

$$\therefore \quad B_3 = \int dB_3 = \frac{\mu_o . I}{12\pi . a}\int_0^{\pi}\text{sen}\theta d\theta = \frac{\mu_o . I}{6\pi . a} \text{ (hacia adentro)}$$

Como:

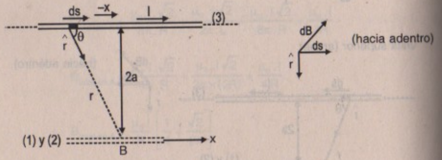
B_1 y B_2 son iguales en magnitud pero apuntan en direcciones contrarias, en consecuencia:

$$B_{\text{total en A}} = B_3 = \frac{\mu_o \cdot I}{6\pi \cdot a} \text{ (hacia adentro)}$$

- Hallando $B_{\text{total en (B)}}$

Si vemos en una **vista lateral izquierda** el campo producido por el conductor 1 y 2 son iguales en magnitud, pero apuntan en direcciones opuestas; por lo tanto se anulan.

Por otro lado: Vista superior (arriba)



Tenemos que: $dB_3 = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi \cdot r^2} |ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot dx \cdot \operatorname{sen}\theta$

Donde: $\tan\theta = \frac{2a}{-x} \Rightarrow x = -2a\,\text{ctg}\theta \quad \therefore \quad dx = 2a\csc^2\theta\, d\theta$

$r^2 = (2a)^2 + x^2 \Rightarrow r^2 = (2a)^2.\csc^2\theta$

Luego: $dB_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2} dx\,\operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_o I(2a\csc^2\theta)}{4\pi(2a)^2\csc^2\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta$

$$\Rightarrow B_3 = \int dB_3 = \frac{\mu_o I}{8\pi a}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta$$

$$\therefore B_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \text{ (hacia adentro)}$$

En consecuencia: $B_{\text{total en (B)}} = B_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi a}$ (hacia adentro)

- Hallando $B_{\text{total en (C)}}$

Si vemos en una **vista lateral izquierda** el campo magnético producido por el conductor (1) y (2) son iguales en magnitud, pero apuntan en direcciones opuestas; por lo tanto se anulan.

En consecuencia:

$$B_{\text{total en (C)}} = B_3 = \frac{\mu_o I}{2\pi a} \text{ (hacia adentro)}$$

15. Dos largos conductores paralelos conducen las corrientes $I_1 = 3{,}00$ A e $I_2 = 3{,}00$ A, ambas dirigidas hacia adentro de la página en la figura P30.15. Determine la magnitud y dirección del campo magnético resultante en P.

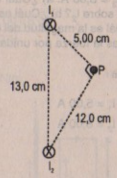
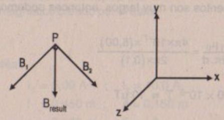
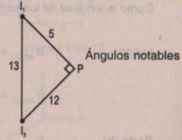


Figura P30.15

Resolución :

$I_1 = 3{,}00$ A
$I_2 = 3{,}00$ A
$B_{\text{total en P}} = ?$





Por la ley de Biot - Savart

$$B_{1\text{ en P}} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(0{,}05)} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(3{,}00)}{2\pi(0{,}05)} = 12\times10^{-6}\text{ T}$$

$$B_{2\text{ en P}} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi(0{,}12)} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(3{,}00)}{2\pi(0{,}12)} = 5\times10^{-6}\text{ T}$$

Luego: $B_{\text{resultante en P}} = \frac{\mu_o I}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{0{,}05}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}12}\right)^2}$

$$\therefore B_{\text{resultante en P}} = 13\times10^{-6}\text{ T} \equiv 13\ \mu\text{T (hacia abajo)}$$

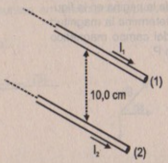
LA FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

16. Dos largos conductores paralelos separados por 10,0 cm conducen corrientes en la misma dirección. El primer alambre conduce una corriente $I_1 = 5{,}00$ A, y el segundo conduce $I_2 = 8{,}00$ A. a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_1 y que actúa sobre I_2? b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre I_2 por I_1? c) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_2 en la ubicación de I_1? d) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud ejercida por I_2 sobre I_1?

Resolución :

Datos: $I_1 = 5{,}00$ A

$I_2 = 8{,}00$ A



Parte (a)

Como la longitud de los segmentos son muy largos, entonces podemos aproximar.

Luego:
$$B_{en\,(2)} = \frac{I_1 \mu_0}{2\pi . d} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5{,}00)}{2\pi\times(0{,}1)}$$

$$\therefore\ B_{en\,(2)} = 10\times10^{-6}\ T \equiv 10\ \mu T$$

Parte (b)
$$F_{B\,en\,(2)} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2\pi . d} . \ell$$

$$\Rightarrow\ \frac{F_{B\,en\,(2)}}{\ell} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2\pi . d} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5{,}0)(8{,}0)}{2\pi\times(0{,}1)}$$

$$\therefore\ \frac{F_{B\,en(2)}}{\ell} = 80\times10^{-6}\ T \equiv 80\ \mu N/m$$

Parte (c)
$$B_{en\,(1)} = \frac{I_2 . \mu_0}{2\pi . d}\quad \text{(cuando “}\ell\text{” es muy grande)}$$

$$\Rightarrow\ B_{en\,(1)} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(8{,}0)}{3\pi\times(0{,}1)}$$

$$\therefore\ B_{en\,(1)} = 16\times10^{-6}\ T \equiv 16\ \mu T$$

Parte (d)

En dos conductores paralelos, separados una distancia “d” se cumple:
$$F_{B\,en\,(1)} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . \ell}{2\pi . d}$$

$$\Rightarrow\ \frac{F_{B\,en(1)}}{\ell} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2\pi . d} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5{,}00)(8{,}00)}{2\pi\times(0{,}1)}$$

$$\therefore\ \frac{F_B\ en(1)}{\ell} = 80\times10^{-6}\ N/m \equiv 80\ \mu N/m$$

17. En la figura P30.17 la corriente en el largo alambre recto es $I_1 = 5{,}00$ A y el alambre se ubica en el plano de la espira rectangular, la cual conduce 10,0 A. Las dimensiones son $c = 0{,}100$ m, $a = 0{,}150$ m y $\ell = 0{,}450$ m. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el alambre.

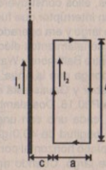


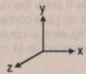
Figura P30.17

Resolución :

Datos: $I_1 = 5{,}00$ A ; $I_2 = 10{,}0$ A

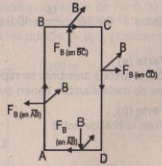
$l = 0{,}450$ m ; $a = 0{,}150$ m

$c = 0{,}100$ m ; $F_B = ?$



Entonces:
$$\vec{F}_{B\,(en\,\overline{AB})} = -\frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . \ell}{2\pi . c}\ \hat{i}$$

$$\vec{F}_{B\,(en\,\overline{CD})} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . \ell}{2\pi .(a+c)}\ \hat{i}$$



Por lo tanto:
$$F_{B\ \text{total sobre la espira (ABCDA)}} = \vec{F}_{B\,(en\,\overline{CD})} + \vec{F}_{B\,(en\,\overline{AB})}$$

$$\Rightarrow\ \vec{F}_{total} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . \ell}{2\pi}\left[\frac{1}{a+c} - \frac{1}{c}\right] = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . \ell}{2\pi}\left[\frac{a}{c(a+c)}\right](-\hat{i})$$

$$\vec{F}_{total} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(5,0)(10,0)(0,450)(0,150)}{2\pi(0,1)(0,250)} - \hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{total\ sobre\ la\ espira} = -27,0\times10^{-6}\ \mathrm{N}\hat{i} \equiv -27,0\ \mu\mathrm{N}\hat{i}$$

18. La unidad de flujo magnético debe su nombre a Wilhelm Weber. La magnitud práctica de la unidad del campo magnético recibe su nombre de Johann Karl Friedrich Gauss. Ambos fueron científicos en Göttingen, Alemania. Además de sus logros individuales, ellos construyeron juntos un telégrafo en 1833. Éste consistió de una batería y un interruptor que fue colocado en un extremo de una línea de transmisión de 3 km de largo y era operado por un electroimán en el otro extremo. (Andre Ampère sugirió los señalamientos eléctricos en 1821; Samuel Morse construyó una línea de telégrafo entre Baltimore y Washington en 1844). Suponga que la línea de transmisión de Weber y Gauss está diagramada en la figura P30.18. Dos alambres paralelos largos, cada uno con una masa por unidad de longitud de 40,0 g/m, se apoyan en un plano horizontal por cuerdas de 6,00 cm de largo. Cuando ambos alambres conducen la misma corriente I, los alambres se repelen entre sí de tal modo que el ángulo θ entre las cuerdas de soporte es 16,0. a) ¿Las corrientes están en direcciones iguales u opuestas? b) Encuentre la magnitud de la corriente.

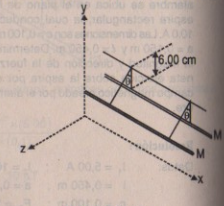


Figura P30.18

Resolución :

Datos: $\theta = 16°$; $\frac{M}{L} = 40,0$ g/m

$I = ?$

Parte (a)

Como ambos alambres se repelen entre sí, entonces las direcciones de las corrientes de cada alambre tienen que estar en direcciones opuestas.

Parte (b)

Vista lateral derecha:

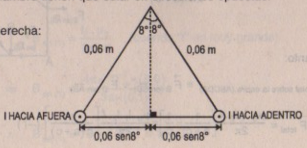
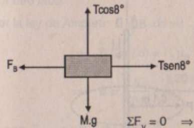
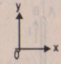


Diagrama de cuerpo libre:





$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos 8° = M.g$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T\mathrm{sen}8° = F_B$

Dividiendo: $\tan 8° = \dfrac{F_B}{M.g}$

$$\Rightarrow \quad M.g.\tan 8° = \frac{\mu_o.I.I.L}{2\pi.d} = \frac{\mu_o.I^2.L}{2\pi(0,12\,\mathrm{sen}\,8°)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{2\pi(0,12\,\mathrm{sen}\,8°).g.\tan 8°}{\mu_o}.\left(\frac{M}{L}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{2\pi(0,12)(0,139)(9,8)(0,140)}{4\pi\times10^{-7}}.(0,04)}$$

$\therefore \quad I = 67,6$ A

LEY DE AMPERE

19. Cuando largos conductores paralelos llevan iguales corrientes de I = 5,00 A. Una vista de los extremos de los conductores se muestra en la figura P30.19. La dirección de la corriente es hacia adentro de la página en los puntos A y B (indicado por las cruces) y hacia afuera de la página en los puntos C y D (indicado por los puntos). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, localizado en el centro del cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 0,200 m.

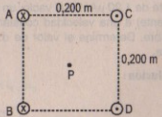
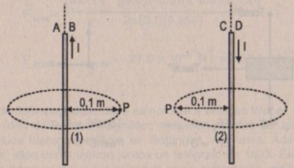


Figura P30.19

Resolución :

$I = 5,00$ A ; $B_{en\,P} = ?$

Vista superior (arriba) girada 90°



B apunta hacia adentro B apunta hacia adentro

Por la ley de Ampere: $\oint_{(1)} B.ds = \mu_o.I$

$$\Rightarrow \quad B\oint_{(1)} ds = \mu_o.I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o.I}{2\pi.R} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5,00)}{2\pi(0,100)} = 10\times10^{-6}\ T \equiv 10\ \mu T$$

En (2)

Por la ley de Ampere: $\oint_2 B.ds = \mu_0 . I$

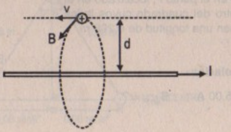
$$\Rightarrow \quad B(2\pi . R) = \mu_0 . I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o.I}{2\pi.R} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(5,00)}{2\pi\times(0,100)} = 10\times10^{-6}\ T \equiv 10\ \mu T$$

En consecuencia: $B_{total\ en\ P} = 10\ \mu T + 10\ \mu T = 20,0\ \mu T$ (hacia adentro)

20. Un largo alambre recto se encuentra sobre una mesa horizontal y conduce una corriente de 1,20 μA. En el vacío, un protón se mueve paralelo al alambre (opuesto a la corriente) a una velocidad constante de $2,30\times10^4$ m/s a una distancia d sobre el alambre. Determine el valor de d. Puede ignorar el campo magnético debido a la Tierra.

Resolución:



Sea:

Donde: $I = 1,20\ \mu A$

$v = 2,30\times10^4$ m/s

$d = ?$

Sabemos que: $F_B = q.v.B = m_{p+} . g$ (se mueve horizontalmente)

Por otro lado:

Por la ley de Ampere: $\oint B.ds = I . \mu_0$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi . d) = I . \mu_0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{I.\mu_0}{2\pi.d} = \frac{1,20\times10^{-6}\times(4\pi\times10^{-7})}{2\pi.(d)} = \frac{2,4\times10^{-13}}{d}$$

Luego: $F_B = q.v.B = m_{p+} . g$

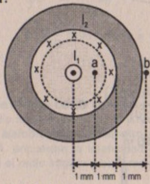
$$\Rightarrow 1,6\times10^{-19}\times(2,30\times10^4)\times\left[\frac{2,4}{d}\times10^{-13}\right] = 1,67\times10^{-27}\times(9,8)$$

$$\Rightarrow \frac{(1,6)(2,30)(2,4)\times10^{-28}}{(1,67)(9,8)\times10^{-27}} = d$$

$$\therefore \quad d = 5,4\times10^{-12}\ m \equiv 5,4\ cm$$

21. La figura P30.21 es una vista transversal de un cable coaxial. El conductor del centro está rodeado por una capa de caucho, la cual está rodeada por otro conductor exterior, al cual lo rodea otra capa de caucho. En una aplicación particular, la corriente en el conductor interior es de 1,00 A hacia afuera de la página, y la corriente en el conductor exterior es de 3,00 A hacia el interior de la página. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos a y b.

Resolución:



$I_1 = 1,00$ A (hacia afuera)

$I_2 = 3,00$ A (hacia adentro)

- Hallando B en (a)

  Aplicando la ley de Ampere: $\oint B . ds = I_1 . \mu_0$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{I_1.\mu_0}{2\pi.r} = \frac{1,00\times(4\pi\times10^{-7})}{2\pi(1,00\times10^{-3})}$$

$$\therefore \quad B = 200\ \mu T \text{ (hacia arriba del punto transversal)}$$

- Hallando B en (b)
  Aplicando la ley de Ampere

$$\oint B \cdot ds = I \cdot \mu_0 = (I_2 - I_1) \cdot \mu_0$$

$$\Rightarrow \quad B \cdot (2\pi \cdot R) = (I_2 - I_1) \cdot \mu_0$$

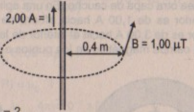
$$\Rightarrow \quad B = \frac{(I_2 - I_1) \cdot \mu_0}{2\pi . R} = \frac{(3,00-1,00)\left(4\pi\times10^{-7}\right)}{2\pi\times\left(3,00\times10^{-3}\right)}$$

$\therefore$ B = 133 × 10^{-6} T ≡ 133 μT (hacia abajo del plano transversal)

22. El campo magnético a 40,0 cm de distancia de un alambre largo y recto que conduce una corriente de 2,00 A es 1,00 μT. a) ¿A qué distancia es de 0,100 μT? b) En algún instante los dos conductores en un gran cable de extensión doméstica conducen iguales corrientes de 2,00 A en dirección opuestas. Los dos alambres están separados 3,00 mm. Encuentre el campo magnético a 40,0 cm del punto medio del cordón recto, en el plano de los dos alambres. c) ¿A qué distancia es un décimo? d) El alambre central en un cable coaxial conduce una corriente de 2,00 A en una dirección, y el recubrimiento alrededor del mismo conduce 2,00 A de corriente en la dirección opuesta. ¿Cuál es el campo magnético que el cable crea en puntos exteriores?

Resolución :

Sea:



Parte (a)

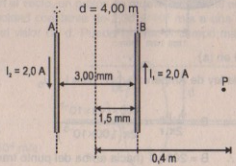
Si B = 0,100 μT ⇒ d = ?

Por la ley de Ampere: $\oint B . ds = I . \mu_0$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{I.\mu_o}{2\pi.d} = \frac{(2,00)\left(4\pi\times10^{-7}\right)}{2\pi\times(d)} = 0,100 \times 10^{-6}$$

Parte (b)

Sea:



- Hallando B $_{en\ P}$ producido por el alambre A

  Por la ley de Ampere: $\oint B \cdot ds = \mu_0 \cdot I_2$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o . I_2}{2\pi . r} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(2,00)}{2\pi(0,4+0,0015)}$$

$\therefore$ B = 996 × 10^{-3} T ≡ 996 μT (hacia arriba)

- Hallando B $_{en\ P}$ producido por el alambre B

  Por la ley de ampere: $\oint B . ds = \mu_0 \cdot I_1$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o . I_1}{2\pi . r} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(2,00)}{2\pi(0,4-0,0015)}$$

$\therefore$ B = 10,04 × 10^{-7} T ≡ 1,00 μT (hacia adentro)

En consecuencia:

$$B_{\text{total en P}} = B_{\text{(hacia fuera)}} - B_{\text{(hacia adentro)}} \approx 996\ \mu T$$

Parte (c)

Si $B = \frac{1}{10}$ (996 mT) ⇒ d = ?

Sabemos que por la ley de Ampere:

$$\oint B \cdot ds = I \cdot \mu_0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1}{10}(996 \times 10^{-3}) = \frac{I.\mu_o}{2\pi.d} = \frac{(2,00)\left(4\pi\times10^{-7}\right)}{2\pi(d)}$$

$\therefore$ d = 4,0 × 10^{-6} m ≡ 4,0 μm

23. Las bobinas magnéticas de un reactor de fusión tokamak tienen la forma de un toroide con un radio interior de 0,700 m y radio exterior de 1,30 m. Si el toroide tiene 900 vueltas de alambre de gran diámetro, cada una de las cuales conduce una corriente de 14,0 kA, encuentre la intensidad del campo magnético dentro del toroide a lo largo de a) el radio interior y b) el radio exterior.

Resolución :

Datos: $r_{\text{interior del toroide}}$ = 0,700 m ; N = 900 vueltas
$r_{\text{exterior del toroide}}$ = 1,30 m
I = 14 kA

Parte (a)

Sabemos que: $\oint B . ds = \mu_0 . I . N$ (a través de un toro)

$$\Rightarrow \quad B(2\pi \, . \, r_{int}) = \mu_0.I.N$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.I.N}{2\pi.r_{int.}} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(14\times10^3)(900)}{2\pi\times(0,700)}$$

$$\therefore \quad B_{\text{dentro del Toroide}} = 3,60 \text{ T}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\oint B \, . \, ds = \mu_0.I.N$ (a través de un toro)

$$\Rightarrow \quad B \, . \, (2\pi \, . \, r_{ext}) = \mu_0.I.N$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.I.N}{2\pi.r_{ext}} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(14\times10^3)(900)}{2\pi\times(1,30)}$$

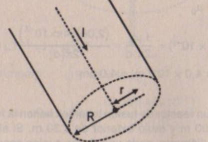
$$\therefore \quad B_{\text{en el exterior}} = 1,94 \text{ T}$$

24. Un conductor cilíndrico de radio R = 2,50 cm porta una corriente de I = 2,50 A a lo largo de su longitud; esta corriente está distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del conductor. a) Calcule el campo magnético en el punto medio a lo largo del radio del alambre (es decir, en r = R/2). b) Encuentre la distancia más allá de la superficie del conductor a la cual la magnitud del campo magnético tiene el mismo valor que la magnitud del campo en r = R/2.

Resolución:

Parte (a)

Sea:



Donde: R = 2,50 cm

$r = \frac{R}{2} = 1,25$ cm

I = 2,50 A

Sabemos por la ley de Ampere:

$$\oint B \, .ds = \mu_0.I$$

$$\Rightarrow \quad B.2\pi.r = \mu_0.I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.I}{2\pi.r} = \frac{\mu_0.I}{2\pi\left(\frac{R}{2}\right)} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(2,50)}{2\pi\times(1,25\times10^{-2})}$$

$$\therefore \quad B = 40\times10^{-6} \text{ T} \equiv 40 \, \mu\text{T}$$

Parte (b)

Tenemos que a una determinada distancia (d), el valor de B es 40×10^{-6} T; luego por la ley de Ampere:

$$\oint B \, ds = m_0.I$$

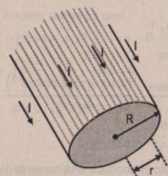
$$\Rightarrow \quad B.(2\pi.d) = \mu_0.I \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\mu_0.I}{2\pi.B} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(2,50)}{2\pi\times(40\times10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \quad d = 1,25\times10^{-2} \text{ m}$$

25. Un manojo de 100 largos alambres aislados y rectos forman un cilindro de radio R = 0,500 cm. a) Si cada alambre conduce 2,00 A, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a 0,200 cm del centro del manojo? b) ¿Un alambre en el borde exterior del manojo experimentaría una fuerza mayor o menor que el valor calculado en el inciso a)?

Resolución:

Sea:



Donde: R = 0,500 cm

I = 2,00 A

r = 0,200 cm

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Ampere: $\oint B \, .ds = \mu_0.I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi.r) = \mu_0 \, . \, I \qquad ... (1)$$

Por otro lado:

$$\frac{I_{total}}{\pi.R^2} = \frac{I}{\pi.r^2} \qquad \therefore \quad I = \frac{I_{total}\times r^2}{R^2} = \frac{100\times2\times r^2}{R^2}$$

Reemplazando (2) en (1)

Tenemos que: $B(2\pi.r) = \mu_0 \, . \, I = \frac{\mu_0.200\times r^2}{R^2}$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.200.r}{2\pi.R^2} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(2\times10^{-2})(0,2\times10^{-2})}{2\pi(0,5\times10^{-2})^2}$$

$$\therefore \quad B = 6,34\times10^{-3} \text{ N} \equiv 6,34 \text{ mN (hacia adentro)}$$

Parte (b)

En vista que I en el exterior es mayor que I en el interior, en consecuencia experimentará una fuerza mayor.

26. El metal niobio se vuelve superconductor cuando se enfría por debajo de 9 K. Si la superconductividad desaparece cuando el campo magnético superficial excede 0,100 T, determine la corriente máxima que un alambre de niobio de 2,00 mm de diámetro puede conducir y seguir siendo superconductor, en ausencia de cualquier campo magnético externo.

Resolución :

Datos: $B_{máximo} = 0{,}100$ T (en la superficie)

Diámetro = 2,00 mm

$I_{máxima} = ?$

Por la ley de Ampere sabemos que: $\oint B \cdot ds = \mu_0 \cdot I_1$

$$\Rightarrow \quad B\left(2\pi.\frac{\text{diámetro}}{2}\right) = \mu_o.I$$

$$\Rightarrow \quad \mu_o.I = B.\pi.\text{diámetro}$$

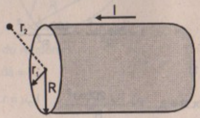
$$\Rightarrow \quad I_{máx} = \frac{B_{máx}.\pi.\text{diámetro}}{\mu_o} = \frac{(0{,}100)(\pi)(2{,}00\times10^{-3})}{4\pi\times10^{-7}}$$

$$\therefore \quad I_{máxima} = 0{,}5 \text{ kA}$$

27. Un largo conductor cilíndrico de radio R conduce una corriente I, como se muestra en la figura P30,27. Sin embargo, la densidad de corriente J no es uniforme en la sección transversal del conductor, sino que es una función del radio de acuerdo con J = br, donde b es una constante. Encuentre una expresión para el campo magnético B a) a una distancia $r_1 < R$, y b) a una distancia $r_2 > R$, medida desde el eje.

Resolución :

Datos: J = b.r



Parte (a)

Por la ley de Ampere sabemos que:

$$\oint B.ds = \mu_o.I_1$$

$$\Rightarrow \quad B.2\pi.r_1 = \mu_o.I_1 \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado: $J = \dfrac{I}{A} \Rightarrow J.A = I \;;\; A = \pi.r^2 \qquad \therefore\; dA = 2\pi.rdr$

Luego: $\quad J.dA = dI$

$$\Rightarrow \quad (b.r)(2\pi.r.dr) = dI \quad \Rightarrow \quad 2\pi\int_0^{r_1} r^2.dr = \int_0^{I_1} dI$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{2\pi.b.r_1^3}{3} \qquad \ldots (2)$$

(2) en (1): $$B = \frac{\mu_o.I_1}{2\pi.r_1} = \frac{\mu_o}{2\pi.r_1}\,\frac{(2\pi.b.r_1^3)}{3}$$

$$B = \frac{2\mu_o.b}{6}.r_1^2 \quad (\text{para } r_1 < R)$$

Parte (b)

Por la ley de Ampere sabemos que:

$$\oint B\, ds = \mu_0.I \quad \Rightarrow \quad B.(2\pi.r_2) = \mu_0.I \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $J = \dfrac{I}{A} \quad \Rightarrow \quad I = J.A \qquad$ Donde: $dA = 2\pi.rdr$

Luego: $\quad dI = J.d_A = (b.r)(2\pi.rdr) \quad \Rightarrow \quad \int_0^{I_2} dI = 2\pi.b\int_0^R r^2.dr$

$$\therefore \quad I = \frac{2\pi.b}{3}.R^3 \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$B.(2\pi.r_2) = \mu_0.I = \mu_0.\left(\frac{2\pi.b}{3}R^3\right) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o}{2\pi.r_2}\times\left(\frac{2\pi.b.R^3}{3}\right)$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_o.b.R^3}{3r_2} \quad (\text{para } r_2 > R)$$

28. En la figura P30.28, ambas corrientes están en la dirección x negativa. a) Dibuje el patrón de campo magnético en el plano yz. b) ¿A qué distancia d a lo largo del eje z el campo magnético es un máximo?

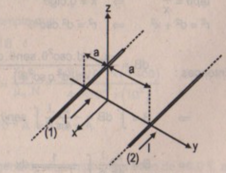
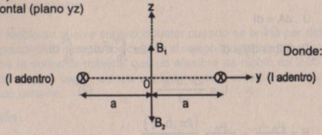


Figura P30.28

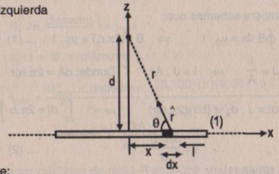
Resolución :

Parte (a)
Vista frontal (plano yz)



Parte (b)
Sabemos que el campo producido por el alambre (1) a una distancia d del eje z está dirigido hacia arriba, mientras que el campo producido por el alambre (2) está dirigido hacia abajo. Luego:

Vista lateral izquierda
Sea:



Sabemos que:
Por la ley de Biot - Savart:

$$dB = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} \ |ds \times r| = \frac{\mu_o . I . dx}{4\pi . r^2} . \text{sen}\theta$$

donde:

$$\tan\theta = \frac{d}{x} \quad \Rightarrow \quad x = d.\text{ctg}\theta \quad \therefore \quad dx = -d.\csc^2\theta.d\theta$$

$$r^2 = d^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = d^2.\csc^2\theta$$

Entonces :

$$dB = \frac{-\mu_o . I . d . \csc^2\theta . \text{sen}\theta . d\theta}{4\pi\left(d^2.\csc^2\theta\right)} = -\frac{\mu_o . I . \text{sen}\theta . d\theta}{4\pi . d}$$

$$\Rightarrow \quad B = \int dB = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\int \text{sen}\theta . d\theta = -\frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\int \frac{-1dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o . I}{4\pi . d}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}}dx = \frac{\mu_o . I}{4\pi . d} . \ln\left[\alpha + \sqrt{x^2 + d^2}\right]$$

Luego : B será máximo cuando : $x + \sqrt{x^2 + d^2} > 1$

Entonces desarrollando la inecuación tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + d^2} > 1 - x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + d^2 > (1 - x)^2 \quad ; \quad 1 - x \geq 0 \qquad \therefore \ x \in \left]-\infty ; 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + d^2 > x^2 + 1 - 2x$$

$$\Rightarrow \quad x > \frac{1 - d^2}{2} \quad \therefore \ x \in \left]\frac{1 - d^2}{2} ; \infty\right[$$

El máximo de valor de x es 1

Entonces: $\dfrac{1 - d^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad d = \pm 1$

Por lo tanto:
A una distancia d = 1 el campo magnético a lo largo del eje z es un máximo.

Nota:
Por la ley de Ampere, se hubiese simplificado el problema.

EL CAMPO MAGNÉTICO DE UN SOLENOIDE

29. ¿Qué corriente se requiere en el bobinado de un largo solenoide que tiene 1 000 vueltas distribuidas uniformemente a lo largo de una longitud de 0,400 m para producir en el centro del solenoide un campo magnético de $1{,}00 \times 10^{-4}$ T de magnitud?

Resolución :

Datos: N = 1 000 vueltas ; $\ell = 0{,}400$ m
I = ? en un solenoide ; $B = 1{,}00 \times 10^{-4}$ T

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B . ds = \int B.ds = B . \ell$$

$$\Rightarrow \quad \mu_o . I . N = B . \ell \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B . \ell}{\mu_o . N} = \frac{1{,}00 \times 10^{-4} \times (0{,}400)}{4\pi \times 10^{-7} \times \left(10^3\right)}$$

$$\therefore \quad I = 31{,}8 \times 10^{-3} \text{ A} = 31{,}8 \text{ mA}$$

30. Un solenoide superconductor va a generar un campo magnético de 10,0 T. a) Si el enrollado del solenoide tiene 2 000 vueltas/m, ¿qué corriente se requiere? b) ¿Cuál fuerza por unidad de longitud ejerce sobre los bobinados el campo magnético?

Resolución:

Datos: B = 10,0 T

Parte (a)

Si: $\frac{N}{\ell} = 200$ vueltas/m $\Rightarrow$ I = ?

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B\,.\,ds = \int B.ds = B\,.\,\ell$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0\,.\,I\,.\,N = B\,.\,\ell$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{B}{\mu_o}\,.\left(\frac{\ell}{N}\right) = \frac{10{,}0}{4\pi\times10^{-7}}\left(\frac{1}{2\times10^{3}}\right)$$

$$\therefore \quad I = 40{,}0 \text{ A}$$

Parte (b)

Sabemos que: $F_B = I\,.\,\ell \times B = I\,.\,\ell\,.\,B$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_B}{\ell} = I\,.\,B = 40{,}0 \times (10{,}0)$$

$$\therefore \quad \frac{F_B}{\ell} = 400\ \frac{N}{m}$$

31. Un solenoide de radio R = 5,00 cm está hecho de un largo trozo de alambre de radio r = 2,00 mm, longitud ℓ = 10,0 m (ℓ >> R) y resistividad $\rho = 1{,}70 \times 10^{-8}$ Ω.m. Encuentre el campo magnético en el centro del solenoide si el alambre es conectado a una batería que tiene una fem ε = 20,0 V.

Resolución:

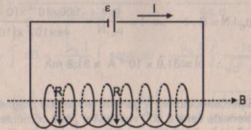
Datos: $R_{solenoide} = 0{,}05$ m

Long. alambre = 10,0 m ; $r_{alambre} = 2{,}00$ mm

$\rho_{alambre} = 1{,}70 \times 10^{-8}$ Ω.m ; $B_{en\ el\ centro}$ = ?

ε = 20,0 V

Sea el solenoide:



Tenemos que:

$$\varepsilon = I.R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{\frac{\rho.\text{Long.}}{\pi.r^2}} = \frac{\varepsilon.\pi.r^2}{\rho.\text{Long.}}$$

$$\therefore \quad I = \frac{20{,}0(\pi)\left(2{,}00\times10^{-3}\right)^2}{1{,}70\times10^{-8}\times(10)} = 1{,}48 \times 10^3 \text{ A}$$

Luego por la ley de Ampere:

$$\oint B.ds = \int B.\,ds = B\,.\,\ell$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0\,.\,I = B\,.\,\ell$$

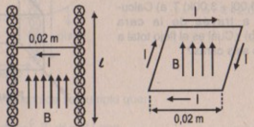
$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.I}{\ell} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times\left(1{,}48\times10^{+3}\right)}{2\pi(0{,}054)}$$

$$\therefore \quad B = 548 \times 10^{-3} \text{ T}$$

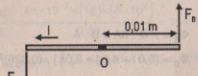
32. Una espira cuadrada, de una sola vuelta de alambre, tienen una longitud lateral de 2,00 cm y conduce una corriente de 0,200 A en el sentido de las manecillas del reloj. La espira está dentro de un solenoide, con el plano de la espira perpendicular al campo magnético del solenoide. El solenoide tiene 30 vueltas / cm y conduce una corriente de 15,0 A en el sentido de las manecillas del reloj. Encuentre la fuerza sobre cada lado de la espira y el momento de torsión que actúa sobre la espira.

Resolución:

Sea: Vista transversal (espira - solenoide)



Vista superior arriba (espira)



Donde: $I_{espira} = 0{,}200$ A

$\frac{N}{\ell}$ Solenoide $= 30\ \frac{\text{vueltas}}{\text{cm}} = 3\,000\ \frac{\text{vueltas}}{\text{m}}$

$I_{solenoide} = 15{,}0$ A

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B.ds = \int B.ds = B.\ell$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 . I_{sol} . N = B.\ell$$

$$\Rightarrow \quad B = \mu_0 . I_{sol} . \left(\frac{N}{\ell}\right) = 4\pi \times 10^{-7} \times (15{,}0) . (3 \times 10^3)$$

$$\therefore \quad B = 65{,}5 \times 10^{-3}\ T \equiv 65{,}5\ \mu T$$

Luego:

$$F_{B\ (\text{de cada lado de la espira})} = I_{esp.} . L \times B = (0{,}200)(0{,}02) . (56{,}5 \times 10^{-3})$$

$$\therefore \quad F_{B\ (\text{sobre cada lado de la espira})} = 226 \times 10^{-6}\ N \equiv 226\ \mu N$$

En consecuencia:

$$\tau_0 = F_B . \frac{L}{2} + F_B . \frac{L}{2} = I.A.B = (0{,}2)(0{,}02)^2\ (56{,}5 \times 10^{-3}) = 4{,}53 \times 10^{-6}\ N.m \equiv 4{,}52\ \mu N.m$$

FLUJO MAGNÉTICO

33. Un cubo de longitud de lado $\ell = 2{,}50$ cm está colocado como se muestra en la figura P30.33. A través de él hay una región de campo uniforme dado por $B = (5{,}00i + 4{,}00j + 3{,}00k)$ T. a) Calcule el flujo a través de la cara sombreada. b) ¿Cuál es el flujo total a través de las seis caras?

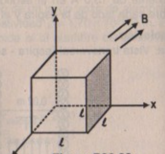


Figura P30.33

Resolución:

Donde: $\ell = 2{,}50$ cm

$B = 5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ T

Parte (a)

Sabemos que: $\Phi_B = \int B . dA = B . A$

$$\Rightarrow \quad \Phi_B = (5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}) . (0{,}025)^2\hat{i}$$

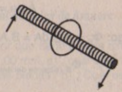
$$\therefore \quad \Phi_B = 3{,}13 \times 10^{-3}\ Wb \equiv 3{,}13\ mWb$$

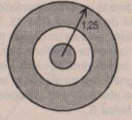
Parte (b)

Sabemos que por la ley de Gauss:

$$\Phi_B = \oint B.dA = 0$$

34. Un solenoide de 2,50 cm de diámetro y 30,0 cm de largo tiene 300 vueltas y conduce 12,0 A. a) Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de 5,00 cm de radio que está colocado perpendicular a y centrado en el eje del solenoide, como en la figura P30,34a. b) La figura P30.34b muestra una vista lateral aumentada del mismo solenoide. Calcule el flujo a través del área azul, la cual se define por medio de un anillo que tiene un radio interior de 0,400 cm y un radio exterior de 0,800 cm.

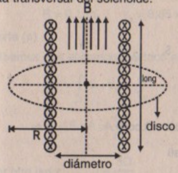




Resolución:

Parte (a)

Vista transversal del solenoide:



Donde: Diámetro = 2,50 cm

Long = 30,0 cm

R = 5,00 cm

N = 300 vueltas

I = x = • = 12,0 A

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B.ds = \int B.d\ell = B.Long$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 . I . N = B . Long$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 . I . N}{Long} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (12) \times (3 \times 10^2)}{0{,}30} = 15 \times 10^{-3}\ T$$

Luego: $\Phi_{B\ (\text{a través del disco})} = \int B.dA = B.A = 15 \times 10^{-3} \times (\pi[0{,}05]^2)$

$$\therefore \quad \Phi_{B\ (\text{a través del disco})} = 118 \times 10^{-6}\ T . m^2 \equiv 118\ \mu T . m^2$$

Parte (b)

Sabemos que el área sombreada con àzul está dada por:

$$\text{Área} = \pi\,[R^2_{ext} - R^2_{int}]$$

$$\Rightarrow \quad \text{Área} = \pi([0{,}8 \times 10^{-2}]^2 - [0{,}4 \times 10^{-2}]^2)$$

$$\therefore \quad \text{Área} = 150{,}8 \times 10^{-6}\ m^2$$

Luego: $\Phi_B = \int B.dA = B.A = 15 \times 10^{-3} \times (150{,}8 \times 10^{-6})$

$$\therefore \quad \Phi_{B\ (\text{a través del área azul})} = 2{,}26 \times 10^{-3}\ T\,.\,m^2 \equiv 2{,}26\ mT.m^2$$

35. Considere la superficie hemisférica cerrada de la figura P30.35. Si el hemisferio está en un campo magnético uniforme que forma un ángulo θ con la vertical, calcule el flujo magnético a través de a) la superficie plana S_1 y b) la superficie hemisférica S_2.

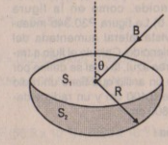
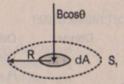


Figura P30.35

Resolución :

Parte (a)

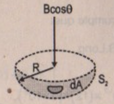


Sabemos que: $\quad \Phi_{B\,(S1)} = \int B.dA$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{B\,(S1)} = \int B.\cos\theta.dA = B.\cos\theta.A$$

$$\therefore \quad \Phi_{B\,(S1)} = B.\pi.R^2\,.\cos\theta$$

Parte (b)



Sabemos que: $\quad \Phi_{B\,(S2)} = \int B\ dA$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{B\,(S2)} = \int B\cos\theta dA = B\cos\theta.A$$

$$\therefore \quad \Phi_{B\,(S2)} = B.\pi R^2.\cos\theta$$

La ley de Gauss en el magnetismo:

Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampere

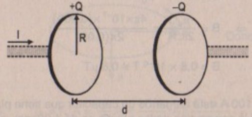
LA LEY DE GAUSS EN EL MAGNETISMO

Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampere

36. Una corriente de 0,200 A está cargando un capacitor que tiene placas circulares de 10,0 cm de radio. Si la separación de placas es de 4,00 mm, a) ¿cuál es la rapidez de incremento en el tiempo del campo eléctrico entre las placas? b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas a 5,00 cm del centro?

Resolución :

Sea:



Donde: $\quad I = 0{,}200\ A \qquad d = 4{,}00\ mm$

$\qquad\quad R = 0{,}1\ m \qquad \varepsilon_o = 8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N.m^2$

Parte (a)

Sabemos que el campo eléctrico entre las placas está dada por:

$$\Phi_E = \int E\,.\,d_A = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad E\,.\,A = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad \therefore \qquad E = \frac{Q}{A.\varepsilon_o} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado: $\quad I = \dfrac{dQ}{dt}$

Entonces de (1)

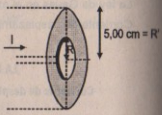
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A.\varepsilon_o}\,.\,\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A.\varepsilon_o}\,.\,I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{0{,}200}{\pi(0{,}1)^2.(8{,}85\times10^{-12})}$$

$$\therefore \quad \frac{dE}{dt} = 72 \times 10^{12}\ \frac{N}{C.s} \equiv 72\ T\ \frac{N}{C.s}$$

Parte (b)

Sabemos que por la ley de Ampere - Maxwell:



$$\oint B.ds = \mu_o(I+I_d) = \mu_o.I + \mu_o.\varepsilon_o.\frac{d}{dt}\Phi_E\}$$

Por otro lado: $I_d = \varepsilon_o.\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}.\frac{1}{\varepsilon_o}\times\varepsilon_o = \frac{dQ}{dt}$

Entonces:

Por la ley de Ampere: $\oint B\ .ds = \mu_0 .I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi.R') = \mu_0 .I$$

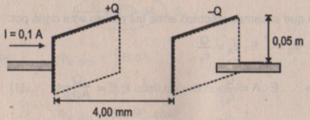
$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o.I}{2\pi.R'} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(0,200)}{2\pi(0,05)}$$

$$\therefore \quad B = 0,8\times10^{-6}\ T \equiv 0,8\ \mu T$$

37. Una corriente de 0,100 A está cargando un capacitor que tiene placas cuadradas de 5,00 cm de lado. Si la separación de las placas es de 4,00 mm, encuentre a) la tasa de cambio en el tiempo del flujo eléctrico entre las placas, y b) la corriente de desplazamiento entre las placas.

Resolución :

Sea:



Parte (a)

Sabemos que el flujo eléctrico entre las placas está dada por:

$$\Phi_E = \int E.dA = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}.\frac{1}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}.I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{0,100}{8,85\times10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \frac{d\Phi_E}{dt} = 11,3\times10^9\ V.m/s \equiv 11,36\ V\ m/s$$

Parte (b)

Sabemos que la corriente de desplazamiento está dada por:

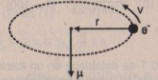
$$I_d = \varepsilon_o.\frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_o.\frac{I}{\varepsilon_o} \qquad \therefore \qquad I_d = I = 0,100\ A$$

MAGNETISMO EN LA MATERIA

38. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno de 1913, el electrón está en una órbita circular de $5,29\times10^{-11}$ m de radio, y su rapidez es de $2,19\times10^6$ m/s. a) ¿Cuál es la magnitud del momento magnético debido al movimiento del electrón? b) Si el electrón gira en sentido a las manecillas del reloj en un círculo horizontal, ¿cuál es la dirección de este vector de momento magnético?

Resolución :

Sea:



Donde: $r = 5,29\times10^{-11}$ m
$v = 2,19\times10^6$ m/s

Parte (a)

Sabemos que: $\mu = I.A = \frac{e^-}{T}A = \frac{e^-.\omega}{2\pi}.A = \frac{e^-.v.A}{2\pi.r}$

$$\Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{e^-.v}{2\pi.r}\right).\pi.r^2 = \frac{1}{2}e^-.v.r$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}|(-1,6\times10^{-19})|(2,19\times10^6)(5,29\times10^{-11})$$

$$\therefore \quad \mu = 9,3\times10^{-24}\ A.m^2$$

Parte (b)

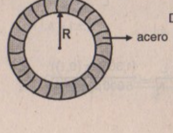
Si el electrón gira en contra de las manecillas del reloj, entonces la dirección del momento magnético apunta hacia abajo.

39. Un toroide con radio medio de 20,0 cm y 630 vueltas (véase la Fig. 30.29) se llena con acero pulverizado cuya susceptibilidad magnética *X* es 100. Si la corriente en los bobinados es de 3,00 A, encuentre B (supuesto uniforme) dentro del toroide.

Resolución :

Sea: "El toroide"

B = ?



Donde: R = 0,2 m
N = 630 vueltas
I = 3,00 A
x = 100

Sabemos que: $H = n.I$ ... (I)

$n = \dfrac{N}{L}$

Por otro lado: $B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (n.I) + \mu_0 . M$ ... (2)

Además: $M = x . H$ ... (3)

Luego: (3) en (2)

Tenemos que: $B = \mu_0 \left(\dfrac{N}{L} . I\right) + \mu_0 (x . H)$

$\Rightarrow \quad B = \mu_0 \left(\dfrac{N}{L} . I\right) [1 + x]$ puesto que: $L = 2\pi.R$

$\Rightarrow \quad B = 4\pi \times 10^{-7} \dfrac{(630)(3{,}00)}{2\pi(0{,}2)} [1 + 100]$

$\therefore \quad B = 0{,}191 \text{ T}$

40. Un campo magnético de 1,30 T se establece en un toroide de núcleo de hierro. El toroide tiene un radio medio de 10,0 cm y permeabilidad magnética de 5 000 μ_0. ¿Qué corriente se requiere si hay 470 vueltas de alambre en el bobinado? El espesor del anillo de hierro es pequeño comparado con 10 cm, de modo que el campo en el material es casi uniforme.

Resolución :

Datos: $B = 1{,}30$ T ; $N = 470$ vueltas
$R = 0{,}1$ m ; $I = ?$
$\mu_m = 5\,000\mu_0$

Sabemos que el campo magnético en un toroide se cumple que:

$B = \mu_0 (H + M) = \mu_m . H$ ... (1)

Donde: $H = n . I = \dfrac{N}{L} . I$; $\mu_m = \mu_0 (1 + x)$

$M = x . H = x . \dfrac{N}{L} . I$

Entonces de (1): $B = \mu_m . H = \mu_m . \dfrac{N}{L} . I$

$\Rightarrow \quad \dfrac{B.L}{\mu_m . N} = I$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{B.L}{\mu_m . N} = \dfrac{(1{,}30)(2\pi(0{,}1))}{5000\mu_0(470)} \quad \therefore \quad I = 276 \text{ mA}$

41. Una bobina de 500 vueltas se enrolla sobre una anillo de hierro ($\mu_m = 750\ \mu_0$) con un radio medio de 20,0 cm y 8,00 cm² de área de sección transversal. Calcule el flujo magnético Φ_B en este anillo de Rowland cuando la corriente en la bobina es de 0,500 A.

Resolución :

Datos: $N_{bobina} = 500$ vueltas ; $R = 0{,}2$ m
$\mu_m = 750\mu_0$; $I = 0{,}500$ A
Área transversal (hierro) = 8,00 cm² $\Phi_B = ?$

Sabemos que: $\Phi_B = \int B . dA = B.A$ ... (1)

Por otro lado: $B = \mu_m . H = \mu_m . n . I = \mu_m . \dfrac{N}{L} . I$ ... (2)

Luego reemplazando (2) en (1)

$\Phi_B = B.A = \mu_m . \dfrac{N}{L} . I.A$

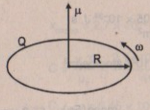
$\Rightarrow \quad \Phi_B = \dfrac{(750\mu_0)(500)(0{,}5)(8{,}00 \times 10^{-4})}{2\pi(0{,}2)}$

$\therefore \quad \Phi_B = 150 \times 10^{-6} \text{ T.m}^2 \equiv 150\ \mu\text{T.m}^2$

42. Un anillo uniforme de 2,00 cm de radio y 6,00 µC de carga total gira a una rapidez angular constante de 4,00 rad/s alrededor de un eje perpendicular al plano del anillo y pasa por su centro. ¿Cuál es el momento magnético del anillo giratorio?

Resolución :

Sea: "El anillo"



Donde: $R = 0{,}02$ m
$Q = 6{,}00\ \mu$C
$\omega = 4{,}00$ rad/s
$m = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{Q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \dfrac{Q . \omega}{2\pi}$ ... (1)

Por otro lado: $\mu = I.A = I.\pi.R^2$ ... (2)

Entonces: (1) en (2)

$\mu = \dfrac{Q . \omega}{2\pi}\left(\pi . R^2\right) = \dfrac{Q . \omega . R^2}{2}$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{6,00\times10^{-6}\times(4,00)\times(0,02)^2}{2}$$

$$\therefore \quad \mu = 4,8\times10^{-9}\ \text{A.m}^2 = 4,8\ \text{nA.m}^2$$

43. Calcule la intensidad del campo magnético H de una sustancia magnetizada en la cual la magnetización es de 880 kA/m y el campo magnético tiene una magnitud de 4,40 T.

Resolución:

Datos: M = 880 k.A/m ; B = 4,40 T
H = ?

Sabemos que: $B = \mu_0 (H + M)$ ... (1)

Además: $M = x \, . \, H$

Entonces de (1): $H = \dfrac{B}{\mu_0} - M = \dfrac{4,40}{4\pi\times10^{-7}} - 880\times10^3$

$$\therefore \quad H = 350\times10^4 - 88\times10^4$$

$$\therefore \quad H = 2,62\times10^6\ \frac{\text{A}}{\text{m}} = 2,62\ \frac{\text{MA}}{\text{m}}$$

44. En la saturación el alineamiento de los espines del hierro puede contribuir tanto como 2,00 T al campo magnético total B. Si cada electrón contribuye con un momento magnético de $9,27\times10^{-24}$ A.m² (un magnetón de Bohr), ¿cuántos electrones por átomo contribuyen al campo saturado de hierro? (Sugerencia: el hierro contiene $8,50\times10^{28}$ átomos/m³).

Resolución:

Datos: B = 2,00 T ; $h = 1,05\times10^{-34}$ J. s
$\mu_{(\text{cada e-})} = 9,27\times10^{-54}$ A.m²
$\dfrac{\text{n.° átomos}}{\text{volumen}}$ (Fe) $= 8,50\times10^{28}$ átomos/m³
n.° e⁻/átomo = ?

Sabemos que: $\text{Volumen (Fe)} = \dfrac{\text{masa(Fe)}}{\text{densidad}} = \dfrac{55,8\ \text{umas}}{\text{densidad}}$

Por otro lado:
en 1 átomo (Fe) hay $6,023\times10^{23}$ e⁻
Además tenemos que:

$$\frac{\mu_{\text{Total}}}{1\ \text{átomo}} = 6,023\times10^{23}\times(9,27\times10^{-24}\ \text{A . m}^2)$$

$$\therefore \quad \mu_{\text{Total/átomo}} = 5,58$$

En consecuencia:

$$5,58\ \frac{\text{electrones}}{\text{átomo}}\ \text{contribuyen al campo saturado del hierro.}$$

45. a) Muestre que la ley de Curie puede establecerse en los siguientes términos: la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética es inversamente proporcional a la temperatura absoluta, de acuerdo con $x = C\,\mu_0/T$, donde C es la constante de Curie. b) Evalúe la constante de Curie para el cromo.

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $\boxed{M = C \, . \, \dfrac{B_o}{T}}$

Sea: $x = C \, . \, \dfrac{\mu_o}{T}$ (por condición)

Por otro lado sabemos que en una sustancia paramagnética se cumple que:

$$B_0 = \mu_0 \, . \, H$$

Además: $M = x \, . \, H \quad \Rightarrow H = \dfrac{M}{x}$

Luego: $B_0 = \left(\dfrac{M}{x}\right)\mu_o = \dfrac{\mu_o M}{\left[C \, . \, \dfrac{\mu_o}{T}\right]}$

$$\Rightarrow \quad M = C \, . \, \frac{B_o}{T} \qquad \text{L q q d.}$$

Parte (b)
Sabemos que $x_{\text{cromo}} = 2,7\times10^{-4}$ a T = 300 K

Entonces: $C = \dfrac{x.T}{\mu_o} = \dfrac{2,7\times10^{-4}\times(3\times10^2)}{4\pi\times10^{-7}}$

$$\therefore \quad C_{\text{CURIE}} = 6,45\times10^4\ \text{K.A/T. m}$$

CAMPO MAGNÉTICO DE LA TIERRA

46. Una bobina circular de 5 vueltas y un diámetro de 30,0 cm se orienta en un plano vertical con su eje perpendicular a la componente horizontal del campo magnético terrestre. Una brújula horizontal ubicada en el centro de la bobina se desvía 45,0° del norte magnético por medio de una corriente de 0,600 A en la bobina. a) ¿Cuál es la componente horizontal del campo magnético terrestre? b) La corriente en la bobina se interrumpe. Una "brújula sumergida" es una brújula magnética montada de tal forma que pueda rotar en un plano vertical norte-sur. En esta ubicación una brújula sumergida forma un ángulo de 13,0° desde la vertical. ¿Cuál es la magnitud total del campo magnético terrestre en esta posición?

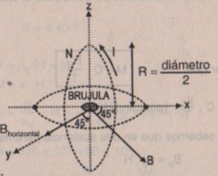
Resolución :

Datos: $N_{bobina} = 5$ vueltas ; $I = 26{,}00$ A

Diámetro = 30,0 cm; $B_{horizontal} = ?$

Parte (a)

Sea la bobina



Por la ley de Biot - Savart:

$$B_{horizontal} = \oint dB\cos 45° = \oint dB\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_o \cdot I}{2R} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en el centro}$$

$$\Rightarrow B_{horizontal} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(0{,}6)}{2\left(\dfrac{0{,}3}{2}\right)}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{,}78\times10^{-6}\text{ T} \equiv 1{,}78\ \mu\text{T}$$

Parte (b)

Por la ley de Biot-Savart

$$B_{total} = \oint dB\,.\cos 13° = \frac{\mu_o \cdot I}{2R}.\cos 13° = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(0{,}6)(0{,}974)}{2\left(\dfrac{0{,}3}{2}\right)}$$

$$\therefore\ B_{total} = 734\times10^{-9}\text{ T}$$

47. El momento magnético de la Tierra es aproximadamente $8{,}00\times10^{22}$ A.m². a) Si éste fuera causado por la magnetización completa de un gigantesco depósito de hierro, ¿a cuántos electrones dispares correspondería esto? b) A dos electrones no pareados por átomo de hierro, ¿a cuántos kilogramos de hierro correspondería lo anterior? (la densidad del hierro es de 7 900 kg/m³, y hay aproximadamente $8{,}50\times10^{28}$ átomos/m³.

Resolución :

Datos: $\mu_{Tierra} = 8{,}00\times10^{22}$ A.m² ; $h = 1{,}05\times10^{-34}$ J.s

Parte (a)

Sabemos que: $\mu_{Tierra} = \dfrac{e^-.h\times n}{2.m_{e^-}}$

$$\Rightarrow\ n = \frac{\mu_{Tierra}.2.m_{e^-}}{e^-.h} = \frac{8{,}00\times10^{22}\times(2)\left(9{,}1\times10^{-31}\right)}{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(1{,}05\times10^{-34}\right)}$$

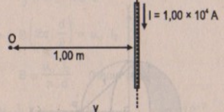
$$\therefore\ n_{electrones} = 8{,}63\times10^{45}\text{ electrones}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

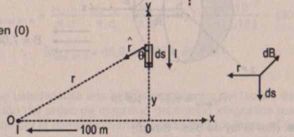
48. Un relámpago puede conducir una corriente de $1{,}00\times10^4$ A durante un breve lapso. ¿Cuál es el campo magnético resultante a 100 m del relámpago? Suponga que el relámpago se extiende alejándose sobre y bajo el punto de observación.

Resolución :

Sea el relámpago:



Hallando B en (0)



Por la ley de Biot-Savart

$$dB = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi\times r^2}\,|ds\times r| = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi\times r^2}\,dy\ \text{sen}\theta$$

Donde: $\tan\theta = \dfrac{-100}{y}$ $\Rightarrow$ $y = -100\ \text{ctg}\theta$ $\therefore$ $dy = +100\csc^2\theta\ d\theta$

$r^2 = (100)^2 + y^2$ $\Rightarrow$ $r^2 = 100^2.\csc^2\theta$

Luego:

$$dB = \frac{\mu_o.I.\text{sen}\theta}{4\pi\left(100^2\right)\csc^2\theta}\left(+100\csc^2\theta\right)d\theta = \frac{+\mu_o.I}{4\pi(100)}\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow B_{en\,(0)} = \int dB = \frac{\mu_o.I}{400\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\theta\, d\theta$$

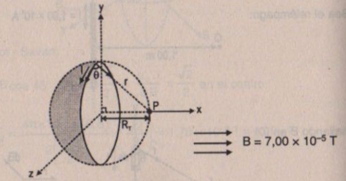
$$\Rightarrow B_{en\,(0)} = -\frac{\mu_o.I}{400\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{\mu_o.I}{200\pi} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times\left(1{,}00\times10^{4}\right)}{200\pi}$$

$$\therefore\quad B_{en\,(0)} = 20{,}0\times10^{-6}\ T \equiv 20\ \mu T$$

49. La magnitud del campo magnético de la Tierra en cualquiera de sus polos es aproximadamente $7{,}00 \times 10^{-5}$ T. Suponga que el campo se desvanece, antes de su siguiente inversión. Los exploradores, marinos y vendedores de alambre alrededor del mundo se reúnen en un programa para reemplazar el campo. Un plan es usar una espira de corriente alrededor del ecuador, sin tomar en cuenta la magnetización de cualquier material dentro de la Tierra. Determine la corriente que generaría tal campo si se desarrollara este plan. (Considere el radio de la Tierra como $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.)

Resolución:

Sea:



Considerar: $R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Sabemos que: (Por la ley de Biot - Savart)

$$B_{total} = B_{en\,x} = B_{en\,P} = \frac{\mu_o.I.R_T^2}{2\left(x^2+R_T^2\right)^{3/2}}$$

Para: $x = R_T$

$$B_{total} = \frac{\mu_o.I.R_T^2}{2\left(R_T^2+R_T^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_o.I}{2\sqrt{8}.R_T}$$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{2\sqrt{8}\times R_T.B_{total}}{\mu_o} = \frac{4\sqrt{2}\times\left(6{,}37\times10^{6}\right)\left(7{,}00\times10^{-5}\right)}{4\pi\times10^{-7}}$$

$$\therefore\quad I = 2{,}00\times10^{9}\ A \equiv 2{,}00\ GA$$

50. Dos conductores paralelos portan corriente en direcciones opuestas, como se indica en la figura P30.50. Un conductor lleva una corriente de 10,0 A. El punto A está en el punto medio entre los alambres, y el punto C se encuentra en una distancia d/2 a la derecha de la corriente de 10,0 A. Si d = 18,0 cm e I se ajusta de manera que el campo magnético en C sea cero, encuentre a) el valor de la corriente I, y b) el valor del campo magnético en A.

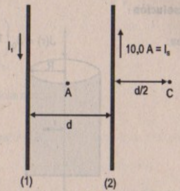


Figura P30.50

Resolución:

- Conductor (2): $\oint B.ds = \mu_o.I_2$

$$\Rightarrow\quad B\left(2\pi.\frac{d}{2}\right) = \mu_o.I_2$$

$$\therefore\quad B = \frac{\mu_o.I_2}{\pi.d}\quad \text{(hacia arriba)}$$

Luego: $$B_{total\,en\,A} = \frac{\mu_o.I_1}{\pi.d}+\frac{\mu_o.I_2}{\pi.d} = \frac{\mu_o}{\pi.d}\left(I_1+I_2\right) = \frac{4\pi\times10^{-7}}{\pi(0{,}18)}\times(30+10)$$

$$\therefore\quad B_{total\,en\,A} = 88{,}9\times10^{6}\ T \equiv 88{,}9\ MT$$

51. Suponga que usted instala una brújula en el centro del tablero de un carro. Calcule una estimación del orden de magnitud del campo magnético que es producido en esta ubicación por la corriente cuando usted activa los faros. ¿Cómo se compara su estimación con el campo magnético de la Tierra? Usted puede suponer que el tablero está hecho en su mayor parte de plástico.

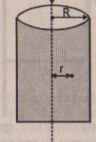
Resolución:

Este problema se puede resolver mediante un experimento para estimar dicho resultado y compararlo con el campo magnético de la tierra.

52. Imagine un largo alambre cilíndrico de radio R que tiene una densidad de corriente $J(r) = J_0\,(1 - r^2 / R^2)$ para $r \le R$ y $J(r) = 0$ para $r > R$, donde r es la distancia desde el eje del alambre. a) Encuentre el campo magnético resultante adentro ($r \le R$) y afuera ($r > R$) del alambre. b) Grafique la magnitud del campo magnético como una función de r. c) Encuentre la posición donde la magnitud del campo magnético es un máximo, y el valor de dicho campo máximo.

Resolución:

Sea: $J(r) = J_0\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)$ Si $r \leq R$ y $J(r) = 0$ si: $r > R$



Parte (a)

Sabemos que: $J = \dfrac{I}{A}$; donde: $A = \pi . r^2$

$$\Rightarrow \quad J \,.\, dA = dI$$

$$\Rightarrow \quad \frac{J_o}{R^2}\,(R^2 - r^2)(2\pi r\, dr) = dI$$

$$\Rightarrow \quad I = \int dI = \frac{2\pi}{R^2}.J_o \int_0^R \left(R^2 - r^2\right).r\,dr \;\; ; \;\; r \leq R$$

Si d = 18,0 cm ; $B_{en\,C} = 0$; $I_1 = ?$

Aplicando la ley de Ampere:

- Conductor (1)

$$\oint B.ds = \mu_o . I_1$$

$$\Rightarrow \quad B\left(2\pi\left(\frac{3d}{2}\right)\right) = \mu_o . I_1 \quad \Rightarrow \quad B_{en\,(c)} = \frac{\mu_o . I_1}{3\pi . d} \text{ (hacia arriba)}$$

- Conductor (2)

$$\oint B.ds = \mu_o . I_2$$

$$\Rightarrow \quad B\left(2\pi\left[\frac{d}{2}\right]\right) = \mu_o . I_2 \quad \Rightarrow \quad B_{en\,(c)} = \frac{\mu_o . I_2}{\pi . d} \text{ (hacia abajo)}$$

Por condición $B_{total\ en\ c} = 0$

Entonces: $\dfrac{\mu_o . I_1}{3\pi . d} - \dfrac{\mu_o . I_2}{\pi . d} = 0$

$$\Rightarrow \quad I_1 = 3I_2 = 3(10{,}0)$$

$$\therefore \quad I_1 = 30{,}0 \text{ A}$$

Parte (b)

Aplicando la ley de Ampere

- Conductor (1)

$$\oint B \,.\, ds = \mu_0 I_1 \Rightarrow \quad B(2\pi \,.\, d/2) = \mu_0 \,.\, I_1$$

$$\therefore \quad B_{en\,A} = \frac{\mu_o . I_1}{\pi . d} \text{ (hacia arriba)}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi . J_o . R^2}{2} \quad \text{para: } r \leq R$$

Luego:

Por la ley de Ampere: $\oint B \,.\, ds = \mu_0 \,.\, I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi \,.\, R) = \mu_o \,.\, \frac{\pi . J_o . R^2}{2}$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_o . J_o . R}{4} \qquad \text{para } r \leq R$$

Por otro lado:

Para: $r > R$; $J(r) = 0 \Rightarrow I = 0$

Luego: por la ley de Ampere

$$\oint B\, ds = \mu_0 \,.\, I = 0$$

$$\therefore \quad B = 0 \qquad \text{para } r > R$$

Parte (b)

Sabemos que I(r) según la parte (a) está dada por:

$$I(r) = \frac{\pi . J_o . r^2}{R^2}\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)$$

Luego: por la ley de Ampere: $\oint B\, ds = \mu_0 \,.\, I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi \,.\, r) = \mu_0 \,.\, \frac{\pi . J_o}{R^2}\, r^2 \left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad B(r) = \left(\frac{\mu_o . J_o}{2R^2}\right).\, r\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)$$

Graficando:

Analizando la función B(r)

Hallando primera derivada:

$$B'(r) = \frac{\mu_o . J_o}{2} - \frac{3\,\mu_o . J_o . r^2}{4R^2} = \frac{\mu_o J_o}{2}\left(\frac{2R^2 - 3r^2}{2R^2}\right)$$

$$B'(r) > 0 \quad \text{Si:} \quad r \in \left] -\frac{\sqrt{6}}{3}R\, ; \frac{\sqrt{6}}{3}R \right[\quad \Rightarrow B(r) \text{ es estrictamente creciente}$$

$$B'(r) < 0 \quad \text{Si:} \quad r \in \left] -\infty ; -\frac{\sqrt{6}}{3}R \right[\cup \left] \frac{\sqrt{6}}{3}R ; +\infty \right[\quad \Rightarrow B(r) \text{ es estrictamente decreciente}$$

Hallando segunda derivada: $B''(r) = -\frac{3}{2}\frac{\mu_o . J_o . r}{R^2}$

$B''(r) > 0$; si $r < 0 \Rightarrow B(r)$ es cóncava hacia arriba

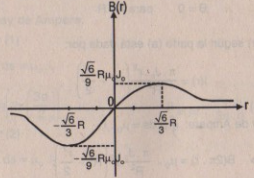
$B''(r) < 0$; si $r > 0 \Rightarrow B(r)$ es cóncava hacia abajo

Posibles puntos críticos: $B\left(r = \frac{\sqrt{6}}{3}R\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}.R.\mu_o.J_o$

$$B\left(r = -\frac{\sqrt{6}}{3}R\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}.R.\mu_o.J_o$$

Posible punto de interjección: $B_{(r=0)} = 0$

Gráfica:



Parte (c)

Sabemos que B(r) será un máximo cuando: $B'(r) = 0$

Entonces: $B'(r) = \frac{\mu_o . J_o}{2}\left(\frac{2R^2 - 3r^2}{2R^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 2R^2 - 3r^2 = 0 \quad \therefore \quad r = \frac{\sqrt{6}}{3}R \wedge r = -\frac{\sqrt{6}}{3}R$$

53. Una tira metálica de ancho w, delgada y muy larga, conduce una corriente I a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura P30.53. Encuentre el campo magnético en el punto P en el diagrama. El punto P está en el plano de la tira, alejado una distancia b de la tira.

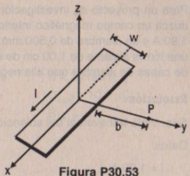
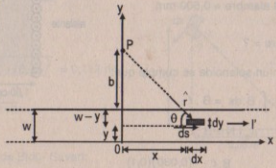


Figura P30.53

Resolución :

$B_{\text{en }P} = ?$

Sea:



Tenemos que: $\frac{I}{w.a} = \frac{I'}{a.dy} \quad \therefore \quad I = \frac{I'}{w}.dy$

Por la ley de Biot-Savart:

$$dBp = \frac{\mu_o . I'}{4\pi . r^2}|ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o . I . dy}{4\pi . \omega r^2} . \text{sen}\theta . dx$$

Donde: $\tan\theta = \frac{b + w - y}{x} \Rightarrow dx = -\csc^2\theta . d\theta\ (b + w - y)$

$$R^2 = [b + (w - y)]^2 + x^2 = \csc^2\theta (b + w - y)^2$$

Luego:

$$dBp = \frac{-\mu_o . I . dy . \text{sen}\theta . \csc^2\theta\ (b + w - y) d\theta}{4\pi . w (b + w - y)^2 \csc^2\theta} = -\frac{\mu_o . I . dy \,\text{sen}\,\theta\, d\theta}{(4\pi . w)(b + w - y)}$$

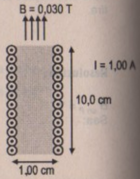
$$\Rightarrow B_{\text{en }P} = \int_0^{\omega}\int_0^{\pi} \frac{\mu_o . I . dy}{(4\pi . w)(b + w - y)} . \text{sen}\theta d\theta = \int_0^{\omega} -\frac{\mu_o . I}{2\pi . w} . \left(\frac{1}{b + w - y}\right) dy$$

$$\therefore \quad B_{\text{en }P} = \left(\frac{\mu_o . I}{2\pi . w}\right) . \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right) \quad \text{(hacia arriba)}$$

54. Para un proyecto de investigación, una estudiante necesita un solenoide que produzca un campo magnético interior de 0,030 0 T. Ella decide usar una corriente de 1,00 A y un alambre de 0,500 mm de diámetro. Enrolla el solenoide en capas sobre una forma aislante de 1,00 cm de diámetro y 10,0 cm de largo. Determine el número de capas de alambre que ella necesita y la longitud total del alambre.

Resolución:

Sea: Vista transversal del solenoide:



Datos:

I = 1,00 A
Diámetro del alambre = 0,500 mm
N = ?
Long. alambre = ?

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B.ds = \int B.ds = B.\ell$$

$$\Rightarrow \quad \mu_o.I.N = B.\ell$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{B.\ell}{\mu_o.I} = \frac{(0,030)(0,1)}{4\pi\times10^{-7}\times(1)}$$

$\therefore$ N = 2400 vueltas ó capas

Luego: Long. del alambre = (2 400 capas) × (2π.R)

$$\Rightarrow \text{Long. del alambre} = 2\pi\times\frac{(0,01)}{2}\times(2\,400)$$

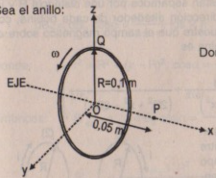
$\therefore$ Long . del alambre = 75,4 m

55. Un anillo no conductor con 10,0 cm de radio, está cargado uniformemente con una carga total positiva de 10,0 μC. El anillo gira a una rapidez angular constante de 20,0 rad/s alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a 5,00 cm de su centro?

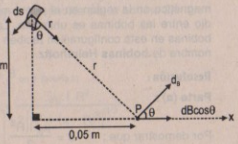
56. Un anillo no conductor de radio R está cargado uniformemente con una carga total positiva q. El anillo gira a una rapidez angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo a una distancia R/2 de su centro?

Resolución 55 y 56:

Sea el anillo:



Donde: ω = 20 rad/s
Q_{total} = 10,0 μC
$B_{en\,P}$ = ?



Donde:

$$r = \sqrt{(0,1)^2+(0,05)^2} = 0,112 \text{ m}$$

$$\cos\theta = \frac{0,1}{0,112}$$

Por la ley de Biot - Savart:

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_o.I}{4\pi.r^2}|ds\times\hat{r}|.\cos\theta = \frac{\mu_o.I.ds}{4\pi.r^2}.\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad B_{en\,P} = \oint dB\cos\theta = \frac{\mu_o.I}{4\pi.r^2}\cos\theta\oint ds = \frac{\mu_o.I}{4\pi.r^2}\cos\theta(2\pi.R)$$

$$\Rightarrow \quad B_{en\,P} = \frac{\mu_o.I}{2r^2}.R.\cos\theta = \frac{\mu_o.I}{2(0,112)^2}(0,1).\left(\frac{0,1}{0,112}\right) \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $\omega . T = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{Q.\omega}{2\pi} = \frac{Q}{T} = I$$

Luego:

$$I = \frac{Q.\omega}{2\pi} = \frac{10\times10^{-6}\times(20)}{2(3,1416)} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

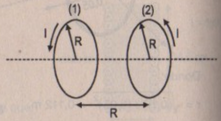
$$B_{en\,P} = 4\pi\times10^{-7}\times\left[\frac{10\times10^{-6}\times(20)}{2(3,1416)}\right]\left(\frac{(0,1)^2}{2(0,112)^3}\right)$$

$\therefore \quad B_{en\,P} = 143\times10^{-12}$ T ≡ 143 pT (alejándose)

57. Dos bobinas circulares de radio R están colocadas en forma perpendicular a un eje común. Los centros de las bobinas están separados por una distancia R y una corriente estable I fluye en la misma dirección alrededor de cada bobina, como se muestra en la figura P30.57. a) Demuestre que el campo magnético sobre el eje a una distancia x del centro de una bobina es

$$B = \frac{\mu_o . I . R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2+x^2-2Rx)^{3/2}}\right]$$

b) Demuestre que dB/dx y d^2B/dx^2 son ambas cero en un punto a la mitad entre las bobinas. Esto significa que el campo magnético en la región en el punto medio entre las bobinas es uniforme. Las bobinas en esta configuración reciben el nombre de **bobinas Helmholtz**.

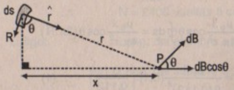


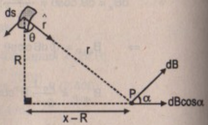
Resolución :

Parte (a) :

Por demostrar que : $$B = \frac{\mu_o . I . R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2+x^2-2Rx)^{3/2}}\right]$$

A una distancia « x » sobre el eje de las bobinas.





Por la ley de Biot - Savart:
(Bobina 1)

$$dB_1 = dB_1 \cos\theta = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times \hat{r}\,| . \cos\theta = \frac{\mu_o . I . \cos\theta . ds}{4\pi . r^2} . ds$$

Donde: $r^2 = R^2 + x^2$; $\cos\theta = \dfrac{R}{(R^2+(x)^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow \quad B_{en\,P} = \oint d\,B_1 \cos\theta = \frac{\mu_o . I R}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}} \oint d\,s$$

$$\therefore \quad B_{en\,P} = \frac{\mu_o . I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \text{ (producida por la bobina 1)}$$

(Bobina 2)
Por la ley de Biot-Savart:

$$dB_2 = dB_2 \cos\alpha = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds \times r| . \cos\alpha = \frac{\mu_o . I . \cos\alpha . ds}{4\pi . r^2}$$

Donde: $r^2 = R^2 + (x-R)^2$; $\cos\alpha = \dfrac{R}{(R^2+(x-R)^2)^{1/2}}$

Entonces: $$B_{en\,P} = \oint d\,B_2 \cos\alpha = \frac{\mu_o . I . R}{4\pi\left[R^2+(x-R)^2\right]^{3/2}} \oint d\,s$$

$$\therefore \quad B_{en\,P} = \frac{\mu_o . I . R^2}{2\left[R^2+(x-R)^2\right]^{3/2}} \text{ (producida por la bobina 2)}$$

En consecuencia:

$$B_{total\,en\,P} = B_{en\,P\,(bobina\,1)} + B_{en\,P\,(bobina\,2)}$$

$$\Rightarrow \quad B_{total\,en\,P} = \frac{\mu_o . I . R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} + \frac{\mu_o . I . R^2}{2\left[R^2+(x-R)^2\right]^{3/2}}$$

$$\therefore \quad B_{total\,en\,P} = \frac{\mu_o . I . R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2+x^2-2Rx)^{3/2}}\right] \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $\dfrac{dB}{dx} = 0$; $\dfrac{d^2B}{dx^2} = 0$ en $x = \dfrac{R}{2}$

Hallando la primera derivada:
Tenemos que:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_o I . R^2}{2}\left[\frac{-3x}{(R^2+x^2)^{5/2}} - \frac{3(x-R)}{\left[2R^2+x^2-2Rx\right]^{5/2}}\right] \quad \text{"comprobar"}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dB}{dx} = 0 \text{ en } x = R/2 \qquad \text{L q q d .}$$

Hallando la segunda derivada:

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \left[\frac{3(4x^2-R^2)}{(R^2+x^2)^{7/2}} + \frac{3(3R^2+4x^2-8Rx)}{(2R^2+x^2-2Rx)^{7/2}}\right]\frac{\mu_o . I . R^2}{2} \text{ (comprobar)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2B}{dx^2} = 0 \text{ para } x = R/2 \quad \text{Lqqd.}$$

58. Dos bobinas de alambre idénticas, circulares y planas, tienen cada una 100 vueltas y un radio de 0,500 m. Las bobinas se arreglan como un conjunto de bobinas Helmholtz (véase la Fig. P30.57), paralelas y con una separación de 0,500 m. Si cada una de ellas conduce una corriente de 10,0 A, determine la magnitud del campo magnético en un punto a la mitad entre las bobinas y sobre el eje común de las mismas.

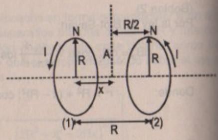


Figura P30.57 Problemas 57 y 58.

Resolución :

Donde: $I = 10{,}0$ A ; $R = 0{,}500$ m

$N = 100$ vueltas ; $B_{en\ A} = ?$

Por la ley de Biot-Savart:

Bobina (1)

$$B_{en\ A} = \frac{\mu_o.N.I.R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \quad \text{(ya hallado: problema 57)}$$

Entonces. Para $x = R/2$

$$B_{en\ A} = \frac{\mu_o.N.I.R^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.\frac{\mu_o.N.I}{R}$$

Reemplazando datos: $$B_{en\ A} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.\frac{(4\pi\times10^{-7})\times(10^2)(10)}{0{,}500}$$

$\therefore$ $B_{en\ A} = 8{,}99 \times 10^{-4}$ T $\cong$ 899μT (producida por la bobina 1)

Bobina (2)

Por la ley de Biot-Savart:

$$B_{en\ A} = \frac{\mu_o.I.R^2.N}{2\left[R^2+(R-x)^2\right]^{3/2}} \quad \text{(ya hallado: problema 57)}$$

Entonces. Para $x = R/2$

$$B_{en\ A} = \frac{\mu_o.I.N.R^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.\frac{\mu_o.I.N}{R}$$

Reemplazando datos: $$B_{en\ A} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.\frac{(4\pi\times10^{-7})(10^2)(10)}{0{,}500}$$

$\therefore$ $B_{en\ A} = 8{,}99 \times 10^{-4}$ T $\cong$ 899 μT (producida por la bobina)

En consecuencia: $B_{total\ en\ A} = 1\,798 \times 10^{-6}$ T $\cong$ 1 798 μT

59. Dos espiras circulares son paralelas, coaxiales y están casi en contacto, a 1,00 mm de separación (Fig. P30.59). Cada espira tiene 10,0 cm de radio. La espira superior conduce una corriente de 140 A en el sentido de las manecillas del reloj. Por la espira inferior circula una corriente de 140 A en sentido contrario al de las manecillas del reloj. a) Calcule la fuerza magnética que la espira inferior ejerce sobre la superior. b) La espira superior tiene una masa de 0,021 0 kg. Calcule su aceleración, suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre ella son la fuerza de la parte a) y su peso. (Sugerencia: piense cómo se parece una espira a un gusano montado en la otra espira)

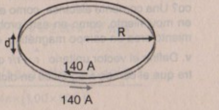


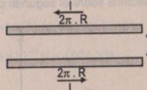
Figura P30.59

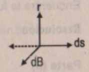
Resolución :

Donde: $R = 0{,}1$ m ; $d = 1{,}00$ mm

$I = 140$ A

Parte (a)





$$F_B = \frac{\mu_o.I_1.I_2}{2\pi.d}.(2\pi.R) = \frac{\mu_o.I^2.R}{d}$$

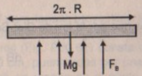
Entonces: $$F_B = \frac{4\pi\times10^{-7}(140)^2}{1{,}00\times10^{-3}} \times (0{,}1)$$

$\therefore$ $F_B = 2{,}46$ N (hacia arriba)

Parte (b)

$M_{espira\ superior} = 0{,}021$ kg.

Nos piden $a = ?$



Tenemos que: $F_B - Mg = M.a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F_B - Mg}{M} = \frac{2,46-(0,021)(9,8)}{0,021}$$

$$\therefore \quad a = 107\ m/s^2 \text{ (hacia arriba)}$$

60. ¿Qué objetos experimentan una fuerza en un campo eléctrico? El capítulo 23 responde esta pregunta: cualquier carga eléctrica, estacionaria o en movimiento, distinta a la carga que crea el campo. ¿Qué crea un campo eléctrico? Cualquier carga eléctrica, estacionaria o en movimiento, también como se estudió en el capítulo 23. ¿Qué objetos experimentan una fuerza en un campo magnético? Una corriente eléctrica o una carga eléctrica en movimiento distintas a la corriente o la carga que crearon el campo, como se descubrió en el capítulo 29. ¿Qué crea un campo magnético? Una corriente eléctrica, como encontró en la sección 30.11, o una carga eléctrica en movimiento, como en este problema. a) Para exhibir cómo una carga en movimiento crea un campo magnético, considere una carga q que se mueve a velocidad **v**. Defina el vector unitario $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ que apunta de la carga a alguna ubicación. Muestre que el campo magnético en dicha ubicación es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{qv\times\hat{r}}{r^2}$$

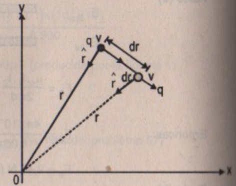
b) Encuentre la magnitud del campo magnético a 1,00 mm al lado de un protón que se mueve a $2,00 \times 10^7$ m/s. c) Encuentre la fuerza magnética sobre un segundo protón en este punto, moviéndose a la misma rapidez en la dirección opuesta. d) Encuentre la fuerza eléctrica sobre el segundo protón.

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q.v\times\hat{r}}{r^2}$$



Sabemos que por la ley de Biot-Savart se cumple que:

$$dB = \frac{\mu_0 .I}{4\pi .r^2}\cdot\left|d_r\times\hat{r}\right|$$

$$\Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0 .I}{4\pi .r^2}\text{ . dr . sen}\theta \qquad ...(1)$$

Por otro lado:

$$v\text{ . dt} = dr \quad \Rightarrow \quad \frac{dq\text{ . }v}{dr} = \frac{dq}{dt} = I$$

Entonces reemplazando (2) en (1) resulta que:

$$B_o = \frac{\mu_o}{4\pi .r^2}\int\frac{v.dq}{dr}\text{ . sen}\theta .dr \quad \Rightarrow \quad B_o = \frac{\mu_o .v.q\,\text{sen}\theta.(1)}{4\pi r^2}$$

$$\therefore \quad B_o^{\cdot} = \frac{\mu_o .q.v.\hat{r}}{4\pi .r^2} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si: $r = 1,00\text{ mm} = 1,00\times10^{-3}\text{ m}$; $v = 2.00\times10^7\text{ m/s}$

Entonces:

$$B = \frac{\mu_o .q_{p+}.v\times\hat{r}}{4\pi .r^2} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times\left(1,6\times10^{-19}\right)\left(2,00\times10^{7}\right)\times\hat{r}}{4\pi\times\left(1,00\times10^{-2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad B = 320\times10^{-15}T = 320\text{ f T}\,\hat{r}$$

Parte (c)

Sabemos que: $F_B = q\text{ . }v\times B$

$$\Rightarrow \quad F_B = \left(1,6\times10^{-19}\right).\left(2,00\times10^{7}\right).\left(320\times10^{-15}\right)\text{sen}\,30°$$

$$\therefore \quad F_B = 1,024\times10^{-24}N = 1,024\text{ YN}$$

Parte (d)

$$F_e = \frac{k_e .q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_e = \frac{\left(8,99\times10^{9}\right).\left(1,6\times10^{-19}\right)^2}{\left(1,00\times10^{-3}\right)^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 230\times10^{-24}N = 230\text{ YN}$$

61. Se ha sugerido el uso de *cañones de riel* para lanzar proyectiles al espacio sin necesidad de cohetes químicos, así como para armas de guerra antimisiles tierra-aire. Un modelo a escala de un cañón de riel (Fig. P30.61) consta de dos largos rieles horizontales paralelos separados 3,50 cm, puenteados por una barra BD de 3,00 g de masa. La barra originalmente está en reposo en el punto medio de los rieles y es libre de deslizarse sin fricción. Cuando se cierra el interruptor, la corriente eléctrica en el circuito ABCDEA se establece muy rápidamente. Los rieles y la barra tienen baja resistencia eléctrica, y la corriente está limitada a una constante de 24,0 A por la fuente de poder. a) Encuentre la magnitud del campo magnético a 1,75 cm de un solo alambre recto muy largo, el cual conduce una corriente de 24,0 A. b) Encuentre el vector de campo magnético en el punto C en el diagrama, el punto medio de la barra, inmediatamente después de que se cierra el interruptor. (Sugerencia: considere qué conclusiones puede derivar de la ley Biot-Savart.) c) En otros puntos a lo largo de la barra BD, el campo está en la misma dirección que en el punto C, pero mayor en magnitud. Suponga que el campo magnético efectivo promedio a lo largo de BD es cinco veces mayor que el campo en C. Con esta suposición encuentre el vector fuerza sobre la barra. d) Encuentre el vector aceleración con el cual la barra comienza a moverse. e) ¿La barra se mueve con aceleración constante? f) Encuentre la velocidad de la barra después de que ha viajado 130 cm hacia el extremo de los rieles.

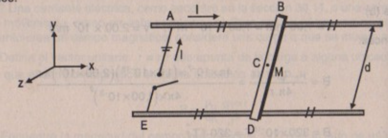


Figura P30.61

Resolución :

Datos: d = 3,50 cm ; C = punto medio de BD

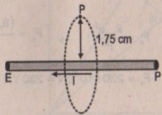
M = Masa de BD = 3,00 g

B, D puntos D medios de A... y E... respectivamente

I = 24,0 A

Parte (a)

Sea el alambre recto ED



Entonces por la ley de Ampere:

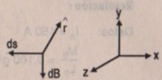
$$\oint B\,.ds = \mu_0\,.\,I$$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi\,.\,r) = \mu_0\,.\,I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0.I}{2\pi.r} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(24)}{2\pi\left(1{,}75\times10^{-2}\right)}$$

$$\therefore \quad B_{en\,P} = 274\times10^{-6}\,T \equiv 274\,\mu T$$

Parte (b)

De (a) el campo magnético en P = $B_{en\,C}$



Entonces: $$B_{en\,C} = -274\ \mu T\ \hat{j}$$

Por otro lado : $$v\,.\,T = dr \Rightarrow \frac{q\,.\,v}{dr} = \frac{q}{T} = I$$

Entonces: $$B = \frac{\mu_o\,.q.\,v}{\left(4\pi.r^2\right)dr}\ .\ dr\ \text{sen}\theta$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_o\,.q.v.\,\hat{r}}{4\pi.r^2} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si: $r = 1{,}00\ mm = 1{,}00\times10^{-3}\ mm$; $v = 2{,}00\times10^{7}\ m/s$

Entonces: $$B = \frac{\mu_o\,.\,q_{p^+}}{4\pi.r^2}.v\times\hat{r} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(1{,}6\times10)^{-19}\left(2{,}00\times10^{7}\right)\times\hat{r}}{4\pi\left(1{,}00\times10^{-3}\right)^2}$$

$$\therefore \quad B = 320\times10^{-15}\ T \equiv 320\ f\,T\ \hat{r}$$

Parte (c)

Sabemos que: $F_B = q\,.\,v\times B$

$$\Rightarrow \quad F_B = 1{,}6\times10^{-19}\,(2{,}00\times10^{7})\times(320\times10^{-5})\ \text{sen}\ 90°$$

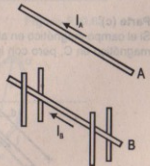
$$\therefore \quad F_B = 1{,}02\times10^{-14}\ N \equiv 10{,}2\ fN$$

Parte (d)

$$F_e = \frac{k_e.q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad Fe = \frac{8{,}99\times10^{9}\times\left(1{,}6\times10^{-19}\right)^2}{\left(1{,}00\times10^{-3}\right)^2}$$

$$\therefore \quad F_e = 320\times10^{-24}\ N$$

62. Dos largos conductores paralelos portan corrientes en la misma dirección, como se indica en la figura P30.62. El conductor A lleva una corriente de 150 A y se mantiene firmemente en su posición. El conductor B lleva una corriente I_B y se deja que se deslice libremente arriba y abajo (paralelo a A) entre un conjunto de guías no conductoras. Si la masa por unidad de longitud del conductor B es 0,100 g/cm, ¿qué valor de la corriente I_B resultará en equilibrio cuando la distancia entre los dos conductores es de 2,50 cm?



Resolución :

Datos: $I_A = 150$ A

$\dfrac{M_B}{L_B} = 0{,}100$ g/cm

$I_B = ?$

d (entre 2 conductores) = 2,50 cm

Sabemos que el campo producido por el conductor A en B está dado por:

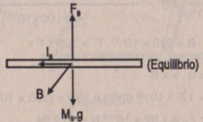
Aplicando la ley de Ampere:

$$\oint B\, ds = \mu_0 \cdot I_A$$

$$\Rightarrow B\,(2\pi.d) = \mu_0 \cdot I_A$$

$$\therefore\ B = \frac{\mu_0 . I_A}{2\pi . d} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(150)}{2\pi\left(2{,}5\times10^{-2}\right)} = 1{,}2\times10^{-3}\text{ T} \equiv 1{,}2\text{ mT (hacia afuera)}$$

Luego:



$$\Rightarrow F_B = M_B \cdot g = I \cdot L_B \cdot B = M_B . g$$

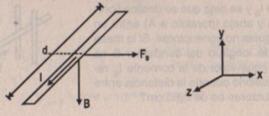
$$\Rightarrow I_B = \left(\frac{M_B}{L_B}\right)\left(\frac{g}{B}\right)$$

$$\Rightarrow I_B = 0{,}100\ \frac{g}{cm}\times\frac{10^2}{10^3}\left(\frac{kg}{g}\right)\left(\frac{cm}{m}\right)\times\left(\frac{9{,}8}{1{,}2\times10^{-3}}\right)$$

$$\therefore\ I_B = 81{,}7\text{ A}$$

Parte (c)

Si el campo magnético en algún punto a lo largo de BD es 5 veces más que el campo magnético en C, pero con igual dirección, entonces:



$$F_B = I \cdot L\times B = I \cdot d\times B$$

$$\Rightarrow F_B = 24 \cdot (3{,}5\times10^{-2})\ \hat{k}\ \times (274\times10^{-6})\left(-\hat{j}\right)$$

$$F_B = 1{,}15\times10^{-3}\ \hat{k} \equiv 1{,}15\text{ mN }\hat{i}$$

Parte (d)

Por la segunda ley de Newton:

$$F_B = M \cdot a$$

$$\Rightarrow 1{,}15\times10^{-3} = 3{,}00\times10^{-3} \cdot a$$

$$\therefore\ a = 0{,}384\ \hat{i}\ \text{m/s}^2$$

Parte (e)

Sí. La aceleración es constante

Parte (f)

Por cinemática: $v_f^2 = v^2 + 2.a.d$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2(0{,}384)(1{,}30)}$$

$$\therefore\ v_f = 0{,}999\ \hat{i}\ \text{m/s}$$

63. Sobre el rodillo izquierdo de una larga banda no conductora se esparce carga como en la figura P30.63. La banda conduce la carga, con una densidad de carga superficial uniforme σ, conforme se mueve a una rapidez v entre los rodillos, como se muestra. La carga se elimina con un limpiaparabrisas en el rodillo derecho. Considere un punto exactamente arriba de la superficie de la banda móvil. a) Encuentre una expresión para la magnitud del campo magnético B en este punto. b) Si la banda está cargada positivamente, ¿cuál es la dirección de B? (Advierta que la banda puede considerarse como una lámina infinita).

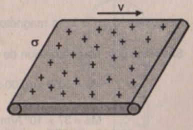
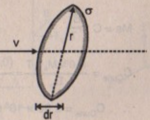


Figura P30.63

Resolución :

Parte (a)

Sea una parte de la banda móvil:



Por la ley de Ampere: $\oint B \cdot ds = \mu_0 \cdot I$

$$\Rightarrow \quad B\,(2\pi.r) = \mu_0 \,.\, I \qquad \dots (1)$$

Por otro lado: $$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma . dA}{dt} = \frac{\sigma . 2\pi . r . dr}{dt} = \sigma . 2\pi . r . v \qquad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$2B\,(2\pi \,.\, r) = \mu_0 \,.\, \sigma \,.\, 2\pi \,.\, r \,.\, v \quad \text{(por simetría)}$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_0}{2} . \sigma . v$$

Parte (b)

El campo magnético está dirigido hacia fuera de la página.

64. Una sustancia paramagnética particular alcanza 10,0% de su magnetización de saturación cuando se pone en un campo magnético de 5,00 T a una temperatura de 4,00 K. La densidad de los átomos magnéticos en la muestra es de $8{,}00 \times 10^{27}$ átomos/m^3, y el momento magnético por átomos es de 5,00 magnetones de Bohr. Calcule la constante de Curie para esta sustancia.

Resolución :

Datos: $B = 5{,}00$ T $\quad n = \dfrac{\text{densidad de los átomos}}{m^3} = 8{,}00 \times 10^{27}$ átomos/m^3

$T = 4{,}00$ K $\quad u = \dfrac{\text{momento magnetico}}{\text{átomo}} = 5{,}00$ magnetones de Bohr

Nos piden: $C_{curie} = ?$; 1 magnétón de Bohr $= 9{,}27 \times 10^{-24}$ A.m^2/átomo

Sabemos que: Magnetización de saturación (Ms) = μ. n

$$\Rightarrow \quad Ms = 5{,}00 \times \left(8{,}00 \times 10^{27}\ \frac{\text{átomos}}{m^3}\right) \times \left(9{,}27 \times 10^{-24}\ A\ \frac{m^2}{\text{átomo}}\right)$$

$$\therefore \quad Ms = 37 \times 10^6\ A/m \equiv 37\ M.A/m$$

Por otro lado: (por la ley de Curie)

$$Ms = C \,.\, \frac{B_o}{T}$$

$$\Rightarrow \quad C_{Curie} = \frac{(10\% M_s).T}{B_o} = \frac{(0{,}1)(37 \times 10^6)(4{,}00)}{5{,}00}$$

$$\therefore \quad C_{Curie} = 2{,}96 \times 10^6\ K.A/T.m$$

65. Un imán de barra (masa = 39,4 g, momento magnético = 7,65 J/T, longitud = 10,0 cm) se conecta al techo por medio de una cuerda. Un campo magnético externo uniforme se aplica horizontalmente, como se muestra en la figura P30.65. El imán está en equilibrio, formando un ángulo θ con la horizontal. Si θ = 5,00°, determine la magnitud del campo magnético aplicado.

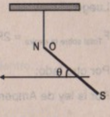
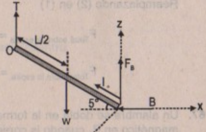


Figura P30.65

Resolución :

Datos: $M_{Imán} = 39{,}4$ g. ; $\theta = 5{,}00°$
$\mu = 7{,}65$ J/T ; $B = ?$
Long = 0,1 m

Diagrama de Cuerpo Libre : (Vista frontal)



$\Sigma\tau_0 = 0$ (condición de equilibrio)

$$\Rightarrow \quad \tau_{FB} = \tau_{Peso} = W \,.\, \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \times B = \mu \,.\, B \operatorname{sen}5° = M.g.\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{M.g.L}{2\mu.\operatorname{sen}5°} = \frac{(39{,}4\times10^{-3})(9{,}81)(0{,}1)}{2(7{,}65)(0{,}087)}$$

$$\therefore \quad B = 28{,}8 \times 10^{-3}\ T \equiv 28{,}8\ mT$$

66. Un alambre recto infinitamente largo que conduce una corriente I_1 está parcialmente rodeado por una espira como se muestra en la figura P30.66. La espira tiene una longitud L y un radio R, y conduce una corriente I_2. El eje de la espira coincide con el alambre. Calcule la fuerza ejercida sobre la espira.

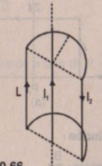
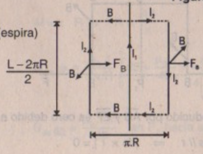
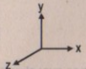


Figura P30.66

Resolución :

Vista frontal (espira)





Luego :

$$F_{\text{Total sobre la espira}} = 2F_B = 2.I_2 \cdot \left(\frac{L-2\pi.R}{2}\right)\left(-\hat{j}\right)\times B\left(-\hat{k}\right) \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

Por la ley de Ampere: $\oint B\ ds = \mu_0 \cdot I_1$

$$\Rightarrow \quad B\,(2\pi\,.\,R) = \mu_0 \cdot I_1$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi R} \quad \text{... (2) hacia adentro}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$F_{\text{Total sobre la espira}} = I_2\,(L-2\pi.R)\left(\hat{j}\right)\times\left(\frac{\mu_0.I_1}{2\pi.R}\right)\left(-\hat{k}\right)$$

$$\therefore \quad F_{\text{Total sobre la espira}} = \frac{\mu_0\, I_1 . I_2}{2\pi R}\,(L-2\pi.R)\ \hat{i}$$

67. Un alambre se dobla en la forma mostrada en la figura 30.67, y se mide un campo magnético en P_1 cuando la corriente en el alambre es I. El mismo alambre se forma después de modo que se ilustra en la figura P30.67b, y el campo magnético se mide en el punto P_2 cuando la corriente es otra vez I. Si la longitud total del alambre es la misma en cada caso, ¿cuál es la relación de B_1/B_2?

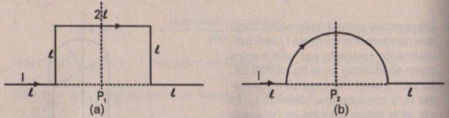
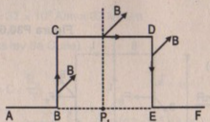


Figura P30.67

Resolución :

Nos piden: $\dfrac{B_1}{B_2}$

Sea:



Tenemos que: el campo producido por $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ es cero debido a que:

$$ds \,//\, r \quad \Rightarrow \quad |ds \times \hat{r}\,| = 0$$

Por otro lado:

Por la ley de Biot-Savart:

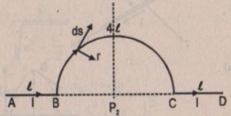
$$B_{\text{de }(\overline{BC})} = \frac{\mu_o.I}{2\pi.L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{en } P_1 \text{ hacia adentro.}$$

$$B_{\text{de }(\overline{DE})} = -\frac{\mu_o.I}{2\pi.L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{en } P_1 \text{ hacia adentro.}$$

$$B_{\text{de }(\overline{CD})} = \frac{\mu_o.I}{\pi.L}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{en } P_1 \text{ hacia adentro.}$$

Por lo tanto: $B_{\text{Total en P1}} = \dfrac{\mu_o.I}{\pi^2.L}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ hacia adentro

Por otro lado:



Tenemos que:

El campo magnético producido por $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es cero debido a que ds // $\hat{r}$ por otro lado:

Por la ley de Biot-Savart:

$$dB = \frac{\mu_o.I}{4\pi.R^2}\,|ds\times\hat{r}\,| = \frac{\mu_o.I.R.ds}{4\pi.R^2}$$

Donde: $4\ell = \pi\,.\,R \Rightarrow R = \dfrac{4\ell}{\pi}$

Luego: $B_{\text{de }\overline{BC}} = \dfrac{\mu_o.I}{4\pi.R}\displaystyle\int_0^{\pi} d\theta = \dfrac{\mu_o.I}{4R} = \dfrac{\mu_o.I}{4\left(\dfrac{4\ell}{\pi}\right)}$

$$\therefore \quad B_{\text{de }\overline{BC}} = \frac{\mu_o.I.\pi}{16\ell} \quad \text{en } P_2 \text{ hacia adentro}$$

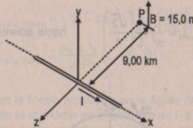
En consecuencia: $$\frac{B_1}{B_2} = \frac{B_{en\,P_1}}{B_{en\,P_2}} = \frac{\dfrac{\mu_o . I . \sqrt{2}}{4\pi . \ell}}{\dfrac{\mu_o . I . \pi}{16\ell}}$$

Por lo tanto: $$\frac{B_1}{B_2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}$$

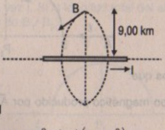
68. En 1962 se efectuaron mediciones del campo magnético de un gran tornado en el Observatorio Geofísico en Tulsa, Oklahoma. Si el campo del tornado fue B = 15,0 nT y apuntaba al norte cuando el tornado estaba a 9,00 km al este del observatorio, ¿qué corriente circulaba arriba o abajo del embudo del tornado, modelado como un largo alambre recto?

Resolución :

Sea el Tornado:



Vista superior (arriba)



Por la ley de Ampere: $\oint B . ds = \mu_0 . I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi . R) = \mu_0 . I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{B . 2\pi . R}{\mu_0} = \frac{15{,}0\times10^{-9}\times(2\pi)(9\times10^3)}{4\pi\times10^{-7}}$$

$$\therefore \quad I = 675 \text{ A}$$

69. Un alambre tiene la forma de un cuadrado con longitud de lado L (Fig. 30.69). Muestre que cuando la corriente en la espira es I, el campo magnético en el punto P, a una distancia x del centro del cuadrado a lo largo de su eje, es

$$B = \frac{\mu_o I L^2}{2\pi\left(x^2 + \dfrac{L^2}{4}\right)\sqrt{x^2 + \dfrac{L^2}{2}}}$$

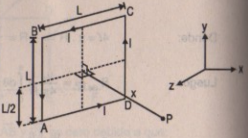


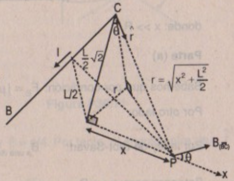
Figura P30.69

Resolución :

Por demostrar que: $$B = \frac{\mu_o . I . L^2}{2\pi\left(x^2 + \dfrac{L^2}{4}\right)\sqrt{x^2 + \dfrac{L^2}{2}}}$$

Sabemos que: el campo producido por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ en P son iguales en magnitud y dirección, la cual están a lo largo del eje del cuadrado. Luego:

Analizando el alambre $\overline{BC}$



Luego:

Por la ley de Biot-Savart:

$$dB_P = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} . |ds \times \hat{r}| = \frac{\mu_o . I . dx . \text{sen}\,\theta}{4\pi . \left(\dfrac{L^2}{4} + x^2\right)}$$

Pero $$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \dfrac{L^2}{2}}}$$

Entonces: $$dB_P = \frac{\mu_o . I . x . dx}{4\pi\left(x^2 + \dfrac{L^2}{4}\right)\sqrt{x^2 + \dfrac{L^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow B_{Total\,(\overline{BC})} = \int dB_p . \cos\theta = \frac{\mu_o . I}{4\pi\left(x^2 + L^2/4\right)}\sqrt{x^2 + L^2/2}\int_0^L dx$$

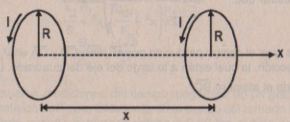
En consecuencia:

$$B_{Total\,en\,P} = 4\left[\frac{\mu_o . I . L^2}{8\pi\left(x^2 + L^2/2\right)}\sqrt{x^2 + L^2/2}\right] = \frac{\mu_o . I . L^2}{2\pi\left(x^2 + L^2/4\right)\sqrt{x^2 + L^2/2}} \quad \text{Lqqd.}$$

70. La fuerza sobre un dipolo magnético μ alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección x alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección x está dada por $F_x = \mu\ dB/dx$. Suponga que dos espiras de alambre planas, tienen cada una radio R y conducen una corriente I. a) Si las espiras se arreglan coaxialmente y se separan mediante una distancia variable x, la cual es grande comparada con R, muestre que la fuerza magnética entre ellas varía como $1/x^4$. b) Evalúe la magnitud de esta fuerza si I = 10,0 A, R = 0,500 cm y x = 5,00 cm.

Resolución :

Sean las espiras que se arreglan coaxialmente:



donde: x >> R

Parte (a)

Sabemos que por condición: $F_B = |\mu| \cdot \dfrac{dB}{dx}$

Por otro lado:

Por la ley de Biot-Savart: $B_{\text{a una distancia } x} = \dfrac{\mu_o . I . R^2}{2\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$

Entonces para: x >> R

$$B = \frac{\mu_o . I . R^2}{2\left[x^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_o . I . R^2}{2\,x^3}$$

Luego: $$\frac{dB}{dx} = \frac{-3\,\mu_o . I . R^2}{2 . x^4}$$

En consecuencia: $F_{B(x)} = |\mu| \left[\dfrac{3\mu_o . I . R^2}{2 . x^4}\right]$ varía como $1/x^4$

Parte (b)

Evaluando: F_B = ?, para : I = 10,0 A ; R = 0,500 cm; x = 5,00 cm

Entonces: $$F_B = \mu\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(\frac{10\left(0,5\times10^{-2}\right)^2}{(0,05)^4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad F_B = |(10)\,(\pi)(0,5\times10^{-2})^2 \left[\frac{-3\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left[10\left(0,5\times10^{-2}\right)^2\right]}{2(0,05)^4}\right]$$

71. Un alambre por el que circula una corriente I se dobla en la forma de una espiral exponencial, $r = e^{\theta}$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, como muestra la figura P30.71. Para completar una espira, los extremos de la espiral se conectan por medio de un alambre recto a lo largo del eje x. Encuentre la magnitud y dirección de B en el origen. Sugerencia: emplee la ley de Biot-Savart. El ángulo β entre una línea radial y su línea tangente en cualquier punto sobre la curva $r = f(\theta)$ se relaciona con la función de la siguiente manera:

$$\tan\beta = \frac{r}{dr/d\theta}$$

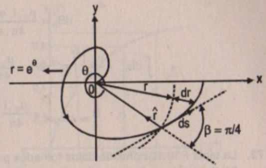


Figura P30.71

Por tanto, en este caso $r = e^{\theta}$, $\tan\beta = 1$ y $\beta = \pi/4$. Por tanto, el ángulo entre **ds** y $\hat{r}$ es $\pi - \beta = 3\pi/4$. Además,

$$ds = \frac{dr}{\operatorname{sen}\pi/4} = \sqrt{2}\,dr$$

Resolución :

Hallar B en el origen = ?

Datos: $\tan\beta = \dfrac{r}{\frac{dr}{ds}}$; $\beta = \pi/4$; $ds = \dfrac{dr}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \sqrt{2}.dr$

Sabemos que por la ley de Biot-Savart :

$$dB_0 = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2}\,|ds\times\hat{r}| = \frac{\mu_o . I . ds}{4\pi . r^2}\,\operatorname{sen}(\pi-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad dB_0 = \frac{\mu_o . I\left(\sqrt{2}\,dr\right)}{4\pi . r^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\mu_o . I}{4\pi . r^2} . dr \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

De la condición: $$\tan(\beta) = 1 = \frac{r}{dr/d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad dr = r.d\theta = e^{\theta} . d\theta \qquad \text{... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$dB_0 = \frac{\mu_0 . I . e^{\theta} . d\theta}{4\pi . e^{2\theta}} . d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \int dB_0 = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\theta}\, d\theta = -\frac{\mu_0 . I}{4\pi} . e^{-\theta}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\therefore \quad B_{\text{en el origen}} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\,(1 - e^{-2\pi})$$

72. La tabla P30.72 contiene datos tomados para un material ferromagnético. a) Construya una curva de magnetización a partir de los datos. Recuerde que $B = B_0 + \mu_0 M$. b) Determine la proporción B/B_0 para cada par de valores de B y B_0, y elabore una gráfica de B/B_0 *versus* B_0 (La fracción B/B_0 se conoce como permeabilidad relativa y es una medida del campo magnético inducido).

TABLA P30.72

B(T)	B_0(T)
0,2	$4,8 \times 10^{-5}$
0,4	$7,0 \times 10^{-5}$
0,6	$8,8 \times 10^{-5}$
0,8	$1,2 \times 10^{-4}$
1,0	$1,8 \times 10^{-4}$
1,2	$3,1 \times 10^{-4}$
1,4	$8,7 \times 10^{-4}$
1,6	$3,4 \times 10^{-3}$
1,8	$1,2 \times 10^{-1}$

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $B = B_0 + \mu_0 .M$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{B - B_0}{\mu_0} = \frac{(0,2) - 4,8\times10^{-5}}{4\pi\times10^{-7}}$$

$$\therefore \quad M = 1,59 \times 10^5 \text{ A/m}$$

Por otro lado : $B = \mu_0\,(H + M)$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{0,2}{4\pi\times10^{-7}} - 1,59 \times 10^5 = 0$$

Entonces tabulando :

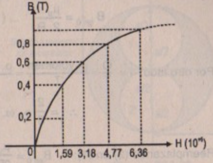
Para $B = 0,2$ T $\Rightarrow$ $H = 0$

Para $B = 0,4$ T $\Rightarrow$ $H = 1,59 \times 10^5$

Para $B = 0,6$ T $\Rightarrow$ $H = 3,18 \times 10^5$ $\times 2$

⋮ ⋮ ⋮

Luego la curva de magnetización (B *vs* H) será:

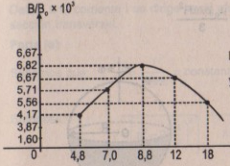


Parte (b)

Hallando: B/B_0

1. $4,17 \times 10^3$
2. $5,71 \times 10^3$
3. $6,82 \times 10^3$
4. $6,67 \times 10^3$
5. $5,56 \times 10^3$
6. $3,87 \times 10^3$
7. $1,60 \times 10^3$
8. $4,7 \times 10^2$
9. $1,5 \times 10^1$

Graficando: B/B_0 *vs* B_0



La relación: $\frac{B}{B_0}$ es un factor adimensional y se conoce como permeabilidad relativa.

73. Problema de repaso. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica constante ρ. Determine el campo magnético en el centro de la esfera cuando ésta gira como un cuerpo rígido a velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (Fig. P30.73).

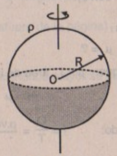
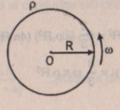


Figura P30.73 Problemas 73 y 74

Resolución : (Problema de repaso)

Hallar $B_{\text{en (0)}} = ?$

Vista superior arriba:



Sabemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B_{en\,0} = \frac{\mu_o . I}{2.R} \quad ...(1) \qquad \text{(para un anillo en el centro)}$$

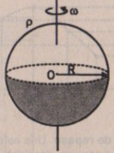
Por otro lado: $I = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{\rho.\text{volumen}}{T} = \dfrac{\rho.\omega.\text{volumen}}{2\pi}$

$$\therefore\ I = \frac{2}{3}\,\rho\,.\,\omega.\ R^3 \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1): $B_{en\,0} = \dfrac{\mu_o}{2R}\left(\dfrac{2}{3}\,\rho.\omega.R^3\right)$

$$\therefore\ B_{en\,0} = \frac{\mu_o.\rho.\omega.R^2}{3}$$

74. Problema de repaso. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica ρ. Determine el momento de dipolo magnético de la esfera cuando ésta gira como un cuerpo rígido a velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (véase la Fig. P30.73).



Resolución:

Nos piden $\mu = ?$

Sabemos que: $\mu = I$. área de la superficie

$$\Rightarrow\quad \mu = I\,.\,4\pi\,.\,R^2 \qquad ...(1)$$

Por otro lado: $I = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{\rho.\text{volumen}}{\dfrac{2\pi}{\omega}} = \dfrac{\omega\rho}{2\pi}\left(\dfrac{4}{3}\pi\,.\,R^3\right)$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{2\omega\rho R^3}{3} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

Entonces: $\mu = I.4\pi.R^2 = \left(\dfrac{2}{3}\,\omega.\rho.R^3\right)(4\pi.R^2)$

$$\therefore\ \mu = \frac{8}{3}\,\omega.\pi.\rho.R^5$$

75. Un largo conductor cilíndrico de radio **a** tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro **a** a lo largo de toda su longitud, como se muestra en la sección transversal de la figura P30.75. Una corriente I se dirige hacia afuera de la página y es uniforme por toda la sección transversal del conductor. Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en función de μ_0, I, r y a, en a) el punto P_1 y b) el punto P_2.

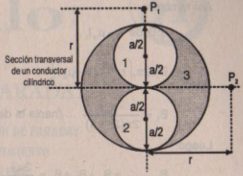


Figura P30.75

Resolución:

Datos: una corriente I se dirige hacia afuera de la página y es uniforme en toda la sección transversal.

Parte (a)

Sabemos que: $J = \dfrac{I}{\text{área}}$ = constante

Entonces: $\dfrac{I}{\pi\left[a^2 - 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right]} = \dfrac{I_1}{\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow\quad \frac{2I}{a^2} = \frac{4I_1}{a^2} \qquad \therefore\ I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \ \text{(dirigida hacia adentro de la página)}$$

Luego: $I_3 = 2I$ ... (dirigida hacia afuera de la página)

Por otro lado:

Aplicando la ley de Ampere al conductor cilíndrico mayor se cumple que:

$$\oint B_3\,ds = \mu_o\,.\,I_3$$

$$\Rightarrow\quad B_3\,.\,(2\pi)r = \mu_o.(2I)$$

$$\therefore\quad B_3 = \frac{\mu_o.2I}{2\pi.r} \ \text{...(hacia la izquierda)}$$

Ahora:

Aplicando la ley de Ampere al conductor cilíndrico menor se cumple que:

$$\oint B_2\,d_s = -\mu_o.I_2 \quad\Rightarrow B_2\,.\,2\pi.\left(r+\frac{a}{2}\right) = -\mu_o.\frac{I}{2}$$

$$\therefore\quad B_2 = \frac{-\mu_o.I}{2\pi(2r+a)} \ \text{...(hacia la derecha)}$$

Así también:

$$\oint B_1\, ds = -\mu_o I_1$$

$$\Rightarrow\ B_1 . 2\pi . \left(r - \frac{a}{2}\right) = -\mu_o . \frac{I}{2}$$

$$\therefore\ B_1 = \frac{-\mu_o I}{2\pi(2r-a)}\ \text{... (hacia la derecha)}$$

Luego:

$$B_{\text{total en } P_1} = B_3 + B_2 + B_1 = \frac{2\mu_o I}{2\pi . r} - \frac{\mu_o I}{2\pi(2r+a)} - \frac{\mu_o I}{2\pi(2r-a)}$$

$$\Rightarrow\ B_{\text{total en } P_1} = \frac{\mu_o I}{2\pi . r}\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{(2r+a)} - \frac{1}{(2r-a)}\right]$$

$$\therefore\ B_{\text{total en } P_1} = \frac{\mu_o . I\,(2r^2 - a^2)}{\pi . r\,(4r^2 - a^2)}\ \text{(dirigido a la izquierda de la página)}$$

Parte (b)

Por simetría se cumple que:

$$B_{\text{total en } P_2} = \frac{\mu_o . I\,(2r^2 - a^2)}{\pi . r\,(4r^2 - a^2)}\ \text{(dirigido hacia la parte superior de la página)}$$

Capítulo 31

LEY DE FARADAY

LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY
FEM EN MOVIMIENTO
LEY DE LENZ

1. Una bobina rectangular de 50 vueltas y dimensiones de 5,00 cm × 10,0 cm se deja caer desde una posición donde B = 0 hasta una nueva posición donde B = 0,500 T y se dirige perpendicularmente al plano de la bobina. Calcule la magnitud de la fem promedio inducida en la bobina si el desplazamiento ocurre en 0,250 s.

Resolución :

Datos: N = 50 vueltas
Dimensiones de la bobina rectangular = 5,00 cm × 10,0 cm
$B = 0 \ \rightarrow\ B = 0{,}500$ T
$t = 0 \ \rightarrow\ t_1 = 0{,}250$ s
$\varepsilon = ?$

Sabemos que por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -N . \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow\ |\varepsilon_{prom}| = N . \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = 50 . \frac{[0{,}500 \times (0{,}05)(0{,}1) - 0(0{,}05)(0{,}1)]}{(0{,}250 - 0)}$$

$$\therefore\ |\varepsilon_{prom}| = 0{,}5\ \text{V} \equiv 500\ \text{mV}$$

2. Una espira plana de alambre que consta de una sola vuelta de área de sección transversal igual a 8,00 cm² es perpendicular a un campo magnético cuya magnitud aumenta uniformemente de 0,500 T a 2,50 T en 1,00 s. ¿Cuál es la corriente inducida resultante si la espira tiene una resistencia de 2,00 Ω?

Resolución :

Datos: Área = 8,00 cm² ≡ $8{,}00 \times 10^{-4}$ m²
En t = 0 → B = 0,500 T
En t = 1,00 s → B = 2,50 T
R = 2,00 Ω ; I = ?

Sabemos que: por la ley de Faraday:

$$|e| = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad I.R.dt = d\ \Phi_B$$

$$I.R. \int dt = \int d\Phi_B = \Phi_{Bf} - \Phi_{Bi}$$

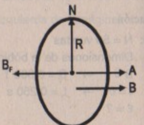
$$\Rightarrow \quad I(2{,}00)(1{,}00) = (2{,}50)(8 \times 19^{-4}) - (0{,}5)(8 \times 10^{-4})$$

$$\therefore \quad I = \frac{(2{,}00)\left(8\times 10^{-4}\right)}{(2{,}00)} = 0{,}8 \times 10^{-3}\ A \equiv 0{,}8\ mA$$

3. Una bobina circular de alambre de 25 vueltas tiene un diámetro de 1,00 m. La bobina se coloca con su eje a lo largo de la dirección del campo magnético de la Tierra de 50,0 μT, y luego, en 0,200 s, se gira 180°. ¿Cuál es la fem promedio generada en la bobina?

Resolución :

Datos: $N = 25$ vueltas
Diámetro = 1,00 m
$B_o = 50\ \mu T$ en $t = 0$
$B_F = B.\cos 180°$ en $t = 0{,}200$ s
$|\varepsilon_{prom}| = ?$



Sabemos que por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -N.\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon.\ dt = -N.d\ \Phi_B$$

$$\varepsilon. \int_0^{0,2} dt - 25\int d\Phi_B = -25\ [\Phi_{Bf} - \Phi_{Bi}]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon.\ \Delta t = -25(\pi)\ \frac{(\text{Diam.})^2}{4}\ [-50 \times 10^{-6} - 50 \times 10^{-6}]$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{prom}| = \left(\frac{25}{4}\right)(\pi)\ (1{,}00)^2 . \frac{[100\times 10^{-6}]}{(0{,}2-0)}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{prom}| = 9{,}82 \times 10^{-3}\ V \equiv 9{,}82\ mV$$

4. Una espira rectangular de área A se pone en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se deja que la magnitud del campo varíe en el

tiempo de acuerdo con la expresión $B = B_{máx}e^{-t/\tau}$, donde $B_{máx}$ y τ son constantes. El campo tiene un valor constante $B_{máx}$ para $t < 0$. a) Emplee la ley de Faraday para mostrar que la fem inducida en la espira está dada por

$$\varepsilon = (A\ B_{máx}/\tau)e^{-t/\tau}$$

b) Obtenga un valor numérico para ε en t = 4,00 s cuando A = 0,160 m², $B_{máx} = 0{,}350$ T y τ = 2,00 s. c) Para los valores de A, $B_{máx}$ y τ dados en el inciso b), ¿cuál es el valor máximo de ε?

Resolución :

Datos: $B = B_{máx} . e^{-t/\tau}$; donde : $B_{máx}$ y τ son ctes.
A = Área de la espira

Parte (a)

Por demostrar que : $\varepsilon = (A . B_{máx}/\tau) . e^{-t/\tau}$

Sabemos que por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt}\ [\int BdA] = -\frac{d}{dt}\ [B . A]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -A\ \frac{dB}{dt} = -A\ \frac{A}{dt}\ [B_{máx} . e^{-t/\tau}]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -A . B_{máx} . \left(-\frac{1}{\tau}\right). e^{-t/\tau}$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{A.B_{máx}}{\tau}.\ e^{-t/\tau} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si : t = 4,00 s, A = 0,160 m², $B_{máx} = 0{,}350$ T y τ = 2,00 s

Entonces : ε = ?

Sabemos que : $\varepsilon = \frac{A.B_{máx}}{\tau}.\ e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{(0{,}160)(0{,}350)}{(2{,}00)}.e^{-\frac{4,00}{2,00}}$

$$\therefore \quad \varepsilon = 3{,}79 \times 10^{-3}\ V \equiv 3{,}79\ mV$$

Parte (c)

Sabemos que: $\varepsilon = \frac{A.B_{máx}}{\tau}.\ e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{máx} = \frac{A.B_{máx}}{\tau} \qquad \text{para } t < 0$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{máx} = \frac{(0{,}160)(0{,}350)}{2{,}00} = 28 \times 10^{-3}\ V \equiv 28\ mV$$

5. Un poderoso electroimán produce un campo uniforme de 1,60 T sobre un área de sección transversal de 0,200 m². Alrededor del electroimán se coloca una bobina que tiene 200 vueltas y una resistencia total de 20,0 Ω. Luego la corriente en el electroimán disminuye suavemente hasta que alcanza cero en 20,0 ms. ¿Cuál es la corriente inducida en la bobina?

Resolución :

Datos: $B_{unif} = 1{,}60$ T ; N = 200 vueltas ; t = 20,0 ms
$A_{trans} = 0{,}200$ m² ; R = 20,0 Ω ; I = ?

Sabemos que por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}(BA)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon dt = -NdBA \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\int_0^{20} dt = -N\int_{(1,6)(0,2)}^{0} dB.A$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{N\,B.A}{t} = \frac{(200)(1{,}6)(0{,}2)}{20\times10^{-3}} = 3{,}2\times10^{3}\ V$$

En consecuencia: $\varepsilon = I.R \Rightarrow I_{Inducida} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{3{,}2\times10^3}{20}$

$$\therefore \quad I_{Inducida} = 160\ A$$

6. Hay un campo magnético de 0,200 T dentro de un solenoide que tiene 500 vueltas y un diámetro de 10,0 cm. ¿Cuán rápidamente (es decir, dentro de qué periodo) debe el campo reducirse a cero si la fem inducida promedio dentro de la bobina durante este intervalo de tiempo será 10,0 kV?

Resolución :

Datos: B = 0,200 T ; $|\varepsilon_{prom}| = 10{,}0$ kV
$N_{Solenoide} = 500$ vueltas ; Δt = Período = ?
Diámetro = 10,0 cm

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -N.\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{prom}| = N.\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{N.A.B}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \text{periodo} = \frac{N.B\,A}{|\varepsilon_{prom}|} = \frac{500\times(0{,}200)\times[\pi\times(0{,}05)^2]}{10{,}0\times10^3}$$

$$\therefore \quad \Delta t = \text{Periodo} = 78{,}5\times10^{-6}\ s \equiv 78{,}5\ \mu s$$

7. Un anillo de aluminio con un radio de 5,00 cm y una resistencia de 3,00 × 10⁻⁴ Ω se coloca sobre la parte superior de un largo solenoide con núcleo de aire, 1 000 vueltas por metro y un radio de 3,00 cm, como se indica en la figura P31.7. Suponga que la componente axial del campo producido por el solenoide sobre el área del extremo del solenoide es la mitad de intensa que en el centro del solenoide. Suponga que el solenoide produce un campo despreciable afuera de su área de sección transversal. a) Si la corriente en el solenoide está aumentando a razón de 270 A/s, ¿cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo? c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

8. Un anillo de aluminio de radio r_1 y resistencia R se coloca sobre la parte superior de un largo solenoide con núcleo de aire, n vueltas por metro y radio r_2, como se indica en la figura P31.7. Suponga que la componente axial del campo producido por el solenoide sobre el área del extremo del solenoide es la mitad de intensa que en el centro del solenoide. Suponga que el solenoide produce un campo despreciable afuera de su área de sección transversal. a) Si la corriente en el solenoide está aumentando a una relación de ΔI/ Δt, ¿cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo? c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

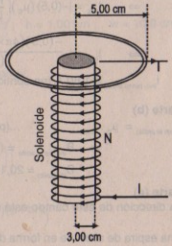


Figura P31.7 Problemas 7 y 8.

Resolución 7 y 8 :

Datos: $R_{anillo} = 3{,}00\times10^{-4}\ \Omega$
$N_{Solenoide} = 1\ 000$ vueltas
$B_{extremo\ del\ solenoide} = B_{centro\ del\ solenoide}/2$

Parte (a)

Si: $I_{Solenoide}/t = 270$ A/s $\quad I_{Anillo} = ?$

Sabemos que el campo producido en el centro del solenoide es el doble que en el extremo del solenoide.

Por otro lado:
En un solenoide se cumple que:

$$\oint B\,.ds = \int B\,.ds = B.L \qquad \text{(ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0.N.I = B.L$$

$$\therefore \quad B = \mu_0 . I . \left(\frac{N}{L}\right) \qquad ...(I)$$

Entonces el campo producido en el extremo del solenoide será:

$$B_{(\text{en el extremo})} = \frac{1}{2}.\mu_0.I.\left(\frac{N}{L}\right) \qquad \text{... (Por dato)}$$

. Luego: Por la ley de inducción de Faraday

$$I_{ind.}\, R = |\varepsilon_{ind}| = \left|-\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right)\right| = \left|-\frac{d}{dt}(BA)\right|$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind.} = \left|-(0,5)\,(\mu_0)\left(\frac{N}{L}\right)\left(\pi[0,03]^2\right).\frac{d}{dt}(I)\right|$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind.} = \left|\frac{-(0,5)(4\pi\times10^{-7})(10^3)[\pi\times10^{-4}.9]}{(3.00)\times10^{-4}}\times(270)\right|$$

$\therefore \quad I_{ind.\,(\text{en el anillo})} = 1,60$ A (en sentido contrario a las manecillas del reloj)

Parte (b)

$B_{(\text{en el anillo})} = \mu_0 . I_{ind}$ ...(por Ampere)

$$\Rightarrow \quad B_{ind.\ \text{en el anillo}} = (4\pi\times10^{-7})(1,60)$$

$$\therefore \quad B_{ind\ \text{anillo}} = 20,1\times10^{-6}\ T \equiv 20,1\ \mu T$$

Parte (c)

La dirección de este campo está dirigido hacia. (Regla de la mano derecha)

9. Una espira de alambre en forma de un rectángulo de ancho w y longitud L, y un largo alambre recto que conduce una corriente I se encuentran sobre una mesa como se indica en la figura P31.9. a) Determine el flujo magnético a través de la espira debido a la corriente I. b) Suponga que la corriente está cambiando con el tiempo de acuerdo con I = a + bt, donde a y b son constantes. Determine la fem inducida en la espira si b = 10,0 A/s, h = 1,00 cm, w = 10,0 cm y L = 100 cm. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el rectángulo?

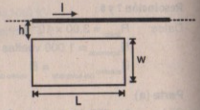


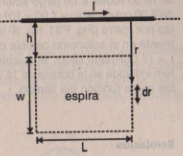
Figura P31.9 Problemas 9 y 73.

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0 . I}{2\pi . r}$$



Entonces por definición:

$$\Phi_{B\,(\text{espira})} = \int B.dA = \int \frac{\mu_0 . I}{2\pi . r}.L.dr$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{B\,(\text{espira})} = \frac{\mu_0.I.L}{2\pi}\int_h^{w+h}\frac{1}{r}dr = \left(\frac{\mu_0.I.L}{2\pi}\right).\ln r\,\Big|_h^{w+h}$$

$$\therefore \quad \Phi_{B\,(\text{espira})} = \frac{\mu_0 . I . L}{2\pi}.\ln\left(1+\frac{w}{h}\right)$$

Parte (b)

Si: $I = a + bt$ hallar ε = ? si: b = 10,0 A/s ; h = 1,00 cm ; w = 10,0 cm
L = 100 cm

Sabemos que por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Entonces:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0.I.L}{2\pi}.\ln\left(1+\frac{w}{h}\right)\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0.L.\ln}{2\pi}(1+w/h)(a+bt)\right)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = -\frac{\mu_0 . L . \ln}{2\pi}\,(1 + w/h)\,.\,b$$

Reemplazando:

$$\varepsilon = -\frac{(4\pi\times10^{-7})(1,00)}{2\pi}\,(1,00)\,.\,\ln(1+10)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = -4,8\times10^{-6}\ V \equiv -4,8\ \mu V$$

La corriente inducida va en dirección contraria al de las manecillas del reloj.

10. Una bobina de 15 vueltas y 10,0 cm de radio rodea a un largo solenoide de 2,00 cm de radio y $1,00 \times 10^3$ vueltas por metro (Fig. P31.10). Si la corriente en el solenoide cambia como $I = (5,00A)\text{sen}(120t)$, encuentre la fem inducida en la bobina de 15 vueltas como función del tiempo.

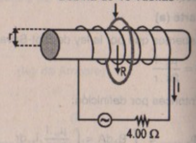


Figura P31.10

Resolución:

Donde: $R = 10.\ 0$ cm $\qquad r = 2,0$ cm

$\frac{N}{\ell}$ (solenoide) $= 1,00 \times 10^3$ vueltas/m

$I = (5,00\ A)\ \text{sen}(120\ t)$

$\varepsilon(t) = ?$

Primero tendremos que hallar $B_{\text{en la bobina}}$ producida por la corriente en el solenoide. En el solenoide siempre se cumple que:

$$\oint B\ .ds = \int B\ .\ ds \text{ (Por la ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0.I.N = B.\ell$$

$$\Rightarrow \quad B = \mu_0.\ I.\frac{N}{\ell} = \mu_o\ .\ (1\ 000)\ .\ (5,00)\ \text{sen}(120t)$$

Luego:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -N\frac{d}{dt}[\int\ B.dA] = -15\frac{d}{dt}\ [(\mu_0\ .\ 5 \times 10^3)\ (\pi)\ (0,2)^2\text{sen}(120t)]$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -15\ \frac{d}{dt}\ [(157\ \mu_0)\ \text{sen}\ (120t)]$$

$$\therefore \quad \varepsilon = -1,44\cos(120t)$$

11. En la figura P31.11 encuentre la corriente que atraviesa la sección PQ, la cual tiene una longitud $a = 65,0$ cm. El circuito se localiza en un campo magnético cuya magnitud varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = (1,00 \times 10^{-3}\ T/s)t$. Suponga que la resistencia por longitud del alambre es $0,100\ \Omega/m$.

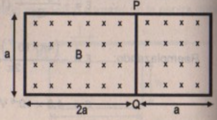


Figura P31.11

Resolución:

Datos incorrectos:

12. Una bobina circular de 30 vueltas de 4,00 cm de radio y $1,00\ \Omega$ de resistencia se pone en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. La magnitud del campo magnético varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = 0,010\ 0t + 0,040\ 0t^2$ donde t está en segundos y B está en teslas. Calcule la fem inducida en la bobina en $t = 5,00$ s.

Resolución:

Sea:

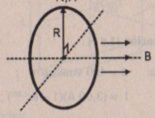
Donde: $N = 30$ vueltas

$R = 4,00$ cm

$R' = 1,00\ \Omega$

$B = 0,010t + 0,040\ t^2$

ε en $t = 5,00$ s



Tenemos que área de la espira $= \pi(0,04)^2 = 5,03 \times 10^{-3}\ m^2$

Luego por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -N.\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left(\int\ BdA\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -N\ .\ \frac{d}{dt}\ (B.A) = -N.A\ \frac{d}{dt}\ (0,010t + 0,040t^2)$$

$$\therefore \quad \varepsilon(t) = -(30)(5,03 \times 10^{-3})\ [0,010 + 0,080t]$$

En consecuencia:

$$\varepsilon_{(t = 5,00\ s)} = -30(5,03 \times 10^{-3})\ [0,010 + 0,080\ (5,00)]$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{(t = 5,00\ s)} = -61,9 \times 10^{-3}\ V \equiv 61,9\ mV$$

13. Un largo solenoide tiene 400 vueltas por metro y conduce una corriente $I = (30,0\ A)(1 - e^{-1,60t})$. Dentro del solenoide y coaxial con él se encuentra una bobina que tiene un radio de 6,00 cm y se compone de un total de 250 vueltas de alambre delgado (Fig. P31.13)¿Qué fem induce en la bobina la corriente variable?

14. Un largo solenoide tiene n vueltas por metro y conduce una corriente $I = I_{máx}(1 - e^{-\alpha t})$. Dentro del solenoide y coaxial con él se encuentran una bobina que tiene un radio R y se compone de un total de N vueltas de alambre delgado (véase la Fig. P31.13). ¿Qué fem induce en la bobina la corriente variable?

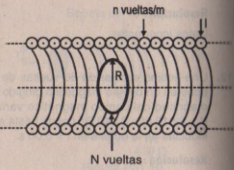


Figura P31.13 Problemas 13 y 14

Resolución 13 y 14 :

Datos: $n = 400$ vueltas/m ; $R = 6{,}00$ cm ; $\varepsilon = ?$

$I = (3{,}00\ A)(1 - e^{-1{,}60t})$; $N = 250$ vueltas

En un solenoide siempre se cumple que:

$$\oint B\,.ds = \int B\,.ds = \mu_0.I.N \qquad \text{... (Ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad B.L = \mu_0.I.N$$

$$\therefore \quad B = \mu_0 I\left(\frac{N}{L}\right) = \mu_0 I\left(\frac{n}{L}\right)$$

Por otro lado:

Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -N.\frac{d\Phi_B}{dt} = -N.\frac{d}{dt}\left[\int B.dA\right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -N.\frac{d}{dt}(B.A) = -N.A\,.\frac{d}{dt}\left[\mu_0.I.\frac{n}{L}\right]; \qquad \text{donde: A = área de la bobina}$$

$$\therefore \ \varepsilon = -N\,.\,A\,.\,\mu_0\left(\frac{n}{L}\right).\frac{d}{dt}\left[(30)(1 - e^{-1{,}60t})\right]$$

$$\therefore \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{n}{L}\right)N\,.\,A\,.\,\mu_0(30)(-1{,}60)e^{-1{,}60t}$$

En consecuencia:

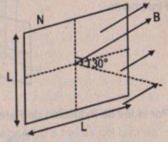
$$\varepsilon(t) = (400)(250)(\pi)(0{,}06)^2(4\pi \times 10^{-7})(30)(160)\,.\,e^{-1{,}60t} = (68{,}2\ mV)\,.\,e^{-1{,}60t}$$

(En sentido contrario al de las manecillas del reloj)

15. Una bobina que se enrolla con 50 vueltas de alambre en la forma de un cuadrado se coloca en un campo magnético de modo que la normal al plano de la bobina forme un ángulo de 30,0° con la dirección del campo. Cuando el campo magnético se incrementa uniformemente de 200 μT a 600 μT en 0,400 s, una fem de 80,0 mV de magnitud se induce en la bobina. ¿Cuál es la longitud total del alambre?

Resolución :

Sea: La bobina cuadrada



Datos: $B_i = 200\ \mu T$

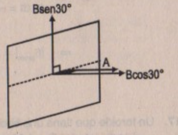
$B_f = 600\ \mu T$; en $\Delta t = 0{,}400$ s

$|\varepsilon| = 80{,}0$ mV

Long. total = ?

N = 50 vueltas

Tenemos que por la ley de inducción de Faraday:



$$\varepsilon = -N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B = -N\,.\,\frac{d}{dt}\left[\int B\,dA\right]$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon = -N\,.\,\frac{d}{dt}(B.A) = -N\,.\,\frac{d}{dt}(BA\cos 30°)$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon\,.\,dt = -N.d(BA\cos 30°) \quad \text{Integrado}$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon\,.\,\Delta t = -N.A\cos 30°\Delta B$$

$$\Rightarrow \ |\varepsilon\,.\,\Delta t| = |N.A\cos 30°\Delta B| = |50 \times L^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (600 - 200) \times 10^{-6}|$$

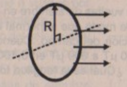
$$\Rightarrow \ L = \sqrt{\frac{2(80\times10^{-3})(0{,}400)}{(50)(\sqrt{3})(400)(10^{-6})}} = 1{,}359\ m$$

$$\therefore \quad \text{Long. total} = 50 \times (4L) = 200 \times (1{,}359) = 272\ m$$

16. A una espira cerrada de alambre se le da la forma de un círculo con 0,500 m de radio. Se encuentra en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,400 T de magnitud. Si la forma del alambre se cambia a la de un cuadrado en 0,100 s mientras permanece en el mismo plano, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida promedio en el alambre durante este tiempo?

Resolución :

Inicialmente:



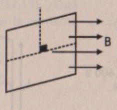
Datos:

$B_{Uniforme} = 0,400$ T

$R = 0,500$ m

$\Delta T = 0,100$s

Finalmente:



$|\varepsilon_{prom}| = ?$

Por la ley de inducción de Faraday :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\int B.dA\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon.\,dt = -\,d(BA) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\int dt = -\int d(BA)$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{prom}| = \frac{B.A}{\Delta t} = \frac{(0,400)[\pi(0,500)^2]}{0,100}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{prom}| = 3,1416 \text{ V}$$

17. Un toroide que tiene una sección transversal rectangular (a = 2,00 cm por b = 3,00 cm) y un radio interior R = 4,00 cm se compone de 500 vueltas de alambre que conducen una corriente $I = I_{máx}$ sen ωt, con $I_{máx} = 50,0$ A y una frecuencia $f = \omega / 2\pi = 60,0$ Hz. Una bobina que se compone de 20 vueltas de alambre se une al toroide, como se muestra en la figura P31.17. Determine la fem inducida en la bobina como una función del tiempo.

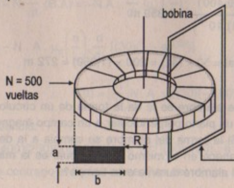


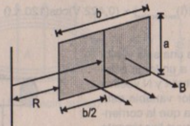
Figura P31.17

Resolución :

Datos : a = 2,00 cm , b = 3,00 cm , R = 4,00 cm

$I = I_{máx}$. sen(ωt) , $I_{máx} = 50,0$ A , f = 60 Hz

Nos piden: ε en la bobina como función del tiempo



Sabemos que por la ley de Ampere, el campo magnético a través del toro es:

$$\Rightarrow \quad \oint B.ds = \mu_o.I.N \qquad \Rightarrow \qquad B(2\pi)\left(R + \frac{b}{2}\right) = \mu_o.I.N$$

$$\therefore \quad B_{en\ el\ toro} = \frac{\mu_o.I.N}{2\pi\left[R + \frac{b}{2}\right]}$$

Luego: Por la ley de inducción de Faraday

$$\varepsilon_{en\ la\ bobina} = -N'.\frac{d\Phi_{B\,(en\ el\ toro)}}{dt} = -N'.\frac{d}{dt}\left[\int B.dA\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{en\ la\ bobina} = -N'.\frac{d}{dt}(B.A) = -N'.\frac{d}{dt}\left[\frac{(\mu_o.I.N)}{2\pi\left[R + \frac{b}{2}\right]}(ab)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{en\ la\ bobina} = -N'.\frac{d}{dt}\left(\frac{(\mu_o.I.N)(ab)}{2\pi\left[R + \frac{b}{2}\right]}\right) = \left(\frac{-N'.\mu_o.N.ab}{2\pi\left[R + \frac{b}{2}\right]}\right)\frac{d}{dt}(50\text{ sen}(\omega t))$$

$$\therefore \quad \varepsilon(t)_{en\ la\ bobina} = \left(-\frac{N'.N.\mu_o.ab.50.\omega}{2\pi\left[R + \frac{b}{2}\right]}\right)\cos(\omega.t)$$

Donde: $N' = 20$, $N = 500$, $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$, $ab = (0,02)(0,03) = 6\times10^{-4}$

$\omega = 2\pi\,.\,f = 2\pi\times(60) = 120\pi$ rad/s , R = 0,04

Reemplazando:

$$\varepsilon(t)_{\text{en la bobina}} = -\frac{(20)(500)\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(6\times10^{-4}\right)(50)(120\pi)}{2\pi\left[(0{,}04)+\dfrac{(0{,}03)}{2}\right]}\cos(120\pi.t)$$

En consecuencia: $|\varepsilon(t)_{\text{en la bobina}}| = (0{,}422\text{ V})\cos(120\,\pi.t)$

18. Una espira circular de una sola vuelta de radio R es coaxial a un largo solenoide de radio r, longitud ℓ y N vueltas Fig. P31.18. El resistor variable está cambiando de manera que la corriente del solenoide disminuye linealmente de I_1 a I_2 en un intervalo Δt. Encuentre la fem inducida en la espira.

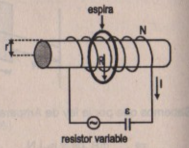


Figura P31.18

Resolución:

fem (en la espira) = ?

Nota: La corriente del solenoide disminuye linealmente de I_1 a I_2 en un intervalo Δt.

Sabemos que por la Ley de Ampere se cumple que:

$$\oint B\,.ds = \mu_0.I.N \quad \Rightarrow \quad B(2\pi.r) = \mu_0.I.N$$

$$\therefore \quad B_{\text{en el solenoide}} = \frac{\mu_0\,.I.N}{2\pi\,.r}$$

Por otro lado:

Por la ley de Inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{\text{en la espira}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\int BdA\right]$$

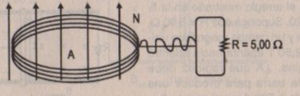
$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{en la espira}} = -\frac{d}{dt}[B.A] = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0\,.I.N}{2\pi\,.r}.\left(\pi.r^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{en la bobina}} = \left(-\frac{\mu_0\,.N.r^2}{2\,.r}\right).\frac{d}{dt}(I)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\int dt = \left(-\frac{\mu_0\,.N.r^2}{2r}\right).\int_{I_1}^{I_2} dI = \left(-\frac{\mu_0\,.N.r^2}{2r}\right) I\Big|_{I_1}^{I_2}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{(\text{en la espira})} = \frac{\mu_0\,.N.r^2}{2\,.r\,\Delta t}\,(I_1 - I_2)$$

19. Una bobina circular que encierra un área de 100 cm^2 está integrada por 200 vueltas de alambre de cobre, como se muestra en la figura P31.19. Al principio, un campo magnético uniforme de 1,10 T apunta perpendicularmente hacia arriba a través del plano de la bobina. La dirección del campo se invierte después. Durante el tiempo que el campo está cambiando su dirección, ¿cuánta carga fluye a través de la bobina si R = 5,00 Ω?



B_i = 1,10 T (hacia arriba)

Figura P31.19 Problemas 20, 21 y 22.

Resolución:

Donde: A = 100 cm^2 = 10^{-12} m^2 ; N = 200 vueltas

Nos piden: Carga que fluye a través de la bobina se invierte la dirección del campo.

Después de un tiempo Δt el campo magnético $B_f = -\overbrace{1{,}10\text{ T}}^{B_i}$. Luego aplicando la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\,.\,dt = -N\,d\left[\int B.dA\right] = -N.A.dB$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\,.\,dt = -N.A\int dB = -N.A.B\Big|_{B_i}^{+B_f=-B_i}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\,.\,\Delta t = 2N.\,A\,.\,B_i$$

$$\Rightarrow \quad I\,.\,R = \frac{2.N.A.B_i}{\Delta t} = R.\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta Q = \frac{2.N.A.B_i}{R} = \frac{2(200)\left(10^{-2}\right)(1{,}10)}{5{,}00} = 0{,}880\text{ C}$$

Por lo tanto:

La carga que fluye a través de la bobina será: 0,880 C; durante el tiempo que el campo magnético se invierte.

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$ = Potencia

$$\Rightarrow \quad P = \frac{W}{t} = \frac{F_{app}.d}{t} = F_{aap}.V$$

$$\Rightarrow \quad P = (3,00)(2,00) = 6,00\ W$$

20. Considere el arreglo mostrado en la figura P31.20. Suponga que R = 6,00 Ω, ℓ = 1,20 m y un campo magnético uniforme de 2,50 T apunta hacia adentro de la página. ¿A qué rapidez debe moverse la barra para producir una corriente de 0,500 A en el resistor?

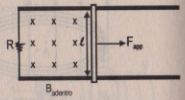
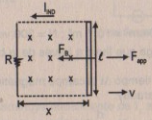


Figura P31.20.

Resolución :



Datos: R = 6,00 Ω
B = 2,50 T
λ = 1,20 m
ℓ = 0,500 A
V = ?

Aplicando la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(\Phi_B) = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -\frac{d}{dt}(B.A)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -B\frac{d}{dt}(\ell . x) = -B.\ell\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind}R = |\varepsilon| = |-B.\ell.V| = B.\ell.V$$

$$\Rightarrow v = \text{Rapidez} = \frac{I_{nd}.R}{B.\ell} = \frac{(0,500)(6,00)}{(2,50)(1,20)}$$

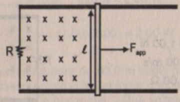
∴ Rapidez = 1,00 m/s (hacia la derecha)

21. La figura P31.20 muestra una vista superior de una barra que puede deslizarse sin fricción. El resistor es de 6,00 Ω, y un campo magnético de 2,50 T se dirige perpendicularmente hacia abajo, adentro de la página. Sea ℓ = 1,20 m. a) Calcule la fuerza aplicada que se requiere para mover la barra hacia la derecha a una rapidez constante de 2,00 m/s. b) ¿A qué rapidez se libera la energía en el resistor?

Resolución :

Datos:
B = 2,50 T
ℓ = 1,20 m
R = 6,00 Ω
I = 0,500 A
v = 2,00 m/s

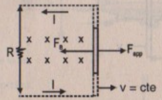
Vista superior



$B_{adentro}$ (hacia abajo)

Parte (a)

Haciendo D.C.L. (Barra)



Por la (ley de Lenz)

Por conservación de energía; y por condición de equilibrio:

$$F_B = F_{app}$$

Entonces: $F_{app} = I.\ell \times B = I_{Inducida}.\ell.B$

$$\Rightarrow \quad F_{app} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} \times \ell.B \qquad \text{... (1)}$$

Pero por la ley de inducción de Faraday:

$$|\varepsilon_{ind}| = B.\ell.V \qquad \text{... (2)}$$

Luego: Reemplazando (2) en (1)

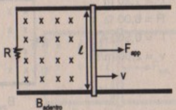
$$F_{app} = \frac{(B.\ell.v)(\ell.B)}{R} = \frac{B^2.\ell^2.v}{R}$$

$$\therefore \quad F_{app} = \frac{(2,50)^2.(1,20)^2.(2,00)}{6,00} = 3,00\ N \qquad \text{(hacia la derecha)}$$

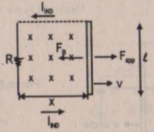
22. Una barra conductora de longitud ℓ se mueve sobre dos rieles horizontales sin fricción, como se muestra en la figura P31,20. Si una fuerza constante de 1,00 N mueve a la barra a 2,00 m/s a través de un campo magnético B que está dirigido hacia adentro de la página, a) ¿cuál es la corriente a través de un resistor R de 8,00 Ω? b) ¿Cuál es la rapidez a la cual se entrega energía al resistor? c) ¿Cuál es la potencia mecánica entregada por la fuerza F_{app}?

Resolución :

Datos: $F_{app} = 1{,}00$ N
$v = 2{,}00$ m/s
$R = 8{,}00\ \Omega$



Parte (a)
Sea:



Por condición de equilibrio: $F_B = F_{app} = 1{,}00$ N

$$\Rightarrow \quad I_{Ind.} \cdot \ell \times B = 1{,}00 \text{ N}$$

$$\therefore \quad I_{Ind} = \frac{1{,}00\text{N}}{B.\ell} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{Ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -\frac{d}{dt}(B.\ell.x)$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{Ind}| = I_{Ind}.R = |-B.\ell.\frac{dx}{dt}| = B.\ell.v$$

$$\therefore \quad I_{Ind} = \frac{B.\ell.v}{R} \quad \text{... (2)}$$

De (1): $\quad B.\ell = \dfrac{1}{I_{Inducida}}$

$\Rightarrow$ De (a): $\quad I_{Ind} = \left(\dfrac{v}{R}\right)\left(\dfrac{1}{I_{Ind}}\right)$

$$\therefore \quad I_{Ind} = \sqrt{\frac{v}{R}} = \sqrt{\frac{2{,}00}{8{,}00}} = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Nos piden: $\quad P_{Entregada\ al\ resistor} = I_{Ind}^2 \cdot R$

$$P_{entregada\ al\ resistor} = (0{,}5)^2 \cdot (8{,}00) = 2{,}00 \text{ W}$$

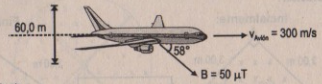
Parte (c)

$$P_{mecánica\ entregada} = F_{app} \cdot v = (1{,}00)(2{,}00) = 2{,}00 \text{ W}$$

23. Un avión Boeing 747 con una envergadura de 60,0 m vuela horizontalmente a una rapidez de 300 m/s sobre Phoenix, Arizona, en un lugar donde el campo magnético terrestre es de 50,0 μT a 58,0° bajo la horizontal. ¿Qué voltaje se genera entre las puntas de las alas?

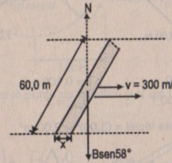
Resolución :

Sea:



Nos piden: $\varepsilon_{en\ las\ alas}$

Vista superior arriba:



Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -\frac{d}{dt}(B.A)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt}(BA\cos 180°) = \frac{d}{dt}(B\text{sen}58°.A)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = (B\text{ sen}58°) \cdot \frac{d}{dt}(60.x) = (60)(B\text{sen}58°) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = (60)(50 \times 10^{-6})(0{,}848)(3 \times 10^2)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = 0{,}763 \text{ V}$$

24. La espira cuadrada de la figura P31.24 está hecha de alambres con una resistencia total en serie de 10,0 Ω. Se coloca en un campo magnético uniforme de 0,100 T con dirección perpendicular hacia el plano de la página. La espira, que está articulada en cada vértice, se jala como se ilustra hasta que la separación entre los puntos A y B es de 3,00 m. Si este proceso tarda 0,100 s, ¿cuál es la corriente promedio generada en la espira? ¿Cuál es la dirección de la corriente?

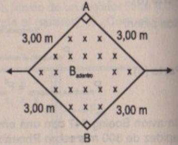
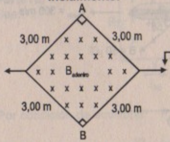


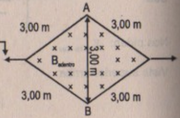
Figura P31.24

Resolución :

Incialmente:



Finalmente:



Datos: $R_{total} = 10,0\ \Omega$; $\Delta T = 0,100$ s

$B_{adentro} = 0,100$ T ; $I_{prom} = ?$

Sabemos que: Área incial $= (3,00)^2 = 9,00\ m^2$

$$\text{Área final} = 2\ \text{Área}\left(\triangle\right) = 2\left(\frac{(3,00)^2 \times \sqrt{3}}{4}\right) = 7,79\ m^2$$

Luego:

Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\int BdA\right) = -B.\frac{d}{dt}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\ .\ dt = -B.dA$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \int dt = -B\ .\int_{A_i}^{A_f} dA = -B.A\ \Big|_{A_i}^{A_f}$$

$$\varepsilon = \frac{BA_i - BA_f}{\Delta t} = \frac{(0,100)(9,00 - 7,79)}{(0,100)} = 1,21\ V$$

$$\therefore \quad I_{prom} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{(1,21)}{10,0} = 0,121\ A \equiv 121\ mA$$

Por la ley de Lenz:

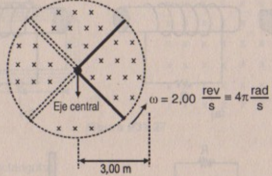
El sentido o dirección de la corriente es en el sentido de las agujas del reloj.

25. Un helicóptero tiene hélices de 3,00 m de longitud que se extienden hacia afuera desde un eje central y rotan a 2,00 rev/s. Si la componente vertical del campo magnético terrestre es 50,0 μT, ¿cuál es la fem inducida entre la punta de la hélice y el eje central?

Resolución :

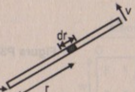
Sean las hélices del helicóptero (vista superior arriba)

$B_{componente\ vertical} = 50\ \mu T$



Nos piden: $\varepsilon_{inducida}$ entre la punta de la hélice y el eje central

Tenemos que:



Por la ley de Faraday: $|\varepsilon| = B.L.V$

$$\Rightarrow \quad d\varepsilon = B.V.dr = B.(\omega.r).dr$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = \int d\varepsilon = B.\omega.\int_0^L r.dr$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = B.\omega.\frac{r^2}{2}\Big|_0^L = B.\omega.\frac{L^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{(50 \times 10^{-6})(3,00)^2(4\pi)}{2} = 2,83 \times 10^{-13}\ V \equiv 2,83\ mV$$

26. Emplee la ley de Lenz para responder las siguientes preguntas relativas a la dirección de las corrientes inducidas: a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R mostrado en la figura P31.26a cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R inmediatamente después de que se cierra el interruptor S en la figura P31.26b c) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en R cuando la corriente I en la figura P31.26c disminuye rápidamente hasta cero? d) Una barra de cobre se mueve hacia la derecha mientras su eje se mantiene perpendicular a un campo magnético, como se ve en la figura P31.26d. Si la parte superior de la barra se vuelve positiva en relación con la parte inferior, ¿cuál es la dirección del campo magnético?

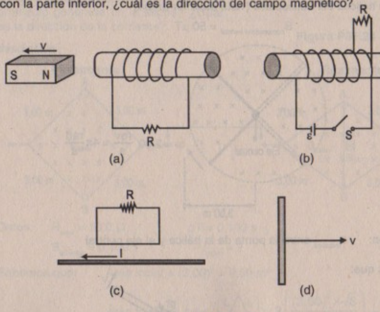


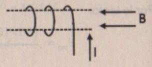
Figura P31.26

Resolución :

Parte (a)
Cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda, el flujo magnético disminuye con el tiempo; entonces por la ley de Lenz, la dirección de la corriente estará dirigida en el sentido de las manecillas del reloj.

Parte (c)
El campo producido por "I" está dirigido hacia adentro; entonces conforme I disminuye hasta cero, el campo magnético disminuirá con el tiempo; en consecuencia por la ley de Lenz la dirección de la corriente inducida estará con dirección de las manecillas del reloj.

Parte (b)
Cuando se cierra el interruptor la corriente producida por ε esta dirigida con dirección como se muestra:



Lo cual produce un campo que aumenta con el tiempo; en consecuencia por la ley de Lenz la dirección de la corriente inducida es en contra de las manecillas del reloj.

Parte (d)
Hacia adentro.

27. Una bobina rectangular con resistencia R tiene N vueltas cada una de longitud ℓ y ancho w, como se muestra en la figura P31.27. La bobina se mueve dentro de un campo magnético uniforme B a velocidad v. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza resultante sobre la bobina a) cuando ésta entra al campo magnético, b) cuando se mueve dentro del campo, c) cuando sale del campo?

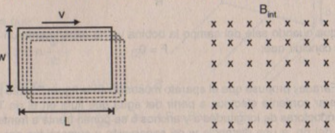


Figura P31.27

Resolución :

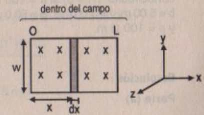
Sea la bobina rectangular:

Datos: Bobina de "N" vueltas
Resistencia = R

Parte (a)

Sabemos que: $F_B = I \,.\, L \times B$

Por la ley de inducción de Faraday:



$$\varepsilon = -N \,.\, \frac{d}{dt}\Phi_B = -N\frac{d}{dt}\left(\int BdA\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -N.B.\frac{d}{dt}(A) = -N.B\frac{d}{dt}(w \,.\, L)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -N.B.w.\frac{dL}{dt} = -N.B.w \,.\, \frac{dx}{dt} = -N.B.w.v$$

$$\Rightarrow \quad I.R = |\varepsilon| = N.B.w.v$$

$$\therefore \quad I = \frac{N.B.w.v}{R}$$

De la condición: $P = F_B . v = \dfrac{\varepsilon^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad F_B = \frac{\varepsilon^2}{R.v} = \frac{(N.B.w.v)^2}{R.v}$$

$$\therefore \quad F_B = N^2.B^2.w^2.\frac{v}{R} \quad \text{(a la izquierda)}$$

Parte (b)

Cuando se mueve dentro del campo, la bobina experimenta una fuerza equivalente que cuando entra al campo; entonces:

$$F = \frac{N^2.B^2.w^2.v}{R}$$

Parte (c)

En vista que cuando sale del campo la bobina ya no experimenta un ε_{ind} entonces podemos concluir que: $F = 0$

28. En 1832 Faraday propuso que el aparato mostrado en la figura P31.28 podría usarse para generar corriente eléctrica a partir del agua que fluía en el río Támesis. Dos placas conductoras de longitudes a y anchos b se ponen frente a frente en los lados opuestos del río, a una distancia w de separación y sumergidas por completo. La velocidad del flujo del río es v y la componente vertical del campo magnético terrestre es B. a) Muestre que la corriente en el resistor de carga R es

$$I = \frac{ab.v.B}{\rho + abR/w}$$

donde ρ es la resistividad eléctrica del agua. b) Calcule la corriente de cortocircuito (R = 0) si a = 100 m, b = 5,00 m, v = 3,00 m/s, B = 50,0 μT y ρ = 100 Ω m.

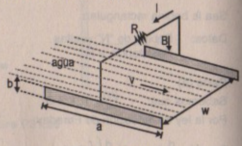
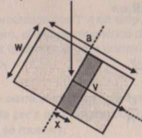


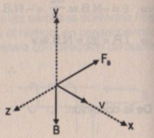
Figura P31.28

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $I = \dfrac{ab.v.B}{\rho + abR/w}$





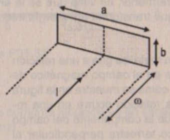
Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left(\int BdA\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -B.\frac{d}{dt}(A) = -B.w.\frac{dx}{dt} = -B.w.v$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{ind}| = |-B.w.v| = B.w.v \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:



Sabemos que:

$$\Delta V = I.R = I.\left(\rho.\frac{w}{ab}\right) \quad \text{... (2)}$$

De la condición: $\Delta V = |\varepsilon| - I.R$

$$\Rightarrow \quad I.\left(\rho.\frac{w}{ab}\right) = |\varepsilon| - I.R = B.w.v - I.R$$

$$\Rightarrow \quad I\left(\frac{\rho.w}{ab} + R\right) = B.w.v \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B.w.ab.v}{\rho.w + ab.R}$$

$$\therefore \quad I = \frac{B.v.ab}{\rho + \dfrac{ab.R}{w}} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

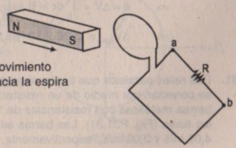
Para R = 0; I : corriente de cortocircuito

Si: a = 10^2; b = 5,00 m ; v = 3,00 m/s ; B = 50,0 μT ; ρ = 100 Ω.m

Entonces : $$I = \frac{(50\times10^{-6})(3{,}00)(10^2)(5{,}0)}{10^2}$$

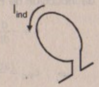
$$\therefore \quad I = 0{,}75 \times 10^{-3}\ A \equiv 0{,}75\ mA$$

29. En la figura P31.29 el imán de barra se mueve hacia la espira. ¿$V_a - V_b$ es positiva, negativa o cero? Explique.



Resolución :

Conforme el imán se acerca hacia la espira, el flujo magnético aumenta con el tiempo; entonces por la ley de Lenz la corriente está dirigida de la siguiente manera:



Luego la corriente pasará primero por "b"; y cuando llegue a "a" el potencial en dicho punto será menor, en vista que se le entrega parte de la energía eléctrica en (b) al resistor que transforma en energía interna. Por lo tanto: $V_a - V_b < 0$.

30. Una barra metálica gira a una relación constante en el campo magnético de la Tierra, como se muestra en la figura 31.10. La rotación ocurre en una región donde la componente del campo magnético terrestre perpendicular al plano de rotación es $3{,}30 \times 10^{-5}$ T. Si la barra mide 1,00 m de largo y su rapidez angular es $5{,}00\ \pi$ rad/s, ¿qué diferencia de potencial se desarrolla entre sus extremos?

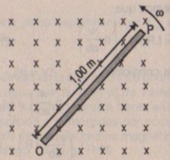
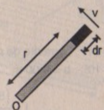


Figura P31.29

Resolución :



Datos: $B = 3{,}30 \times 10^{-5}$ T

$\omega = 5{,}00\ \pi$ rad/s

$\Delta V_{(OP)} = ?$

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$|\varepsilon| = B\,.\,\ell\,.\,v = B.(r).v$$

$$\Rightarrow \quad d\varepsilon = B\,.\,v\,.\,dr = B.(w.r).dr$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \Delta V = \int_0^{\rho} d\varepsilon = B.\omega\int_0^{L} r\,dr = B.\omega.\frac{L^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{(OP)} = (3{,}30 \times 10^{-5})(5{,}00\ \pi)(1)/2 = 259 \times 10^{-6}\ \text{V} \equiv 259\ \mu\text{V}$$

31. Dos rieles paralelos que tienen resistencia despreciable están separados 10,0 cm y se conectan por medio de un resistor de 5,00 Ω. El circuito contiene también dos barras metálicas con resistencias de 10,0 Ω y 15,0 Ω que se deslizan a lo largo de los rieles (Fig. P31.31). Las barras se alejan del resistor con rapidez constante de 4,00 m/s y 2,00 m/s, respectivamente. Se aplica un campo magnético uniforme, de

0,010 0 T de magnitud, perpendicular al plano de los rieles. Determine la corriente en el resistor de 5,00 Ω.

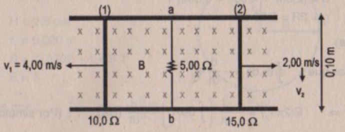


Figura P31.31

Resolución :

Sean: Donde: $B_{unif} = 0{,}010$ T

* Para la barra (1) la dirección de la corriente inducida es en sentido contrario de las manecillas del reloj (ley de Lenz).

  Luego por la ley de inducción de Faraday:

$$|I_{ind\,(1)}| = \frac{|\varepsilon_{ind}|}{R_1} = \frac{B.l.v_1}{R_1} = \frac{(0{,}010)(0{,}10)(4{,}00)}{10}$$

$$\therefore \quad |I_{ind\,(1)}| = 400 \times 10^{-6}\ \text{A} \equiv 400\ \mu\text{A}$$

* Para la barra (2) la dirección de la corriente inducida es en sentido contrario de las manecillas del reloj (ley de Lenz).

  Luego por la ley de inducción de Faraday:

$$|I_{ind\,(2)}| = \frac{|\varepsilon_{ind}|}{R_2} = \frac{B.l.v_2}{R_2} = \frac{(0{,}010)(0{,}10)(2{,}00)}{(15{,}0)}$$

$$\therefore \quad |I_{ind\,(2)}| = 133 \times 10^{-6}\ \text{A} \equiv 133\ \mu\text{A}$$

FEM INDUCIDA Y CAMPOS ELÉCTRICOS

32. Para la situación descrita en la figura P31.32 el campo magnético cambia con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = (2{,}00t^3 - 4{,}00t^2 + 0{,}800)$ T y $r_2 = 2R = 5{,}00$ cm. a) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre un electrón localizado en el punto P_2 cuando t = 2,00 s. b) ¿En qué tiempo esta fuerza es igual a cero?

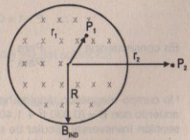


FIGURA P31.32

Resolución :

Donde: $B = (2{,}00t^3 - 4{,}00t^2 + 0{,}800)$ T

$r_2 = 2R = 5{,}00$ cm

Parte (a)

Sabemos que : $\oint E\,.ds = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B$

$$\Rightarrow \quad E(2\pi.r_2) = -\frac{d}{dt}\left(\int BdA\right) = -\frac{d}{dt}(BA) \qquad \text{(Por simetría)}$$

$$\Rightarrow \quad E(2\pi.r_2) = -A\,.\frac{dB}{dt} = -\pi.R^2.\frac{d}{dt}(2{,}00t^3 - 4{,}00t^2 + 0{,}800)$$

Luego:

$$(q_e)(E) = F_e = \frac{(q_e)(-\pi.R^2)}{2\pi.r_2}\,.\,[(8{,}00)t^2 - 8{,}00t]$$

Entonces: $$|F_e| = \frac{|q_{e^-} \times R^2|}{2r_2}\,.\,(8{,}00t^2 - 8{,}00t)$$

Por lo tanto:
Para : t = 2,00 s

$$|F_e| = \frac{|(-1{,}6\times10^{-19})(2{,}5\times10^{-2})^2|}{2(5{,}00\times10^{-2})}\,.\,(8{,}00(2{,}00)^2 - 8{,}00(2{,}00))$$

$$\therefore \quad |F_e| = 16\times10^{-21}\text{ N}$$

Parte (b)

Sabemos que: $$F_e(t) = \frac{|q_{e^-}.R^2|}{2r_2}(8{,}00)(t^2 - t)$$

$$\Rightarrow \quad F_e(t) = 0 = \frac{|q_e.R^2|}{2r_2}(800)(t^2 - t)$$

$$\therefore \quad t^2 - t = 0 \;\Rightarrow\; t(t-1) = 0$$

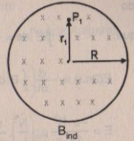
En consecuencia : Para : $t = 0$; $F_e = 0$
Para : $t = 1$; $F_e = 0$

33. Un campo magnético dirigido hacia adentro de la página cambia con el tiempo de acuerdo con $B = (0{,}030\,t^2 + 1{,}40)$ T, donde t está en segundos. El campo tiene una sección transversal circular de radio R = 2,50 cm (véase la Fig. P31.32). ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto P_1 cuando t = 3,00 s y $r_1 = 0{,}020$ m?

Resolución :

Sea:

Donde: R = 2,5 cm
$r_1 = 0{,}020$ m
$B = (0{,}030t^2 + 1{,}40)$ T
E = ?



Sabemos que : $\oint E\,.\,ds = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B$

$$\Rightarrow \quad E(2\pi\,.\,r_1) = -\frac{d}{dt}\left(\int BdA\right) = -\pi.r_1^2.\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{-r_1^2}{2r_1}\,.\,\frac{d}{dt}(0{,}030t^2 + 1{,}40)$$

$$\therefore \quad E(t) = \frac{-r_1^2}{2r_1}(0{,}06t) = -\left(\frac{r_1}{2}\right)(0{,}06t)$$

En consecuencia : Para : t = 3,00 s

$$|E_{(3{,}00\,s)}| = -\frac{(2{,}0\times10^{-2})^2}{2(0{,}020)}\,|(0{,}06(3{,}00))|$$

$$\therefore \quad |E| = 1{,}81\times10^{-3}\text{ N/C} \equiv 1{,}81\text{ mN/C (tangente a la trayectoria)}$$

34. **Un solenoide tiene un radio de 2,00 cm y 1 000 vueltas por metro. Sobre un cierto intervalo de tiempo la corriente varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $I = 3e^{0,2t}$ donde I está en amperes y t en segundos. Calcule el campo eléctrico a 5,00 cm del eje del solenoide en t = 10,0 s.**

Resolución :

Datos: $R_{Solenoide} = 2{,}00\text{ cm} \equiv 2{,}00\times10^{-2}$ m

$$\frac{N_{vueltas}}{longitud} = 1\,000\,\frac{vueltas}{m}$$

$I_{(t)} = 3.e^{0,2t}$

E = ? en t = 10,0 s y a r = 5,00 cm del eje del solenoide

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B\,.ds = \int B\,ds = B.L \text{ (ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0.I.N = B.Long$$

$$\therefore \quad B = \mu_0.I.\frac{N}{L}$$

Por otro lado

Sabemos que: $$\oint E\,.ds = -\frac{d}{dt}\,\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad E(2\pi.r) = -\frac{d}{dt}\left(\int B.dA\right) = -\pi.R^2.\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{-\pi.R^2}{2\pi.r}\,\mu_o\left(\frac{N}{L}\right).\frac{d}{dt}I \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{R^2.\mu_o}{2.(r)}.\left(\frac{N}{L}\right).\frac{d}{dt}\,(3.e^{0.2t})$$

$$\therefore \quad E(t) = -\frac{R^2.\mu_o.N.(3)(0{,}2)}{2rL}\,.\,e^{(0{,}2)t}$$

En consecuencia: para $\rightarrow$ t = 10,0 s y r = 5,00 cm

$$E = \frac{-\left(2{,}00\times10^{-2}\right)^2.\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(10^3\right)(3)(0{,}2)}{2\left(5{,}00\times10^{-2}\right)}\,.\,e^{(0{,}2)(10)}$$

$\therefore$ $E = -24{,}3 \times 10^{-6}$ N/C ≡ −24,3 μN/C (⊥ A B y en contra de I)

35. Un largo solenoide con 1 000 vueltas por metro y 2,00 cm de radio conduce una corriente oscilante I = (5,00 A)sen(100 πt). a) ¿Cuál es el campo eléctrico inducido en un radio r = 1,00 cm a partir del eje del solenoide? b) ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico cuando la corriente está aumentando en la bobina en dirección contraria a la de las manecillas del reloj?

Resolución :

Datos: $\frac{N_{solenoide}}{longitud} = 1\,000\,\frac{vueltas}{m}$

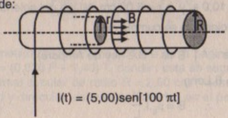
$R_{Solenoide} = 2{,}00$ cm ≡ $2{,}00 \times 10^{-2}$ m

I(t) = (5,00A)sen(100 πt)

Parte (a)

Nos piden E a un r = 1,00 cm a partir del eje del solenoide.

Sea el solenoide:



Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B\,.ds = \int B.ds = B.L \qquad \text{(ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_o.I.N = B.L$$

$$\therefore \quad B = \mu_o\,.\,\frac{N}{L}\,.\,I(t)$$

Por otro lado:

Tenemos que: $$\oint E\,.ds = -\frac{d}{dt}\,\Phi_B$$

(Por simetría) $$\Rightarrow E(2\pi.r) = -\frac{d}{dt}\left(\int B.dA\right) = -\pi.r^2.\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{r}{2}.(\mu_o).\left(\frac{N}{L}\right).\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = \left(-\frac{r}{2}\right)\left(\mu_o.\frac{N}{L}\right)\frac{d}{dt}\,(5{,}0\text{sen}[100\,\pi t])$$

$$\Rightarrow \quad E = \left(-\frac{r}{2}\right)\left(\mu_o.\frac{N}{L}\right)\,(500\,\pi).\cos(100\pi t)$$

$$\Rightarrow \quad E = \left(-\frac{1\times10^{-2}}{2}\right)\left(4\pi\times10^{-7}\right)(10^3)(500\pi)\cos[100\pi t]$$

$\therefore$ E(t) = (+9,87 mV/m) cos(100 πt) (en contra de las manecillas del reloj)

Parte (b)

De la parte (a) E(t) está en contra de las manecillas del reloj ó en contra de la corriente que está señalando. Ahora si la corriente aumenta en contra de las manecillas del reloj entonces, la dirección de "E(t)" será en el sentido de las manecillas del reloj.

GERENADORES Y MOTORES

36. En un alternador de automóvil de 250 vueltas el flujo magnético en cada vuelta es $\Phi_B = (2{,}50 \times 10^{-4}$ T . m²)cos(ωt), donde ω es la rapidez angular del alternador. Éste se encuentra engranado para girar tres veces por cada revolución del motor. Cuando el motor está funcionando a una rapidez angular de 1 000 rev/min, determine a) la fem inducida en el alternador como una función del tiempo, y b) la máxima fem en el alternador.

Resolución :

Datos: N = 250 vueltas $\Phi_B = (2{,}50 \times 10^{-4}$ T.m²) cos(ω.t)

$$\omega = 1\,000\,\frac{rev}{min} \equiv \frac{100}{3}\,\pi \text{ rad/s}$$

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -N \cdot \frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ind} = -N \cdot \frac{d}{dt}\,(2{,}50\times 10^{-4} \cdot \cos[\omega t])$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ind} = (-250)\,(2{,}50\times 10^{-4})\,(-\omega).\text{sen}[\omega t]$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind}\,(t) = 6{,}545\text{ V} \cdot \text{sen}\left(\frac{100}{3}\pi\, t\right)$$

Parte (b)

$$\varepsilon_{ind} \text{ será máximo cuando sen}\left(\frac{100}{3}\pi\, t\right) = 1$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind\ máx} = 6{,}545\text{ V}$$

37. Una bobina de 0,100 m² de área está girando a 60,0 rev/s con el eje de rotación perpendicular a un campo magnético de 0,200 T. a) Si hay 1 000 vueltas en la bobina, ¿cuál es el máximo voltaje inducido en él? b) Cuando el máximo voltaje inducido ocurre, ¿cuál es la orientación de la bobina respecto del campo magnético?

Resolución:

Datos: $A_{bobina} = 0{,}100\text{ m}^2$; $\omega = 60$ rev/s

$B = 0{,}200\text{ T} \perp$ Al eje de rotación

Parte (a)

Si hay N = 1 000 vueltas en la bobina. Hallar $\varepsilon_{máx}$

Sabemos que: $\varepsilon_{máx} = N.A.B.\omega$

$$\Rightarrow \varepsilon_{máx} = (1\,000)(0{,}100)(0{,}200)(120\pi)$$

$$\therefore \varepsilon_{máx} = 7{,}54\times 10^{3}\text{ V} \equiv 7{,}54\text{ kv}$$

Parte (b)

El plano de la bobina es perpendicular al campo magnético.

38. Una bobina cuadrada (20,0 cm × 20,0 cm) que consta de 100 vueltas de alambre gira alrededor de un eje vertical a 1 500 rev/min, como se indica en la figura P31.38. La componente horizontal del campo magnético terrestre en la posición de la bobina es $2{,}00\times 10^{-5}$ T. Calcule la máxima fem inducida en la bobina por este campo.

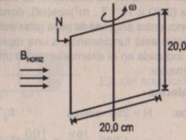


Figura P31.38

Resolución:

Datos: N = 1 000 vueltas ; $\omega = 1\,500\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \equiv 50\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$B_{Horiz} = 2{,}00\times 10^{-5}$ T ; $\varepsilon_{máx} = ?$

Sabemos que: $\varepsilon_{ind\ máx} = N.A.B.\omega$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ind\ máx} = (10^{3})(0{,}2)^{2}\,(2{,}00\times 10^{-5})(50\pi)$$

$$\therefore \varepsilon_{ind.\ máx} = 125{,}6\times 10^{-3}\text{ V} \equiv 125{,}6\text{ mV}$$

39. Un largo solenoide, cuyo eje coincide con el eje x, consta de 200 vueltas por metro de alambre que conduce una corriente estable de 15,0 A. Se forma una bobina enrollando 30 vueltas de alambre delgado alrededor de un armazón circular que tiene un radio de 8,00 cm. La bobina se pone dentro del solenoide y se monta sobre una eje que está a un diámetro de la bobina y coincide con el eje y. Después, la bobina se hace girar con una rapidez angular de 4,00 π rad/s. (El plano de la bobina está en el plano yz en t = 0). Determine la fem desarrollada en la bobina como función del tiempo.

Resolución:

Datos:

$n_{Solenoide} = 200$ vueltas/m

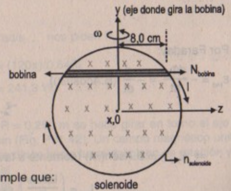
$\omega_{Bobina} = 4{,}00\pi$ rad/s

$I = 15{,}0$ A

$\varepsilon_{ind}(t) = ?$

$N_{Bobina} = 30$ vueltas

$R_{Bobina} = 8{,}00$ cm



Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B\, ds = \int B\,.dL = \int B\,.L$$

$$\Rightarrow \mu_0.I.N = B.L$$

$$\Rightarrow B = \mu_0.I.\left(\frac{N}{L}\right) = \mu_0.I.n_{Solen.}$$

Por otro lado:

Por la ley de inducción de Faraday: (Para la bobina)

$$\varepsilon_{ind} = -N_{Bobina} \cdot \frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ind} = -N \cdot \frac{d}{dt}\,(B.A.\cos(\omega t))$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_{ind} = -N.B.A_{Bob}.\frac{d}{dt}[\cos(\omega t)]$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_{ind} = \omega.N.B.A.sen(\omega t) = (\omega)(N)(\mu_0 I.n)(A)sen(\omega t)$$

$$\therefore \ \varepsilon_{ind} = (30)(4\pi \times 10^{-7})[\pi(0{,}08)^2][15][200]sen(4{,}00\pi t) = (28{,}6\ mV)sen(4{,}00\pi t)$$

40. Un imán de barra se hace girar a una rapidez angular constante ω alrededor de un eje, como se ilustra en la figura P31.40. Una espira conductora rectangular plana rodea al imán, y en t = 0 el imán está orientado como se muestra. Haga una gráfica cualitativa de la corriente inducida en la espira como función del tiempo graficando las corrientes en sentido contrario al de las manecillas del reloj como positivas y como negativas las que están en el sentido de éstas.

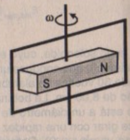
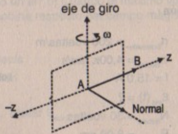


Figura P31.40

Resolución :



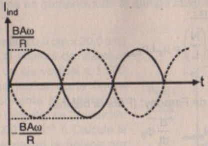
Por Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B.A\cos(\omega t))$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_{ind} = \omega.B.A sen(\omega t) \text{ (corriente a favor de las manecillas del reloj)}$$

$$\therefore \ I_{ind} = \left(\frac{B.A.\omega}{R}\right) sen(\omega t)$$

Graficando:



En (—) : corriente en contra de las manecillas del reloj.

En (----) : corriente a favor de las manecillas del reloj.

41. a) ¿Cuál es el momento de torsión máxima que entrega un motor eléctrico si éste tiene 80 vueltas de alambre enrolladas sobre una bobina rectangular, cuyas dimensiones son 2,50 cm por 4,00 cm? Suponga que el motor utiliza 10,0 A de corriente y que un campo magnético uniforme de 0,800 T existe dentro del motor. b) Si el motor gira a 3 600 rev/min, ¿cuál es la potencia pico producida por el motor?

Resolución :

Parte (a)

Hallar: $\tau_{torsión} = ?$

Si: $N_{motor} = 80$ vueltas ; $A_{bobina\ rectangular} = (2{,}50) \times (4{,}00)\ cm^2$

$I_{motor} = 10{,}0$ A ; $B_{unif} = 0{,}800$ T

Sabemos que: $\tau_{torsion} = N\mu \times B$

$$\Rightarrow \ |\tau_{torsión}| = N.\mu.Bsen\theta$$

$$\Rightarrow \ |\tau_{torsión\ máxima}| = N.\mu.Bsen(\pi/2) = N.\mu.B$$

$$\Rightarrow \ |\tau_{torsión\ máxima}| = (80)(10)(2{,}5)(4{,}00) \times 10^{-4} \times (0{,}800)$$

$$\therefore \ \tau_{Torsión} = 0{,}640\ N.m$$

Parte (b)

Si: $\omega_{motor} = 3\,600\ \frac{rev}{min} \equiv 120\,\pi$ rad/s , nos piden P_{motor}

Recordando: $P = \tau.\omega \ \Rightarrow \ P_{motor} = (120\pi)(0{,}640)$

$$\therefore \ P_{motor} = 241{,}3\ W$$

42. Un conductor semicircular de radio R = 0,250 m se hace girar en torno al eje AC a una rapidez constante de 120 rev/min (Fig. P31.42). Un campo magnético uniforme en toda la mitad inferior de la figura se dirige hacia fuera del plano de rotación y tiene una magnitud de 1,30 T. a) Calcule el valor máximo de la fem inducida en el conductor. b) ¿Cuál es el valor de la fem inducida promedio para cada rotación completa? c) ¿Cómo cambiarían las respuestas a las partes a) y b) si B se dejara extender una distancia R sobre el eje de rotación? Dibuje la fem *versus* el tiempo d) cuando el campo es como se dibuja en la figura P31.42,y e) cuando se extiende como se describe en la parte c).

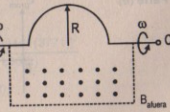


Figura P31.42

Resolución :

Datos: R = 0,250 m ; $\omega = 120\ \frac{rev}{min} \equiv 4\,\pi$ rad/s ; $B_{afuera} = 1{,}30$ T

Parte (a)

Sabemos que: $\mathcal{E}_{\text{ind máx}} = B.A.\omega \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind máx}} = (1{,}30)(4\pi)\left[\frac{\pi}{2}(0{,}250)^2\right]$

$\therefore \mathcal{E}_{\text{ind máx}} = 1{,}60\ V$

Parte (b)

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\mathcal{E}(t)_{\text{ind}} = B.A.\omega \text{sen}(\omega t)$$

Entonces para una rotación completa $t = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow E_{\text{prom Ind}} = B\ .\ A\ .\ \omega \text{sen}\left[\omega \times \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$\therefore E_{\text{prom Ind}} = 0$$

Parte (c)

Si: "B" se extiende una distancia R $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\text{ind máx}} = 3{,}20$ V en la parte (a)

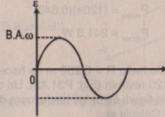
Si: "B" se extiende una distancia R $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\text{ind máx}} = 0$ en la parte (b)

Parte (d)

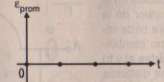
Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\mathcal{E}_{\text{ind (t)}} = B.A.\omega.\text{sen}(\omega t)$$

Graficando: $\mathcal{E}$ *vs* t



Parte (e)



43. La espira rotatoria en un generador de ca es un cuadrado de 10,09 cm de lado. Se hace girar a 60,0 Hz en un campo uniforme de 0,800 T. Calcule a) el flujo que atraviesa la espira como una función del tiempo, b) la fem inducida en la espira, c) la corriente inducida en la misma para una resistencia de espira de 1,00 Ω, d) la potencia en la resistencia de la espira y e) el momento de torsión que debe ejercerse para rotarlo.

Resolución :

Datos: Sea por condición la espira rotatoria un "cuadrado"

Lado del cuadrado = 0,100 m

$\omega_{\text{espira}} = 60$ Hz

$B_{\text{uniforme}} = 0{,}800$ T

Parte (a)

Sabemos que en un generador de corriente alterna se cumple que:

$$\Phi_B = B.A.\cos\theta = B.A.\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \Phi_B(t) = (0{,}800)(0{,}1)^2\ .\ \cos[60\ \frac{\text{rev}}{\text{s}}\ .\ t]$$

$$\therefore \Phi_B(t) = (8{,}00\ \text{mT.m}^2)\ .\ \cos(120\ \pi t) \equiv (8{,}00\ \text{mT.m}^2)\cos[377t]$$

Parte (b)

Por la ley de inducción de Faraday se cumple que :

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}(8{,}00\ \text{mT} \times \text{m}^2\ .\ \cos[377t])$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} = (8{,}00\ \text{mT} \times \text{m}^2)(377)\ .\ \text{sen}[377t]$$

$$\therefore \mathcal{E}_{\text{ind}} = 3{,}016\ T \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.\ \text{sen}\ (377t) \equiv 3{,}016\ V\ .\ \text{sen}(377t)$$

Parte (c)

Si : $R = 1{,}00\ \Omega \Rightarrow \mathcal{E}(t)_{\text{ind}} = I(t)_{\text{ind}}\ .\ R = (3{,}016\ V)\ \text{sen}(377t)$

$$\therefore I(t)_{\text{ind}} = (3{,}016A)\ \text{sen}[377t]$$

Parte (d)

Sabemos que: $P = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} \Rightarrow P = \dfrac{[(3{,}016\,V)\text{sen}(377\,t)]^2}{(1{,}00\,\Omega)}$

$$\therefore P = (9{,}10\ W)\ \text{sen}^2(377t)$$

Parte (e)

Sabemos que: $\tau_{\text{torsión}} = \mu \times B = I.A.B\text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \tau_{\text{torsión}} = (0{,}1)^2(0{,}800)\text{sen}(377t)\ .\ [3{,}016\ A\ .\ \text{sen}(377t)]$$

$$\therefore \tau_{\text{torsión}} = 24{,}1\ \text{mN.m}\ .\ \text{sen}^2\ (377t)$$

CORRIENTES PARÁSITAS

44. Un alambre de 0,150 kg en la forma de un rectángulo cerrado de 1,00 m de ancho y 1,50 m de largo tiene una resistencia total de 0,750 Ω. Se deja que el rectángulo descienda por un campo magnético dirigido perpendicularmente a la dirección de movimiento del rectángulo (Fig. P31.44). El rectángulo se acelera hacia abajo conforme se aproxima a una rapidez terminal de 2,00 m/s, con su parte superior que aún no está en esta región del campo. Calcule la magnitud de B.

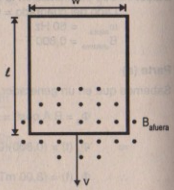


Figura P31.44 Problemas 44 y 45.

Resolución :

Sea el siguiente gráfico :

Datos : $M_{alambre} = 0{,}150$ kg ; $\ell = 1{,}50$ m
$\omega = 1{,}00$ m ; $R_{total} = 0{,}750\ \Omega$
$v_{term} = 2{,}00$ m/s ; $|B| = ?$

Cuando el rectángulo se aproxima a su velocidad terminal entonces se cumple que:

$$F_B = M.g$$

$$\Rightarrow I_{ind}.w.B = M.g \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\varepsilon_{ind}}{R}\right).w.B = Mg$$

Pero por Faraday: $|\varepsilon_{ind}| = B.w.v_{term} = B.w.v$

Luego: $\left(\frac{B.\omega.v_{term}}{R}\right).w.B = M.g$

$$\Rightarrow B = \frac{l}{w}.\sqrt{\frac{M.gR}{v_{term}}}$$

Reemplazando datos: $B = \frac{l}{w}.\sqrt{\frac{(0{,}150)(9{,}8)(0{,}750)}{2{,}00}}$

$$\therefore \quad |B| = 0{,}74\ T$$

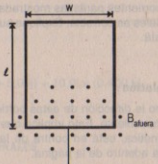
45. Una espira rectangular conductora de masa M, resistencia R y dimensiones w por ℓ desciende desde el reposo dentro de un campo magnético B, como en la figura P31.44. La espira se aproxima a una rapidez terminal v_t. a) Muestre que

$$v_t = \frac{M.g.R}{B^2.w^2}$$

b) ¿Por qué v_t es proporcional a R? c) ¿Por qué es inversamente proporcional a B^2?

Resolución :

Sea:



Donde: B : Campo magnético
M : Masa de la espira
R : Resistencia de la espira

Parte (a)

Por demostrar que: $v_t = \frac{M.g.R}{B^2.w^2}$

Cuando la espira se aproxima a su velocidad terminal, entonces las sumas de todas las fuerzas que intervienen en ella se hacen cero; entonces se cumple:

F_B = Peso de la espira = M . g

$$\Rightarrow I_{ind}.w.B = M.g$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B.w.v}{R}\right).w.B = M.g \quad \text{... (por Faraday)}$$

$$\therefore \quad v_{term} = \frac{M.g.R}{B^2.w^2} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Como I_{ind} es inversamente proporcional a R, entonces:
V es proporcional a R ya que ε_{ind} es proporcional a v.

Parte (c)

v_T es inversamente proporcional al campo magnético, porque dicho campo provoca la existencia de una fuerza que reduce la velocidad y en consecuencia equilibra al peso.

46. La figura P31.46 representa un freno electromagnético que utiliza corrientes parásitas. Un electroimán cuelga de un carro de ferrocarril cerca de un riel. Para detener al carro se envía una gran corriente estable a través de las bobinas del electroimán. El electroimán en movimiento induce corrientes parásitas en los rieles, cuyos campos se oponen al cambio en el campo del electroimán. Los campos magnéticos de las corrientes parásitas ejercen fuerza sobre la corriente en el electroimán y, consecuentemente, detienen al carro. La dirección del movimiento del carro y la dirección de la corriente en el electroimán se muestran de manera correcta en el dibujo. Determine cuál de las corrientes parásitas mostradas en los rieles es correcta. Explique su respuesta.

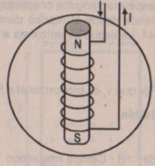


Figura P31.46

Resolución :

Como la dirección de estas corrientes produce una fuerza de arrastre sobre el tren en movimiento. Esto implica que la dirección de la fuerza de arrastre en este caso magnética, está en contra de la velocidad, lo cual produce un campo magnético hacia adentro de la página.

Por lo tanto la dirección de la corriente parásita hacia arriba es la correcta.

LAS MARAVILLOSAS ECUACIONES DE MAXWELL

47. Un protón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme E = 50,0j V/m y un campo magnético uniforme B = (0,200i + 0,300j + 0,400k) T. Determine la aceleración del protón cuando tiene una velocidad v = 200i m/s.

Resolución :

Datos: $E = 50{,}0\,j$ V/m ; $q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$B = (0{,}200i + 0{,}300j + 0{,}400k)$ T

$v = 200\,i$ m/s

$a_{p+} = ?$

Sabemos que: por la ley de Lorentz

$F_{Total} = F_{e^-} + F_B$

$\Rightarrow\ m_{p+} \,.\, a = q.E + q \,.\, v \times B$

$\Rightarrow\ m_{p+} \,.\, a = 1{,}6 \times 10^{-19} \times (50{,}0j) + (1{,}6 \times 10^{-19})(200\,i) \times (0{,}200i + 0{,}300j + 0{,}400k)$

$$\Rightarrow\ a_{p+} = \frac{1{,}6\times10^{-19}}{\left(1{,}67\times10^{-27}\right)}\times(50{,}0\,j)+\frac{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)(200i)}{1{,}67\times10^{-27}}\times(0{,}2i+0{,}3j+0{,}4k)$$

$$\therefore\ a_{p+} = (-2{,}87 \times 10^9 j + 5{,}75\,k \times 10^9)\ \text{m/s}^2$$

48. Un electrón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme E = (2,50i + 5,00j) V/m y un campo magnético uniforme B = 0,400k T. Determine la aceleración del electrón cuando tiene una velocidad v = 10,0i m/s.

Resolución :

Datos: $E = (2{,}50\,\hat{i} + 5{,}00\,\hat{j})$ V/m; $B = 0{,}400\,\hat{k}$ T

$v = 10{,}0\,i$ m/s ; $a_{e^-} = ?$

Sabemos que por la ley de Lorentz:

$F_{Total} = F_{e-} + F_B$

$\Rightarrow\ m_{e^-} \times a_{e^-} = q_e \,.\, E + q_e \,.\, v \times B$

$\Rightarrow\ (9{,}1 \times 10^{-31}) \,.\, a_{e^-} = (-1{,}6 \times 10^{-19}) \,.\, [(2{,}50i + 5{,}00j) + 10{,}0i \times (0{,}400\,k)$

$\therefore\ a_{e^-} = (-4{,}39 \times 10^{11} i - 1{,}758 \times 10^{11} j)$ m/s²

PROBLEMAS ADICIONALES

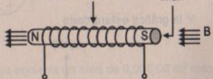
49. Una cuerda de acero de guitarra vibra (véase la Fig. 31.5). La componente del campo magnético perpendicular al área de una bobina fonocaptora cercana está dada por

$$B = 50{,}0\ \text{mT} + (3{,}20\ \text{mT})\ \text{sen}\,(2\pi 523\ t/s)$$

La bobina fonocaptora circular tiene 30 vueltas y 2,70 mm de radio. Encuentre la fem inducida en la bobina como función del tiempo.

Resolución :

Sea:



Datos:

N = 30 vueltas

$R_{bobina} = 2{,}70$ mm

$B = 50{,}00$ mT + (3,20 mT) sen(2π . 523 t/s)

$\varepsilon_{ind}(t) = ?$

Por la ley de inducción de Faraday tenemos que:

$$\varepsilon_{ind} = -N \,.\, \frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_{ind} = -N \,.\, \frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -N.A.\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_{ind} = (-30)(\pi)(2{,}70 \times 10^{-3}) \,.\, \frac{d}{dt}\,[(50{,}0 \times 10^{-3} + (3{,}20 \times 10^{-3})\ \text{sen}(2\pi \,.\, 523t/s)]$$

$$\therefore\ \varepsilon_{ind}(t) = (-7{,}22 \times 10^{-3}\ \text{V})\cos[2\pi \,.\, 523\ t/s]$$

50. La figura P31.50 es una gráfica de la fem inducida *versus* tiempo para una bobina de N vueltas que gira a velocidad angular ω en un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al eje de rotación de la bobina. Copie está gráfica (a una escala mayor) y sobre el mismo juego de ejes muestre la gráfica de fem *versus* t a) si el número de vueltas en la bobina se duplica, b) si en lugar de esto se duplica la velocidad angular, y c) si la velocidad angular se duplica mientras el número de vueltas en la bobina se reduce a la mitad.

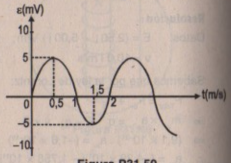


Figura P31.50

Resolución :

Datos : N, ω : cte.

Parte (a)

Según el gráfico : $\varepsilon_{ind\,Máx} = 5{,}00 \times 10^{-3}\ V = N.A.B.\omega$

$T = 2{,}00 \times 10^{-3}\ s \equiv 200\ ms$

$\Rightarrow\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \times 10^{+3}\ rad/s$

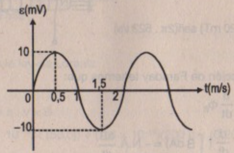
Entonces:

Si: $N' = 2N \ \Rightarrow\ \varepsilon'_{ind\,máx} = 10{,}00 \times 10^{-3}\ V$

Luego:

$\varepsilon(t)_{ind\,máx} = (10{,}00 \times 10^{-3}\ V)\ .\ sen[\pi \times 10^{+3}t]$

Y la gráfica estará dada :

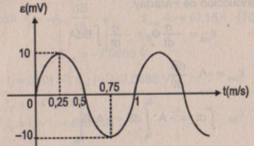


Parte (b)

Si: $\omega' = 2\pi \times 10^{+3} \Rightarrow\ 2\pi \times 10^{+3} = \dfrac{2\pi}{T}\ \ \therefore\ \ T = 1{,}00\ ms$

Luego: $\varepsilon_{(t)\,ind\,máx} = (10{,}00 \times 10^{-3}\ V)\ .\ sen\ [2\pi \times 10^{3}t]$

Entonces la gráfica estará dado por :



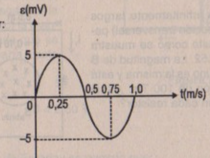
Parte (c)

Si: $N' = \dfrac{N}{2}\ \wedge\ \omega' = 2\omega\ \ \Rightarrow\ \ \varepsilon_{ind\,máx} = 5{,}00\ mV$

Por otro lado: $2(\pi \times 10^{+3}) = \dfrac{2\pi}{T}\ \ \Rightarrow\ T = 10^{-3}\ s$

Entonces: $\varepsilon(t)_{ind} = (5{,}00\ mV)\ sen[2\pi \times 10^{3}\ t]$

Por lo tanto:
La gráfica está dada por:



51. Un técnico que usa una pulsera de cobre que encierra un área de 0,005 00 m² coloca su mano en un solenoide cuyo campo magnético es de 5,00 T dirigido perpendicular al plano de la pulsera. La resistencia eléctrica alrededor de la circunferencia de la pulsera es 0,020 0 Ω. Una inesperada falla en la potencia provoca que el campo caiga a 1,50T en un tiempo de 20,0 ms. Encuentre a) la corriente inducida en la pulsera, y b) la potencia entregada a la resistencia de la pulsera. (Sugerencia: como este problema da a entender, usted nunca debería llevar cualesquier objetos metálicos cuando trabaje en regiones de intensos campos magnéticos).

Resolución :

Datos: Área de la puerta $= 0{,}00500\ m^2$; $R_{Pulsera} = 0{,}0200\ \Omega$

$B_{Inicial} = 5{,}00\ T$

$B_{Final} = 1{,}50\ T$; $\Delta t = 20{,}0\ ms$

Parte (a)
Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left[\int B\,dA\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -A \, . \, \frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} \int dt = -A . \int_{B_i}^{B_f} dB = -A.B\Big|_{B_i}^{B_f}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} \, . \, \Delta t = I_{ind}.R.\Delta t = A(B_i - B_f)$$

$$\therefore \quad I_{ind} = \frac{A(B_i - B_f)}{R.\Delta t} = \frac{(0{,}00500)(3{,}50)}{(20\times 10^{-3})(0{,}0200)} = 43{,}8\ \text{A}$$

Parte (b)

$$P_{entregada} = I^2 \, . \, R = (43{,}8)^2 \times (0{,}020).$$

$$\therefore \quad P_{entrega} = 38{,}3\ \text{W}$$

52. Dos solenoides infinitamente largos (vistos por su sección transversal) pasan por un circuito como se muestra en la figura P31.52. La magnitud de **B** dentro de cada uno es la misma y está creciendo a razón de 100 T/s. ¿Cuál es la corriente en cada resistor?

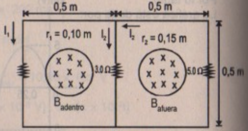


Figura P31.52

Resolución:

Datos: $\frac{dB}{dt} = 100\ \frac{T}{s}$

$I_{c/resistor} = ?$

Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -A \, . \, \frac{dB}{dt} \quad \text{(a través del circuito)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -(0{,}1)^2 \, . \, \pi \, . \, (100\ \text{T/s})$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind} = -3{,}1416\ \text{V} \quad \text{... (con B adentro)}$$

Luego: $I_1 \, . \, (6{,}0) = |\varepsilon_{ind}| = |-3{,}1416\ \text{V}|$

$$\therefore \quad I_1 = 0{,}524\ \text{A} \equiv 524\ \text{mA}$$

Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right) = -A \, . \, \frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -\pi\,(0{,}15)^2 \, . \, (100)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind} = -7{,}0686\ \text{V}$$

Luego: $I_3 = (5{,}0) = |\,\varepsilon_{ind}\,| = |-7{,}0686\ \text{V}|$

$$\therefore \quad I_3 = 1\,414\ \text{mA}$$

En consecuencia: $I_2 = I_3 - I_1 = 890\ \text{mA}$

53. Una barra conductora de longitud ℓ = 35,0 cm se libera para deslizarse sobre dos barras conductoras paralelas, como se muestra en la figura P31.53. Dos resistores R_1 = 2,00 Ω y R_2 = 5,00 Ω están conectados a los extremos de las barras para formar una espira. Un campo magnético constante B = 2,50 T se dirige perpendicularmente hacia adentro de la página. Un agente externo jala a la barra hacia la izquierda a una rapidez constante de v = 8,00 m/s. Encuentre a) Las corrientes en ambos resistores, b) la potencia total entregada a la resistencia del circuito, y c) la magnitud de la fuerza aplicada que se necesita para mover la barra a esta velocidad contante.

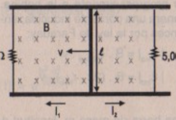


Figura P31.53

Resolución:

Datos: l = 35,0 cm ; B = 2,50 T
v = 8,00 m/s

Parte (a)
Sabemos que por la ley de Faraday se cumple que:

$$|\varepsilon_{ind}| = B \, . \, \ell \, . \, v$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{ind}| = (2{,}50)(0{,}35)(8{,}00) = 7{,}00\ \text{V}$$

Luego: Por Kirchoof:

$$7{,}00\ \text{V} = I_1 \, . \, R_1 = I_2 \, . \, R_2$$

$$\Rightarrow \quad 7{,}00\ \text{V} = I_1\,(2{,}00) \qquad \therefore \quad I_1 = 3{,}50\ \text{A}$$

Por último: $7{,}00\ \text{V} = I_2\,(5{,}00) \qquad \therefore \quad I_2 = 3{,}50\ \text{A}$

Parte (b)

$$P_{total\ entregada} = I_1^2 \, . \, R_1 + I_2^2 \, . \, R^2$$

$$P_{total\ entregada} = (3{,}50)^2\,(2{,}00) + (1{,}40)^2\,(5{,}00)$$

$$\therefore \quad P_{total\ entregada} = 34{,}3\ \text{W}$$

Parte (c)

Sabemos que: $P_{total} = F_{aplic} \cdot v$

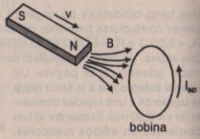
$\Rightarrow \quad 34{,}3 = F_{aplic} \cdot (8{,}00)$

$\therefore \quad F_{aplic} = 4{,}3\ N$

54. Suponga que usted enrolla alambre sobre el núcleo de un rollo de cinta de celofán para formar una bobina. Describa cómo puede usar un imán de barra para producir un voltaje inducido en la bobina. ¿Cuál es el orden de magnitud de la fem que usted generó? Establezca las cantidades que consideró como datos y sus valores.

Resolución :

Cuando:



Se le aplica una velocidad al imán, es decir conforme se va acercando progresivamente a la bobina, genera una corriente inducida; entonces por la ley de Faraday:

$|\varepsilon_{ind}| = B \cdot \ell_{Bobina} \cdot v$

$\therefore \quad |\varepsilon_{ind}| = B \cdot (2\pi \cdot r_{Bob}) \cdot v$

55. Una barra de masa m, longitud d y resistencia R se desliza sin fricción sobre rieles paralelos, como se muestra en la figura P31.55. Una batería que mantiene una fem constante ε se conecta entre los rieles y un campo magnético constante B se dirige perpendicularmente al plano de la página. Si la barra parte del reposo, muestre que en el tiempo t se mueve a una rapidez

$$v = \frac{\varepsilon}{B.d}\left(1 - e^{-\frac{B^2.d^2}{Rm}.t}\right)$$

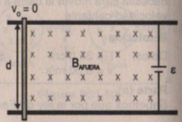


Figura P31.55

Resolución :

Datos: m , d, R, B, t

Por demostrar que: $v = \dfrac{\varepsilon}{B.d}\left(1 - e^{-\frac{B^2.d^2}{Rm}.t}\right)$

Si V se dirige a la derecha, entonces por la ley de Lenz, la corriente inducida está dirigida en dirección de las manecillas del reloj; y puesto que v aumenta en el tiempo, entonces se cumple que:

$$F_B = m \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow I_{ind}.d.B = m \cdot \frac{dV}{dt} \;\ldots (1)$$

Por otro lado:

Por la ley de Maxwell: $\oint E \,.ds = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \varepsilon_{ind}$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = E \,.\, d = +\varepsilon_{ind} - I_{ind} \,.\, R = -\varepsilon$$

$$\therefore \quad I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind} + \varepsilon}{R} = -\frac{B.d.V}{R} + \frac{\varepsilon}{R}$$

Entonces de (1): $\left(-\dfrac{B.dv + \varepsilon}{R}\right).d.B = m.\dfrac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} + \frac{B^2.d^2}{Rm}.v = \frac{\varepsilon.B.d}{Rm} \quad \text{(Ec. diferencial lineal)}$$

Desarrollando:

Si: $\mu(t) = e^{\int \frac{B^2.d^2}{Rm} dt} \Rightarrow \mu(t) = e^{\frac{B^2.d^2}{Rm}.t}$

Luego: $\mu(t).\dfrac{dv}{dt} + \left(\dfrac{B^2.d^2}{Rm}\right).(\mu(t)) = \dfrac{\varepsilon.B.d}{Rm}.(\mu(t))$

$$\Rightarrow \quad d[V.(\mu(t))] = \frac{\varepsilon.B.d}{Rm}.(\mu(t))dt = \frac{\varepsilon.B.d}{Rm}.e^{\frac{B^2d^2}{Rm}.t}$$

Integrando resulta: $v \,.\, (\mu(t)) = \left(\dfrac{\varepsilon.B.d}{R.m}\right)\left(\dfrac{Rm}{B^2d^2}\right).e^{\frac{B^2d^2}{Rm}.t}\Big|_0^t$

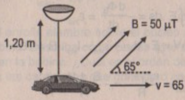
$$v \,.\left(e^{\frac{B^2d^2}{Rm}.t}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{Bd}\right).\left(e^{\frac{B^2d^2}{Rm}.t} - 1\right)$$

$$\therefore \quad v(t) = \left(\frac{\varepsilon}{Bd}\right).\left[1 - e^{-\frac{B^2d^2}{Rm}.t}\right] \quad \text{Lqqd.}$$

56. Un automóvil tiene una antena de radio vertical de 1,20 m de largo. El automóvil viaja a 65,0 km/h sobre un camino horizontal donde el campo magnético terrestre es 50,0 μT dirigido hacia el norte y hacia abajo a un ángulo de 65,0° bajo la horizontal.

a) Especifique la dirección en la que el automóvil debe moverse para generar la máxima fem de movimiento en la antena, con la parte superior de la misma positiva respecto de la inferior. b) Calcule la magnitud de esta fem inducida.

Resolución :



Parte (a)

Sí: el auto se mueve a la derecha, entonces se genera una fem máxima "V" tiene que mantenerse constante; en consecuencia por la ley de Lenz el sentido de la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj, lo que provocará una F_B con dirección de la velocidad.

Parte (b)

$$\varepsilon_{máx} = B\,.\,\ell\,.\,V = (50 \times 10^{-6})\text{sen}(65°) \times (1{,}20)(65)\left(\frac{5}{18}\right)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{\text{Ind Máx}} = 982 \times 10^{-6}\ V = 982\ mV$$

57. El plano de una espira cuadrada de alambre con longitud de lado a = 0,200 m es perpendicular al campo magnético terrestre en un punto donde B = 15,0 μT, como se muestra en la figura P31.57. La resistencia total de la espira y de los alambres que la conectan al galvanómetro es 0,500 Ω. Si la espira se colapsa repentinamente mediante fuerzas horizontales como se indica, ¿qué carga total pasa a través del galvanómetro?

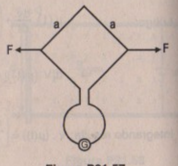


Figura P31.57

Resolución :

Datos: $a = 0{,}200$ m ; $B = 15{,}0\ \mu T$
$R_{galv} = 0{,}500\ \Omega$; Q_{total} (en el galv.) = ?

Sabemos que porla ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}(\Phi_B) = -\frac{d}{dt}\left(\int B dA\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -B\,.\,\frac{dA}{dt} = |I.R| = \left|-B\,.\,\frac{dA}{dt}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{dQ}{dt}.R\right| = B\,.\,\frac{dA}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int dQ = \left(\frac{B}{R}\right).\int dA$$

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{B.A}{R} = \frac{(15{,}0\times10^{-6})(0{,}2)^2}{0{,}500} = 1{,}20 \times 10^{-6}C = 1{,}2\ \mu C$$

58. Los valores del campo magnético se determinan con frecuencia mediante el uso de un dispositivo llamado *bobina de búsqueda*. Esta técnica depende de la medición de la carga total que pasa por una bobina en un intervalo de tiempo durante el cual el flujo magnético vinculado a los bobinados cambia ya sea por el movimiento de la bobina o debido al cambio en el valor de B. a) Demuestre que conforme el flujo que atraviesa la bobina cambia de Φ_1 a Φ_2, la carga transferida a través de la bobina estará dada por $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$, donde R es la resistencia de la bobina y el circuito asociado (galvanómetro) y N es el número de vueltas. b) Como un ejemplo específico calcule B cuando una bobina de 100 vueltas, 200 W de resistencia y área de sección transversal de 40,0 cm² produce los siguientes resultados. Una carga total de $5{,}00 \times 10^{-4}$ C pasa por la bobina cuando ésta gira en un campo uniforme desde una posición en que el plano de la bobina es perpendicular al campo a una posición en que el plano de la bobina es paralelo al campo.

Resolución :

Datos: B variable en el tiempo; R = Resistencia de la bobina
N = n.° de vueltas

Parte (a)

Por demostrar que: $\quad Q_{(\text{a través de la bobina})} = \frac{N}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$

Por la ley de Faraday: $\quad \varepsilon_{ind} = -N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B$

$$\Rightarrow \quad |I_{ind}\,.\,R| = \left|-N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B\right| = N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt}.R = N.\frac{d}{dt}\Phi_B \quad ; \quad \Phi_B \text{ cambia en el tiempo}$$

$$\Rightarrow \quad \int dQ = \left(\frac{N}{R}\right)\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi_B$$

$$\therefore \quad Q_{(\text{a través de la bobina})} = \frac{N}{R}(\Phi_2 - \Phi_1) \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si: N = 100 vueltas ; R = 200 Ω ; A = 40,0 × 10^{-4} m² ; Q_{total} = 5,00 × 10^{-4} C

Hallar B = ?

Según la parte (a): $Q_{total} = \frac{N}{R}(\Delta\Phi_B)$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = \frac{Q_{total}.R}{N} \quad \Rightarrow \quad B.DA = \frac{Q_{total}.R}{N}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{Q_{total}.R}{N.\Delta A} = \frac{(5{,}00\times10^{-4})(2\times10^{2})}{(10^{2})(40{,}0\times10^{-4})}$$

$$\therefore \quad B = 0{,}25\ \text{T}$$

59. En la figura P31.59 el eje de rodamiento, de 1,50 m de largo, se empuja a lo largo de rieles horizontales a una rapidez constante v = 3,00 m/s. Un resistor R = 0,400 Ω se conecta a los rieles en los puntos a y b, directamente opuestos entre sí. (Las ruedas hacen un buen contacto eléctrico con los rieles, de modo que el eje, los rieles y R forman un circuito de espira cerrada. La única resistencia significativa en el circuito es R.) Hay un campo magnético uniforme B = 0,080 0 T verticalmente hacia abajo. a) Encuentre la corriente inducida I en el resistor. b) ¿Qué fuerza horizontal F se requiere para mantener al eje rodando a una rapidez constante? c) ¿Qué extremo del resistor, a o b, está a un potencial eléctrico más alto? d) Después de que el eje rueda más allá del resistor, ¿la corriente en R invierte su dirección? Explique su respuesta.

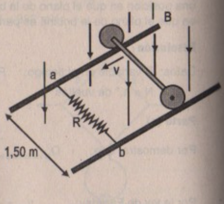


Figura P31.59

Resolución :

Donde: v = 3,00 m/s ; R = 0,400 Ω
B = 0,080 T

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Faraday se cumple que:

$$|\varepsilon_{ind}| = B.\ell.v$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind}.R = B.\ell.v \quad \Rightarrow \quad I_{ind} = \frac{B.\ell.v}{R} = \frac{(0{,}08)(1{,}5)(3{,}00)}{0{,}400}$$

$$\therefore \quad I_{ind} = 0{,}900\ \text{A}$$

Parte (b)

Sabemos que: $P = F_{aplic}.v = \frac{\varepsilon_{ind}^2}{R} = I_{ind}^2.R$

$$\Rightarrow \quad F_{aplic} = \frac{I_{ind}^2.R}{v} = \frac{(0{,}900)^2.(0{,}400)}{3{,}00}$$

$$\therefore \quad F_{aplic} = 0{,}108\ \text{N}$$

Parte (c)

Por la ley de Lenz la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj; en consecuencia el potencial en "b" es mayor.

Parte (d)

No.

60. Una barra conductora se mueve a una velocidad constante v perpendicular a un largo alambre recto que conduce una corriente I como se muestra en la figura P31.60. Muestre que la magnitud de la fem generada entre los extremos de la barra es

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_o.v.I}{2\pi.r}.\ell$$

En este caso observe que la fem disminuye con el aumento de r, como debería esperarse.

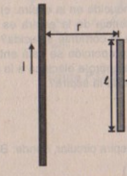
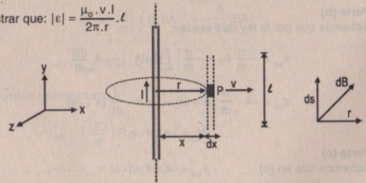


Figura P31.60

Resolución :

Por demostrar que: $|\varepsilon| = \frac{\mu_o.v.I}{2\pi.r}.\ell$



Aplicando la ley de Ampere: $\oint B.ds = \mu_o.I$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi r) = \mu_o.I \qquad \therefore \quad B_{en\,P} = \frac{\mu_o.I}{2\pi r}$$

Por otro lado:

Por la ley de Faraday: $\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left(\int B\,dA\right)$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}(B.A) = -\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\mu_o . I}{2\pi . r}\right][l.\alpha]\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -\frac{\mu_o . I . \ell}{2\pi . r}.\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon| = \frac{\mu_o . I . v}{2\pi . r}.\ell \qquad \text{Lqqd.}$$

61. Una espira circular de alambre de radio r se encuentra en un campo magnético uniforme, con el plano de la espira perpendicular a la dirección del campo (Fig. P31.61). El campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con B(t) = a + bt, donde a y b son constantes. a) Calcule el flujo magnético a través de la espira en t = 0. b) Calcule la fem inducida en la espira. c) Si la resistencia de la espira es R, ¿cuál es la corriente inducida? d) ¿A qué proporción se está entregando la energía eléctrica a la resistencia de la espira?

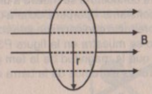


Figura P31.61

Resolución:

Sea la espira circular, donde: B(t) = a + b.t

Parte (a)

Sabemos que $B_{(t=0)} = a$

Entonces: $\Phi_B = B.A = a.\pi r^2$

Parte (b)

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\left(\int B.dA\right) = -A.\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -A.\frac{d}{dt}(a + bt) = -\pi.r^2.\frac{d}{dt}(a + bt)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind} = -\pi . r^2 . b$$

Parte (c)

Sabemos que en (b) $\quad \varepsilon_{ind} = -\pi . r^2 . b$

$$\Rightarrow \quad I_{ind} . R = -\pi . r^2 . b$$

$$\therefore \quad I_{ind} = -\frac{\pi . r^2 . b}{R}$$

Parte (d)

Nos piden $\quad \text{Potencia} = \frac{\text{energía entregada}}{t}$

$$\Rightarrow \quad P = I_{ind}^2 . R = \left(-\frac{\pi . r^2 . b}{R}\right).R$$

$$\therefore \quad P = \pi^2.r^4.b^2/R$$

62. En la figura P31.62 un campo magnético uniforme disminuye una relación constante dB/dt = –K m donde K es una constante positiva. Una espira circular de alambre de radio a que contiene una resistencia R y una capacitancia C se pone con su plano normal al campo. a) Encuentre la carga Q sobre el capacitor cuando éste se encuentra totalmente cargado. b) ¿Cuál de las placas está a mayor potencial? c) Analice la fuerza que provoca la separación de las cargas.

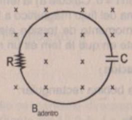


Figura P31.62

Resolución:

Donde: $\frac{dB}{dt} = -K$

Radio de la espira = a

Resistencia de la espira = R

Parte (a)

Sabemos que por la ley de inducción de Faraday se cumple que:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\left(\int B.dA\right) = -\frac{d}{dt}(BA)$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind} . R = -A . \frac{dB}{dt}$$

No es necesario transformarlo

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dQ}{dt}\right).R = -\pi.(a)^2.(-K)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = |\Delta V| = \pi.k.a^2$$

Luego: $\quad C = \frac{Q_{total}}{\Delta V} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_{ind}}$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = C \cdot \varepsilon_{ind} -$$

$$\therefore \quad Q_{total} = C \cdot (\pi . k . a^2)$$

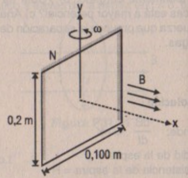
Parte (b)

En vista que: ε_{ind} es mayor que cero, entonces la placa de arriba está a mayor potencial.

63. Una bobina rectangular de 60 vueltas, dimensiones de 0,100 m por 0,200 m y resistencia total de 10,0 Ω, gira a rapidez angular de 30,0 rad/s alrededor del eje y en una región donde un campo magnético de 1,00 T está orientado a lo largo del eje x. La rotación se inicia de modo que el plano de la bobina es perpendicular a al dirección de B en t = 0. Calcule a) la fem inducida máxima en la bobina, b) la rapidez de cambio máxima del flujo magnético a través de la bobina, c) la fem inducida en t = 0,050 s, y d) el momento de torsión ejercido sobre la bobina por el campo magnético en el instante en que la fem es un máximo.

Resolución :

Sea la bobina rectangular:



Datos

N = 60 vueltas

ω = 30 rad/s

R = 10,0 Ω

B = 1,00 T

Parte (a)

Sabemos que: $\varepsilon_{ind\,máx} = N.A.B.\omega$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind\,máx} = (60)(1{,}00)(30) \cdot [(0{,}2)(0{,}1)]$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind\,máx} = 36{,}00 \text{ V}$$

Parte (b)

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -N \cdot \frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{ind\,máx}| = |36{,}00 \text{ V}| = \left| -60 \cdot \frac{d}{dt}\Phi_B \right|$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\Phi_B = 6{,}00 \times 10^{-3}\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}} \equiv 600\,\frac{\text{mWb}}{\text{s}}$$

Parte (c)

Nos piden: ε_{ind} en t = 0,0500 s

Sabemos que: $\varepsilon(t)_{ind} = \varepsilon_{ind\,máx} \cdot \text{sen}(\omega . t)$ (según Faraday)

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(0{,}05)_{ind} = \varepsilon_{máx} \cdot \text{sen}\,[30(0{,}05)]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(0{,}05)_{ind} = (36{,}00)\text{sen}[1{,}5]$$

$$\therefore \quad \varepsilon(0{,}05)_{ind} = 35{,}9 \text{ V}$$

Parte (d)

Sabemos que: $I_{ind\,máx} = \dfrac{\varepsilon_{ind\,máx}}{R}$

$$\therefore \quad I_{ind\,máx} = \frac{36{,}00}{10{,}00} = 3{,}6 \text{ A}$$

Entonces: $\tau_{torsión} = m \times B = I.A.B = (3{,}6)(1{,}00)[(0{,}2)(0{,}1)]$

$$\therefore \quad \tau_{torsión} = 72 \text{ mN.m}$$

64. Una pequeña roldana circular de 0,500 cm de radio se mantiene directamente abajo de un largo alambre recto que conduce una corriente de 10.0 A. La roldana está ubicada a 0,500 m sobre la cubierta de la mesa (Figura P31.64). a) Si la roldana se deja caer desde el reposo, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida promedio en ella desde el momento en que se suelta hasta el momento en que golpea la mesa? Suponga que el campo magnético casi es constante sobre el área de la roldana e igual al campo magnético en su centro. b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la roldana?

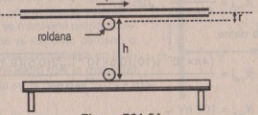


Figura P31.64

Resolución :

Datos: $R_{Roldana} = 0{,}500$ cm ; $I = 10{,}0$ A

h = 0,500m

Parte (a)

- Hallando el campo magnético inicial en el centro de la bobina.

  Por la ley de Ampere:

$$\oint B.ds = \mu_o . I \qquad \therefore \; B_i = \frac{\mu_o . I}{2\pi . r}$$

* Hallando el campo magnético final en el centro de la roldana.
  Por la ley de Ampere:

$$\oint B.ds = \mu_o.I \quad \therefore \quad B_f = \frac{\mu_o.I}{2\pi(r+h)}$$

Luego por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\left(\int B.dA\right) = -A.\frac{dB}{dt}$$

Entonces: $\varepsilon_{ind}\int dt = -A\int_{B_i}^{B_f} dB$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{ind}| = \left|-A.B\Big|_{B_i}^{B_f}\right| = \frac{A(B_i - B_f)}{\Delta t} \quad \text{... (1)}$$

Por cinemática (caída libre) $h = v_i.t + \frac{1}{2}.g.t^2$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$|\varepsilon_{ind}| = \frac{A(B_i - B_f).\sqrt{g}}{\sqrt{2h}} = (\pi.r^2)\times\sqrt{\frac{g}{2h}}\times\left[\frac{\mu_o.I}{2\pi.r} - \frac{\mu_o I}{2\pi(r+h)}\right]$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{ind}| = \frac{\mu_o.I.r}{4(r+h)}.\sqrt{2h.g}$$

Reemplazando datos:

$$\text{Resulta que: } |\varepsilon_{ind}| = \frac{(4\pi\times10^{-7})(10)(0,5\times10^{-2}).\sqrt{2(0,5)(9,8)}}{4(0,5\times10^{-2})+0,5}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{ind}| = 107 \text{ nV}$$

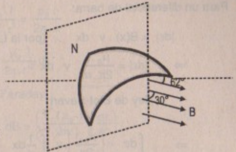
Parte (b)

La dirección de la corriente inducida en la Roldana es a favor de las manecillas del reloj.

65. Para monitorear la respiración de un paciente de hospital, una delgada banda se envuelve alrededor del pecho del paciente. La banda es una bobina de 200 vueltas. Cuando el paciente inhala, el área circundada por la bobina aumenta en 39,0 cm². La magnitud del campo magnético terrestre es de 50,0 μT y forma un ángulo de 28,0° con el plano de la bobina. Si un paciente tarda 1,80 s en inhalar, encuentre la fem inducida promedio en la bobina durante este tiempo.

Resolución:

Sea la banda:



Datos: N = 200 vueltas
ΔA = 309,0 cm²
B = 50,0 μT
Δt = 1,80 s
$\varepsilon_{ind\ prom}$

Sabemos que por la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -N.\frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind}.dt = -N.d\left[\int B.dA\right] = -N.d(B.A)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind}.dt = -N.d(B.A \text{ sen } 28°) = -N.B\text{sen}28°.dA$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind}.\int dt = -N.B\text{sen}28\int_{A_i}^{A_F} dA = -N.B\text{sen}28°.\Delta A$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_{ind\ prom}| = \frac{|-N.B.\text{sen}28°.\Delta A|}{\Delta t} = \frac{(200)(50\times10^{-6})(39\times10^{-4})(0,469)}{(1,80)}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{ind\ prom}| = 10,2\times10^{-6}\text{ V} \quad \text{ó} \quad \varepsilon_{ind\ prom} = -10,2\ \mu\text{V}$$

66. Una barra conductora de longitud ℓ se mueve a velocidad v paralela a un largo alambre que conduce una corriente estable I. El eje de la barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano a una distancia r, como se muestra en la figura P31,66. Demuestre que la magnitud de la fem inducida en la barra es

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_o.I}{2\pi}.v.\ln\left(1+\frac{\ell}{r}\right)$$

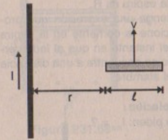
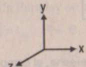


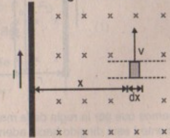
Figura P31.66

Resolución:

Por demostrar que:

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_o.I}{2\pi}.v.\ln\left(1+\frac{\ell}{r}\right)$$





Para un diferencial de barra:

$$|d\varepsilon| = B(x)\,.\,v\,.\,dx \quad \text{... (por la Ley de inducción de Faraday)}$$

$$\Rightarrow \quad |d\varepsilon| = \underbrace{\frac{\mu_0\,.\,I}{2\pi\,.\,\alpha}}_{\text{ley de Biot-Savart}}\,.\,v\,.\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int d\varepsilon = \left(\frac{\mu_0\,.\,I}{2\pi}\right).v.\int_r^{r+\ell}\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \left(\frac{\mu_0\,.\,I.\,v}{2\pi}\right).\ln\Big|_r^{r+\ell} = \frac{\mu_0\,.\,I.\,v}{2\pi}.\ln\left(\frac{r+\ell}{r}\right)$$

$$\therefore \quad |\varepsilon| = \frac{\mu_0\,.\,I}{2\pi}.v.\ln\left(1+\frac{\ell}{r}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

67. Una espira rectangular de dimensiones ℓ y w se mueve a una velocidad constante **v** alejándose de un largo alambre que conduce corriente I en el plano de la espira (Fig. P31.67). La resistencia total de la espira es R.
Obtenga una expresión que proporcione la corriente en la espira en el instante en que el lado cercano se encuentra a una distancia r del alambre.

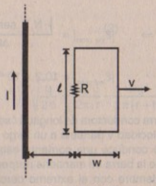
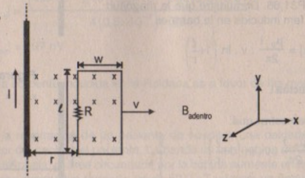


Figura P31.67

Resolución :

Nos piden: I_{ind} = ?



Tenemos que por la regla de la mano derecha, el campo magnético producido por la corriente I está dirigido hacia adentro de la página, luego:

Por la ley de Biot-Savart: $\quad B = \dfrac{\mu_0\,.\,I}{2\pi\,.\,r'} = \dfrac{\mu_0\,I}{2\pi\,.\,x}$

$$\Rightarrow \quad dB = -\frac{\mu_0\,.\,I}{2\pi\,.\,r'^2}\,dr'$$

Entonces por la ley de inducción de Faraday

$$d\varepsilon = -\,v\,.\,\ell\,.\,dB = \left(\frac{v\,.\,\ell\mu_0\,.\,I}{2\pi}\right)\left(\frac{dr}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = \int d\varepsilon = \left(\frac{V_0\,.\,\ell.\mu_0\,.\,I}{2\pi}\right)\frac{1}{r'}\Big|_r^{r+w}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind} = \frac{v.\ell.\mu_0.I.w}{2\pi.(r)(r+w)}$$

En consecuencia:

$$I_{ind}\,.\,R = \varepsilon_{ind} = \frac{v.\ell.\mu_0.I.w}{2\pi.(r)(r+w)} \qquad I_{ind} = \frac{v.\ell.\mu_0.I.w}{2\pi.r(r+w).R}$$

68. Un alambre horizontal puede deslizarse libremente sobre los rieles verticales de un armazón conductor, como se muestra en la figura P31.68. El alambre tiene masa m y longitud ℓ, y la resistencia del circuito es R. Si un campo magnético uniforme se dirige perpendicularmente al armazón, ¿cuál es la rapidez terminal del alambre cuando éste cae bajo la fuerza de gravedad?

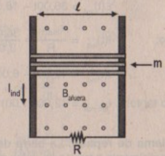


Figura P31.68

Resolución :

Nos piden $v_{terminal}$ = ?

La velocidad terminal ocurre ó cuando existe: $F_B = Fg$

$$\Rightarrow \quad m\,.\,g = I_{ind}\,.\,\ell \times B = I_{ind}\,.\,\ell\,.\,B \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado:
Por la ley de inducción de Faraday se cumple que:

$$|\varepsilon_{ind}| = I_{ind}\,.\,R = B\,.\,\ell\,.\,v_{term}$$

$$\Rightarrow \quad I_{ind} = \frac{B.\ell}{R}\,v_{term} \qquad \text{... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

Resulta que: $m \cdot g = \left(\frac{B.\ell}{R}.v_{term}\right).B.\ell$

$\therefore \quad v_{terminal} = \frac{m.g.R}{B^2.\ell^2}$

69. El flujo magnético que circunda a un anillo metálico varía con el tiempo t de acuerdo con $\Phi_B = 3\,(at^3 - bt^2)$ T.m², con a = 2,00 s⁻³ y b = 6,00 s⁻². La resistencia del anillo es 3,00 Ω. Determine la máxima corriente inducida en el anillo durante el intervalo de t = 0 a t = 2,00 s.

Resolución:

Datos: $\Phi_B = (3at^3 - 3bt^2)$ T.m²

Con: $a = 2{,}00\ s^{-3}$; $b = 6{,}00\ s^{-2}$; $R_{Anillo} = 3{,}00\ \Omega$

Nos piden: $I_{ind\,máx}$ = ? desde t = 0 a t = 1,00 s

Sabemos que por ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon(t)_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}(6{,}00t^3 - 18{,}00t^2)$$

$$\therefore \quad \varepsilon(t)_{ind} = 36{,}00t - 18{,}00t^2$$

Luego: $$I(t)_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind(t)}}{R} = \frac{36{,}00}{3{,}00}t - \frac{18{,}00}{9{,}00}t^2$$

$$\therefore \quad I(t)_{ind} = 12{,}00t - 6{,}00t^2$$

Por lo tanto: $I_{ind\,máx} = 12{,}00\,(1{,}00) - 6{,}00(1{,}0)^2 = 6{,}00$ A

70. Problema de repaso. La barra de masa m mostrada en la figura P31.70 se jala horizontalmente a través de rieles paralelos mediante una cuerda sin masa que pasa sobre una polea ideal y que está unida a una masa suspendida M. El campo magnético uniforme tiene una magnitud B, y la distancia entre los rieles es ℓ. Los rieles están conectados en un extremo mediante un resistor de carga R. Obtenga una expresión que proporcione la rapidez horizontal de la barra como una función del tiempo, suponiendo que la masa suspendida se suelta con la barra en reposo en t = 0. Suponga que no hay fricción entre los rieles y la barra.

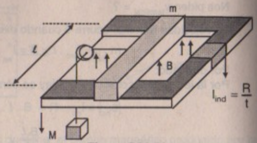
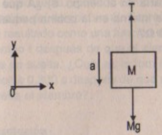


Figura P31.70

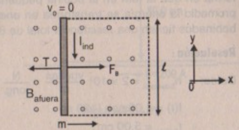
Resolución:

Nos piden: v(t) = ?

Haciendo diagrama de cuerpo libre de cada objeto:



(Vista frontal)



(Vista superior arriba)

- Por la ley de Lenz: La dirección de I_{ind} está en contra de las manecillas del reloj.

Luego aplicando la segunda ley de Newton:

$$Mg - T = M.\frac{dv}{dt} \quad \text{... (1)}$$

$$T - F_B = m.\frac{dv}{dt} \quad \text{... (2)}$$

Sumando: (1) + (2)

$$Mg - F_B = (M + m).\frac{dv}{dt}$$

Donde: $F_B = I_{ind}.\ell.B$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Mg}{(M+m)} - \frac{I_{ind}.\ell.B}{(M+m)}.dt$$

$$\Rightarrow \quad dv = \left(\frac{Mg}{M+m}\right).dt - \frac{I_{ind}.\ell.B}{(M+m)}.dt$$

Integrando:

Resulta que: $$\int_0^v dv = \left(\frac{Mg}{M+m}\right)\int_0^t dt - \frac{I_{ind}.\ell.B}{(M+m)}\int_0^t dt$$

$$\therefore \quad v(t) = \left(\frac{M.g}{M+m}\right).t - \frac{R.\ell.B}{(M+m)}$$

71. A un solenoide enrollado con 2 000 vueltas/m se le suministra una corriente que varía en el tiempo de acuerdo con I = 4 sen (120 πt), donde I está en A y t está en s. Una pequeña bobina circular coaxial de 40 vueltas y radio r = 5,00 cm se ubica dentro del solenoide cerca de su centro. a) Derive una expresión que describa la forma en que la fem en la bobina pequeña varía en el tiempo. b) ¿A qué relación promedio la energía se transforma en energía interna en la bobina pequeña si los bobinados tienen una resistencia total de 8,00 Ω?

Resolución:

Datos: $n_{Solenoide} = 2 \times 10^3 \dfrac{\text{vueltas}}{\text{m}} = \dfrac{N}{\text{long.}}$

$I(t) = 4{,}00 \text{ sen } (120\ \pi t)$

$r_{Bobina} = 5{,}00$ cm

$N_{Bobina} = 40$ vueltas

Parte (a)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B.ds = \int B_{long}.ds = B.L \quad \text{(Ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_o.N.I = B.L$$

$$\therefore \quad B(t) = \left(\frac{N}{L}\right)\cdot \mu_o \cdot I(t) = (2 \times 10^3 \times \mu_o) \cdot [4{,}00 \text{ sen } (120\pi t)]$$

Luego: Φ_B (En la bobina) $= B.A = \pi(0{,}05)^2 \times (8{,}00 \times 10^3 \times \mu_o) \cdot \text{sen}[120\ \pi t]$

Aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} \text{ (bobina)} = -N_{Bobina} \cdot \frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -(40)(\pi)(0{,}05)^2 \times (8 \times 10^3 \times \mu_o) \cdot \frac{d}{dt}(\text{sen}[120\pi t])$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -(40)(\pi)(0{,}05)^2 \cdot (8 \times 10^3 \times \mu_o) \cdot (120\pi) \cdot \cos[120\pi t]$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind} \text{ en la bobina } (t) = (1{,}19 \text{ V}) \cos[120\ \pi t]$$

72. Un alambre de 30,0 cm de largo se mantiene paralelo y a 80,0 cm arriba de un largo alambre que conduce 200 A y que descansa sobre el piso Fig. P31.72. El alambre de 30,0 cm se suelta y cae, manteniéndose paralelo al alambre que conduce corriente a medida que va descendiendo. Suponga que el alambre que cae se acelera a 9,80 m/s² y obtenga una ecuación para la fem inducida en él. Exprese su resultado como una función del tiempo en él. Exprese su resultado como una función del tiempo t después de que el alambre se suelta. ¿Cuál es la fem inducida 0,300 s después de que se suelta el alambre?

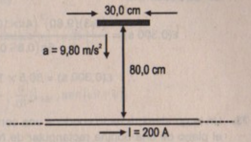
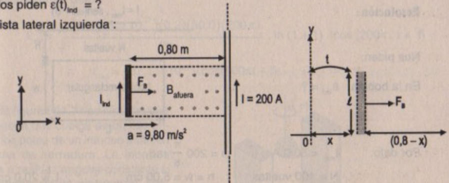


Figura P31.72

Resolución:

Nos piden $\varepsilon(t)_{ind} = ?$

Vista lateral izquierda:



Sabemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_o . I}{2\pi(0{,}8-x)} \quad \text{a un tiempo "t"}$$

Además: $\dfrac{dv}{dt} = a = 9{,}80 \quad \Rightarrow v(t) = 9{,}80\ t$

Luego por la ley de ind. de Faraday:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dx} = \ell.v(t).\frac{dB}{dx} \ \wedge \ \frac{dx}{dt} = v(t) = 9{,}80t \ ; \text{ donde: } x(t) = \frac{1}{2}(9{,}80) \cdot t^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \ell \cdot (9{,}80t) \cdot \frac{\mu_o . I}{2\pi(0{,}8-x)^2} \cdot (9{,}80t)$$

$$\therefore \quad \varepsilon(t) = \frac{(0{,}3)(9{,}80)^2 . \mu_o . I . t^3}{6\pi(0{,}8-x)^2} \cdot t^3$$

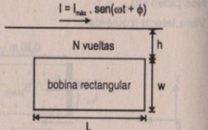
En consecuencia :

$$\varepsilon(0{,}300\ s) = \frac{(0{,}3)(9{,}80)^2\left(4\pi\times10^{-7}\right)(200)(0{,}3)^3}{6\pi(0{,}8-0{,}441)^2}\ ;\ x(0{,}3) = 0{,}441$$

$$\therefore\quad \varepsilon(0{,}300\ s) = 80{,}5\times10^{-6}\ V \equiv 80{,}5\ mV$$

73. Un largo alambre recto conduce una corriente $I = I_{máx}\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ y se encuentra en el plano de una bobina rectangular de N vueltas de alambre, como se ilustra en la figura P31.9. Las cantidades $I_{máx}$, ω y ϕ son constantes. Determine la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente en el alambre recto. Suponga que $I_{máx} = 50{,}0$ A, $\omega = 200\ \pi\ s^{-1}$, N = 100, h = w = 5,00 cm, y L = 20,0 cm.

Resolución :

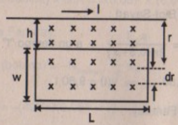


Nos piden:

En la bobina: $\varepsilon_{ind} = ?$

Por dato: $I_{máx} = 50{,}0$ A ; $\omega = 200\dfrac{\pi}{s}$ rad

N = 100 vueltas ; h = w = 5,00 cm ; L = 20,0 cm



Sabemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B(r) = \frac{\mu_o\,.\,I}{2\pi\,.\,r}\qquad \text{(Donde B varía con el la posición y el tiempo)}$$

Por otro lado:

Sabemos que: $\Phi_B = \int B.dA = \int\left(\dfrac{\mu_o.I}{2\pi.r}\right)(L.dr) = \left(\dfrac{\mu_o.I.L}{2\pi}\right).\displaystyle\int_h^{h+\omega}\dfrac{1}{r}dr$

$$\therefore\quad \Phi_B = \frac{\mu_o.I.L}{2\pi}.\ln\left(1+\frac{w}{h}\right)\quad ...(1)$$

Luego por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -N\,.\,\frac{d}{dt}\Phi_B - N.\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_o.I.L}{2\pi}.\ln\left(1+\frac{w}{h}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad \varepsilon_{ind} = -\frac{N.\mu_o.L.\ln}{2\pi}\left(1+\frac{w}{h}\right).\frac{d}{dt}\left(I_{máx}.\mathrm{sen}[\omega t+\phi]\right)$$

$$\therefore\quad \varepsilon_{ind} = -\frac{N.\mu_o.L.I_{máx}.\omega.\ln}{2\pi}\left(1+\frac{w}{h}\right).\cos[\omega t+\phi]$$

En consecuencia:

Reemplazando datos:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{(100)\left(4\pi\times10^{-7}\right)(0{,}2)(50{,}0)(200\pi)}{2\pi}\ .\ \ln(1+1)\ .\ \cos[200\pi\,.\,t + f]$$

$$\therefore\quad \varepsilon_{ind} = -87{,}1\times10^{-3}\ v.\cos(200\pi t + f)$$

74. En la figura P31.74 se muestra una moneda que cuelga de un hilo entre los polos de un intenso imán en forma de herradura. La moneda gira a rapidez angular constante ω alrededor de un eje vertical. Permita que θ sea el ángulo entre la dirección de B y la normal a la cara de la moneda, y dibuje una gráfica del momento de torsión debido a las corriente inducidas como una función de θ para $0 < \theta < 2\pi$.

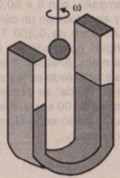


Figura P31.74

Resolución :

Datos: θ ángulo entre B y Normal

$0 < \theta < 2\pi$

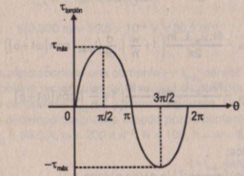
Sabemos que: $\tau_{torsión} = \mu\times B = I_{ind}\,.\,A\times B$

$$\Rightarrow\quad \tau_{torsión} = \underbrace{I_{ind}\,.\,A\,.\,B}_{t_{torsión\ máx}}\,.\,\mathrm{sen}\theta = (I_{ind.\ máx}\ A.B)\mathrm{sen}\theta$$

Por otro lado: $I_{ind\ máx} = \dfrac{\varepsilon_{ind\ máx}}{R} = \dfrac{A.B.\omega}{R}$

En consecuencia: $\tau_{torsión}(\theta) = \left(\overbrace{\frac{A^2 . B^2 . \omega}{R}}^{x}\right) . \operatorname{sen}\theta \quad \vee \qquad 0 < \theta < 2\pi$

Graficando:



75. El alambre que se muestra en la figura P31.75 se dobla en la forma de una tienda de campaña, con $\theta = 60{,}0°$ y $L = 1{,}50$ m, y se coloca en un campo magnético uniforme de 0,300 T de magnitud dirigido perpendicular a la cubierta de la mesa. El alambre es rígido, pero está articulado en los puntos a y b. Si la "tienda" se derrumba sobre la mesa en 0,100 s, ¿cuál es la fem inducida promedio en el alambre durante este tiempo?

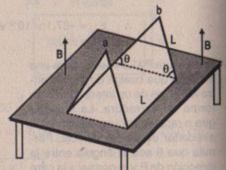


Figura P31.75

Resolución :

Datos: $\theta = 60{,}0°$; $L = 1{,}50$ m ; $B_{unif} = 0{,}300$ T

$\Delta t = 0{,}100$s ; $\varepsilon_{ind\ Prom} = ?$

Según el gráfico: $B_{unif} \perp$ con la base de la Mesa

Entonces: $\Phi_B = B . A = |B|.|A|.\cos\theta° = B . A$

Luego: Por la ley de inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}(\Phi_B) = -\frac{d}{dt}(BA)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind}\int dt = -B\int dA \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ind\ prom} = -\frac{B.A}{\Delta t} = -\frac{(0{,}300)(1{,}5)^2}{(0{,}100)}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind\ prom} = -6{,}75 \text{ V}$$

Capítulo 32

INDUCTANCIA

AUTOINDUCTANCIA

1. Una bobina tiene una inductancia de 3,00 mH, y la corriente que la atraviesa cambia de 0,200 A a 1,50 A en un tiempo de 0,200 s. Encuentre la magnitud de la fem inducida promedio en la bobina durante este tiempo.

Resolución :

Datos: $L_{bobina} = 3{,}00$ mH

$I_{inicial} = 0{,}200$ A

$I_{final} = 1{,}50$ A ; en $\Delta t = 0{,}200$ s

$|\varepsilon_{L\ prom}| = ?$

Sabemos que : $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\dfrac{dI}{dt}}$

$$\Rightarrow \quad -L . dI = \varepsilon_L . dt \quad \Rightarrow \quad -L\int_{I_i}^{I_f} dI = \varepsilon_L \int dt = \varepsilon_L . \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-L(I_f - I_i)}{\Delta t} = \varepsilon_{L\,prom}$$

$$\therefore |\varepsilon_{L\ prom}| = L . \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{(3{,}00\times10^{-3})(1{,}5-0{,}2)}{0{,}200} = 19{,}5 \text{ mV}$$

2. Un cordón de teléfono enrollado forma una espiral con 70 vueltas, un diámetro de 1,30 cm y una longitud sin alargar de 60,0 cm. Determine la autoinductancia de un conductor en el cordón sin alargar.

Resolución :

Datos : $N_{cordón} = 70$ vueltas ; Long = 60,0 cm

Diámetro = 1,30 cm ; L = ?

Sabemos que: $L = \dfrac{N . \Phi_B}{I} = \left(\dfrac{N}{I}\right)(B.A)$ ... (1)

Por otro lado: $B = \mu_0 . I . \left(\dfrac{N}{L}\right)$; $A = \pi . \dfrac{d^2}{4}$

Entonces de (1): $L=\left(\frac{N}{I}\right)\left(\mu_o\,.\,I\,.\,\frac{N}{L}\right)\left(\pi\,.\,\frac{d^2}{4}\right)=\left(\frac{N}{L}\right)^2.\,\frac{\mu_o\,.\,\pi\,.\,d^2\,.\,L}{4}$

Entonces: $L=\left(\frac{70}{0,6}\right)^2\frac{(4\pi\times10^{-7})(\pi)(0,6)}{4}\,(1,3\times10^{-2})^2$

$\therefore\quad L = 13,6\times10^{-3}\ \text{H} \equiv 13,6\ \text{mH}$

3. Un inductor de 2,00 H conduce una corriente estable de 0,500 A. Cuando el interruptor en el circuito se abre, la corriente efectivamente es cero en 10,0 ms. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el inductor durante este tiempo?

Resolución:

Datos: $L = 2,00$ H ; $I_{inicial} = 0,500$ A

$I_{final} = 0$; $\Delta t = 10,0$ ms

$\varepsilon_{Lprom} = ?$

Sabemos que : $L=-\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}$

$\Rightarrow\ -L\,.\,dI=\varepsilon_L\,.\,dt\ \Rightarrow -L\int_0^{0,5}dI=\varepsilon_L\int dt$

$\Rightarrow\ \varepsilon_{Lprom}=L.\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{(2,00)(0,500)}{10\times10^{-3}}$

$\therefore\ \varepsilon_{Lprom}=100\ \text{V}$

4. Un pequeño solenoide de núcleo de aire tiene una longitud de 4,00 cm y un radio de 0,250 cm. Si la inductancia es de 0,060 mH, ¿cuántas vueltas por centímetro se requieren?

Resolución:

Datos: Long. solenoide = 4,00 cm ; $\frac{N}{cm} = ?$

$R_{solenoide} = 0,250$ cm

$L = 0,060$ mH

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$B=\mu_0\,.\,I\left(\frac{N}{Long}\right)$ $\qquad A=\pi.R^2$

$\Rightarrow\quad L=N.\frac{\Phi_B}{I}=\left(\frac{N}{I}\right)(B.A)=\left(\frac{N}{I}\right)\left(\frac{\mu_o.I.N}{long.}\right)(\pi R^2)$

$\Rightarrow\quad N=\sqrt{\frac{Longitud}{\mu_o.\pi}}\,.\,\frac{1}{R}=\sqrt{\frac{4}{(4\pi\times10^{-7})(\pi)}}\times\left(\frac{1}{0,250}\right)$

$\therefore\quad N = 4,00\times10^3$ vueltas

En consecuencia: $\frac{N}{Long}=\frac{4\times10^3}{4,00}=1\,000\ \frac{vueltas}{cm}$

5. Calcule el flujo magnético a través del área encerrada por una bobina de 300 vueltas y 7,20 mH cuando la corriente en la misma es de 10,0 mA.

Resolución:

Datos: $n_{bobina} = 300$ vueltas

$L = 7,20$; $\Phi_B = ?$

$I_{bobina} = 10,0$ mA

Sabemos que : $L=\frac{N.\Phi_B}{I}$

$\Rightarrow\quad \Phi_B=\frac{L.I}{N}=\frac{(7,20\times10^{-3})(10,0\times10^{-3})}{3\times10^2}$

$\therefore\quad \Phi_B=\frac{720}{3}\times10^{-9}\ \text{T.m}^2\equiv\frac{720}{3}\ \text{nT.m}^2\equiv 240\ \text{nT.m}^2$

6. La corriente en un solenoide está aumentando a una proporción de 10,0 A/s. El área de sección transversal del solenoide es π cm², y hay 300 vueltas sobre sus 15,0 cm de longitud. ¿Cuál es la fem inducida que se opone al incremento de la corriente?

Resolución:

Datos: $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ Solenoide $= 10,0\ \frac{A}{s}$; $N_{solen.} = 300$ vueltas

$\text{Área}_{transv.} = \pi\ \text{cm}^2$; Long. = 15,0 cm

$\varepsilon_L = ?$

Sabemos que : $L=-\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}=\frac{N.\Phi_B}{I}$

$\Rightarrow\quad -\varepsilon_L\,.\,dt=\frac{N}{I}\Phi_B\,.\,dI\ \Rightarrow\ \varepsilon_L=-N\,.\left(\frac{dI}{dt}\right).\frac{\Phi_B}{I}=-N.\left(\frac{dI}{dt}\right).\frac{B.A}{I}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -N\,.\left(\frac{dI}{dt}\right).\overbrace{\left(\mu_o\,.I.\frac{N}{L}\right)}^{\text{en un solenoide}}.\left(\frac{A}{I}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -\frac{(300)^2(10{,}0)\left(4\pi\times10^{-7}\right).\left(\pi\times10^{-4}\right)}{(0{,}15)}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_L = -2{,}37\times10^{-3}\,\text{V} \;\equiv\; -2{,}37\ \text{mV (opuesto)}$$

7. Un inductor de 10,0 mH conduce una corriente $I = I_{máx}$senωt, con $I_{máx} = 5{,}00$ A y $\omega/2\pi = 60{,}0$ Hz. ¿Cuál es la fem inversa como una función del tiempo?

Resolución :

Datos: $L = 10{,}0$ mH

$I(t) = I_{máx} = 5{,}00$ A , $\dfrac{\omega}{2\pi} = 60{,}0$ Hz

$\varepsilon_L(t) = ?$

Sabemos que : $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}} \Rightarrow -L\,.\,\dfrac{dI}{dt} = \varepsilon_L$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -L.\frac{d}{dt}(5{,}00\text{sen}(120\pi t))$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -(10{,}0\times10^{-3})(5{,}00)(120\,\pi).\cos(120\pi t)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_L(t) = (18{,}8\ \text{V})\,.\,\cos[120\pi t]$$

8. Una fem de 24,0 mV es inducida en una bobina de 500 vueltas en el instante en que la corriente es de 4,00 A y está cambiando en proporción de 10,0 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético que pasa por cada vuelta de la bobina?

Resolución :

Datos: $E_L = 24{,}0$ mV $\quad N_{bobina} = 500$ vueltas

$I_{inc} = 4{,}00$ A $\quad \dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 10{,}0\dfrac{A}{s}$

$\Phi_B = ?$

Sabemos que : $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}} = \dfrac{N.\Phi_B}{I} \Rightarrow \dfrac{|-\varepsilon_L|.I}{N.\left(\frac{dI}{dt}\right)} = \Phi_B$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\left(24{,}0\times10^{-3}\right)(4{,}00)}{\left(5{,}00\times10^{2}\right)(10{,}0)} \qquad \therefore\ \Phi_B = 19{,}2\ \mu\text{T.m}^2 \text{ (en cada bobina)}$$

9. Un inductor con forma de solenoide contiene 420 vueltas, su longitud es de 16,0 cm y tiene un área de sección transversal de 3,00 cm^2. ¿Qué rapidez uniforme de reducción de corriente a través del inductor induce una fem de 175 μV?

10. Un inductor con forma de solenoide contiene N vueltas, su longitud es ℓ y tiene un área de sección transversal A. ¿Qué rapidez uniforme de reducción de corriente a través del inductor induce una fem ε?

Resolución 9 y 10:

Datos: $N_{solenoide} = 420$ vueltas ; Longitud = 16,0 cm

$A_{transv} = 3{,}00$ cm^2 ; $\varepsilon_L = 175\ \mu$V

Nos piden: $\dfrac{dI}{dt} = ?$

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$L = \frac{\mu_o.N^2.A}{\text{Longitud}} = -\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}$$

$$\Rightarrow -\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_L.\text{Longitud}}{\mu_o.N^2.A_{transv}} = \frac{\left(175\times10^{-6}\right)(0{,}16)}{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(420)^2\left(3{,}00\times10^{-4}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dI}{dt} = -0{,}421\frac{A}{s}$$

11. La corriente en un inductor de 90,0 mH cambia con el tiempo como $I = t^2 - 6{,}00\,t$ (en unidades del SI). Encuentre la magnitud de la fem inducida en a) t = 1,00 s y b) t = 4,00 s. c) ¿En qué momento la fem es cero?

Resolución :

Datos: $L = 90{,}0$ mH ; $I(t) = t^2 - 6{,}00t$

Parte (a)

Nos piden: $\varepsilon_L = ?$ en $t = 1{,}00$ s

Sabemos que: $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}} \Rightarrow -L\,.\,\dfrac{dI}{dt} = \varepsilon_L$

$$\varepsilon_L = -L\,.\,\frac{d}{dt}(t^2 - 6{,}00t) = (-90{,}0\times10^{-3})(2t - 6{,}00) \text{ (en el tiempo)}$$

Luego: $\varepsilon_L\,(1{,}00\text{ s}) = (-90{,}0\times10^{-3})(2(1) - 6{,}00)$

$\therefore \quad \varepsilon_L\,(1{,}00\text{ s}) = 360 - 10^{-3}\text{ V} \equiv 360$ mV

Parte (b)

Sabemos que de lo hallado en la parte (a):

$$\varepsilon_L\,(t) = (-90{,}0 \times 10^{-3})\,(2t - 6{,}00)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L\,(4{,}00\text{ s}) = (-90{,}0 \times 10^{-3})\,(2(4{,}00) - 6{,}00)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_L\,(4{,}00\text{ s}) = -180 \times 10^{-3}\text{ V}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_L\,(4{,}00\text{ s})| = 180\text{ mV}$$

Parte (c)

Sabemos que: $\varepsilon_L(t) = (-90 \times 10^{-3})\,(2t - 6{,}00)$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L\,(t) = 0 = 2t - 6{,}00$$

$$\therefore \quad t = 3{,}00\text{ s}$$

En consecuencia:

En $t = 3{,}00\text{ s} \Rightarrow \varepsilon_L = 0$

12. Una corriente de 40,0 mA es conducida por un solenoide de núcleo de aire enrollado uniformemente con 450 vueltas, un diámetro de 15,0 mm y una longitud de 12,0 cm. Calcule a) el tiempo magnético dentro del solenoide, b) el flujo magnético que pasa por cada vuelta, y c) la inductancia del solenoide. d) ¿Cuál de estas cantidades depende de la corriente?

Resolución :

Datos: $I = 40{,}0\text{ mA}$; Diámetro $= 15{,}0\text{ mm}$

$N_{solenoide} = 450$ vueltas ; Longitud $= 12{,}0\text{ cm}$

Parte(a)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\oint B.ds = \int B.ds = B.ds = B.Long \quad \text{(ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad B_{solen.} = \mu_0\,.\,I\,.\left(\frac{N}{Long.}\right) = (4\pi \times 10^{-7})(40{,}0 \times 10^{-3})\,.\left(\frac{450}{0{,}12}\right)$$

$$\therefore \quad B_{solenoide} = 188 \times 10^{-6}\text{ T} \equiv 188\ \mu\text{T}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Phi_B = \int B.dA = B.A$

$$\Rightarrow \quad \Phi_B = (188 \times 10^{-6})\left(\frac{\pi}{4}\right)(15 \times 10^{-3})^2$$

$$\therefore \quad \Phi_B = 33{,}2 \times 10^{-9}\text{ T.m}^2 \equiv 33{,}2\text{ nT.m}^2$$

Parte (c)

Sabemos que : $L = \dfrac{N.\Phi_B}{I} \quad \Rightarrow \quad L = \dfrac{(450)(33{,}2\times10^{-9})}{(40{,}0\times10^{-3})}$

$$\therefore \quad L = 373{,}5 \times 10^{-6}\text{ H} \equiv 373{,}5\ \mu\text{H}$$

Parte (d)

El campo magnético depende de la corriente y el flujo magnético.

13. Un solenoide tiene 120 vueltas enrolladas uniformemente alrededor de un núcleo de madera, el cual tiene un diámetro de 10,0 mm y una longitud de 9,00 cm. a) Calcule la inductancia del solenoide. b) El núcleo de madera se sustituye con una barra de hierro blando que tiene las mismas dimensiones, pero una permeabilidad magnética $\mu_m = 800\ \mu_0$. ¿Cuál es la nueva inductancia?

Resolución :

Datos: $N_{solenoide} = 120$ vueltas

Diámetro = 10,0 mm (de la madera)

Longitud = 9,00 cm (de la madera)

Nota: El solenoide está enrollado uniformemente en la madera.

Parte (a)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$L = \frac{\mu_o.N^2.\text{área}}{\text{longitud}} \quad \text{(ya demostrado)}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{(4\pi\times10^{-7})(120)^2}{(9\times10^{-2})}\times\left[\frac{\pi}{4}\times(10\times10^{-3})^2\right]$$

$$\therefore \quad L_{solenoide} = 15{,}8 \times 10^{-6}\text{ H} \equiv 15{,}8\ \mu\text{H}$$

Parte (b)

Sabemos que la inductancia es proporcional a la permeabilidad magnética.

Si: $\mu_m = 800\ \mu_0$

Entonces: $L_f = 800 \times L_{inicial}$

$$\Rightarrow \quad L_f = (800) \times (15{,}8 \times 10^{-6})$$

$$\therefore \quad L_f = 12{,}6 \times 10^{-3} \equiv 12{,}6\text{ mH}$$

14. Un toroide tiene un radio mayor R y un radio menor r y se enrolla firmemente con N vueltas de alambre, como se muestra en la figura P32.14. Si R >> r, el campo magnético dentro de la región del toroide, de área de sección transversal $A = \pi r^2$, es esencialmente el de un largo solenoide que se ha doblado como un gran círculo de radio R. Utilizando el campo uniforme de un largo solenoide, muestre que la autoinductancia de dicho toroide es aproximadamente

$$L \cong \frac{\mu_o . N^2 . A}{2\pi . R}$$

(Una expresión exacta para la inductancia de un toroide con una sección transversal rectangular se deduce en el problema 64).

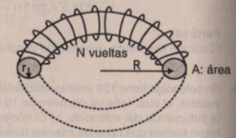


Figura P32.14

Resolución :

Donde: $R >> r$
$A = \pi . r^2$

Por demostrar que: $L \cong \dfrac{\mu_o . N^2 . A}{2\pi . R}$

Sabemos que en un toroide siempre se cumple que:

$$\oint B.ds = B.\oint ds = \mu_o . I.N \text{ (Ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad B(2\pi . R) = \mu_o . I . N$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_o . I . N}{2\pi . R}$$

Por otro lado:
Por inductancia:

$$L = \frac{N.\Phi_B}{I} = \frac{N\int B.dA}{I} = \frac{N.B.A}{I} \Rightarrow \quad L = \frac{N}{I} A . \left(\frac{\mu_o . I . N}{2\pi . R}\right)$$

$$\therefore \; L \cong \frac{\mu_o . N^2 . A}{2\pi . R} \quad \text{Lqqd.} \qquad \text{Cuando } R >> r$$

15. Una fem autoinducida en un solenoide de inductancia L cambia en el tiempo como $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon^{-kt}$. Encuentre la carga total que pasa por el solenoide, si la carga es finita.

Resolución :

Datos: Inductancia del solenoide = L
$\varepsilon_L(t) = \varepsilon_{0L} . e^{-k.t}$
$Q_{total} = ?$

Sabemos que: $L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\dfrac{dI}{dt}} \Rightarrow -L . \dfrac{dI}{dt} = \varepsilon_L = \varepsilon_{0L} . e^{-k.t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = -\frac{\varepsilon_{0L}}{L} . e^{-k.t} \qquad \Rightarrow \qquad \int d\left[\frac{dQ}{dt}\right] = -\frac{\varepsilon_{0L}}{L}\int e^{-kt}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_{0L}}{k.L} . e^{-k.t} \qquad \Rightarrow \qquad \int dQ = \frac{\varepsilon_{0L}}{k.L}\int e^{-kt}\,dt$$

$$\therefore \quad Q(t)_{total} = -\frac{\varepsilon_{0L}}{k^2 . L} . e^{-k.t}$$

En consecuencia: $\therefore \quad Q_{total\ máxima} = \dfrac{\varepsilon_{0L}}{k^2 . L}$

CIRCUITOS RL

16. Calcule la resistencia en un circuito RL en el cual L = 2,50 H y la corriente aumenta hasta 90,0 % de su valor final en 3,00 s.

Resolución :

Datos: L = 2,50 H ; si: $I_{inicial} = I_0$
ΔT = 3,00 s $\Rightarrow$ $I_{final} = 90\%\ I_0$

Nos piden la resistencia R = ?

Sabemos que $\qquad I_{final} = I_{máx} = \dfrac{\varepsilon}{R}$

Entonces por dato: $\qquad I(3{,}00\ s) = 90\%\ I_{final} = \dfrac{90}{100} . \dfrac{\varepsilon}{R}$

Luego: en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right) \qquad \Rightarrow \frac{9}{10} . \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{2.5}}\right)^{(3,00)}$$

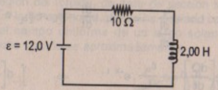
$$\Rightarrow \quad R = -\frac{2{,}5}{3{,}00} . \ln(0{,}1)$$

$$\therefore \quad R = 1{,}92\ \Omega$$

17. Una batería de 12,0 V se conecta a un circuito en serie que contiene un resistor de 10,0 Ω y un inductor de 2,00 H. ¿Cuánto tardará la corriente en llegar a a) 50,0 % y b) 90,0% de su valor final?

Resolución :

Sea el circuito:



Parte (a)

Sabemos que en un circuito RL $I_{final} = \frac{\varepsilon}{R}$

Por otro lado:

En un circuito R_L : $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$

Entonces por dato: $I(t) = 0{,}5\, I_{final} = (0{,}5)\left(\cancel{\frac{\varepsilon}{R}}\right) = \left(\cancel{\frac{\varepsilon}{R}}\right)\left(1-e^{-5t}\right)$

$\Rightarrow \quad Ln(0{,}5) = (-5)\,.\,t$

$\therefore \quad t = 0{,}139\ s$

Parte (b)

Sabemos que en un circuito RL $I_{final} = \frac{\varepsilon}{R}$

Por otro lado: Sabemos que: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$

Entonces por dato: $I(t) = 0{,}9\, I_{final} = (0{,}9)\,.\,\frac{\varepsilon}{R} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(1-e^{-5t}\right)$

$\Rightarrow \quad \ln(0{,}1) = (-5)\,.\,t$

$\therefore \quad t_{tarda} = 0{,}460s$

18. Muestre que $I = I_0 e^{-t/\tau}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$I.R + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Donde $\tau = L/R$ e I_0 es la corriente en t = 0.

Resolución :

Por demostrar que : $I = I_0\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ es una solución de la ecuación diferencial.

$$I\,.\,R + L\,.\,\frac{dI}{dt} = 0$$

Donde: $t = \frac{L}{R}$ e I_0 es la corriente en t = 0

$$L\,.\,\frac{dI}{dt} = -I\,.\,R$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{I}dI = -\left(\frac{R}{L}\right).\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{1}{I}.\,dI = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$

$\Rightarrow \quad \ln\left[\frac{I}{I_0}\right] = -\frac{R}{L}.\,t \quad \Rightarrow \quad I = I_0\,.\,e^{-\frac{R}{L}.t}$

$\therefore \quad I = I_0\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ es solución de la E. D. Lqqd.

19. Considere el circuito en la figura P32.19, tomando ε = 6,00 V, L = 8,00 mH y R = 4,00 Ω. a) ¿Cuál es la constante de tiempo inductivo del circuito? b) Calcule la corriente en el circuito 250 μs después de que se cierra el interruptor. c) ¿Cuál es el valor de la corriente del estado estable final? d) ¿Cuánto tarda la corriente en alcanzar el 80,0% de su valor máximo?

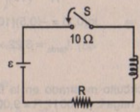


Figura P32.19 Problemas 19, 20, 21 y 24.

Resolución :

Donde: ε = 6,00 V
L = 8,00 mH
R = 4,00 Ω

Parte (a)

Sabemos que en circuito "RL" se cumple que:

$$\text{cte. de tiempo} = \tau = \frac{L}{R} = \frac{8{,}00\times10^{-3}}{4{,}00}$$

$$\therefore \quad \tau = 2{,}00\times10^{-3}\ s \equiv 2{,}00\ ms$$

Parte (b)

Por dato t = 250 μs ; I = ?

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I(250\ \mu s) = \left(\frac{6{,}00}{4{,}00}\right)\left(1-e^{-\frac{250\times10^{-6}}{2{,}00\times10^{-3}}}\right)$$

$$\therefore \quad I(250\ \mu s) = 0{,}176\ A \equiv 176\ mA$$

Parte (c)

La corriente final está dada por: $I_{final} = \frac{\varepsilon}{R}$ cuando $t \to \infty$

$$\therefore \quad I_{final} = \frac{6,00\,V}{4,00\,\Omega} = 1,5\,A$$

Parte (d)

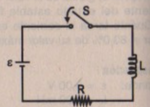
$$I(t) = 0,8\,I_{final} = (0,8)\,.\,\frac{\varepsilon}{R} \quad \text{... (por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad (0,8)\,.\,\frac{\varepsilon}{R} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{2,00\times10^{-3}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(0,2) = -(0,5)(10^{3})\,.\,t$$

$$\therefore \quad t_{tarda} = 3,22\times10^{-3}\,s = 3,22\,ms$$

20. En el circuito mostrado en la figura P32.19, haga $L = 7,00\,H$, $R = 9,00\,\Omega$ y $\varepsilon = 120\,V$. ¿Cuál es la fem autoinducida 0,200 s después de que se cierra el interruptor?



Resolución:

Donde: $L = 7,00\,H$
$R = 9,00\,\Omega$
$\varepsilon = 120\,V$

Nos piden: ε_L después de 0,200 s que se cierra s

Sabemos que en un circuito "RL"

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Por otro lado: $L = -\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -L\,.\,\frac{dI}{dt} = -L.\left(\frac{\varepsilon}{L}\right).e^{-\frac{R}{L}.t}$$

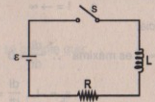
$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = -(120\,V)\,.\,e^{-\frac{9}{7}(0,200)}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_L = -92,53\,V$$

21. Para el circuito RL mostrado en la figura P32.19, haga $L = 3,00\,H$, $R = 8,00\,\Omega$ y $\varepsilon = 36,0\,V$. a) Calcule la razón de la diferencia de potencial que atraviesa el resistor y la que pasa por el inductor cuando $I = 2,00\,A$. b) Calcule el voltaje que atraviesa el inductor cuando $I = 4,50\,A$.

Resolución:

Sea el circuito:



Donde: $L = 3,00\,H$
$R = 8,00\,\Omega$
$\varepsilon = 36,0\,V$

Parte (a)

Si: $I = 2,00\,A$; nos piden: $\frac{\Delta V_R}{\Delta V_L} = ?$

Sabemos que: $\varepsilon = \Delta V_R + \Delta V_L = \Delta V_R + |\varepsilon_L|$ ...(α)

Por otro lado:

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Luego: Por inductancia:

$$\varepsilon_L = -L\,.\,\frac{dI}{dt} = -L.\left(\frac{\varepsilon}{L}\right).e^{-\frac{R}{L}.t} = -\varepsilon.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_L| = \varepsilon\,.\,e^{-\frac{R}{L}.t} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

$$I(t) = 2,00 = \frac{36,0}{(8,00)}.\left(1-e^{-\frac{8}{3}.t}\right) \quad \therefore \quad t = 0,220\,s$$

Entonces de (1)

$$|\varepsilon_L| = (36,00)\,.\,e^{-\frac{(8,00)(0,220)}{3,00}} = 20,0\,V$$

Luego de (α):

$$36,00 = \Delta V_R + 20,0 \quad \therefore \Delta V_R = 16,00$$

En consecuencia: $\frac{\Delta V_R}{\Delta V_L} = \frac{16,00}{20,00} = 0,800$

Parte (b)

Nos piden: ε_L cuando: $I = 4,50\,A$

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right) \Rightarrow 4{,}50 = \frac{36{,}00}{8{,}00}\left(1 - e^{-\frac{8{,}00}{3{,}00}.t}\right)$$

$$\therefore \quad t = \to \infty$$

En consecuencia:

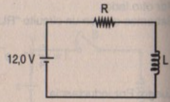
Cuando $t \to \infty$ I es máxima $\therefore \ \frac{dI}{dt} = 0$

Por lo tanto: $\varepsilon_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} = 0$

22. Una batería de 12,0 V está conectada en serie con un resistor y un inductor. El circuito tiene una constante de tiempo de 500 μs, y la corriente máxima es de 200 mA. ¿Cuál es el valor de la inductancia?

Resolución :

Sea el circuito:



Donde: $\tau = 500\ \mu s$

$I_{máxima} = 200$ mA

$L = ?$

Sabemos que: cte. de tiempo: $\tau = \frac{L}{R}$

$$\Rightarrow \quad (500 \times 10^{-6}) \cdot R = L \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado:

En un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

Donde: $I_{máx} = \frac{\varepsilon}{R}$ cuando $t \to \infty$

$$\Rightarrow \quad 200 \times 10^{-3} = \frac{12{,}0}{R} \qquad \therefore \ R = 60{,}0\ \Omega$$

En consecuencia de (1): $L = (500 \times 10^{-6})(60{,}0)$

$$\therefore \quad L = 30 \times 10^{-3}\ H = 30\ mH$$

23. Un inductor que tiene una inductancia de 15,0 H y una resistencia de 30,0 Ω se conecta entre las terminales de una batería de 100 V. ¿Cuál es la rapidez de aumento de la corriente a) en t = 0 y b) en t = 1,50 s?

Resolución :

Datos: $L = 15{,}0$ H ; $R = 30{,}0\ \Omega$

$\varepsilon = \Delta V = 100$ V en un circuito "RL"

Parte (a)

$\frac{dI}{dt} = ?$ en $t = 0$

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}.t} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \left(\frac{100}{15}\right) \cdot e^{0} = \frac{100}{15}$$

$$\therefore \quad \frac{dI}{dt} = 6{,}67\ A/s$$

Parte (b)

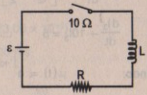
$\frac{dI}{dt} = ?$ en $t = 1{,}5$ s

Sabemos que en un circuito "RL": $\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}.t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{100}{15{,}0} \cdot e^{-\frac{30}{15}(1{,}50)} \qquad \therefore \quad \frac{dI}{dt} = 0{,}332\ A/s$$

24. Cuando el interruptor de la figura P32.19 se cierra, la corriente tarda 3,00 ms para llegar al 98,0% de su valor final. Si R = 10,0 Ω, ¿cuál es la inductancia?

Resolución :



Donde: $R = 10{,}0\ \Omega$

$$I(3{,}00\ ms) = 98\% \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Nos piden: $L = ?$

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}.t})$$

$$\Rightarrow 0{,}98 \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{10}{L}(3{,}00 \times 10^{-3})}\right) \Rightarrow \frac{-3 \times 10^{-2}}{L} = \ln(0{,}02)$$

$$\therefore \quad L = 7{,}67 \times 10^{-3}\ H = 7{,}67\ mH$$

25. El interruptor en la figura P32.25 se cierra en un tiempo t = 0. Encuentre la corriente en el inductor y la corriente que según esto pasan por el interruptor como funciones del tiempo.

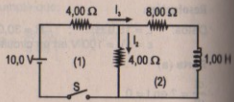


Figura P32.25

Resolución :

Nos piden: I(t) = ?

Sea: $R_1 = 4{,}00\ \Omega$; $R_2 = 4{,}00\ \Omega$; $R_3 = 8{,}00\ \Omega$

Por la primera regla de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \text{... (1)}$$

Por la segunda regla de Kirchhoff: (circuito cerrado 1)

$$10 - 4I_1 - 4I_2 = 0$$

$$\therefore\ I_1 + I_2 = 2{,}5\ \text{A} \qquad \text{... (2)}$$

Por la segunda regla de Kirchhoff: (circuito Cerrado 2)

$$-I_3.(8) + \varepsilon_L + 4.I_2 = 0$$

$$\Rightarrow\quad L\,.\,\frac{dI_3}{dt} = 4I_2 - 8I_3 = 4I_2 - 8(I_1 - I_2) = 12I_2 - 8I_1$$

$$\Rightarrow\quad L\,.\,\frac{dI_3}{dt} = 4\left[\frac{2{,}5}{2} - \frac{I_3}{2}\right] - 8I_3$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dI_3}{dt} + 10I_3 = 5 \qquad \text{... (ecuación diferencial)}$$

Desarrollando: $\mu(t) = e^{\int 10.dt} = e^{10t}$

Entonces: $\frac{dI_3}{dt}\,.\,\mu(t) + 10\,.\,(\mu(t))\,.\,I_3 = 5.t(t) = 5\,.\,e^{10t}$

$$\Rightarrow\quad \int d(I_3.\mu(t)) = 5\int_0^t e^{10t}\,dt$$

$$\Rightarrow\quad I_3(t)\,.\,e^{10t} = \frac{1}{2}.e^{10t}\Big|_0^t = \frac{1}{2}e^{10t} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad I_3(t) = 0{,}5\,(1 - e^{-10t}) \equiv 500\ \text{mA}(1 - e^{-10t})$$

De (1) y (2) resulta que:

$$I_1 = \frac{2{,}5 + I_3}{2} = 0{,}25\,(1 - e^{-10t}) + 1{,}25\ \text{A} = 1{,}50\ \text{A} - 0{,}25.e^{-10t}$$

$$I_2 = 2{,}5 - I_1 = 2{,}5 - 1{,}25\ \text{A} - 0{,}25\,(1 - e^{-10t})$$

$$\therefore\quad I_2 = 1{,}25 - 0{,}25\,(1 - e^{-10t}) = 1{,}00 + 0{,}25.e^{-10t}$$

En consecuencia:

- La corriente que pasa por el Inductor es: $I_3(t) = 500\ \text{mA}\,(1 - e^{-10t})$
- La corriente que pasa por el Interruptor es: $I_1\,(t) = 1{,}50\ \text{A} - 0{,}25e^{-10t}$

26. El circuito RL en serie con L = 3,00 H y un circuito RC en serie con C = 3,00 μF tienen la misma constante de tiempo. Si los dos circuitos tienen la misma resistencia R, a) ¿cuál es el valor de R y b) cuál es la constante de tiempo?

Resolución :

Datos: $\tau_{\text{en un circuito RL}} = \tau_{\text{en un circuito RC}}$

$L = 3{,}00\ \text{H}$; $C = 3{,}00\ \mu\text{F}$

Los circuitos tienen la misma resistencia: R

Parte (a)

Por dato: $\tau_{\text{en el circuito RL}} = \tau_{\text{en un circuito RC}}$

$$\Rightarrow\quad \frac{L}{R} = R.C \quad\Rightarrow\quad R = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{3{,}00}{3{,}00\times10^{-6}}}$$

$$\therefore\quad R = 1\,000\ \Omega$$

Parte (b)

Sabemos que: $\tau = \frac{L}{R} = R.C = 10^3 \times (3{,}00 \times 10^{-6})$

$$\therefore\quad \tau = 3{,}00 \times 10^{-3}\ \text{s} \equiv 3{,}00\ \text{ms}$$

27. Un pulso de corriente es alimentado al circuito parcial mostrado en la figura P32.27. La corriente comienza en cero, luego se vuelve 10,0 A entre t = 0 y t = 200 μs, y luego es cero nuevamente. Determine la corriente en el inductor como función del tiempo.

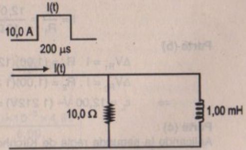


Figura P32.27

Resolución :

Sabemos que: $I(200\ \mu s) = 10{,}0\ A\ ;\ I_{(0)} = 0$

Luego: En un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$$

$$\Rightarrow I(200\ \mu s) = 10{,}0\ A \quad \Rightarrow \quad I(t) = 10{,}0\ A\left(1 - e^{-\frac{100\,t}{10^{-2}}}\right)$$

Por lo tanto: $I(t) = 0$, para $t < 0$

$I(t) = (10{,}0\ A)(1 - e^{-10\,000t})$ para $0 < t < 200$ ms

28. Una aplicación de circuito RL es la generación de un alto voltaje que varía en el tiempo a partir de una fuente de bajo voltaje, como se muestra en la figura P32.28. a) ¿Cuál es la corriente en el circuito un largo tiempo después de que el interruptor ha estado en la posición A? b) Ahora el interruptor se desplaza rápidamente de A a B. Calcule el voltaje inicial a través de cada resistor y el inductor. c) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el voltaje a través del inductor disminuya hasta 12,0 V?

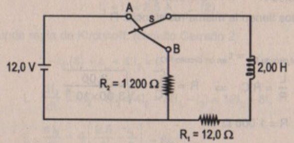


Figura P32.28

Resolución :

Parte (a)

Cuando el interruptor ha estado un largo tiempo en la posición A; la corriente está dada por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{12{,}0\ V}{12\Omega} = 1{,}00\ A$$

Parte (b)

$$\Delta V_{R_1} = I\ .\ R_1 = (1{,}00)(12{,}00) = 12{,}00\ V$$

$$\Delta V_{R_2} = I\ .\ R_2 = (1{,}00)(1\ 200) = 1\ 200\ V$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_L = 12{,}00\ V - (1\ 212 V) = -1\ 200 V$$

Parte (c)

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff cuando el interruptor se desplaza rápidamente a B; entonces tenemos:

$$\varepsilon_L - I.R_1 - I.R_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -L\ .\ \frac{dI}{dt} = I(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \int_{I_o}^{I} \frac{dI}{I} = -\left(\frac{R_1 + R_2}{L}\right)\int_{t_o}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{I_o}\right) = -606\ t$$

$$\therefore \quad I(t) = (1{,}00\ A)\ .\ e^{-606t}$$

Por Inductancia: $\varepsilon_L = -L\ .\ \dfrac{dI}{dt} = L(1{,}00\ A)\ .\ (606)\ .\ e^{-606t}$

$$\Rightarrow \quad 12{,}0\ V = (2{,}00)(1{,}00)(606)\ .\ e^{-606t}$$

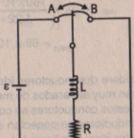
$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{12{,}00\ V}{(2)(1{,}00)(606)}\right) = -606t$$

$$\therefore \quad t_{transcurre} = 2{,}3 \times 10^{-3}\ s \equiv 2{,}3\ ms$$

29. Un inductor de 140 mH y un resistor de 4,90 Ω se conectan con un interruptor a una batería de 6,00 V, como se muestra en la figura P32.29. a) Si el interruptor se mueve hacia la izquierda (conectando la batería), ¿cuánto tiempo transcurre antes de que la corriente alcance 220 mA? b) ¿Cuál es la corriente en el inductor 10,0 s después de que el interruptor se cierra? c) Ahora el interruptor se mueve rápidamente de A a B. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que la corriente disminuya hasta 160 mA?

Resolución :

Sea el circuito:



Donde: L = 140 mH

R = 4,90 Ω

ε = 6,00 V

Parte (a)

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = 220 \times 10^{-3} = \frac{6{,}00}{4{,}90}\left(1 - e^{-\frac{4{,}90}{140}\times 10^{3}.t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{4{,}90 \times 10^{3}}{140}.t = \ln\left[1 - \frac{220 \times 10^{-3} \times 4{,}90}{6{,}00}\right]$$

$$\therefore \quad t_{transcurre} = 5{,}66 \times 10^{-3}\ s \equiv 5{,}66\ ms$$

Parte (b)
Sabemos que la corriente está dada por:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}.t})$$

$$\Rightarrow \quad I(10{,}0\ s) = \frac{6{,}00}{4{,}90}\left[1 - e^{-\frac{4{,}90}{140}\times 10^3.(10{,}0)}\right]$$

$$\therefore \quad I\ (10{,}0\ s) = 1{,}22\ A$$

Parte (c)
Cuando el interruptor se mueve rápidamente de A a B la corriente inicial 1,22 A va disminuyendo progresivamente; luego:

$$\varepsilon_L - I.R = 0 \qquad \text{(se tiene que cumplir)}$$

$$\Rightarrow \quad -L\frac{dI}{dt} = I.R \quad \Rightarrow \quad \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}.\int_{t_0}^{t} dt$$

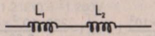
$$\Rightarrow \quad I(t) = I_0 . e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Luego: $I\ (t) = 160\ mA = (1{,}22)\ .\ e^{-\frac{4{,}90}{140}\times 10^3.t}$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{160\times 10^{-3}}{1{,}22}\right)\right] = -\frac{4{,}90\times 10^3}{140}.t$$

$$\therefore \quad t_{pasa} = 58\times 10^{-3}\, s \equiv 58\ ms$$

30. Considere dos inductores ideales, L_1 y L_2, los cuales tienen resistencia interna cero y están muy separados de modo que sus campos magnéticos no influyen entre ellos. a) Si estos conductores se conectan en serie, muestre $L_{eq} = L_1 + L_2$. b) Si los mismos dos inductores se conectan en paralelo, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tiene $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$. c) Considere ahora dos inductores L_1 y L_2 que tienen resistencias internas no cero R_1 y R_2, respectivamente. Suponga que todavía están tan alejados como para que sus campos magnéticos no influyan entre sí. Si estos inductores se conectan en serie, muestre que son equivalentes a un solo inductor que tiene $L_{eq} = L_1 + L_2$ y $R_{eq} = R_1 + R_2$. d) Si estos mismos inductores se conectan después en paralelo, ¿es necesariamente cierto que son equivalentes a un solo inductor ideal que tiene $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$ y $1/R_1 + 1/R_2$? Explique su respuesta.

Resolución:
Parte (a)
Si: 

(en serie)

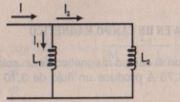
Por demostrar que: $\boxed{L_{equiv} = L_1 + L_2}$

Sabemos que en un circuito en serie se cumple que:

$$\varepsilon_{L\,total} = \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L_2}$$

$$\Rightarrow \quad -L_{equiv}.\frac{dI}{dt} = -L_1.\frac{dI}{dt} - L_2.\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad L_{equiv} = L_1 + L_2 \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)
Si: 

(En paralelo)

Por demostrar que : $\dfrac{1}{L_{equiv.}} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$

Por la primera regla de Kirchhoff tenemos que: $I = I_1 + I_2$

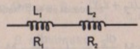
$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \qquad \dots (1)$$

Por otro lado:
Por la segunda regla de Kirchhoff: $\varepsilon_{L_1} = \varepsilon_{L_2} = \varepsilon_{total}$

Entonces de (1) por Inductancia:

$$-\frac{\varepsilon_{total}}{L_{equiv.}} = -\frac{\varepsilon_{L_1}}{L_1} - \frac{\varepsilon_{L_2}}{L_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{L_{equiv.}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (c)
Si: 

(En serie)

Por demostrar que:

$$\boxed{L_{equiv} = L_1 + L_2} \quad \wedge \quad \boxed{R_{equiv} = R_1 + R_2}$$

Sabemos que la corriente que pasa por el Inductor L_1 es la misma que pasa por el inductor L_2; entonces:

$$\varepsilon_{L\,equiv.} = \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L_2} \qquad \text{(a ambos inductores se les entrega energía)}$$

$$\Rightarrow \quad -L_{equiv.}\,\frac{dI}{dt} = -L_1\,.\,\frac{dI}{dt} - L_2\,.\,\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad L_{equiv.} = L_1 + L_2 \qquad \text{Lqqd.}$$

Sabemos que: $-R_{equiv}\,.\,dI = -R_1\,.\,dI - R_2\,.\,dI$

$$\therefore \quad R_{equiv} = R_1 + R_2 \qquad \text{Lqqd.}$$

ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

31. Calcule la energía asociada con el campo magnético de un solenoide de 200 vueltas en el cual una corriente de 1,75 A produce un flujo de $3,70 \times 10^{-4}$ T.m² en cada vuelta.

Resolución :

Datos: $N_{solen.} = 200$ vueltas ; $I = 1,75$ A

$F_B = 3,70 \times 10^{-4}$ T.m² ; $E_{solen.} = ?$

Sabemos que: $E_{solen.} = \frac{1}{2}\,L\,.\,I^2$

Pero: $L = \frac{N.\Phi_B}{I}$

Entonces: $$E_{solen.} = \frac{1}{2}I^2.\left(\frac{N.\Phi_B}{I}\right) = \frac{1}{2}I.N.\Phi_B$$

Por Inductancia:

$$\varepsilon_1 = -L_1\,.\,\frac{dI_1}{dt} \quad \wedge \quad \varepsilon_{1\,(\text{inducida por I2})} = -M\,.\,\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = -L_2\,.\,\frac{dI_2}{dt} \quad \wedge \quad \varepsilon_{2\,(\text{inducida por I2})} = -M\,.\,\frac{dI_1}{dt}$$

Pero:
$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_1)_{\text{ inducida por } I_2} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_2)_{\text{ inducida por } I_1} = \varepsilon_{total} \quad \text{... (2)}$$

Entonces: $$-L_1\,.\,\frac{dI_1}{dt} - M.\frac{dI_2}{dt} = -L_2\,.\,\frac{dI_2}{dt} - M.\frac{dI_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI_1}{dt} = \left(\frac{M-L_2}{M-L_1}\right).\frac{dI_2}{dt}$$

Luego reemplazo en (1)

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{M-L_2}{M-L_1}\right).\frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \qquad \therefore \quad \frac{dI_2}{dt} = \left(\frac{M-L_1}{2M-L_1-L_2}\right).\frac{dI}{dt}$$

En consecuencia: $$\frac{dI_1}{dt} = \left(\frac{M-L_2}{2M-L_1-L_2}\right).\frac{dI}{dt}$$

Nos piden: $$L_{equiv} = -\frac{\varepsilon_{total}}{\frac{dI}{dt}} = -\frac{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{1\,(\text{inducida por } I_2)}\right)}{\frac{dI}{dt}}$$

Entonces de (2)

$$\Rightarrow \quad L_{equiv} = \frac{L_1.\frac{dI_1}{dt} + M.\frac{dI_2}{dt}}{\frac{dI}{dt}} = \frac{L_1.\left(\frac{M-L_2}{2M-L_1-L_2}\right).\frac{dI}{dt} + M\left(\frac{M-L_1}{2M-L_1-L_2}\right).\frac{dI}{dt}}{\frac{dI}{dt}}$$

$$\therefore \quad L_{Equiv} = \frac{L_1.L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

OSCILACIONES EN UN CIRCUITO LC

32. El campo magnético dentro de un solenoide superconductor es de 4,50 T. El solenoide tiene un diámetro interno de 6,20 cm y una longitud de 26,0 cm. Determine a) la densidad de energía magnética en el campo, y b) la energía almacenada en el campo magnético dentro del solenoide.

Resolución :

Datos: B = 4,50 T

Diámetro del solenoide = 6,20 cm

Longitud = 26,0 cm

Parte (a)

Sabemos que por la ley de Ampere: $B = \frac{\mu_o I}{2\pi.r} = \frac{\mu_o I}{\pi.\text{diámetro}}$

$$\therefore \quad I = \frac{B.\pi.\text{diámetro}}{\mu_o}$$

Sabemos que:

$$\frac{U}{\text{volumen}} = \text{Densidad de energía magnética} = \frac{1}{2}L.\frac{I^2}{\text{volumen}} = \frac{\Phi_B.I}{2\text{ volumen}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Densidad de energía} = \frac{B.A.I}{2.A.\text{long}} = \frac{B^2.\pi.\text{diámetro}}{2\text{longitud}\times\mu_o}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Densidad de energía} = \frac{(4{,}50)^2(\pi)(6{,}20\times10^{-2})}{2(0{,}26)(4\pi\times10^{-7})}$$

$$\therefore \quad \text{Densidad de energía} = 6{,}04\times10^{6}\ \text{J/m}^3 \equiv 6{,}04\ \text{MJ/m}^3$$

Parte (b)

Sabemos que: $\text{Densidad de energía} = \dfrac{\text{energía}}{\text{volumen}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía} = \text{Densidad de energía} \times \text{Volumen}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía} = (6{,}04\times10^{6})(0{,}26)\left(\frac{\pi}{4}\right)(6{,}2\times10^{-2})^2$$

$$\therefore \quad \text{Energía} = 4{,}74\times10^{3}\ \text{J} \equiv 4{,}74\ \text{kJ}$$

33. Un solenoide de núcleo de aire con 68 vueltas mide 8,00 cm de largo y tiene un diámetro de 1,20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0,770 A?

Resolución:

Datos: $N_{solen.} = 68$ vueltas ; $I = 0{,}770$ A
Longitud = 8,00 cm ; Energía (U) = ?
Diámetro = 1,20 cm

Sabemos que: $U = \dfrac{1}{2}L\,.\,I^2$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}.I^2\left(\frac{N.\Phi_B}{I}\right) = \frac{1}{2}.N.I.\Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}N.I.(B.A) = \frac{1}{2}\,N.I.A\left(\mu_o.I.\frac{N}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}N^2.I^2\,.\,\frac{\mu_o.\pi.(\text{diámetro})^2}{(4)(\text{longitud})}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{8}\,(68)^2(0{,}770)^2(4\times10^{-7})\pi^2\,.\,\frac{1{,}20\times10^{-2}}{8{,}00\times10^{-2}}$$

$$\therefore \quad U = 2{,}44\times10^{-6}\ \text{J} \equiv 2{,}44\ \mu\text{J}$$

34. En t = 0 se aplica una fem de 500 V a una bobina que tiene una inductancia de 0,800 H y una resistencia de 30,0 Ω. a) Encuentre la energía almacenada en el campo magnético cuando la corriente alcanza la mitad de su valor máximo. b) Después de que la fem se conecta, ¿Cuánto tarda la corriente en alcanzar este valor?

Resolución:

Datos: $\varepsilon = 500$ V $\quad R = 30{,}0\ \Omega$
$L = 0{,}800$ H

Parte (a)

Nos piden: U = ? Cuando: $I = \dfrac{1}{2}I_{máx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{R}\right)$

Por dato: $I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{500}{30}\right) = 8{,}33$ A

Entonces: $U = \dfrac{1}{2}.L.I^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25}{3}\right)^2.(0{,}800)$

$$\therefore \quad U = 27{,}8\ \text{J}$$

Parte (b)

Sabemos que en un circuito "RL" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{30}{0{,}8}.t}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{(0{,}8)}{30}\,.\,\ln(0{,}5)$$

$$\therefore \quad t = 18{,}5\times10^{-3}\ \text{s} \equiv 18{,}5\ \text{ms}$$

35. En un día claro hay un campo eléctrico vertical de 100 V/m cerca de la superficie terrestre. En el mismo lugar, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de $0{,}500\times10^{-4}$ T. Calcule las densidades de energía de los dos campos.

Resolución:

Datos: E = 100 V/m
$B = 0{,}500\times10^{-4}$ T

Nos piden: densidad de energía del campo magnético y eléctrico = ?

Sabemos que: densidad de energía en un campo eléctrico $= \dfrac{1}{2}\varepsilon_o\,.\,E^2$

$$\Rightarrow \quad U_E = \frac{1}{2}\times(8{,}85\times10^{-12})(100)^2$$

$$\therefore \quad U_E = 44{,}2\times10^{-9}\ \text{J/m}^3 \equiv 44{,}2\ \text{nJ/m}^3$$

Por otro lado:

Densidad de energía en un campo magnético $= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{B^2}{\mu_o}$

$$\Rightarrow \quad U_B = \frac{\left(0{,}500\times10^{-4}\right)^2}{2\left(4\pi\times10^{-7}\right)}$$

$$\therefore \quad U_B = 995 \times 10^{-6}\ \text{J/m}^3 \equiv 995\ \mu\text{J/m}^3$$

36. Un circuito RL en el cual L = 4,00 H y R = 5,00 está conectado a una batería de 22,0 V en t = 0. a) ¿Qué energía se almacena en el inductor cuando la corriente es de 0,500 A? b) ¿A qué proporción se almacena la energía en el inductor cuando I = 1,00 A? c) ¿Qué potencia suministra la batería al circuito cuando I = 0,500 A?

Resolución:

Datos: Datos del circuito "RL"
$L = 4{,}00$ H ; $\varepsilon = 22{,}0$ V en $t = 0$
$R = 5{,}00\ \Omega$

Parte (a)

Si: $I = 0{,}500$ A ; nos piden U = ?

Sabemos que: $U = \frac{1}{2} L . I^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}(0{,}500)^2.(4{,}00)$

$\therefore \quad U = 0{,}5$ J

Parte (b)

Si : $I = 1{,}00$ A $\Rightarrow U = \frac{1}{2}(1{,}00)^2.(4{,}00)$

$\therefore \quad U = 2{,}00$ J

Por lo tanto: $\frac{U_{\text{inicial}}}{U_{\text{final}}} = \frac{0{,}500}{2{,}00} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$

Parte (c)
Cuando $I = 0{,}500$ A

Entonces: $P_{\text{del circuito}} = I.\varepsilon = (22{,}0)(0{,}500)$

$\therefore \quad P_{\text{en el circuito}} = 11{,}00$ W

37. Una batería de 10,0 V, un resistor de 5,00 Ω y un inductor de 10,0 H se conectan en serie. Después de que la corriente en el circuito alcanza su valor máximo, calcule a) la potencia suministrada por la batería, b) la potencia entregada al resistor, c) la potencia entregada al inductor, y d) la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

Resolución:

Datos: $\varepsilon = 10{,}0$ V
$R = 5{,}00\ \Omega$ | Circuito "RL" en serie
$L = 10{,}0$ H

Parte (a)

Nos piden: $P_{\text{batería}}$ = ? cuando $I = I_{\text{máx}}$

Sabemos que: $P_{\text{batería}} = I.\varepsilon = I_{\text{máx}}.\varepsilon \Rightarrow P_{\text{batería}} = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{(10{,}0)^2}{5{,}00}$

$\therefore \quad P_{\text{batería}} = 20{,}0$ W

Parte (b) $P_{\text{resistor}} = I_{\text{máx}}.R = \left(\frac{10}{5}\right)^2.(500)$

$\therefore \quad P_{\text{resistor}} = 20{,}0$ W

Parte (c) $P_{\text{inductor}} = P_{\text{batería}} - P_{\text{resistor}}$

$\therefore \quad P_{\text{inductor}} = 20{,}00 - 20{,}00 = 0{,}00$ W

Parte (d)

Sabemos que: $U = \frac{1}{2} L . I^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}(10{,}0)\frac{(10)^2}{5}$

$\therefore \quad U_{\text{inductor}} = 20{,}0$ J

38. Un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 680 kV/m por todo un volumen cilíndrico origina una energía total de 3,40 μJ. ¿Qué campo magnético sobre esta misma región almacena la misma energía total?

Resolución:

Datos: $E = 680\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$; $U_E = 3{,}4\ \mu$J
B = ?

Sabemos que: $U_E = U_B$

$\Rightarrow$ Densidad de energía generada por un campo eléctrico $= \frac{U_E}{\text{volumen(cilindro)}} = \mu_E$

Densidad de energía generada por un campo magnético $= \frac{U_B}{\text{volumen(cilindro)}} = \mu_B$

Entonces, por dato: $U_E = U_B$

$\Rightarrow \quad \mu_E . \text{volumen} = \mu_B . \text{volumen}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 . E^2 = \frac{B^2}{2\mu_o}$

$$\Rightarrow \quad B = E \,.\, \sqrt{\varepsilon_o \cdot \mu_o} = 680 \times 10^3 \times \sqrt{\left(8{,}85\times10^{-12}\right)\left(4\pi\times10^{-7}\right)}$$

$$\therefore \quad B = 2{,}27 \times 10^{-3}\ \text{T} \equiv 2{,}27\ \text{mT}$$

39. Suponga que la magnitud del campo magnético afuera de una esfera de radio R es $B = B_0(R/r)^2$, donde B_0 es una constante. Determine la energía total almacenada en el campo magnético afuera de la esfera y evalúe su resultado para $B_0 = 5{,}00 \times 10^{-5}$ T y $R = 6{,}00 \times 10^6$ m, valores apropiados para el campo magnético terrestre.

Resolución :

Datos: $B_{(\text{afuera de una esfera})} = B_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$; $B_0 = \text{Cte.}$

Nos piden: $U_{\text{total(B)}} = ?$ para: $B_0 = 5{,}00 \times 10^{-5}$ T

$R = 6{,}00 \times 10^6$ m

Sabemos que: $\mu_B = \dfrac{U_B}{\text{volumen}}$; donde: Volumen $= \dfrac{4}{3}\pi \,.\, R^3$

$$\Rightarrow \quad dV \,.\, \mu_B = dU_B \qquad \Rightarrow \quad dV = 4\pi.r^2.dr$$

$$\Rightarrow \quad (4\pi.r^2.dr)(\mu_B) = dU_B$$

$$\Rightarrow \quad (4\pi.r^2.dr)\left[\frac{B^2}{2\,\mu_o}\right] = dU_B \qquad \Rightarrow \quad \frac{4\pi\, r^2 .\, dr}{2\,\mu_o}\left(\frac{B_o^{\,2}.R^2}{r^2}\right) = du_B$$

$$\Rightarrow \quad \int dU_B = \frac{2\pi.B_o^2.R^2}{\mu_o}\int_o^R dr$$

$$\Rightarrow \quad U_B = \frac{2\pi.B_o^2.R^3}{\mu_o} = \frac{2\pi.\left(5{,}00\times10^{-5}\right)^2.\left(6{,}00\times10^6\right)^9}{4\pi\times10^{-7}}$$

$$\therefore \quad U_B = 2{,}70 \times 10^{18}\ \text{J}$$

INDUCTANCIA MUTUA

40. Dos bobinas están muy cercanas una a la otra. La primera bobina conduce una corriente variable en el tiempo dada por $I(t) = (5{,}00\ \text{A})e^{-0{,}025t}\text{sen}(377t)$. En t = 0,800 s, el voltaje medido a través de la segunda bobina es −3,20 V. ¿Cuál es la inductancia mutua de las bobinas?

Resolución :

Datos: $I_1(t) = (5{,}00\ \text{A})\ e^{-0{,}025t} \,.\, \text{sen}(377t)$ (Bobina 1)

$\varepsilon_2 = -3{,}20$ V (a través de la bobina 2) en t = 0,0800 s

$M_{12} = ?$

Sabemos que: $\varepsilon_2 = -M_{12} \cdot \dfrac{dI_1}{dt}$ (A través de la bobina 2 generada por la corriente de la bobina 1)

$$\Rightarrow \quad M_{12} = \frac{3{,}20}{\dfrac{dI_1}{dt}} = \frac{3{,}20\ \text{V}}{\dfrac{d}{dt}\left(5{,}00.e^{-0{,}025t}.\text{sen}(377\,t)\right)} \ ; \ \text{en } t = 0{,}800\ \text{s}$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{dt}I_1 = (-5{,}00)(0{,}025) \,.\, e^{-0{,}025} \,.\, \text{sen}(377t) + (377).\cos(377t) \,.\, (5{,}00) \,.\, e^{-0{,}025t}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{d}{dt}I_1\right|_{t\,=\,0{,}8\,s} = 377 \,.\, \cos(377\,(0{,}8)) \,.\, 5{,}00 \,.\, e^{-0{,}025(0{,}8)} - (5{,}00)(0{,}025) \,.\, e^{-0{,}025(0{,}8)} \,.\, \text{sen}(377\times(0{,}8))$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} = 1{,}845 \times 10^3\ \text{A/s}$$

En consecuencia : $M_{12} = \dfrac{3{,}20\ \text{V}}{1{,}845\times10^3\,\dfrac{\text{A}}{\text{s}}} = 1{,}73 \times 10^{-3}\ \text{H} \ \equiv 1{,}73\ \text{mH}$

41. Dos bobinas, mantenidas en posiciones fijas, tienen un inductancia mutua de 100 μH. ¿Cuál es el voltaje pico en una cuando una corriente sinusoidal dada por $I(t) = (10{,}0\ \text{A})$ sen (1 000t) fluye en la otra ?

Resolución :

Datos : $M_{12} = 100\ \mu\text{H}$

$I(t) = (10{,}0\ \text{A})$ sen[1 000t] (En una bobina)

$\varepsilon_{\text{ind máx}} = ?$

Sabemos que: $\varepsilon_{\text{ind}} = -M_{12} \cdot \dfrac{dI}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -100 \times 10^{-6} \times \frac{d}{dt}\ [10{,}0\ \text{sen}(1\,000t)]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = (-100 \times 10^{-3})\,(10^3) \,.\, \cos(1\,000t)$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -(1{,}0).\cos(1\,000t)$$

En consecuencia: $\varepsilon_{\text{máx}} = 1{,}00$ V

42. Se induce una fem de 96,0 mV en los devanados de una bobina cuando la corriente en una bobina cercana está aumentando la proporción de 1,20 A/s. ¿Cuál es la inductancia mutua de las dos bobinas?

Resolución :

Datos: $\varepsilon_{ind} = 96{,}0$ mV (en una bobina)

$\dfrac{dI}{dt} = 1{,}20\dfrac{A}{s}$ (en otra bobina)

$M_{12} = ?$

Sabemos que: $M_{12} = -\dfrac{\varepsilon_{ind}}{\frac{dI}{dt}} \Rightarrow M_{12} = \dfrac{|\varepsilon_{ind}|}{\frac{dI}{dt}} = \dfrac{96{,}0\times10^{-3}}{1{,}20}$

$\therefore\ M_{12} = 80\times10^{-3}\text{ H} \equiv 80\text{ mH}$

43. Dos solenoides A y B, que están muy próximos entre sí y comparten el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. Una corriente de 3,50 A en la bobina A produce un flujo promedio de 300 μT.m² a través de cada vuelta de A, y un flujo de 90,0 μT · m² a través de cada vuelta de B. a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. b) ¿Cuál es la autoinductancia de A? c) ¿Qué fem se induce en B cuando la corriente en A aumenta a razón de 0,500 A/s?

Resolución :

Datos: Sean los solenoides:

= Solenoide A

= Solenoide B

Donde: $N_A = 400$ vueltas

$N_B = 700$ vueltas

$I_A = 3{,}50$ A

$\Phi_{B\,prom} = 300\ \mu T.m^2$ (a través de A)

$\Phi_{B\,prom} = 90\ \mu T.m^2$ (a través de B)

Parte (a)

Sabemos que: $M_{12} = M_{AB} = \dfrac{N_B\,.\,\Phi_B}{I_A}$ (a través del solenoide)

$\Rightarrow\ M_{AB} = \dfrac{700\times(90\times10^{-6})}{3{,}5}$

$\therefore\ M_{AB} = 18{,}00\times10^{-3}\text{ H} \equiv 18{,}00\text{ mH}$

Parte (b)

Por definición: $L_A = M_A = \dfrac{N_A\,.\,\Phi_B}{I_A}$ (a través del solenoide A)

$\Rightarrow\ M_A = \dfrac{(400)(300\times10^{-6})}{3{,}5}$ $\therefore\ M_A = 34{,}3\times10^{-3} \equiv 34{,}3$ mA

Parte (c)

Si: $\dfrac{dI_A}{dt} = 0{,}500$ A/s

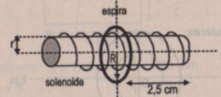
$\Rightarrow\ \varepsilon_B = -M_{AB}.\dfrac{dI_A}{dt} = -(18{,}0\times10^{-3})(0{,}5)$

$\therefore\ \varepsilon_{ind(B)} = -9{,}00\times10^{-3}\text{ V} \equiv -9{,}00\text{ mV}$

44. Un solenoide de 70 vueltas mide 5,00 cm de largo y 1,00 cm de diámetro y conduce una corriente de 2,00 A. Una sola espira de alambre, de 3,00 cm de diámetro, se sostiene de manera que el plano de la espira es perpendicular al eje largo del solenoide, como se ilustra en la figura P31.18 (página 1 004). ¿Cuál es la inductancia mutua de los dos si el plano de la espira pasa a través del solenoide a 2,50 cm de un extremo?

Resolución :

Sea el solenoide:



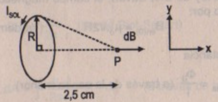
Donde: $N_{solenoide} = 70$ vueltas ; $I_{solenoide} = 2{,}00$ A

Longitud = 5,00 cm ; Diámetro de la espira = 3,00 cm

Diámetro del solenoide = 1,00 cm

Nos piden: $M_{mutua} = ?$

Sea:



Tenemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B_P = B_x = \frac{\mu_o IR}{4\pi(2{,}5^2+R^2)^{3/2}}\oint ds = \frac{\mu_o I.R^2}{2(2{,}5^2+R^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow\ B_P = 11{,}4\times10^{-6}\text{ T} \equiv 11{,}4\ \mu T$

Entonces: $\Phi_B = B_P \cdot A_{transv.\ solen}$ (a través de la espira)

$$\Rightarrow \Phi_B = 11{,}4 \times 10^{-6} \times \left[\frac{\pi.\text{diam.solenoide}^2}{4}\right] \quad \text{(a través de la espira)}$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{11{,}4\times10^{-6}\times(\pi)\left(1{,}00\times10^{-2}\right)^2}{4} = 0{,}895 \times 10^{-9}\ \text{T.m}^2 \quad \text{(a través de la espira)}$$

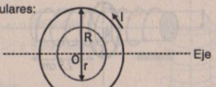
Luego por Inductancia:

$$M_{mutua} = \frac{\Phi_B}{I_{solen.}} = \frac{\left(0{,}895\times10^{-9}\right)}{2} = 0{,}447 \times 10^{-9}\ \text{H} \equiv 0{,}447\ \text{nH} \quad \text{(a través de la espira)}$$

45. Dos espira circulares de alambre de una sola vuelta tienen radios R y r, con R >> r. Las espiras se encuentran en el mismo plano y son concéntricas. a) Muestre que la inductancia mutua del par de $M = \mu_0\, \pi r^2/2R$. (Sugerencia: suponga que la espira más grande conduce una corriente I y calcule el flujo resultante a través de la espira más pequeña). b) Evalúe M para r = 2,00 cm y R = 20,0 cm.

Resolución :

Sean las espiras circulares:



Parte (a)

Por demostrar que: $$M_{mutua} = \frac{\mu_0 . \pi . r^2}{2R}$$

Sabemos que por la ley de Biot-Savart, el campo magnético en o producido por la corriente I está dado por:

$B_{en(0)} = \mu_o.I/2R$ (Ya demostrado)

Entonces: Por inductancia

$$M_{mutua} = \frac{\Phi_B}{I} \quad \text{(a través de la espira menor)}$$

$$\Rightarrow \quad M_{mutua} = \frac{B.A_{espira\ menor}}{I} = \left(\frac{\mu_o . I}{2R}\right)\left(\frac{\pi . r^2}{I}\right)$$

$$\therefore \quad M_{mutua} = \frac{\mu_o . \pi . r^2}{2R} \quad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si : $r = 2{,}00 \times 10^{-2}$ m ; R = 0,2 m

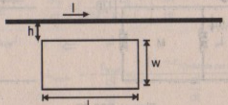
$$\text{Entonces :} \quad M_{mutua} = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(\pi)\left(2{,}00\times10^{-2}\right)^2}{2(0{,}2)}$$

$$\therefore \quad M_{mutua} = 3{,}95 \times 10^{-9}\ \text{H} \equiv 3{,}95\ \text{nH}$$

46. Sobre una tarjeta de circuito impreso, un conductor recto relativamente largo y una espira rectangular conductora se encuentran en el mismo plano, como se muestra en la figura P31.9 (página 1 003). Si h = 0,400 mm, w = 1,30 mm y L = 2,70 mm, ¿cuál es su inductancia mutua?

Resolución :

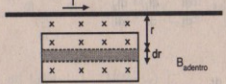
Sea la Figura:



Donde: h = 0,400 mm ; w = 1,30 mm ; L = 2,70 mm

Nos piden M_{Mutua} = ?

Sabemos que:



$$B(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi . r} \quad \text{(ley de Biot-Savart)}$$

Por otro lado:

$$\Phi_B = \int B.dA = \int \frac{\mu_o I}{2\pi . r}.\ (1 . dr) \quad \text{(a través de la espira rectangular)}$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_h^{\omega+h} \frac{\mu_o . I.L}{2\pi}\left(\frac{1}{r}dr\right) \quad \text{(a través de la espira rectangular)}$$

$$\therefore \Phi_B = \frac{\mu_o . I.L}{2\pi}.\ln\left(1+\frac{\omega}{h}\right) \quad \text{(a través de la espira rectangular)}$$

Luego:

$$M_{mutua}=\frac{\Phi_B}{I}=\frac{\mu_o.I.L.\ln(1+w/h)}{2\pi.I}\qquad\text{(a través de la espira rectangular)}$$

$$\Rightarrow\ M_{mutua}=\frac{\mu_o.I.L.\ln(1+w/h)}{2\pi}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times\left(2{,}70\times10^{-3}\right)}{2\pi}\ln\left(1+\frac{1{,}30}{0{,}4}\right)$$

$$\therefore\quad M_{mutua}=1{,}2\times10^{-9}\ \text{H}\equiv1{,}2\ \text{nH}$$

47. Dos inductores que tienen autoinductancias L_1 y L_2 se conectan en paralelo, como se muestra en la figura P32.47 a. La inductancia mutua entre los dos inductores es M. Determine la autoinductancia equivalente L_{eq} para el sistema (Fig. P32,47b)

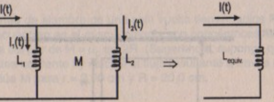


Figura P32.47

Resolución:

Sabemos que: $\quad I(t)=I_1(t)+I_2(t)\qquad$ ...(regla de Kirchhoff)

$$\Rightarrow\ \frac{dI}{dt}=\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}\qquad\text{... (1)}$$

Además :

Por Inductancia:

$$\varepsilon_1=-L_1.\frac{dI_1}{dt}\quad\wedge\quad\varepsilon_{1\ (\text{inducida por } I_2)}=-M.\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2=-L_2.\frac{dI_2}{dt}\quad\wedge\quad\varepsilon_{2\ (\text{inducida por } I_1)}=-M.\frac{dI_1}{dt}$$

Pero:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_{2\ (\text{inducida por } I_2)}=\varepsilon_2+\varepsilon_{2\ (\text{inducida por } I_1)}=\varepsilon_{total}\qquad\text{...(2)}$$

Entonces:

$$-L_1.\frac{dI_1}{dt}-M.\frac{dI_2}{dt}=-L_2.\frac{dI_2}{dt}-M.\frac{dI_1}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dI_1}{dt}=\left[\frac{M-L_2}{M-L_1}\right].\frac{dI_2}{dt}$$

Luego reemplazando en (1):

$$\frac{dI}{dt}=\left[\frac{M-L_2}{M-L_1}\right].\frac{dI_2}{dt}+\frac{dI_2}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dI_2}{dt}=\left[\frac{M-L_1}{2M-L_1-L_2}\right].\frac{dI}{dt}$$

En consecuencia: $\quad\dfrac{dI_1}{dt}=\left[\dfrac{M-L_2}{2M-L_1-L_2}\right].\dfrac{dI}{dt}$

Nos piden: $\quad L_{equiv.}=-\dfrac{\varepsilon_{total}}{\frac{dI}{dt}}=-\dfrac{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{1(\text{inducida por } I_2)}\right)}{\frac{dI}{dt}}$

Entonces de (2) tenemos que:

$$L_{equiv}=\frac{L_1.\frac{dI_1}{dt}+M.\frac{dI_2}{dt}}{\frac{dI}{dt}}=L_1\left(\frac{M-L_2}{2M-L_1-L_2}\right)\frac{dI}{dt}+M\left(\frac{M-L_1}{2M-L_1-L_2}\right)\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow\ L_{equiv}=\frac{\frac{dI}{dt}\left[\frac{L_1(M-L_2)}{2M-L_1-L_2}+\frac{M(M-L_1)}{2M-L_1-L_2}\right]}{\frac{dI}{dt}}$$

$$\therefore\ L_{equiv}=\frac{L_1.L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

48. Un capacitor de 1,00 μF se carga mediante un suministro eléctrico de 40,0 V. El capacitor completamente cargado se descarga después mediante un inductor de 10,0 mH. Encuentre la corriente máxima en las oscilaciones resultante.

Resolución :

Datos: $C = 1{,}00\ \mu F$; $\varepsilon = 40{,}0\ V$
$L = 1{,}00\ mH$

Nos piden: $I_{máx} = ?$

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$Q(t) = Q_{máxima} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{dQ}{dt} = \underbrace{-\omega \cdot Q_{máxima}}_{I_{máxima}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\text{Entonces:} \quad I_{máxima} = \omega \cdot Q_{máxima} = \frac{1}{\sqrt{L.C}}.(C.\varepsilon) = \frac{(1{,}00\times10^{-6})(40{,}0)}{\sqrt{(1{,}00\times10^{-3})(1{,}00\times10^{-6})}}$$

$$\therefore \quad I_{máxima} = 1{,}265\ A$$

49. Un circuito LC se compone de un inductor de 20,0 mH y de un capacitor de 0,500 μF. Si la máxima corriente instantánea es 0,100 A. ¿Cuál es la diferencia de potencias más alta en el capacitor?

Resolución :

Datos: $L = 20{,}0\ mH$; $C = 0{,}500\ \mu F$
$I_{máx} = 0{,}100 A$; $\Delta V_{máx} = ?$

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$I_{máx} = w \cdot Q_{máx} = \frac{Q_{máx}}{\sqrt{L.C}}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{máx} = I_{máx} \cdot \sqrt{L.C} = (0{,}100) \times \sqrt{(20\times10^{-3})(0{,}5\times10^{-6})}$$

$$\therefore \quad Q_{máx} = 10 \times 10^{-6}\ C \equiv 10\ \mu C$$

$$\text{En consecuencia:} \quad \Delta V_{Max} = \frac{Q_{máx}}{C} = \frac{10\times10^{-6}}{0{,}5\times10^{-6}} = 20{,}0\ V$$

$$\Rightarrow \quad E_{solen} = \frac{1}{2}(200)\ (1{,}75)(3{,}70 \times 10^{-4})$$

$$\therefore \quad E_{solen} = 0{,}0648\ J$$

50. En el circuito mostrado en la figura P32.50, ε = 50,0 V, R = 250 Ω y C = 0,500 μF. El interruptor S se cierra durante un largo tiempo y ningún voltaje se mide a través del capacitor. Justo después de que se abre el interruptor, el voltaje que se mide a través del capacitor alcanza un valor máximo de 150 V. ¿Cuál es la inductancia L?

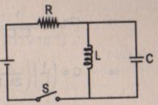


Figura P32.50

Resolución :

Donde : $\varepsilon = 50{,}0\ V$; $R = 250\ \Omega$
$C = 0{,}500\ \mu F$

Nos piden L = ?

Sabemos que por dato : $\Delta V_{máx} = 150V$

Entonces: $Q_{máx} = C \cdot \Delta V_{máx} = (0{,}500 \times 10^{-6})(150) = 75 \times 10^{-6} C \equiv 75\ \mu C$

Por otro lado :

En un circuito "LR" se cumple que: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

$$\Rightarrow \quad I_{máx} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{50{,}0\,V}{250\,\Omega} = 0{,}2\ A$$

Entonces : $I_{máx} = \omega \cdot Q_{máx} = \frac{Q_{máx}}{\sqrt{L.C}}$ (en un circuito « LC »)

$$\Rightarrow \quad L = \left(\frac{Q_{máx}}{I_{máx}}\right)^2 \times \frac{1}{C} = \left(\frac{75{,}00\times10^{-6}}{0{,}200}\right)^2 \times \frac{1}{0{,}500\times10^{-6}}$$

$$\therefore \quad L = 281{,}2 \times 10^{-3} H \equiv 281{,}2\ mH$$

51. Una inductancia fija L = 1,05 μH se emplea en serie con un capacitor variable en la sección de sintonización de un radio. ¿Qué capacitancia sintoniza el circuito en la señal de una estación que transmite a 6,30 MHz?

Resolución :

Datos : $L = 1{,}05\ \mu H$; $f = 6{,}30\ MHz$
$C = ?$

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = 2\pi \cdot f$$

$$\Rightarrow \quad (2\pi.f)^2 = \frac{1}{L.C}$$

$$\Rightarrow \quad C = \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{2\pi.f}\right)^2 = \left(\frac{1}{1{,}05\times10^{-6}}\right)\times\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6{,}30\times10^{6}}\right)^2$$

$$\therefore \quad C = 608 \times 10^{-2}\ F \equiv 608\ pF$$

52. Calcule la inductancia de un circuito LC que oscila a 120 Hz cuando la capacitancia es 8,00 μF

Resolución :

Datos: $C = 8{,}00\ \mu F$; $f = 120{,}0\ Hz$
$L = ?$

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$2\pi f = \omega = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

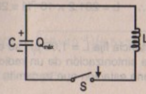
$$\Rightarrow \quad L = \left(\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{2\pi.f}\right)^2 = \left(\frac{1}{8{,}00\times10^{-6}}\right)\times\left(\frac{1}{2\pi.120}\right)^2$$

$$\therefore \quad L = 1{,}33\times10^{3}\ H \equiv 1{,}33\ kH$$

53. Un circuito LC como el de la figura 32.14 contiene un inductor de 82,0 mH y un capacitor de 17,0 μF que inicialmente conduce una carga de 180 μC. El interruptor se cierra en t = 0. a) Encuentre la frecuencia (en hertz) de las oscilaciones resultantes. En t = 1,00 ms, encuentre b) la carga en el capacitor y c) la corriente en el circuito.

Resolución :

Sea el circuito "LC"



Donde: $L = 82{,}0\ mH$
$C = 17{,}0\ \mu F$
$Q_{máx} = 180\ \mu C$

Parte (a)
Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$\omega = 2\pi\ .\ f = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(82\times10^{-3})(17\times10^{-6})}}$$

$$\therefore \quad f = 135\ Hz$$

Parte (b)

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple:

$$Q(t) = Q_{máx}\ .\ \cos(\omega.t)$$

$$\Rightarrow \quad Q(1{,}00\ ms) = (180\ \mu C)\ .\ \cos[270\pi\ (1{,}00\times10^{-3})]$$

$$\therefore \quad Q(1{,}00\ ms) = 119\times10^{-6}\ C \equiv 119\ \mu C$$

Parte (c)

Sabemos que : $I(t) = \dfrac{dQ}{dt} = -\omega\ .\ Q_{máx}\ .\ \text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad I(1{,}00\ ms) = -(270\pi)(180\ \mu C)\ .\ \text{sen}[270\pi(1{,}00\times10^{-3})]$$

$$\therefore \quad I(1{,}00\ ms) = -114\times10^{-3}\ A \equiv -114\ mA$$

54. El interruptor en la figura P32.54 se conecta a un punto a durante un largo tiempo. Después de que el interruptor se mueve al punto b, ¿cuáles son a) la frecuencia de oscilación del circuito LC, b) la carga máxima que aparece sobre el capacitor, c) la corriente máxima en el inductor y d) la energía total que posee el circuito en t = 3,00 s?

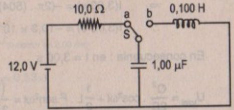


Figura P32.54

Resolución :

Parte (a)
Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$\omega = 2\pi\ .\ f = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(0{,}100)(1{,}00\times10^{-6})}}$$

$$\therefore \quad f_{oscilación} = 504\ Hz$$

Parte (b)
Sabemos que en un circuito "RC" se cumple que:

$$Q(t) = Q_{máx}\ (1 - e^{-t/RC}) = C\ .\ \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

$$\Rightarrow \quad Q_{máx} = C\,.\,\varepsilon = 12{,}0\ V \times (1{,}00 \times 10^{-6})$$

$$\therefore \quad Q_{máx} = 12{,}00 \times 10^{-6}\ C \equiv 12\ \mu C$$

Parte (c)
Sabemos que un circuito "LC" se cumple que:

$$Q(t) = Q_{máx}\,.\,\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = -\omega\,.\,Q_{máx}\,.\,\text{sen}(\omega\,.\,t)$$

Entonces : $I_{máx} = \omega\,.\,Q_{máx} = (2\pi\,.\,f)(12 \times 10^{-6})$

$$\Rightarrow \quad I_{máx} = 2\pi\,.\,(504) \times (12 \times 10^{-6})$$

$$\therefore \quad I_{máx} = 38{,}00 \times 10^{-3}\ A \equiv 38{,}00\ mA$$

Parte (d)
Sabemos que en t = 3,00 s

$$Q(3{,}00\ s) = (12\ \mu C)\,.\,\cos(1\ 008\pi(3{,}00))$$

$$\Rightarrow \quad Q(3{,}00\ s) = 9{,}5 \times 10^{-3}\ C$$

Por otro lado:

$$I(3{,}00\ s) = -\omega\,.\,Q_{máx}\,.\,\text{sen}(\omega\,.\,t)$$

$$\Rightarrow \quad I(3{,}00\ s) = -(2\pi\,.\,(504))\,.\,(12 \times 10^{-6})\,.\,\text{sen}[1\ 008\pi(3{,}00\ s)]$$

$$\therefore \quad I(3{,}00\ s) = -10{,}3 \times 10^{-3}\ A$$

En consecuenia : en t = 3,00 s

$$U_{total} = \frac{Q^2}{2C}\,.\,\cos^2\omega t + \frac{1}{2}L\,.\,I^2.\text{sen}^2\omega t = \frac{(9{,}5\times10^{-3})^2}{2(1{,}00\times10^{-6})} \times (0{,}999)\ \frac{1}{2}\times(0{,}100)\,.\,(-10{,}3\times10^{-3})^2$$

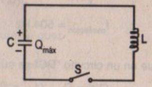
$$\therefore \quad U_{total} = 45{,}1\ J$$

55. Un circuito LC, como el que se ilustra en la figura 32.14, está compuesto por un inductor de 3,30 H y un capacitor de 840 pF, que inicialmente tiene una carga de 105 μC. En t = 0 el interruptor se cierra. Calcule las siguientes cantidades en t = 2,00 ms: a) la energía almacenada en el capacitor, b) la energía almacenada en el inductor, y c) la energía total en el circuito.

Resolución :

Sea el circuito "LC"

Donde: $L = 3{,}30\ H$
$C = 840 \times 10^{-12}\ F$
$Q_{máx} = 105\ \mu C$



Parte (a)
Sabemos que en un circuito "LC" se cumple:

$$Q(t) = Q_{máx}\,.\,\cos(\omega.t)$$

$$\Rightarrow \quad Q(2{,}00\ ms) = 105 \times 10^{-6} \times \cos\left[\frac{1\times2{,}00\times10^{-3}}{\sqrt{3{,}30\times840\times10^{-12}}}\right]$$

$$\therefore \quad Q(2{,}00\ ms) = 138{,}65 \times 10^{-6}\ C$$

Entonces : $U_{capacitor} = \dfrac{Q^2_{(2,00ms)}}{2.C} = \dfrac{(138{,}65\times10^{-6})^2}{2.(840\times10^{-12})}$

$$\therefore \quad U_{capacitor} = 6{,}03\ J$$

Parte (b)

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:
Por la conservación de la energía:

$$U_{total} = \frac{1}{2}\ I^2_{máx}\,.\,L = \frac{Q^2_{máx}}{2.C} = U_{(capacitor\ en\ 2,00\ ms)} + U_{(Inductor\ en\ 2,00\ ms)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(105\times10^{-6})^2}{2.(840\times10^{-12})} = 6{,}03 + U_{(Inductor\ en\ 2,00\ ms)}$$

$$\therefore \quad U_{(Inductor)} = 6{,}56\ J - 6{,}03\ J = 0{,}53\ J$$

Parte (c)

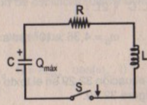
$$U_{total} = \frac{Q^2_{máx}}{2C} = \frac{(105\times10^{-6})^2}{2.(840\times10^{-12})} = 6{,}56\ J \text{ (por conservación de la energía)}$$

EL CIRCUITO RLC

56. En la figura 32.19, considere R = 7,60 Ω, L = 2,20 mH y C = 1,80 μF. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito. b) ¿Cuál es la resistencia crítica?

Resolución :
Sea la figura:

Donde: R = 7,60 Ω
L = 2,20 mH
C = 1,80 μF



Parte (a)

Sabemos que en un circuito "RLC" se cumple que:

$$\omega_d = \left[\frac{1}{L.C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \left[\frac{1\times10^9}{2,20\times(1,80)} - \left(\frac{7,60}{4,4\times10^{-3}}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad \omega_d = 15,8 \times 10^3 \text{ rad/s} \equiv 1,58 \text{ krad/s}$$

Parte (b)

Sabemos que en un circuito "RLC" se cumple que:

$$R_{crítica} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4\times2,20\times10^{-3}}{1,80\times10^{-6}}}$$

$$\therefore \quad R_{crítica} = 70,0\ \Omega$$

57. Considere un circuito LC en el cual L = 500 mH y C = 0,100 μF. a) ¿Cuál es la frecuencia resonante ω_0? b) Si una resistencia de 1,00 kΩ se introduce en este circuito, ¿cuál es la frecuencia de las oscilaciones (amortiguadas)? c) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre las dos frecuencias?

Resolución:

Datos: L = 500 mH ; C = 0,100 μF

Parte (a)

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple que:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{\sqrt{500\times10^{-3}\times(0,1\times10^{-6})}}$$

$$\therefore \quad \omega_0 = 4,47 \times 10^3 \text{ rad/s} \equiv 4,47 \text{ krad/s}$$

Parte (b)

Si R = 1,00 kΩ se introduce en el circuito; nos piden ω_d = ?

Sabemos que en un circuito "RLC" se cumple que:

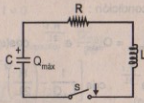
$$\omega_d = \left[\frac{1}{L.C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \left[\frac{10^8}{5,0\times1} - \left(\frac{10^3}{1,00}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad \omega_d = 4,36 \times 10^3 \text{ rad/s} \equiv 4,36 \text{ krad/s}$$

58. Muestre que la ecuación 32.29 en el texto es la regla de la espira de Kirchhoff cuando se aplica a la figura 32.19.

Resolución:

Sea la figura (32.19):



Por demostrar que:

$$\frac{L\,d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt}.R + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{al aplicar la regla de Kirchhoff}$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff: (sentido antihorario)

$$-\frac{Q}{C} + \varepsilon_L - I.R = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{Q}{C} - L.\frac{dI}{dt} - I.R = 0 \quad \Rightarrow \quad L.\frac{dI}{dt} + I.R + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \quad L.\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) + R.\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Por lo tanto: $$L.\frac{d^2Q}{dt^2} + R.\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$ Lqqd.

59. Se inician oscilaciones eléctrica en un circuito en serie que contiene capacitancia C, inductancia L y resistencia R, a) Si $R << \sqrt{\frac{4L}{C}}$ (amortiguamiento débil), ¿cuánto tiempo transcurre antes de que la amplitud de la oscilación de corriente disminuya hasta 50,0 % de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo pasa para que la energía se reduzca a 50,0% de su valor inicial?

Resolución:

Datos: C, L, R

Parte (a)

Si: $R << \sqrt{\frac{4L}{C}}$

Nos piden t = ?, antes de que amplitud de oscilación disminuya hasta 50,0 % de su valor inicial.

Sabemos que en un circuito LRC se cumple que:

$$Q(t) = Q_{máx} . e^{-\frac{R.t}{2L}} . \cos(\omega_d . t) = A_{máx} . \cos(\omega_d . t)$$

(por analogía)

Entonces por dato y condición :

$$0{,}5\,.\,Q_{máx} = Q_{máx}\,.\,e^{-\frac{R.t}{2L}}\,.\,\cos(\omega_d\,.\,t)$$

$$\Rightarrow\quad 0{,}5 = e^{-\frac{R.t}{2L}}\,.\cos\left[\frac{1}{L.C}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2}.t$$

$$\Rightarrow\quad 0{,}5 = e^{-\frac{R.t}{2L}}\,.\cos\left(\left[\frac{4L-R^2C}{4L^2.C}\right]^{1/2}\right).t \qquad \text{pero: } C.R^2 << 4L$$

$$\Rightarrow\quad 0{,}5 = e^{-\frac{R.t}{2L}}\,.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right).t \quad \text{... (circuito LC)}$$

$$\Rightarrow\quad \ln(0{,}5) = -\frac{R.t}{2L} \qquad \therefore \qquad t = (0{,}693)\left(\frac{2L}{R}\right)$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad U_{inicial} = \dfrac{Q^2}{2C} + \dfrac{1}{2}L\,.\,I^2$

$$U_{final} = 0{,}5\left(\frac{Q^2}{2C}+\frac{1}{2}LI^2\right) \qquad \text{... (por condición)}$$

Reemplazando datos de (a):

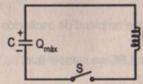
$$\text{Resulta que } t = (0{,}347)\left(\frac{2L}{R}\right)$$

PROBLEMAS ADICIONALES

60. Inicialmente, el capacitor en un circuito LC en serie está cargado. Se cierra un interruptor, permitiendo que el capacitor se descargue, y t segundos después la energía almacenada en el capacitor es un cuarto de su valor inicial. Determine L si conoce C.

Resolución :

Sea el circuito "LC"



Por dato: Después de un tiempo "t"; $U_{(capacitor)} = \dfrac{1}{4}\,U_{inicial}$

Sabemos que inicialmente en t = 0

$$U_{inicial} = U_{capacitor} = \frac{Q^2_{máx}}{2C}$$

Después de un tiempo "t > 0"

$$U_{capacitor} = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{1}{4}\left(\frac{Q^2_{máx}}{2C}\right) \quad \text{... (por dato)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(Q_{máx})^2.\cos^2(\omega.t)}{2C} = \frac{Q^2_{máx}}{8.C}$$

$$\Rightarrow\quad \cos^2(\omega\,.\,t) = \frac{1}{4} \qquad \therefore \qquad \cos(\omega t) = \frac{1}{2}$$

Entonces: $\quad \omega\,.\,t = \dfrac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow\quad \frac{t}{\sqrt{L.C}} = \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 3.t = \pi\sqrt{L.C}$$

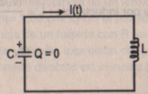
$$\Rightarrow\quad \frac{9\,.\,t^2}{\pi^2} = L\,.\,C \qquad \therefore\ L = \frac{9\,.\,t^2}{\pi^2.C}$$

61. Un inductor de 1,00 mH y un capacitor de 1,00 μF se conectan en serie. La corriente en el circuito se describe por medio de I = 20,0t, donde t está en segundos e I en amperes. El capacitor inicialmente no tiene carga. Determine a) el voltaje que atraviesa el inductor como una función del tiempo, b) el voltaje que pasa por el capacitor como una función del tiempo, c) el momento en que la energía almacenada en el capacitor excede por primera vez la del inductor.

62. Un inductor que tiene inductancia L y un capacitor de capacitancia C se conectan en serie. La corriente en el circuito aumenta linealmente en el tiempo como se describe por medio de I = Kt. El capacitor inicialmente no tiene carga. Determine a) el voltaje que atraviesa el inductor como función del tiempo, b) el voltaje que pasa por el capacitor como función del tiempo y c) el momento en que la energía almacenada en el capacitor excede por primera vez la del inductor.

Resolución 61 y 62 :

Sea el circuito "LC"



Donde: L = 1,00 mH
C = 1,00 μF
I(t) = 20,0 t

Parte (a)

Sabemos que por inductancia:

$$\varepsilon = -L\,.\,\frac{dI}{dt} = -(1{,}00\times10^{-3})\,\frac{d}{dt}\,(20{,}0t)$$

$$\therefore\quad \varepsilon = -(1{,}00\times10^{-3})(20{,}0) = -20{,}0\ \text{mV}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{d}{dt}Q(t) = I(t) = -20{,}0t$ (circuito LC)

$$\Rightarrow\quad \int dQ = -20{,}0t\int dt$$

$$\therefore\quad Q(t) = -10{,}0\,t^2$$

Por capacitancia : $\quad C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

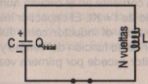
$$\Rightarrow\quad \Delta V = \frac{Q}{C} = -\frac{10{,}0t^2}{1{,}00\times10^{-6}}$$

$$\therefore\quad \Delta V = -10\times10^6\,t^2\,\frac{V}{s^2} = -10{,}00\ \text{M}.t^2\ \text{V/s}^2$$

63. Un capacitor en un circuito LC en serie tiene una carga inicial Q y se está descargando. Encuentre, en función de L y C, el flujo que pasa por cada una de las N vueltas en la bobina, cuando la carga sobre el capacitor es Q/2.

Resolución :

Sea el circuito «LC »



Nos piden $\Phi_B = ?$

Sabemos que por inductancia : $L = \dfrac{N.\Phi_B}{I}$

$$\Rightarrow\quad \Phi_B = I\,.\,\frac{L}{N} \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

Sabemos que en un circuito "LC" se cumple:

$$Q(t) = Q_{Inicial}\,.\,\cos(\omega\,.\,t)$$

$$\Rightarrow\quad Q(t) = \frac{Q}{2} = Q.\cos\left[\frac{t}{\sqrt{L.C}}\right] \quad \text{... (por dato)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2} = \cos\left[\frac{t}{\sqrt{L.C}}\right] \quad \therefore \quad \frac{t}{\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{3}$$

Entonces: $\quad t = \dfrac{\pi\times\sqrt{LC}}{3}$

Entonces: $\quad I(t) = \dfrac{dQ}{dt} = -\omega\,.\,Q_{Inicial}\,.\,\text{sen}(\omega.t)$

$$\Rightarrow\quad I\left(\frac{\pi.\sqrt{LC}}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\times Q\times\text{sen}\left[\frac{\pi\sqrt{LC}}{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\right]$$

$$\therefore\quad I\left(\frac{\pi\sqrt{LC}}{3}\right) = -\frac{Q}{\sqrt{LC}}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En consecuencia: de (1)

$$\Phi_B = \frac{L}{N}\times\left(\frac{Q}{\sqrt{LC}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{Q}{2N}\times\sqrt{\frac{3L}{C}}$$

64. El toroide en la figura P32.64 consta de N vueltas y tiene una sección transversal rectangular. Sus radios interior y exterior son a y b, respectivamente. a) Muestre que

$$L = \frac{\mu_o\,.N^2.h}{2\pi}\,.\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Empleando este resultado, calcule la autoinductancia de un toroide de 500 vueltas para el cual a = 10,0 cm, b = 12,0 cm y h = 1,00 cm. c) En el problema 14 se dedujo una fórmula aproximada para la inductancia de un toroide con R >> r. Para tener una medida de la exactitud de este resultado utilice la expresión del problema 14 para calcular la inductancia aproximada del toroide descrito en el inciso b). Compare este resultado con la respuesta a la parte b).

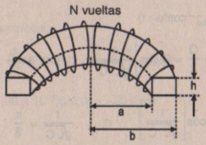
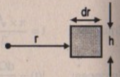


Figura P32.64

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\boxed{L = \dfrac{\mu_o . N^2 . h}{2\pi} . \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$



Aplicando la ley de Ampere: $\oint B.ds = \mu_o . N.I$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_o . N.I}{2\pi . r}$$

Luego: $$\Phi_B = \int B.dA = \int_a^b \frac{\mu_o . N.I}{2\pi . r} . h.dr = \frac{\mu_o . N.I.h}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr$$

$$\therefore \quad \Phi_B = \frac{\mu_o . N.I.h}{2\pi} . \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

En consecuencia: por inductancia:

$$L = \frac{N.\Phi_B}{I} = \left(\frac{N}{I}\right) . \left(\frac{\mu_o . N.I.h}{2\pi} . \ln\left[\frac{b}{a}\right]\right)$$

$$\therefore \quad L = \frac{\mu_o . N^2 . h}{2\pi} . \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{Lqqd .}$$

Parte (b)

Si: N = 500 vueltas ; a = 10,0 cm ; b = 12,0 cm ; h = 1,00 cm

Entonces: $$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times (500)^2 \times (1{,}00 \times 10^{2})}{2\pi} . \ln\left(\frac{12}{10}\right)$$

$$\therefore \quad L = 91{,}2 \times 10^{-6}\ H \equiv 91{,}2\ \mu H$$

Parte (c)

En el problema 14: $L \equiv \dfrac{\mu_o . N^2 . A}{2\pi . R}$

Si: N = 500 vueltas; a = 10,0 cm ; b = 12,0 cm ; h = 1,00 cm

Entonces:
$$A = (b - a).h = (1{,}00 \times 10^{-2})(2{,}00 \times 10^{-2}) = 2{,}00 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$R = a + \frac{(b - a)}{2} = 10{,}0\ cm + \frac{(12 - 10)}{2} = 11 \times 10^{-2}\ m$$

Luego: $$L \equiv \frac{\mu_o \times N^2 \times A}{2\pi R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(500)^2 (2{,}00 \times 10^{-4})}{2\pi \times (11 \times 10^{-2})}$$

$$\therefore \quad L \equiv 90{,}9 \times 10^{-6}\ H \equiv 90{,}9\ \mu H$$

Parte (d)

Vemos que: L = 91,2 μH (En la parte (a))

L = 90,9 μH (En la parte (b))

Entonces:

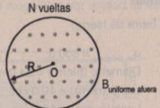
Ligeramente es mayor L de la parte (a)

Sin embargo se podría aproximar L de la parte (b) y obtenerse ≡ 91,0 μH

65. a) Una bobina circular plana realmente no produce un campo magnético uniforme en el área que encierra, pero estime la autoinductancia de una bobina circular plana, con radios R y N vueltas, suponiendo que el campo en su centro es uniforme sobre su área. b) Un circuito en una mesa de laboratorio consta de una batería de 1,5 V, un resistor de 270 Ω, un interruptor y, conectándolos, tres cordones de 30 cm de largo. Suponga que el circuito está dispuesto en forma circular. Considérelo como una bobina plana de una vuelta. Calcule el orden de magnitud de su autoinductancia y c) de la constante de tiempo que describe cuán rápido la corriente aumenta cuando usted cierra el interruptor.

Resolución :

Parte (a)



Sabemos que por la ley de Biot-Savart:

$$B_{\text{en }(0)} = \frac{\mu_o I.N}{2R} \quad \text{(ya demostrado)}$$

Entonces por inductancia:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{N}{I} B.A = \frac{N.\pi R^2}{I} . \left(\frac{\mu_o I.N}{2R}\right)$$

$$\therefore \quad L \equiv \frac{N^2 . \mu_o . \pi . R}{2}$$

Parte (b)

Por dato: Long. = 30×10^{-2} m (en una bobina o circuito circular)

Entonces: $2\pi \cdot R = 30 \times 10^{-2}$ m $\quad \therefore \quad R = \dfrac{15{,}0 \times 10^{-2}}{\pi}$ m

Luego: $L \cong \dfrac{\mu_o \cdot \pi}{2}\left(\dfrac{15{,}0 \times 10^{-2}}{\pi}\right) = 94{,}248 \times 10^{-9}$ H

$\therefore \quad L = 100{,}0 \times 10^{-9}$ H $\equiv$ 100 nH (en orden de magnitud)

Parte (c)

Sabemos que en un circuito "LR" se cumple que:

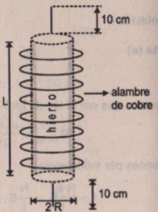
$$\tau_{\text{de tiempo}} = \frac{L}{R} = \frac{100 \times 10^{-9}\ \text{H}}{270\ \Omega}$$

$\therefore \quad \tau_{\text{de tiempo}} = 0{,}4 \times 10^{-9}$ s $\equiv$ 0,4 ns

66. Una barra de hierro blando ($\mu_m = 800\ \mu_0$) se usa como el núcleo de un solenoide. La barra tiene un diámetro de 24,0 mm y mide 10,0 cm de largo. Un pedazo de 10,0 m de alambre de cobre de calibre 22 (diámetro = 0,644 mm) se enrolla alrededor de la barra en una sola capa uniforme, excepto en 10,0 cm de longitud en cada extremo, las cuales se van a usar para conexiones. a) ¿Cuántas vueltas de este alambre pueden enrollarse alrededor de la barra? (Sugerencia: el diámetro del alambre se suma al diámetro de la barra cuando se determina la circunferencia de cada vuelta. Además, el alambre forma la espiral diagonalmente a lo largo de la superficie de la barra. b) ¿Cuál es la resistencia de este inductor? c) ¿Cuál es su inductancia?

Resolución:

Sea la barra de hierro:



Donde: $\mu_{m\,(\text{Hierro})} = 800\ \mu_o$
Diámetro (hierro) = 24,0 mm
Long (hierro) = 10,0 cm
Long (cobre) = 10,0 cm
Diámetro (cobre) = 0,644 mm

Parte (a)

Tenemos que: Long.(cobre) – 0,2 m = $N_{\text{cobre}} \times 2\pi \cdot \dfrac{\text{diámetro hierro}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(10.0\text{m} - 0.2\text{m})}{\pi \times \text{diámetro del hierro}} \quad \frac{9{,}80}{\pi \times (24 \times 10^{-3})} = N_{\text{Vueltas del cobre}}$$

$\therefore \quad N_{\text{Vueltas del cobre}} = 130$ vueltas

Parte (b)

Sabemos que: $R_{CU} = \rho_{CU} \cdot \dfrac{\text{long}}{\text{área transv}} = \dfrac{\rho_{CU}.\text{long.cu}}{\dfrac{\pi}{4}.(\text{diám cu})^2}$

$$\Rightarrow \quad R_{CU} = \frac{1{,}7 \times 10^{-8} \times 10{,}0\ \text{m}}{(0{,}25\,\pi)(0{,}644 \times 10^{-3})^2}$$

$\therefore \quad R_{\text{Cobre}} = 52{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega \equiv 52{,}2$ mΩ

Parte (c)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$L_{\text{cobre}} = \frac{\mu_o . N^2 . A}{\text{longitud}} = \frac{\mu_M . N^2 . A}{\text{longitud}}$$

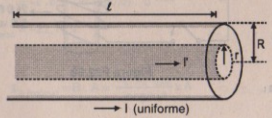
$$\Rightarrow \quad L_{\text{cobre}} = \frac{(800\mu_o)(130)^2 \times (\pi)(0.25)(24 \times 10^{-3})^2}{0.1\ \text{m}}$$

$\therefore \quad L_{\text{cobre}} = 76{,}86 \times 10^{-3}$ H $\equiv$ 78,76 mH

67. Un alambre de material no magnético con radio R conduce una corriente distribuida de manera uniforme sobre su sección transversal. Si la corriente total conducida por el alambre es I, demuestre que la energía magnética por unidad de longitud dentro de alambre es $\mu_0\ I^2/16\pi$.

Resolución:

Sea:



Sabemos que:

$$J = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{I.r^2}{R^2}\ ;\ r < R$$

Entonces: $B(r) = \dfrac{\mu \times I'}{2\pi.r} = \dfrac{\mu_o I.r}{2\pi.R^2}$ (ley de Ampere)

Luego: densidad de energía $= \dfrac{B(r)^2}{2\mu_o} = \left(\dfrac{\mu_o Ir}{2\pi.R^2}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{2\mu_o}\right) = \dfrac{U'}{\text{volumen}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{U'}{\ell} = \pi.r^2 \times \left(\frac{\mu_o^2.I^2.r^2}{4\pi^2.R^4}\right)\left(\frac{1}{2\mu_o}\right) = \frac{I^2.\mu_o.r^4}{8\pi.R^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\ell} dU' = \left(\frac{4I^2.\mu_o}{8\pi R^4}\right) r^3.dr \quad \text{(integrando)}$$

$$\frac{U}{\ell} = \frac{I^2.\mu_o}{2\pi R^4}\int_0^R r^3\,dr \qquad \therefore \qquad \frac{U}{\ell} = \frac{I^2.\mu_o}{8\pi}$$

68. Una bobina con 820 vueltas de alambre y 24,0 Ω de resistencia se coloca alrededor de un solenoide de 12 500 vueltas y 7,00 cm de largo, como se muestra en la figura P32.68. Tanto la bobina como el solenoide tienen áreas de sección transversal de $1,00 \times 10^{-4}$ m². a) ¿Cuánto tarda la corriente del solenoide en alcanzar 63,2 por ciento de su valor máximo? Determine b) la fem inversa promedio producida por la autoinductancia del solenoide durante este intervalo, c) la rapidez promedio de cambio en el flujo magnético que pasa por la bobina durante este intervalo y d) la magnitud de la corriente inducida promedio en la bobina.

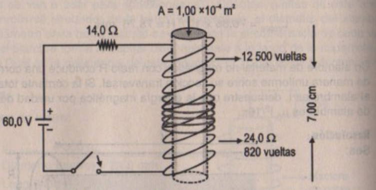


Figura P32.68

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que en un circuito "LR" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R.t}{L}}\right)$$

Donde: $\qquad I_{máx} = \dfrac{\varepsilon}{R}$

Entonces por datos:

$$\frac{63.2}{100} I_{máx} = \frac{63,2}{100}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{R}{L}.t = \ln(0,368) \quad \dots (1)$$

Por otro lado:

Sabiendo que en un solenoide la inductancia está dada por:

$$L = \frac{\mu_o.N^2.A}{\text{longitud}}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{(4\pi\times 10^{-7})(12500)^2(1,00\times 10^{-4})}{7,00\times 10^{-2}}$$

$$\therefore \quad L = 280,5 \times 10^{-3}\ \text{H} \equiv 280,5\ \text{mH}$$

Luego de (1): $\qquad -\dfrac{14,00}{280,5\times 10^{-3}}\ .\ t = \ln(0,368)$

$$\therefore \quad t_{tarda} = 20 \times 10^{-3}\ \text{s} \equiv 20,0\ \text{ms}$$

Parte (b)

Sabemos que por inductancia:

$$\varepsilon_{inversa} = -L\ .\ \frac{dI}{dt} = -L\ .\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}.t}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{inversa} = -\varepsilon\ .\ e^{-\frac{R}{L}.t} = -(60,0)\ .\ e^{-\frac{14}{280,5}\times 10^3\times(20\times 10^{-3})}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{inversa} = -22,11\ \text{V}$$

Parte (c)

Sabemos que: $\qquad \Phi_{B\,(bobina)} = B\ .\ A = \dfrac{N_s.\mu_o.I_{solen}}{\text{longitud}} \times A$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt}\,(\text{bobina}) = \frac{N_{solen}.\mu_o.A}{\text{longitud}}\cdot\frac{d}{dt} I_{solen}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Phi_B\,(\text{bobina}) = \frac{\mu_o.N_{solen}.A}{\text{longitud}} \times \frac{\varepsilon}{R} \times e^{-\frac{R}{L}.t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Phi_B\,(\text{bobina}) = \frac{(4\pi\times10^{-7})(12\,500)(1{,}00\times10^{-4})}{7{,}00\times10^{-2}}\times\left(\frac{60{,}0}{14{,}0}\right)$$

$$\times e^{-\frac{14}{280.5}\times10^{3}\times(20\times10^{-3})}$$

$$\therefore \quad \frac{d\Phi_B}{dt}(\text{bobina}) = 35{,}4\times10^{-6}\ \text{T.m}^2/\text{s} \equiv 35{,}4\ \mu\text{T.m}^2/\text{s}$$

Parte (d)
Por la Ley de Inducción de Faraday:

$$\varepsilon_{ind(bobina)} = -N_{bobina}\cdot\frac{d}{dt}\Phi_B\,(\text{bobina})$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ind(bobina)} = -820\times(35{,}4\times10^{-6})$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ind(bobina)} = 29{,}0\times10^{-3}\ \text{V}$$

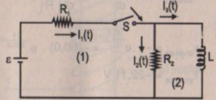
Entonces: $I_{ind(bobina)} = 1{,}2\times10^{-3}\ \text{A} \equiv 1{,}2\ \text{mA}$

69. En t = 0 se cierra el interruptor en la figura P32.69. Empleando las leyes de Kirchhoff para las corrientes y voltajes instantáneos en este circuito de dos espiras, muestre que la corriente en el inductor es

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\left[1-e^{-\frac{R'}{L}.t}\right]$$

Donde $R' = R_1R_2/(R_1+R_2)$.

Resolución:
Sea la figura:



En: t = 0

Se cierra el interruptor

Por demostrar que: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\left[1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right]$

Donde: $R' = R_1 . R_2/(R_1+R_2)$

Por la primera regla de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \dots(1)$$

Por la segunda regla de Kirchhoff (circuito 1)

$$\varepsilon - I_1R_1 - I_2R_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = I_1R_1 - I_2R_2 = R_1(I_2+I_3) + I_2R_2 \qquad \dots(\text{Por } 1)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = (R_1+R_2)\,I_2 + R_1I_3$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{\varepsilon - R_1I_3}{R_1+R_2} \quad \dots(2)$$

Por otro lado:
Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (circuito 2)

$$+I_2R_2 + \varepsilon_L = 0$$

$$\Rightarrow \quad L.\frac{dI_3}{dt} - R_2I_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dI_3}{dt} - \left(\frac{R_2}{L}\right)I_2 = 0 \quad \dots(3)$$

Luego: Reemplazando (2) en (3):

$$\frac{dI_3}{dt} - \left(\frac{R_2}{L}\right)\left(\frac{\varepsilon - R_1I_3}{R_1+R_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI_3}{dt} + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.I_3 = +\frac{\varepsilon.R_2}{L(R_1+R_2)} \quad \text{(ecuación diferencial)}$$

Desarrollando: $\mu(t) = e^{+\int\frac{R_1.R_2}{L(R_1+R_2)}} = e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t}$

Entonces: $\mu(t).\frac{dI_3}{dt} + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.\mu(t)I_3 = +\frac{\varepsilon.R_2}{L(R_1+R_2)}.e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t}$

$$\Rightarrow \quad d[\mu(t).I_3] = +\frac{\varepsilon.R_2}{L(R_1+R_2)}.e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t}.dt$$

Integrando: $\int_0^t d[\mu(t).I_3] = +\frac{\varepsilon.R_2}{L(R_1+R_2)}.\int_0^t e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t}$

$$I_3(t).e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1}\right).e^{+\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}.t}\Bigg|_0^t$$

En consecuencia: $I_3(t)_{inductor} = \frac{\varepsilon}{R_1}\left(1-e^{-\frac{R'}{L}.t}\right)$ Lqqd.

70. En la figura P32.69 considere $\varepsilon = 6,00$ V, $R_1 = 5,00\ \Omega$ y $R_2 = 1,00\ \Omega$. El inductor tiene resistencia despreciable. Cuando el interruptor se abre después de haber estado cerrado durante un largo tiempo, la corriente en el inductor cae a 0,250 A en 0,150 s. ¿Cuál es la inductancia del inductor?

Resolución:

De la figura del problema n.° 69 considerar:

$$\varepsilon = 6,00\ \text{V},\quad R_1 = 5,00\ \Omega;\quad R_2 = 1,00\ \Omega$$

En $t = 0,150$ s $\quad I_{3\,\text{ind}}(t) = 0,250\text{A}$

Nos piden: $L = ?$

De lo mostrado en el problema n.° 69; tenemos que:

$$I_{3\,(\text{en el inductor})}(0,150\ \text{s}) = 0,250\ \text{A}$$

$$\Rightarrow\quad 0,250 = \frac{6,00}{5,00}\left(1 - e^{-\frac{(5)(1)}{L(6)}(0,150)}\right)$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{(5)(1)(0,150)}{6.L} = \ln\left(1 - \frac{(0,250)(5,00)}{6,00}\right)$$

$$\therefore\quad L_{\text{inductor}} = 535 \times 10^{-3}\ \text{H} \equiv 535\ \text{mH}$$

71. En la figura P32.71 el interruptor está cerrado para $t < 0$ y se establecen condiciones de estado estable. El interruptor se abre en $t = 0$. a) Encuentre el voltaje inicial ε_o a través de L justo después de que $t = 0$. ¿Cuál extremo de la bobina está a mayor potencial: a o b b) Realice gráficas a mano de las corrientes en R_1 y R_2 como una función del tiempo, considerando positivas las direcciones del estado estable. Muestre valores antes y después de $t = 0$. c) ¿Cuánto tiempo después de $t = 0$ la corriente en R_2 es 2,00 mA?

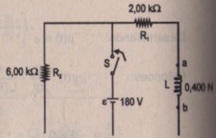
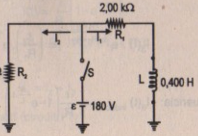


Figura P32.71

Resolución:

Parte (a)

El sistema es equivalente a:



Después de que el interruptor se abre en $t = 0$ se cumple que:

$$-IR_1 - IR_2 - L.\frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{... (segunda regla de Kirchhoff)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dI}{dt} = -I\left(\frac{R_1 + R_2}{L}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^t \frac{1}{I}dI = -\int_0^t\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)dt \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{I(t)}{I_o}\right) = -\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)dt$$

$$\therefore\quad I(t) = I_o.e^{-\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)t} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1}\right)e^{-\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)t}$$

Luego: $\quad \varepsilon_{L\ \text{después de t=0}} = -L.\dfrac{dI}{dt} = -L\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\varepsilon}{R_1}.e^{-\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)t}\right]$

$$\Rightarrow\quad \varepsilon_{L\ \text{después de t=0}} = \frac{\varepsilon}{R_1}.(R_1 + R_2) = \left(\frac{18}{2}\right)(6+2)$$

$$\therefore\quad \varepsilon_L = 72\ \text{V}$$

Donde en vista que la corriente va de menor a mayor potencial se concluye que "b" está a mayor potencial.

Parte (b)

Antes que el interruptor se abra en $t = 0$ se cumple que:

$-I_2R_2 + \varepsilon = 0$ ... (segunda regla de Kirchhoff)

$$\Rightarrow\quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{18}{6} = 3,00\ \text{mA} \text{...(estado estable)}$$

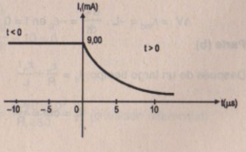
Así también:

$-I_1R_1 + \varepsilon = 0$ ... (segunda regla de Kirchhoff)

$$\Rightarrow\quad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{18}{2} = 9,00\ \text{mA}\ \text{(estado estable)}$$

Por tanto, graficando:

corriente que pasa por R_1 antes y después de $t = 0$



72. El interruptor en la figura P32.72 se cierra en t = 0. Antes de que esto suceda, el capacitor está descargado y todas las corrientes son cero. Determine las corrientes en L, C y R y las diferencias de potencial a través de L, C y R a) en el instante después de que se cierra el interruptor y b) mucho tiempo después de que se cierra.

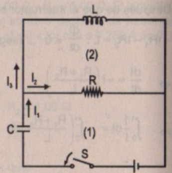


Figura P32.72

Resolución:

Donde: En t = 0 se cierra el interruptor

Parte (a)

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (circuito 1) en t = 0

$$\varepsilon_0 - I_2.R = 0 \quad \therefore \quad I_2 = \frac{\varepsilon_o}{R}$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (circuito 2)

$$\varepsilon_L + I_2 . R = 0$$

$$\Rightarrow \quad -L.\frac{dI_3}{dt} + R\left(\frac{\varepsilon_o}{R}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad dI_3 = \left(\frac{\varepsilon_o}{L}\right).dt$$

$$\therefore \quad I_3 = \left(\frac{\varepsilon_o}{L}\right).t$$

Entonces por la primera regla de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{\varepsilon_o}{R} + \frac{\varepsilon_o}{L}.t$$

Luego: $\Delta V = \varepsilon_0$ en t = 0 (a través de R)

$\Delta V = 0$ en t = 0 (a través de C)

$\Delta V = \varepsilon_{Ind} = -L.\frac{dI_3}{dt} = -\varepsilon_0$ en t = 0 (a través de L)

Parte (b)

Después de un largo tiempo: $I_1 = \frac{\varepsilon_o}{R} + \frac{\varepsilon_o t}{L}$

$$I_2 = \text{cte} = \frac{\varepsilon_o}{R} \quad ; \quad I_3 = \frac{\varepsilon_o}{L}.t$$

Luego: $\Delta V = \varepsilon_0$ (a través de R)

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I_1.dt = \frac{1}{C}\int\left(\frac{\varepsilon_o}{R} + \frac{\varepsilon_o t}{L}\right)dt \quad \text{(a través de C)}$$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\varepsilon_o . t}{RC} + \frac{\varepsilon_o t^2}{2LC} \quad \text{en un tiempo largo "t"} \quad \text{(a través de C)}$$

$$\Delta V = -L.\frac{dI_3}{dt} = -\varepsilon_o \quad \text{en un tiempo largo "t"} \quad \text{(a través de L)}$$

73. Para evitar daños por arqueo en un motor eléctrico, algunas veces se pone un resistor de descarga en paralelo con la armadura. Si el motor se desconecta súbitamente mientras está funcionando, este resistor limita el voltaje que aparece a través de las bobinas de la armadura. Considere un motor de cd de 12,0 V que tiene una armadura con una resistencia de 7,50 Ω y una inductancia de 450 mH. Suponga que la fem inversa en las bobinas de la armadura es 10,0 V cuando el motor está funcionando con rapidez normal. (El circuito equivalente para la armadura se muestra en la figura P32.73). Calcule la resistencia máxima R que limita el voltaje en la armadura a 80,0 V cuando el motor está desconectado.

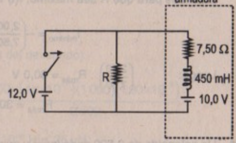


Figura P32.73

Resolución:

Nos piden:

$R_{máxima}$ que limita el voltaje en la armadura a 80,0 V cuando el motor está desconectado.

Cuando el motor está funcionando, éste alimenta a la armadura y genera una corriente, en un tiempo t < 0.

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (circuito grande).

(Sentido de las manecillas del reloj).

$$12{,}0\text{ V} - 7{,}5\,I - L.\frac{dI}{dt} - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad L.\frac{dI}{dt} + 7{,}5\,I = 2{,}00$$

$$\therefore \quad \frac{dI}{dt} + \frac{7{,}5\times10^3}{450}I = \frac{2{,}00\times10^3}{450} \quad \text{(ecuación diferencial)}$$

Desarrollando: $\mu(t) = e^{\int \frac{7,5\times10^3}{450}dt} = e^{\frac{7,5\times10^3}{450}.t}$

Luego: $\mu(t).\frac{dI}{dt} + \mu(t)\frac{7,5\times10^3}{450}.I = \frac{2,00\times10^3}{450}.e^{\frac{7,5\times10^3}{450}.t}$

$$\Rightarrow \int d(I.\mu(t)) = \frac{2,00\times10^3}{450}\int_{t<0}^{0} e^{\frac{7,5\times10^3}{450}.t}dt = \left(\frac{2,00}{7,5}\right)\left(1-e^{\frac{7,5\times10^3}{450}.t}\right)$$

$$\therefore \quad I(t) = \left(\frac{2,00}{7,50}\right)\left(e^{\frac{7,5\times10^3.t}{450}}-1\right)$$

Por condición:

$I(t) . R_{máx} = 80,0$ V (cuando el motor se desconecta)

Entonces para que R sea máximo, I(t) tiene que tomar su mínimo valor; entonces

$$I_{mínimo} = -\left(\frac{2,00}{7,50}\right)\text{A} \quad \text{en } t \to +\infty$$

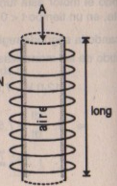
Luego: $\left(\frac{2,00}{7,50}\right) . R_{máx} = 80,0$ V

$$\therefore \quad R_{máx} = 300\ \Omega$$

74. Un solenoide de 0,500 m de largo y núcleo de aire, contiene 1 000 vueltas y tiene un área de sección transversal de 1,00 cm². a) Si se ignoran los efectos de los extremos, ¿cuál es la autoinductancia? b) Un devanado secundario enrollado alrededor del centro del solenoide tiene 100 vueltas. ¿Cuál es la inductancia mutua? c) El devanado secundario conduce una corriente constante de 1,00 A y el solenoide está conectado a una carga de 1,00 kΩ. La corriente constante se interrumpe repentinamente. ¿Cuánta carga fluye a través del resistor de carga?

Resolución:

Sea el Solenoide:



Donde: $A = 1,00 \times 10^{-4}$ m²
Long = 0,500 m
N = 1 000 vueltas

Parte (a)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$L = \frac{\mu_o N^2.A}{long} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times(10^3)^2\times(1,00\times10^{-4})}{0,500}$$

$$\therefore \quad L = 251 \times 10^{-6}\ \text{H} \equiv 251\ \mu\text{H}$$

Parte (b)

Por dato: un devanado se enrolla alrededor del centro del solenoide con 100 vueltas.

Nos piden: $M_{mutua} = ?$

Sabemos que en solenoide se cumple que:

$$B = \frac{\mu_o N.I}{longitud} \quad \text{... (ley de Ampere)}$$

Entonces:

$$\Phi_{B\ (\text{a través del devanado})} = \frac{\mu_o .N.I}{longitud}\times A$$

Luego: Por definición:

$$M_{mutua} = 100 \times \frac{\Phi_B}{I} \quad \text{(a través del devanado)}$$

$$\Rightarrow M_{mutua} = \frac{100}{I}\times\left(\frac{\mu_o .I.N.A}{longitud}\right) = \frac{100\times(4\pi\times10^{-7})(1\,000)(1,00\times10^{-4})}{0,500}$$

$$\therefore \quad M_{mutua} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} \equiv 25\ \mu\text{H}$$

Parte (c)

Por dato. $I_{devanado} = 1,00$ A

El solenoide está conectado a una carga de 1,00 kΩ.

$Q_{a\ \text{través del resitor}} = ?$

Sabemos que en un circuito "LR" se cumple que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}.t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}.e^{-\frac{R}{L}.t} = 1,00.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

$$\Rightarrow \int dQ = 1,00\int_0^{\infty} e^{-\frac{R.t}{L}}dt = \frac{R}{L}.e^{-\frac{R.t}{L}}\Big|_0^{\infty}$$

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{1,00\times10^3}{251\times10^{-6}} = 3,98\ \text{MC}$$

75. Los alambres de conexión de una antena de TV se construyen a menudo en la forma de dos alambres paralelos (Fig. P32.75). a) ¿Por qué esta configuración de conductores tiene una inductancia? b) ¿Qué constituye la espira de flujo en esta configuración? c) Ignorando cualquier flujo magnético dentro de los alambres, muestre que la inductancia de una longitud x de este tipo de conexión es

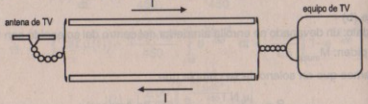


Figura P32.75

$$L = \frac{\mu_o\, x}{\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

donde a es el radio de los alambres y w es su separación centro a centro.

Nota: los problemas del 76 al 79 requieren la aplicación de ideas del capítulo y de anteriores para algunas propiedades de los superconductores, los cuales fueron introducidos en la sección 27.5

Resolución :

Parte (a)

En vista que la inductancia mutua es proporcional al flujo magnético, en consecuencia habrá o creará cada alambre un campo magnético dirigido hacia adentro de la página y por consiguiente dicho sistema tendrá una inductancia.

Parte (b)

La espira rectangular constituye toda el área por donde fluye o pasa el flujo magnético.

Parte (c)

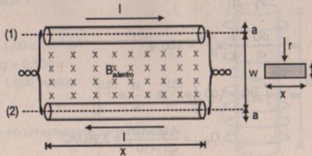
Sea: Longitud de los alambres "x"

Separación entre ellos w de centro a centro.

Por demostrar que: $L = \frac{\mu_o\, x}{\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$

Donde "a" es el radio de los alambres.

Graficando:



Tenemos que por definición:

$$L_{(1\ alambre)} = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\int B\,dA}{I} = \int_0^{w-a}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi.r}\right)\left(\frac{x}{I}.dr\right)$$

$$L_{(1\ alambre)} = \frac{\mu_o\, x}{2\pi}\int_a^{w-a}\frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_o.x}{2\pi}.\ln(r)\Big|_a^{w-a}$$

$$\therefore\quad L_{(1\ alambre)} = \frac{\mu_o.x}{2\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

Por simetría: $L_{(2\ alambre)} = \frac{\mu_o\, x}{2\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$

En consecuencia:

$$L_{(de\ la\ conexión\ o\ circuito)} = 2\left[\frac{\mu_o\, x}{2\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)\right] = \frac{\mu_o\, x}{\pi}.\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)\quad \text{Lqqd.}$$

76. Problema de repaso. *La resistencia de un superconductor.* En un experimento realizado por S. C. Collins entre 1955 y 1958, una corriente fue mantenida en un anillo superconductor de plomo durante 2,50 años sin que se observe pérdida. Si la inductancia del anillo era de $3{,}14 \times 10^{-8}$ H y la sensitividad del experimento fue de 1 parte en 10^9, ¿cuál fue la resistencia máxima del anillo? (Sugerencia: trate esto como una corriente de decaimiento en un circuito RL, y recuerde que $e^{-x} \cong 1 - x$ para x pequeña).

Resolución : (Repaso)

Datos: $L_{anillo} = 3{,}14 \times 10^{-8}$ H

En t = 2,50 años; la corriente se mantuvo constante

$R_{máx\ anillo} = ?$

Sabemos que en un circuito "RL" la corriente de decaimiento está dada por:

$$I(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right).e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Por otro lado:

Sabemos que: $t = 2{,}50\ \text{años} \times \frac{360\ d}{1 año} \times \frac{24\ h}{1 d} \times \frac{3\ 600 s}{1 h} = 7{,}77 \times 10^7\ s$

I = cte. en el tiempo

$$\Rightarrow\ \frac{dI}{dt} = 0 = -\frac{\varepsilon}{L}.\ e^{-\frac{R}{L}.t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{R}{L}.t} = 0 \quad , \quad \text{como: } -\frac{R}{L}.\,t \text{ es muy pequeño}$$

Entonces: $1 - \frac{R}{L}.\,t = 0$

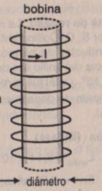
$$\Rightarrow \quad R = \frac{L}{t} = \frac{3{,}14\times10^{-8}\,H}{7{,}78\times10^{7}\,s}$$

$$\therefore \quad R_{máxima} = 4{,}04 \times 10^{-16}\ \Omega \equiv 404 \times 10^{-18}\ \Omega \equiv 404\ a\Omega$$

77. Problema de repaso. Alguien propone un método novedoso de almacenamiento de energía eléctrica. Se construiría una enorme bobina superconductora subterránea, de 1,0C km de diámetro. Conduciría una corriente máxima de 50,0 kA a través de cada devanado de un solenoide de 150 vueltas de Nb_3Sn. a) Si la inductancia de esta enorme bobina fuese de 50,0 H, ¿cuál sería la energía total almacenada? b) ¿Cuál sería la fuerza compresiva por metro de longitud que actuaría entre dos devanados adyacentes separados 0,250 m?

Resolución:

Sea la siguiente figura:



Donde: Diámetro = $1{,}00 \times 10^3$ m

$I_{máx} = 50{,}0 \times 10^3$ A

N = 150 vueltas

Parte (a)

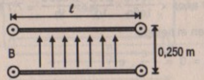
Nos piden $U_{total} = ?$, si L = 50,0 H

Sabemos que: $U_{total} = \frac{1}{2}\, I^2_{máx}\,.\,L = \frac{1}{2} \times (50{,}0) \times (50 \times 10^3)^2$

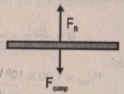
$$\therefore \quad U_{total} = 62{,}5 \times 10^9\ J \equiv 62{,}5\ GJ$$

Parte (b)

Vista frontal de 2 devanados:



Haciendo diagrama de cuerpo libre:



Entonces: $F_B = I\,.\,\ell\,.\,B$

Pero: $B = \frac{\mu_o\,.\,I}{2\pi(0{,}250)}$

Luego: $F_B = \frac{\mu_o\,.\,I^2\,.\,\ell}{2\pi(0{,}250)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_B}{\ell} = \frac{F_{comp.}}{\ell} = \frac{\mu_o\,.\,I^2}{2\pi(0{,}250)} = \frac{(4\pi\times10^{7})(50\times10^{3})^2}{2\pi\times(0{,}250)}$$

$$\therefore \quad \frac{F_{comp.}}{\ell} = 2\ 000\,\frac{N}{m}$$

78. Problema de repaso. *Transmisión eléctrica superconductora.* Se sugiere el uso de superconductores para la manufactura de líneas de transmisión eléctricas. Un solo cable coaxial (Fig. P32.78) podría conducir $1{,}00 \times 10^3$ MW (la salida de una gran planta eléctrica) a 200 kV, cd, a lo largo de una distancia de 1 000 km, sin pérdida. Un alambre interno con 2,00 cm de radio, hecho del superconductor Nb_3Sn, conduce la corriente I en una dirección. A su alrededor, un cilindro superconductor de 5,00 cm de radio conduciría la corriente inversa I. En tal sistema, ¿cuál es el campo magnético a) en la superficie del conductor interno y b) en la superficie interna del conductor externo? c) ¿Cuánta energía se almacenaría en el espacio entre los conductores en una línea superconductora de 1 000 km? d) ¿Cuál es la presión ejercida sobre el conductor externo?

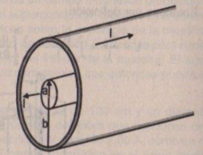


Figura P32.78

Resolución:

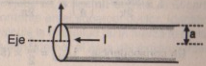
Donde: a = 2,00 cm ; b = 5,00 cm

P = $1{,}00 \times 10^3$ MW ; ΔV = 200 kV

Distancia = 1 000 km

Parte (a)

Por la ley de Ampere: $\oint B\ .\ ds = \mu_0\ .\ I$



$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o\,I}{2\pi\,.\,r}$$

Entonces en la superficie:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi . a} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(I)}{2\pi(2{,}00\times10^{-2})} \quad ...(1)$$

Por otro lado:

$$P_{total} = 1{,}00 \times 10^9\ W = I.\Delta V = I(200 \times 10^3)$$

$$\Rightarrow \quad I = 5{,}00 \times 10^3\ A$$

Luego de (1)

$$B_{en\ la\ superficie} = \frac{(4\pi\times10^{-7})\times(5{,}00\times10^{3})}{2\pi\times(2{,}00\times10^{-2})}$$

$$\therefore \quad B_{en\ la\ superficie} = 50{,}0 \times 10^{-3}\ T \equiv 50{,}0\ mT$$

Parte (b)

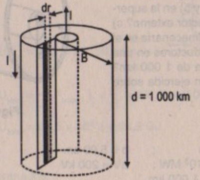
El campo magnético en la superficie interna del conductor es cero, debido a que este es hueco y no hay corriente dentro de un radio r < a.

Parte (c)

Sabemos que: $U_{total} = \frac{1}{2} I^2.L = \frac{1}{2} M_{mutua} . I^2$; donde I = 5,00 kA

Entonces por definición:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \int \frac{B dA}{I} = \frac{1}{I}\int_a^b \frac{\mu_o . I}{2\pi . r}\times(d.dr) = \frac{\mu_o d}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{r} dr$$



$$\therefore \quad L = \frac{\mu_o . d}{2\pi} . \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi}\times(10^6) . \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 183 \times 10^{-3}\ H$$

En consecuencia: $U_{total} = \frac{1}{2} \times (5{,}00 \times 10^3)^2 \times (183 \times 10^{-3})$

$$\therefore \quad U_{total} = 2{,}3 \times 10^6\ J \equiv 2{,}3\ MJ \quad \text{(entre los conductores)}$$

Parte (d)

La presión ejercida sobre el conductor externo sería:

$$P = \frac{F_B}{A_{lateral}} = \frac{\mu_o I^2 . d}{2\pi(b-a)} \times \frac{1}{2\pi . b . d}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\mu_o . I^2}{2\pi(b-a)\times 2\pi . b} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(5\times10^3)^2}{4\pi^2\times(5-2)\times10^{-2}\times(5\times10^{-2})}$$

$$\therefore \quad P = 530{,}5\ N/m^2$$

79. **Problema de repaso.** *El efecto Meissner.* Compare este problema con el problema 63 del capítulo 26 sobre la fuerza de atracción en un dieléctrico perfecto dentro de un campo eléctrico intenso. Una propiedad fundamental de un material superconductor tipo I es el *diamagnetismo perfecto,* o la demostración del *efecto Meissner*, ilustrado en la fotografía de la página 855 y de nuevo en la figura 30.34, y descrito del modo siguiente: El material superconductor tiene B = 0 en todo lugar dentro del mismo. Si una muestra del material se coloca dentro de un campo magnético producido externamente, o si se enfría para convertirlo en superconductor mientras está en un campo magnético, aparecen corrientes eléctricas sobre la superficie de la muestra. Las corrientes tienen precisamente la intensidad y orientación requeridas para hacer que el campo magnético total sea cero a través del interior de la muestra. El siguiente problema le ayudará a comprender la fuerza magnética que entonces puede actuar sobre la muestra superconductora.

Considere un solenoide vertical con una magnitud de 120 cm y un diámetro de 2,50 cm constituido de 1 400 vueltas de alambre de cobre que conducen una corriente, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de 2,00 A, como se muestra en la figura P32.79a. a) Encuentre el campo magnético en el vacío dentro del solenoide. b) Encuentre la densidad de energía del campo magnético y advierta que las unidades J/m^3 de la densidad de energía son las mismas que las unidades N/m^2 (= Pa) de la presión. c) Una barra superconductora de 2,20 cm de diámetro se inserta parcialmente en el solenoide. Su extremo superior está muy afuera del solenoide, donde el campo magnético es pequeño. El extremo inferior de la barra está profundamente dentro del solenoide. Identifique la dirección requerida para la corriente sobre la superficie curva de la barra, de modo que el campo magnético total sea cero en el interior de la barra. El campo creado por las supercorrientes es bosquejado en la figura P32.79b, y el campo total es bosquejado en la figura P32.79c. d) El campo del solenoide ejercer una fuerza sobre la corriente en el superconductor. Identifique la dirección de la fuerza sobre la barra. e) Calcule la magnitud de la fuerza al multiplicar la densidad de energía del campo del solenoide por el área del extremo inferior de la barra superconductora.

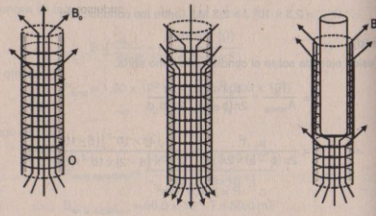


Figura P32.79

Resolución :

Parte (a)

Long. del solenoide = 12,00 m ; Diámetro del solenoide = 2,50 cm

$N_{solenoide}$ = 1 400 vueltas ; I = 2,00 A

Nos piden: $B_{dentro\ del\ solenoide} = ?$

Sabemos que en un solenoide se cumple:

$$\oint B\ ds = \int B.dL = \mu_o I.N \quad \text{(ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o.I.N}{longitud} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(2{,}00)(1\,400)}{12{,}0\times10^{-2}}$$

$$\therefore \quad B_{dentro\ del\ solenoide} = 2{,}93\times10^{-3}\ T \equiv 2{,}93\ mT$$

Parte (b)

Sabemos que en un solenoide se cumple que:

$$\text{Densidad de energía} = \mu_B = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{(2{,}93\times10^{-3})^2}{2(4\pi\times10^{-7})}$$

$\therefore$ Densidad de energía = 3,42 J/m³

Parte (c)

Diámetro de la barra = 2,20 cm

$B_{Interior\ de\ la\ barra}$ = 0 (por condición), figura (b) y (c)

Nos piden la dirección de la corriente = ?

Según la figura (a) el sentido de la corriente en el solenoide es en contra de las manecillas del reloj, lo cual produce un campo magnético dirigido hacia arriba.

Ahora cuando se inserta parte de la barra en el solenoide, este va o se va a generar un campo magnético pero que tiene que estar en sentido contrario al campo en el solenoide, para así tener un campo total en el interior de la barra igual a cero.

En consecuencia la dirección de la corriente sobre la superficie de la barra tiene que estar en **sentido de las manecillas del reloj**.

Parte (d)

Usando la regla de la mano derecha, la dirección que la fuerza del solenoide producido por el campo sobre la superficie de la barra es hacia **arriba**.

Parte (e)

Por sugerencia:

$$F = \mu_B \times \text{área} = 3{,}42 \times \left(\frac{\pi}{4}\right)(2{,}2\times10^{-2})^2$$

$$\therefore \quad F_{ejercida} = 1{,}3\times10^{-3}\ N \equiv 1{,}3\ mN$$

Capítulo 33

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

RESISTORES EN UN CIRCUITO DE CA

1. El voltaje rms de salida de un generador de ca es 200 V, y la frecuencia de operación es 100 Hz. Escriba la ecuación dando el voltaje de salida como función del tiempo.

Resolución :

Datos: $\Delta V_{rms} = 200\text{ V}$

$f = 100\text{ Hz}$

$\Delta v(t) = ?$

Sabemos que en un generador de corriente alterna se cumple que:

$$\Delta v = \Delta V_{máx} \,.\, \text{sen}\,(\omega t)$$

Donde: $\Delta V_{máx} = \sqrt{2} \times \Delta V_{rms} = \sqrt{2} \times (200\text{ V}) = 283\text{ V}$

$\omega = 2\pi \,.\, f = 2\pi \times 100 = 200\,\pi\text{ rad/s} = 628\text{ s}^{-1}$

Entonces: $\Delta v(t) = (283\text{ V}) \,.\, \text{sen}\,(628t)$

2. a) ¿Cuál es la resistencia de un foco que usa una potencia promedio de 75,0 W cuando se conexta a una fuente de potencia de 60,0 Hz que tiene un voltaje máximo de 170 V? b) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara de 100 W?

Resolución :

Parte (a)

$R = ?$ $\quad P_{prom} = 75{,}0\text{ W}\,;\ \ \omega = 60\text{ Hz}\,;\ \ \Delta V_{máx} = 170\text{ V}$

Tenemos que:

$$P_{prom} = (I_{prom})^2 \,.\, R = (\tfrac{1}{2}\, I_{máx})^2 \,.\, R = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta V_{máx}}{2}\right)^2 . R$$

$$\Rightarrow \quad P_{prom.} = \frac{(0{,}25)(\Delta V_{máx})^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{(0{,}25)(\Delta V_{máx})^2}{P_{prom}} = \frac{(0{,}25)(170)^2}{75{,}0}$$

$$\therefore \quad R = 96{,}3\ \Omega$$

Parte (b)

Si: $P = 100\ W \Rightarrow R = ?$

Sabemos que: $P = \dfrac{(\Delta V)^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{(\Delta V)^2}{P} = \dfrac{(170)^2}{100}$

$\therefore \quad R = 289\ \Omega$

3. Una fuente de potencia de ca produce un voltaje máximo $\Delta V_{máx} = 100$ V. Esta alimentación de potencia se conecta a un resistor de 24,0 Ω, y la corriente y el voltaje en el resistor se miden con un amperímetro y un voltímetro de ca ideales, como en la figura P33.3. ¿Cuáles son los valores que registra cada medidor? Advierta que un amperímetro ideal tiene resistencia cero y que un voltímetro ideal tiene resistencia infinita.

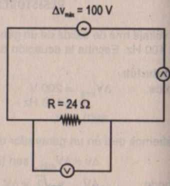


Figura P33.3

Resolución:

Nos piden: $I_P = ?$
$\Delta V_p = ?$

Sabemos que: $\Delta V_{rms} = 0{,}707\ \Delta V_{máx}$

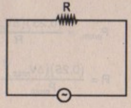
$\Rightarrow \Delta V_{rms} = \Delta V_P = (0{,}707)(100) = 70{,}71$ V

Luego: $I_{rms} \cdot R = \Delta V_{rms}$

$\Rightarrow (24)\ I_{rms} = 70{,}71 \quad \therefore \quad I_{rms} = I_P = 2{,}95$ A

4. En el circuito sencillo de ca que se muestra en la figura 33.1, $R = 70{,}0\ \Omega$ y $\Delta v = \Delta V_{máx}$ sen ωt. a) Si $\Delta v_R = 0{,}250\Delta V_{máx}$ por primera vez en t = 0,010 0 s, ¿cuál es la frecuencia angular del generador? b) ¿Cuál es el siguiente valor de t para el cual $\Delta v_R = 0{,}250\Delta V_{máx}$?

Resolución:
Sea el circuito:



Donde: $R = 70{,}0\ \Omega$
$\Delta v = \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}(\omega t)$

Parte (a)

Si: $\Delta v_R = 0{,}250\Delta V_{máx}$ en t = 0,010s , ω = ?

Sabemos que: $\Delta v_R = \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}\ \omega t$

$\Rightarrow (0{,}250) \cdot \Delta V_{máx} = \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}\ (\omega \times 0{,}010)$

$\Rightarrow \omega \times (0{,}010) = \text{sen}^{-1}\ (0{,}250) \quad \therefore \quad \omega = 1{,}45$ krad/s

Parte (b)

Si: $\Delta v_R = 0{,}250\Delta V_{máx} \Rightarrow t_{siguiente} = ?$

$t_{siguiente} = 0{,}010\ s + T = 0{,}010\ s + \dfrac{2\pi}{\omega}$

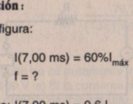
$\Rightarrow t_{siguiente} = 0{,}010\ s + \dfrac{2\pi}{1\ 450}$

$\therefore \quad t_{siguiente} = 0{,}0143$ s

5. La corriente en el circuito mostrado en la figura 33.1 es igual a 60,0% de la corriente de pico en t = 7,00 ms. ¿Cuál es la frecuencia más pequeña del generador que produce esta corriente?

Resolución:

Sea la figura:



Donde: $I(7{,}00\ ms) = 60\% I_{máx}$
$f = ?$

Por dato: $I(7{,}00\ ms) = 0{,}6\ I_{máx}$

$\Rightarrow \Delta v_R = (7{,}00\ ms) = (1{,}0) \cdot \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}(\omega \times (7{,}00\ ms))$

$\Rightarrow (0{,}6)\ \Delta V_{máx} = (1{,}0)\ \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}\ [0{,}007\omega]$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{\text{sen}^{-1}(0{,}6)}{0{,}007} \quad \therefore \quad \omega = 91{,}93$ rad/s

En consecuencia: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{91{,}93}{2\pi} \quad \therefore \quad f = 14{,}6$ Hz

6. La figura P33.6 muestra tres focos conectados a un suministro de voltaje doméstico de 120 V de ca(rms). Los focos 1 y 2 son de 150 W y el foco 3 es de 100 W. Encuentre la corriente rms y la resistencia de cada foco.

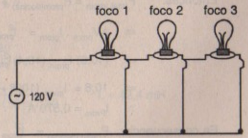


Figura P33.6

Resolución :

Donde: $\Delta V_{rms} = 120\ V$; $P_1 = P_2 = 150\ W$

$P_3 = 100\ W$; $V_1 = ?$; $R_2 = ?$; $R_3 = ?$

$I_{rms} = ?$

Sabemos que: $P_{total} = P_1 + P_2 + P_3$

$\Rightarrow\ I_{rms} \cdot \Delta V_{rms} = 150\ W + 150\ W + 100\ W$

$\Rightarrow\ I_{rms} \cdot (120) = 400\ W$

$\therefore\ I_{rms} = 3{,}33\ A$

Luego:

$P_1 = (I_{rms})^2 \cdot R_1 \ \Rightarrow\ 150 = (3{,}33)^2 \cdot R_1 \quad \therefore \quad R_1 = 13{,}5\ \Omega$

$P_2 = (I_{rms})^2 \cdot R_2 \ \Rightarrow\ 150 = (3{,}33)^2 \cdot R_2 \quad \therefore \quad R_2 = 13{,}5\ \Omega$

$P_3 = (I_{rms})^2 \cdot R_3 \ \Rightarrow\ 150 = (3{,}33)^2 \cdot R_3 \quad \therefore \quad R_3 = 9{,}0\ \Omega$

7. Un amplificador de audio, representado por la fuente de ca y un resistor en la figura P33.7, entrega a la bocina voltaje alterno a frecuencias de audio. Si la fuente de voltaje tiene una amplitud de 15,0 V, R = 8,20 Ω, y la bocina es equivalente a una resistencia de 10,4 Ω, ¿cuál es la potencia promedio en el tiempo que se le entrega?

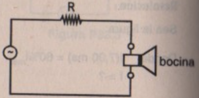


Figura P33.7

Resolución :

Donde: $\Delta V_{máx} = 15{,}0\ V$; $R = 8{,}20\ \Omega$

$R_{bocina} = 10{,}4\ \Omega$; $P_{prom\ (bocina)} = ?$

Sabemos que: $\Delta V_{prom} = 0{,}707\ \Delta V_{máx}$

$\Rightarrow\ \Delta V_{prom} = (0{,}707)(15{,}0) = 10{,}6\ V$

Entonces: $P_{total\ prom} = P_{prom(bocina)} + P_{prom\ (resistor)}$

$\Rightarrow\ \Delta V_{prom} \cdot I_{prom} = I^2_{prom} \cdot R_b + I^2_{prom} \cdot R_b$

$\Rightarrow\ (10{,}6)\ I_{prom}\ (10{,}4) I^2_{prom} + (8{,}20) I^2_{prom}$

$\Rightarrow\ 10{,}6 = I_{prom}\ (10{,}4 + 8{,}20)$

$\therefore\ I_{Prom} = 0{,}570\ A$

En consecuencia: $P_{prom\ (bocina)} = I^2_{prom} \cdot R_{bocina} = (0{,}570)^2 \times (10{,}4)$

$\therefore\ P_{prom\ (bocina)} = 3{,}38\ W$

INDUCTORES EN UN CIRCUITO DE CA

8. Un inductor se conecta a un suministro de potencia de 20,0 Hz que produce un voltaje rms de 50,0 V. ¿Qué inductancia se necesita para mantener la corriente instantánea en el circuito por debajo de 80,0 mA?

Resolución :

Datos: $f = 20\ Hz$; $\Delta V_{rms} = 50{,}0\ V$

$I_{L\ máx}\ (t) = 80{,}0\ mA$; $L = ?$

Sabemos que: $I_L\ (t) = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} . \text{sen}\left[\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right]$

Por otro lado : $\Delta V_{rms} = (0{,}707)\ \Delta V_{máx} \ \Rightarrow\ \Delta V_{máx} = \dfrac{50{,}0}{0{,}707} = 70{,}72V$

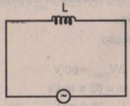
Entonces: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} = \dfrac{70{,}72}{(20)(2\pi) . L} = 80 \times 10^{-3}$

$\Rightarrow L = \dfrac{70{,}72}{(40\pi)(80 \times 10^{-3})} \quad \therefore \quad L = 7{,}03\ H$

9. En un circuito de ca puramente inductivo, como el que se muestra en la figura 33.4, $\Delta V_{máx} = 100$ V. a) Si la corriente máxima es 7,50 A a 50,0 Hz, ¿cuál es la inductancia L? b) ¿A qué frecuencia angular ω la corriente máxima es de 2,50 A?

Resolución :

Sea el circuito:



Donde: $\Delta V_{máx} = 100\ V$

Parte (a)

Si $I_{máx} = 7{,}50\ A$ a $f = 50\ Hz \ \Rightarrow\ L = ?$

Sabemos que: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{2\pi f . L}$

$\Rightarrow L = \dfrac{\Delta V_{máx}}{2\pi . f . I_{máx}} = \dfrac{100}{2\pi \times (50) \times 7{,}50} \quad \therefore \quad L = 42{,}4\ mH$

Parte (b)

Si $I_{máx} = 2{,}50\ A$, nos piden $\omega = ?$

Sabemos que: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L}$

$\Rightarrow \quad I_{máx} \,.\, \omega \,.\, L = \Delta V_{máx}$

$\Rightarrow \quad \omega = \dfrac{\Delta V_{máx}}{I_{máx} . L} = \dfrac{100\,V}{(2{,}50)(42{,}4\times10^{-3})}$

$\therefore \quad \omega = 942$ rad/s

10. Un inductor tiene una reactancia de 54,0 Ω a 60,0 Hz. ¿Cuál es la corriente máxima cuando este inductor se conecta a una fuente de 50,0 Hz que produce un voltaje rms de 100 V?

Resolución :

Datos: $X_L = 54{,}0\ \Omega$ a $f = 60$ Hz

$I_{máx} = ?$ a $f = 50$ Hz ; $\Delta V_{rms} = 100V$

Sabemos que: $X_L = \omega . L = 2\pi.f.L \quad \Rightarrow \quad 54 = 2\pi(60) . L$

$\therefore \quad L = 143$ mH

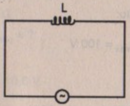
Por otro lado: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{(0{,}707)(\omega . L)} = \dfrac{100\,V}{(0{,}707)(100\pi)(143\times10^{-3})}$

$\therefore \quad I_{máx} = 3{,}15$ A

11. Para el circuito mostrado en la figura 33.4, $\Delta V_{máx} = 80{,}0$ V, $\omega = 65{,}0\ \pi$ rad/s y $L = 70{,}0$ mH. Calcule la corriente en el inductor en t = 15,5 ms.

Resolución :

Sea el circuito:



Donde: $\Delta V_{máx} = 80$ V

$\omega = 65\ \pi$ rad/s

$L = 70{,}0$ mH

$I_L\ (t = 15{,}5 \text{ ms}) = ?$

Sabemos que: $I_L\ (t) = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} . \text{sen}\left[\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad I_L(15{,}5 \text{ ms}) = \dfrac{80}{(65\pi)(70\times10^{-3})} . \text{sen}\left[\dfrac{65\pi\times15{,}5}{1\,000} - \dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad I_L\ (15{,}15 \text{ ms}) = (5{,}6 \text{ A}) . \text{sen}\ [0{,}5\pi]$

$\therefore \quad I_L\ (15{,}5 \text{ ms}) = 5{,}60$ A

12. Un inductor de 20,0 mH está conectado a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{rms} = 120$ V, f = 60,0 Hz). Determine la energía almacenada en el inductor en t = (1/180) s, suponiendo que esta energía es cero en t = 0.

Resolución :

Datos: $L = 20$ mH ; $f = 60$ Hz

$\Delta V_{rms} = 120$ V ; $U_L = ?$ en t = 1/180 s si en t = 0 , $U_L = 0$

Sabemos que: $U_L = \dfrac{1}{2} L . I_L^2$

Por otro lado:

$I_L\ (t) = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} . \text{sen}[\omega.t - \pi/2] = -\dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} . \cos\ (\omega.t)$

$\Rightarrow \quad I_L\left(\dfrac{1}{180}\text{ s}\right) = -\dfrac{\Delta V_{rms}}{(0{,}707)(\omega.L)} . \cos(\omega.t) = \dfrac{(-120\text{V})}{(0{,}707)(120\pi)(20\times10^{-3})} . \cos\left[120\pi\times\left(\dfrac{1}{180}\right)\right]$

$\therefore \quad I_L\ (1/180 \text{ s}) = 11{,}25$ A

Entonces : $U_L\left(\dfrac{1}{180}\text{ s}\right) = \dfrac{1}{2}\times(20\times10^{-3})\times(11{,}25)^2$

$\therefore \quad U_L\left(\dfrac{1}{180}\text{ s}\right) = 1{,}26$ J

13. Problema de repaso. Determine el flujo magnético máximo que pasa por un inductor conectado a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{rms} = 120$ V, f = 60,0 Hz).

Resolución :

Datos: $\Delta V_{rms} = 120$ V ; $\Phi_B = ?$

$f = 60$ Hz

Sabemos que: $L = \dfrac{\Phi_B}{I} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{B\ máx} = L . I_{máx}$ ... (1)

Por otro lado: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\omega . L} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{(0{,}707)(\omega.L)} = \dfrac{120\,V}{(0{,}707)(120\pi)(L)}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1); tenemos que:

$\Phi_{B_{máx}} = I . I_{máx} = I . \left(\dfrac{120}{0{,}707\times120\,\pi\times L}\right)$

$\therefore \quad \Phi_{B\ máx} = 450$ mT.m²

CAPACITORES EN UN CIRCUITO CA

14. a) ¿Para qué frecuencia un capacitor de 22,0 μF tiene una reactancia por debajo de 175 Ω? b) Sobre este mismo intervalo de frecuencia, ¿cuál es la reactancia de un capacitor de 44,0 μF?

Resolución:

Parte (a)

Si: $C = 22\ \mu F$; $X_C \leq 175\ \Omega$; $f = ?$

Sabemos que: $X_C = \dfrac{1}{\omega . C}$

$$\Rightarrow X_C \leq \frac{1}{\omega . C} = \frac{1}{2\pi . f . C} \Rightarrow f \leq \frac{1}{2\pi . C . X_C} = \frac{1}{(2\pi)(22\times 10^{-6})(175)}$$

$\therefore\ 0 < f \leq 41{,}34$ Hz

Parte (b)

Si: $C = 44\ \mu F \Rightarrow X_C = ?$

Sabemos que: $X_C = \dfrac{1}{\omega . C} = \dfrac{1}{2\pi . f . C}$

Como: $0 < f \leq 41{,}34$

$\Rightarrow 0 < 2\pi . f . C \leq (41{,}34)(2\pi)(44 \times 10^{-6})$

$$\Rightarrow 0 < X_C \leq \frac{1}{(41{,}34)(2\pi)(44\times 10^{-6})}$$

$\therefore\ 0 < X_C \leq 87{,}49\ \Omega$

15. ¿Qué corriente máxima entrega un capacitor de 2,20 μF cuando se conecta a través de a) una toma de corriente en Estados Unidos que tiene una $\Delta V_{rms} = 120$ V y f = 60,0 Hz, y b) una toma de corriente europea con $\Delta V_{rms} = 240$ V y f = 50,0 Hz?

Resolución:

Datos: $C = 2{,}20\ \mu F$

Parte (a)

Si: $\Delta V_{rms} = 120$ V y $f = 60$ Hz $\Rightarrow I_{máx} = ?$

Sabemos que: $I_{máx} = \Delta V_{máx} \times \omega . C$

$$\Rightarrow I_{máx} = \frac{\Delta V_{rms}}{0{,}707} \times (2\pi . f) . C = \frac{120}{0{,}707} \times (2\pi \times 60) \times (2{,}20 \times 10^{-6})$$

$\therefore\ I_{máx} = 141 \times 10^{-3}$ A = 141 mA

Parte (b)

Si: $\Delta V_{rms} = 240$ V $\wedge$ $f = 50$ Hz $\Rightarrow I_{máx} = ?$

De la parte (a):

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{rms}}{0{,}707} \times (2\pi f) \times C = \frac{240}{0{,}707} \times (100\pi) \times (2{,}20 \times 10^{-6})$$

$\therefore\ I_{máx} = 235 \times 10^{-3}$ A = 235 mA

16. Un capacitor C está conectado a un suministro de potencia que opera a una frecuencia f y produce un voltaje rms ΔV. ¿Cuál es la carga máxima que aparece en cualesquiera de las placas del capacitor?

Resolución:

Datos: C, f, $\Delta V_{rms} = \Delta V$

$Q_{máx} = ?$

Sabemos que: $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

$$\Rightarrow Q_{máx} = C.\Delta V_{máx} \Rightarrow Q_{máx} = C . \frac{\Delta V_{rms}}{0{,}707} = \frac{C.\Delta V}{0{,}707}$$

$\therefore\ Q_{máxima} = 1{,}41\ C.\Delta V$

17. ¿Qué corriente máxima entrega un generador de ca con $\Delta V_{máx} = 48{,}0$ V y f = 90,0 Hz cuando se conecta a través de un capacitor de 3,70 μF?

Resolución:

Datos: $\Delta V_{máx} = 48{,}0$ V ; $f = 90$ Hz ; $C = 3{,}7\ \mu F$

$I_{máx} = ?$

Sabemos que: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{X_C} = \omega . C \times \Delta V_{máx}$

$\Rightarrow I_{máx} = (2\pi . f) . C \times \Delta V_{máx} = (2\pi)(90) \times (3{,}7 \times 10^{-6}) \times (48)$

$\therefore\ I_{máx} = 100$ mA

18. Un capacitor de 1,00 mF se conecta a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{máx} = 120$ V, f = 60,0 Hz). Determine la corriente en el capitor en t = (1/180) s, suponiendo que en t = 0, la energía almacenada en el capacitor es cero.

Resolución:

Datos: $C = 1{,}00 \times 10^{-3}$ F ; $f = 60$ Hz

$\Delta V_{rms} = 120$ V ; $I_C\ (t = 1/180\ s) = ?$

Sabemos que: $Q_C(t) = C.\Delta V_{máx}.sen(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C \,.\, \Delta V_{máx} \,.\, \omega \,.\, \cos(\omega \,.\, t)$$

$$\Rightarrow \quad I_C(t) = \frac{C.(2\pi.f).\Delta V_{rms}}{0{,}707} \times \cos[2\pi.f.t]$$

$$\Rightarrow \quad I_C\left(\frac{1}{180}s\right) = \frac{(1{,}00\times10^{-3})(120\pi)(120)}{(0{,}707)} \times \cos\left[120\pi \times \left(\frac{1}{180}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad I_C\left(\frac{1}{180}s\right) = (63{,}9\text{ kA}) \,.\, \cos[2\pi/3]$$

$$\therefore \quad I_C = \left(\frac{1}{180\text{ s}^{-1}}\right) = -63{,}9\text{ kA} \equiv -63{,}9 \times 10^3\text{ A}$$

EL CIRCUITO RLC EN SERIE

19. Un inductor ($L = 400$ mH), un capacitor ($C = 4{,}43\ \mu F$) y un resistor ($R = 500\ \Omega$) están conectadas en serie. Un generador de ca de 50,0 Hz produce una corriente de pico de 250 mA en el circuito, a) Calcule el voltaje de pico requerido $V_{máx}$. b) Determine el ángulo de fase por el cual la corriente adelanta al o está retrasada del voltaje aplicado.

Resolución :

Datos: $L = 400$ mH, $C = 4{,}43\ \mu F$, $R = 500\ \Omega$ } Conectados en serie

$f = 50$ Hz $\qquad I_{máx} = 250$ mA

Parte (a)

Sabemos que en un circuito RLC en serie se cumple que:

$$\Delta V_{máx} = I_{máx} \,.\, Z = I_{máx} \,.\, \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Donde: $X_L = \omega \,.\, L = 2\pi.f.L = (100\pi)(400 \times 10^{-3}) = 125{,}6\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{2\pi.f.C} = \frac{1\times10^6}{(2\pi)(50)(4{,}43)} = 718{,}53\ \Omega$$

Luego: $\Delta V_{máx} = I_{máx} \,.\, Z = 250 \times 10^{-3} \times \sqrt{(500)^2 + (125{,}66 - 718{,}53)^2}$

$$\therefore \quad \Delta V_{máx} = 194\text{ V}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{125{,}664 - 718{,}53}{500} = -1{,}1857$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}(-1{,}1857) = -49{,}9°$$

En consecuencia:
La corriente adelanta al voltaje en 49,9°

20. ¿A qué frecuencia la reactancia inductiva de un inductor de 57,0 μH es igual a la reactancia capacitiva de un capacitor de 57,0 μF?

Resolución :

Datos: $L = 57\ \mu H \quad C = 57\ \mu F \quad f = ?$

Por dato: $X_L = X_C$

$$\Rightarrow \quad \omega \,.\, L = \frac{1}{\omega.C} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{L.C}$$

$$f = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2.L.C}} = \sqrt{\frac{1\times10^{+12}}{4\pi^2(57)(57)}} \qquad \therefore \quad f = 2{,}8\text{ kHz}$$

21. Un circuito ca en serie contiene los siguientes componentes: $R = 150\ \Omega$, $L = 250$ mH, $C = 2{,}00\ \mu F$ y un generador con $\Delta V_{máx} = 210$ V operando a 50,0 Hz. Calcule a) la reactancia inductiva, b) la reactancia capacitiva, c) la impedancia, d) la corriente máxima y e) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje del generador.

Resolución :

Datos: $R = 150\ \Omega$; $\Delta V_{máx} = 210$ V

$L = 250\ \mu H$; $f = 50$ Hz

$C = 2{,}00\ \mu F$

Parte (a)

Sabemos que: $X_L = \omega.L = 2\pi.f.L = 2\pi(50)(250\times10^{-3})$

$$\therefore \quad X_L = 78{,}5\ \Omega$$

Parte (b)

Sabemos que: $X_C = \dfrac{1}{\omega.C} = \dfrac{1}{2\pi.f.C} = \dfrac{1\times10^6}{2\pi\times(50)\times(2{,}00)}$

$$\therefore \quad X_C = 1{,}6\times10^3\Omega \equiv 1{,}6\text{k}\Omega$$

Parte (c)

Sabemos que: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$$\Rightarrow \quad Z = \sqrt{(150)^2 + \left(78{,}5 - 1{,}6\times10^3\right)^2}$$

$$\therefore \quad Z = 1{,}52 \times 10^3\ \Omega \equiv 1{,}52\ k\Omega$$

Parte (d)

Sabemos que: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{Z} \Rightarrow I_{máx} = \dfrac{210}{1{,}52\times10^3}$

$$\therefore \quad I_{máx} = 138 \times 10^{-3} A \equiv 138\ mA$$

Parte (e)

Sabemos que: $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{78{,}5 - 1{,}6\times10^3}{150} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{78{,}5 - 1{,}6\times10^3}{150}\right)$$

$$\therefore \quad \phi = -84{,}3°$$

22. Un voltaje sinusoidal $\Delta v(t) = (40{,}0\ V)$ sen $(100\ t)$ se aplica a un circuito RLC en serie con L = 160 mH, C = 99,0 μF y R = 68,0 Ω. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito? b) ¿Cuál es la corriente máxima? c) Determine los valores numéricos para $I_{máx}$, ω y φ en la ecuación $i(t) = I_{máx}$ sen $(\omega t - \phi)$.

Resolución :

Datos: $\Delta v(t) = (40{,}0\ V)\text{sen}(100t)$; donde : $\omega = 100\ s^{-1}$
$L = 160\ mH$; $\Delta V_{máx} = 40{,}0\ V$
$C = 99\ \mu F$
$R = 68\ \Omega$

Parte (a)

Sabemos que: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Donde: $X_L = \omega \,.\, L = (100)(160 \times 10^{-3}) = 16{,}0\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega . C} = \frac{1}{100\times99\times10^{-6}} = 101\ \Omega$$

Entonces: $Z = \sqrt{(68)^2 + (16 - 101)^2}$

$$\therefore \quad Z = 108{,}8\ \Omega$$

Parte (b)

Sabemos que $\Delta V_{máx} = I_{máx} \,.\, Z$

$$\Rightarrow \quad I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{Z} = \frac{40{,}0\ V}{108{,}8\ \Omega} \quad \therefore \quad I_{máx} = 367\ mA$$

Parte (c)

Si: $i(t) = I_{máx} \,.\, \text{sen}(\omega t - \phi)$

Entonces: $\phi = \tan^{-1} \dfrac{(X_L - X_C)}{R} = \tan^{-1}\left(\dfrac{16 - 101}{68}\right) = -51{,}3° \equiv -0{,}285\pi$

$$\omega = 100\ s^{-1} \quad ; \quad I_{máx} = 367\ mA$$

En consecuencia:
Los valores numéricos para la ecuación será:

$$i(t) = (367\ mA)\ .\ \text{sen}\ [100t + 0{,}285\pi]$$

23. Un circuito RLC se compone de un resistor de 150 Ω, un capacitor de 21,0 μF y un inductor de 460 mH, conectados en serie con un suministro de potencia de 120 V y 60,0 Hz. a) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? b) ¿Cuál alcanza su máximo primero, la corriente o el voltaje?

Resolución :

Datos: $R = 150\ \Omega$; $L = 460\ mH$
$C = 21{,}0\ \mu F$; $\Delta V_{máx} = 120\ V$ y $f = 60\ Hz$

Parte (a)
Sabemos que:

$$X_L = \omega \,.\, L = 2\pi.f.L = 120\pi \times (460 \times 10^{-3})$$

$$\therefore \quad X_L = 173{,}4\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega . C} = \frac{1}{2\pi.f.C} = \frac{10^6}{120\pi\times(21{,}0)}$$

$$\therefore \quad X_C = 126{,}3\ \Omega$$

Entonces: $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{173{,}4 - 126{,}3}{150}$

$$\Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}(0{,}314) \quad \therefore \quad \phi = 17{,}4°$$

Parte (b)
Como el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado es positivo, entonces el voltaje adelantará a la corriente primero y en consecuencia alcanzará su máximo primero.

24. Una persona está trabajando cerca del secundario de un transformador, como se muestra en la figura P33.24. El voltaje primario es 120 V a 60,0 Hz. La capacitancia C_s, que es la capacitancia dispersa entre la mano de la persona y el devanado secundario, es 20,0 pF. Suponiendo que la persona tiene una resistencia de cuerpo a tierra R_b = 50,0 kΩ, determine el voltaje rms a través del cuerpo. (Sugerencia: vuelva a dibujar el circuito con el secundario del transformador como una fuente de ca simple).

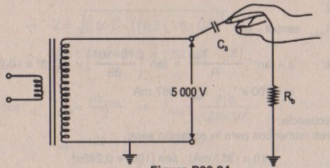


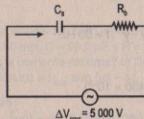
Figura P33.24

Resolución :

Donde: f = 60 Hz; $C_s = 20$ pF ; $R_b = 50$ kΩ

Nos piden $\Delta V_{rms}(C_s) = ?$

Por sugerencia: El circuito es equivalente A:



Circuito RC en serie

Sabemos que: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{\sqrt{R_b^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \dfrac{5\times10^3}{\sqrt{(5\times10^4)^2 + \left(\dfrac{10^{12}}{120\pi\times20}\right)^2}}$

$\therefore \quad I_{rms} = 38\times10^{-6}\text{A} \equiv 38\ \mu\text{A}$

Luego: $\Delta V_{rms}(C_s) = I_{rms}\cdot X_C = \dfrac{I_{rms}}{\omega . C} = \dfrac{38\times10^{-6}}{120\pi\times20\times10^{-12}}$

$\therefore \Delta V_{rms}(C_S) = 500$ V

25. Una Fuente ca con $\Delta V_{máx} = 150$ V y f = 50,0 Hz está conectada entre los puntos a y d en la figura P33,25. Calcule los voltajes máximos entre los puntos a) a y b, b) b y c, c) c y d y d) b y d.

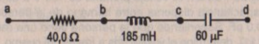


Figura P33.25 Problemas 25 y 64.

Resolución :

Donde: $\Delta V_{máx} = 150$ V

f = 50 Hz

Parte (a)

Sabemos que: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (en un circuito RLC en serie)

Donde: $X_L = \omega . L = 2\pi.f.L = 100\pi \times (185\times10^{-3})$

$\therefore \quad X_L = 58{,}1\ \Omega$

$X_C = \dfrac{1}{\omega.C} = \dfrac{1}{2\pi.f.C} = \dfrac{1}{100\pi\times65\times10^{-6}}$

$\therefore \quad X_C = 48{,}97\ \Omega$

Luego: $Z = \sqrt{(40)^2 + (58{,}1 - 48{,}37)^2} = 41{,}0\,\Omega$

Entonces: $I_{máx} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{Z} = \dfrac{150\text{ V}}{41{,}0} = 3{,}658$ A

Como en un circuito en serie (RLC) la corriente que pasa es la misma

Entonces: $\Delta V_{máx\,(ab)} = I_{máx}\cdot R = \dfrac{150\text{ V}}{41\Omega}\times(40\ \Omega)$

$\therefore \quad \Delta V_{máx\,(ab)} = 146{,}3$ V

Parte (b) $\Delta V_{máx\,(b\,y\,c)} = I_{máx}\cdot X_L = \dfrac{150\text{ V}}{41\Omega}\times(58{,}1\ \Omega)$

$\therefore \quad \Delta V_{máx\,(b\,y\,c)} = 213$ V

Parte (c) $\Delta V_{máx\,(c\,y\,d)} = I_{máx}\cdot X_C = \dfrac{150\text{ V}}{41\Omega}\times(48{,}97\ \Omega)$

$\therefore \quad \Delta V_{máx(c\,y\,d)} = 179$ V

Parte (d) $\Delta V_{máx\,(b\,y\,d)} = \Delta V_{máx\,(b\,y\,c)} + \Delta V_{máx\,(c\,y\,d)}$

$\Rightarrow \quad \Delta V_{máx\,(b\,y\,d)} = 213\text{ V} + 179\text{ V}$

$\therefore \quad \Delta V_{máx\,(b\,y\,d)} = 392$ V

26. Dibuje a escala un diagrama de fasores que muestre Z, X_L, X_C y ϕ para un circuito de ca en serie para el cual R = 300 Ω, C = 11,0 µF, L = 0,200 H y f = (500/π) Hz.

Resolución :

Datos: $R = 300\ \Omega$; $C = 11\ \mu F$; $L = 0{,}200\ H$
$f = 500/\pi\ Hz$

Nos piden diagrama de fasores mostrando Z, X_L, X_C y ϕ

Sabemos que: $X_L = \omega.L = 2\pi.f.L = 2\pi \times \left(\dfrac{500}{\pi}\right) \times (0{,}200)$

$\therefore\ X_L = 200\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{2\pi.f.C} = \frac{10^6}{2\pi \times \left(\dfrac{500}{\pi}\right) \times 11}$$

$\therefore\ X_C = 90{,}9\ \Omega$

Luego: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300)^2 + (200 - 90.0)^2}$

$\therefore\ Z = 319{,}2\ \Omega$

Además: $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{200 - 90.9}{300}$

$\Rightarrow\ \phi = \tan^{-1}(0{,}363\widehat{6})$

$\therefore\ \phi = 19{,}98° = 20°$

27. Una bobina de 35,0 Ω de resistencia y 20,5 H de inductancia está en serie con un capacitor y una fuente de 200 V (rms) a 100 Hz. La corriente rms en el circuito es 4,00 A. a) Calcule la capacitancia en el circuito. b) ¿Cuál es ΔV_{rms} que atraviesa la bobina?

Resolución :

Datos: $R = 35{,}0\ \Omega$; $L = 20{,}5\ H$
$\Delta V_{rms} = 200V$ a $f = 100\ Hz$
$I_{rms} = 4{,}00\ A$

Parte (a)

Sabemos que: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z}$ $\Rightarrow$ $Z = \dfrac{\Delta V_{rms}}{I_{rms}} = \dfrac{200\ V}{4{,}00\ A} = 50\ \Omega$

Entonces: $Z = 50 = \sqrt{(35)^2 + [X_L - X_C]^2}$

$$(50)^2 = (35)^2 + [(2\pi.f.L) - \frac{1}{2\pi.f.C}]^2$$

$$\Rightarrow\ (50)^2 - (35)^2 = [200\pi \times 20{,}5) - \frac{1}{200\,\pi\,.C}]^2$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{1275} = 12\,880{,}56 - \frac{1}{200\,\pi\,.C}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{200\,\pi\,.C} = 12\,880{,}56 - \sqrt{1275}$$

Despejando resulta que: $C = 124 \times 10^{-9}\ F \equiv 124\ nF$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta V_{rms(bobina)} = \Delta V_{rms\ (resistor)} + \Delta V_{rms\ (inductor)}$

$\Rightarrow\ \Delta V_{rms(bobina)} = I_{rms}\,.\,R + I_{rms}\,.\,X_L$

$\Rightarrow\ \Delta V_{rms(bobina)} = I_{rms}\,(R + X_L) = 4{,}00[12\,880{,}56 + 35]$

$\therefore\ \Delta V_{rms\ (bobina)} = 51{,}5 \times 10^3\ V \equiv 51{,}5\ k\ V$

POTENCIA EN UN CIRCUITO DE CA

28. La fuente de voltaje en la figura P33.28 tiene una salida $\Delta V_{rms} = 100\ V$ a $\omega = 1\,000$ rad/s. Determine a) la corriente en el circuito y b) la potencia suministrada por la fuente. c) Muestre que la potencia entregada al resistor es igual a la potencia suministrada por la fuente.

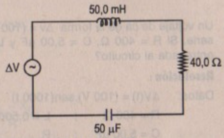


Figura P33.28

Resolución :

Donde: $\Delta V_{rms} = 100\ V$
$\omega = 1\,000$ rad/s

Parte (a)

Tenemos que: $X_L = \omega.L = 1\,000 \times (50 \times 10^{-3}) = 50{,}0\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C} = \frac{1 \times 10^6}{10^3 \times 50} = 20{,}0\ \Omega$$

Entonces: $Z = \sqrt{(40)^2 + (50 - 20)^2} = 50{,}0\ \Omega$

Luego: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \dfrac{100\ V}{50\ \Omega}$

$\therefore\ I_{rms} = 2{,}00\ A$

Parte (b)

Sabemos que la potencia suministrada por la fuente es igual a la potencia entregada al resistor; entonces:

$$P_{fuente} = I_{rms}^2 \cdot R = (2{,}00)^2 \times (40).$$

$$\therefore \quad P_{fuente} = 160\ W.$$

Parte (c)

Por demostrar que: $P_{fuente} = P_{resistor}$

Sabemos que: $P_{fuente} = I_{rms} \cdot \Delta V_{rms} \cdot \cos\phi$

Donde: $\cos\phi = \cos\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)\right]$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi = \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{50-20}{40}\right)\right] = 0{,}8$$

Luego: $P_{fuente} = (2{,}00)(100)(0{,}8) = 160\ W$

En consecuencia:

$$P_{fuente} = P_{resistor} = I^2_{máx} \cdot R = 160{,}0\ W \qquad \text{Lqqd.}$$

29. Un voltaje de ca de la forma $\Delta v = (100\ V)\ \text{sen}(1\ 000t)$ se aplica a un circuito RLC en serie. Si $R = 400\ \Omega$, $C = 5{,}00\ \mu F$ y $L = 0{,}500\ H$, ¿cuál es la potencia promedio entregada al circuito?

Resolución :

Datos: $\Delta V(t) = (100\ V).\text{sen}(1000\ t)$

$R = 400\ \Omega$; $L = 0{,}500\ H$

$C = 5{,}00\ \mu F$; $P_{prom(circuito)} = ?$

Tenemos que : $X_L = \omega \cdot L = (1\ 000)(0{,}500) = 500\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega . C} = \frac{10^6}{(1000)(5{,}00)} = 200\ \Omega$$

Luego: $Z = \sqrt{(400)^2 + (500-200)^2} = 500\ \Omega$

Entonces: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \dfrac{(0{,}707).\Delta V_{máx}}{Z} = \dfrac{(0{,}707)(100)}{500}$

$$\therefore \quad I_{rms} = 0{,}1414\ A$$

En consecuencia: $P_{prom\ entrega\ al\ circuito} = I_{rms}^2 \cdot R = (0{,}1414)^2 \times (400)$

$$\therefore \quad P_{prom\ entrega\ al\ circuito} = 8{,}00\ W$$

30. Un circuito RLC en serie tiene una resistencia de 45,0 Ω y una impedancia de 75,0 Ω. ¿Qué potencia promedio se entrega a este circuito cuando $\Delta V_{rms} = 210\ V$?

Resolución :

Datos: $R = 45{,}0\ \Omega$; $P_{prom\ al\ circuito\ RLC} = ?$

$Z = 75{,}0\ \Omega$

$\Delta V_{rms} = 210\ V$

Sabemos que: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \dfrac{210\ V}{75\ \Omega}$

$$\therefore \quad I_{rms} = 2{,}8\ A$$

En consecuencia: $P_{prom\ al\ circuito} = I_{máx}^2 \cdot R = (2{,}8)^2 \times (45)$

$$\therefore \quad P_{prom\ al\ circuito} = 353\ W$$

31. En cierto circuito RLC en serie, $I_{rms} = 9{,}00\ A$, $\Delta V_{rms} = 180\ V$ y la corriente adelantada al voltaje por 37,0°. a) ¿Cuál es la resistencia total del circuito? b) ¿Cuál es la reactancia del circuito $(X_L - X_C)$?

Resolución :

Datos: En un circuito RLC se cumple que:

$I_{rms} = 9{,}00\ A$; $\Delta V_{rms} = 180\ V$

$\phi = 37°$

Parte (a)

Tenemos que: $\tan\phi = \tan(37°) = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

$$\Rightarrow \quad R(0{,}75) = X_L . X_C \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $Z = \dfrac{\Delta V_{rms}}{I_{rms}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{180}{9}\right)^2 = R^2 + [R(0{,}75)^2]$$

$$\Rightarrow \quad 400 = R^2\,(1 + (0{,}75)^2) \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{400}{1{,}5625}}$$

$$\therefore \quad R_{del\ circuito} = 16\ \Omega$$

Parte (b)

De los hallado en (a): $X_L - X_C = -R(0{,}75) = -16 \times (0{,}75)$

$$\therefore \quad X_L - X_C = -12{,}0\ \Omega$$

32. Suponga que usted dirige una fábrica que emplea muchos motores eléctricos. Los motores crean una gran carga inductiva sobre las líneas de transmisión eléctrica, así como una carga resistiva. La compañía eléctrica construye una línea de distribución extrapesada para suministrarle una componente de corriente que está 90° fuera de gase con el voltaje, así como la corriente en fase con el voltaje. La compañía eléctrica le carga una tarifa adicional por "volt-amperes reactivo" añadida a la cantidad que usted paga por la energía que utiliza. El cargo extra se puede evitar mediante la instalación de un capacitor entre la línea de transmisión y su fábrica. El siguiente problema modela esta solución.
En un circuito LR, una fuente de 120 V (rms) y 60,0 Hz está en serie con un inductor de 25,0 mH y un resistor de 20,0 Ω. ¿Cuáles son a) la corriente rms y b) el factor de potencia? c) ¿Qué capacitor debe agregarse en serie para hacer que el factor de potencia sea 1? d) ¿A qué valor puede reducirse el suministro de voltaje si la potencia suministrada debe ser la misma que la proporcionada antes de la instalación del capacitor?

Resolución :

Datos: $\Delta V_{rms} = 120$ V ; $f = 60$ Hz
$L = 25{,}0$ mH ; $R = 20\ \Omega$

Además: la corriente está en fase con el voltaje, entonces $\phi = 0$.

Parte (a)

Tenemos que: $X_L = \omega \,.\, L = 2\pi.f.L = 120\pi \times (25 \times 10^{-3})$

$\therefore\quad X_L = 9{,}42\ \Omega$

Luego: $X_C = 0$

$$Z = \sqrt{20^2 + (9{,}42)^2} = 22{,}1\ \Omega$$

Entonces: $$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z} = \frac{120\text{ V}}{22{,}1\Omega}$$

$\therefore\quad I_{rms} = 5{,}43$ A

Parte (b)

Sabemos que el factor de potencia es $\cos\phi$

$\Rightarrow\quad \cos(0°) = 1$

Parte (c)

Por condición: $\cos(\phi) = 1 \;\Rightarrow\; f = \cos^{-1}(1) = 0$

Entonces: $$\tan(0°) = \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

$\Rightarrow\quad X_L - X_C = 0$

$$\Rightarrow\quad \omega \,.\, L = \frac{1}{\omega . C}$$

$$\Rightarrow\quad C = \frac{1}{\omega^2 . C} = \frac{1}{(2\pi\,.\,f)^2 . L} = \frac{1}{(120\,\pi)^2 \times (25 \times 10^{-3})}$$

$\therefore\quad C = 281 \times 10^{-6}$ F $= 281\ \mu$F

Parte (d)

$$P_{suministrada} = \Delta V_{rms} \,.\, I_{rms} = I_{rms}^2 \,.\, R$$

$\Rightarrow\quad \Delta V_{rms} = I_{rms} \,.\, R = 5{,}43 \times 20$

$\therefore\quad \Delta V_{rms} = 108{,}6$ V se reduce el suministro de voltaje

33. **Problema de respaso**. Si 100 MW de potencia a 50,0 kV se van a transmitir a 100 km de distancia con sólo 1,00% de pérdidas, ¿de qué diámetro debe usarse el alambre de cobre para cada uno de los dos conductores de la línea de transmisión? Suponga que la densidad de corriente en los conductores es uniforme.

34. **Problema de repaso.** Si se va a transmitir una potencia P a una distancia d a un voltaje ΔV con sólo 1,00% de pérdidas, ¿de qué diámetro debe usarse el alambre de cobre para cada uno de los dos conductores de la línea de transmisión? Suponga que la densidad de corriente en los conductores es uniforme.

Resolución 33 y 34:

Datos: $P_{total} = 100$ MW ; $\Delta V = 50$ kV
Long = 100 km
$P_{\text{entregada a los 2 alambres}} = 1\%\ P_{total}$

Nos piden: diámetro del alambre de cobre = ?

Donde: J = densidad de corriente = cte

Considerar: $\rho_{cobre} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega$.m

Tenemos que: $P_{total} = \Delta V \,.\, I$

$\Rightarrow\quad 10^8$ W $= 5 \times 10^4 \,.\, I \qquad \therefore\ I = 2\,000$ A

Luego: $P_{\text{entrega a los 2 alambres}} = I^2.R + I^2.R = 1{,}00\%\ (10^8)$

$\Rightarrow\quad 2I^2 \,.\, R = 10^6$

$\Rightarrow\quad 2(2\,000)^2 \,.\, R = 10^6 \qquad \therefore\ R = 0{,}125\ \Omega$

Recordando: $$R = \rho_{cobre} \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{área transv.}}$$

$$\Rightarrow\quad \text{Área transversal} = \frac{\rho_{cobre}.\text{longitud}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\pi \,.\, \text{diámetro}^2 = \frac{(1{,}7\times10^{-8})(10^5)}{0{,}125}$$

Entonces: $$\text{Diámetro} = \sqrt{\frac{4(1{,}7\times10^{-8})(10^5)}{(0{,}125)(\pi)}}$$

$\therefore$ Diámetro del cobre = 132×10^{-3} m ≡ 132 mm

35. Un diodo es un dispositivo que permite a la corriente pasar en una sola dirección (la dirección indicada por la cabeza de flecha en su símbolo de diagrama de circuito). Encuentre, en términos de ΔV y R, la potencia promedio entregada al circuito del diodo mostrado en la figura P33.35.

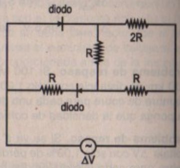
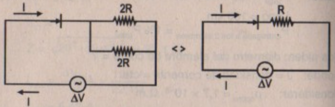


Figura P33.35

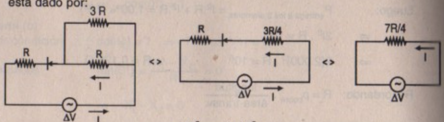
Resolución:

- Si la corriente empieza de la izquierda de la hoja, entonces el circuito equivalente está dado por:



Entonces: $$P_{\text{entregada al circuito}} = \frac{\Delta V^2}{R}$$

- Si la corriente empieza de la derecha de la hoja, entonces el circuito equivalente está dado por:



Entonces: $$P_{\text{entregada al circuito}} = \frac{\Delta V^2}{7R/4} = \frac{4\,\Delta V^2}{7\,R}$$

En consecuencia:

$$P_{\text{promedio entregada al circuito}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\,\Delta V^2}{7R} + \frac{\Delta V^2}{R}\right) = \frac{11\,\Delta V^2}{14\,R}$$

RESONANCIA EN UN CIRCUITO RLC EN SERIE

36. El circuito de sintonización de un radio de AM contiene una combinación LC. La inductancia es 0,200 mH y la capacitancia es variable, de modo que el circuito puede resonar en cualquier frecuencia entre 550 kHz y 1 650 kHz. Encuentre el intervalo de valores requerido para C.

Resolución:

Datos: Dado el circuito LC: L = 0,200 mH

f = 550 kHz $\wedge$ f = 1 650 Hz

? < C < ?

Sabemos que cuando existe resonancia se cumple que:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi . f$$

Por otro lado: $550 \times 10^3 < f < 1\,650 \times 10^3$

$$\Rightarrow \quad 550 \times 10^3 \times 2\pi < \ \omega_0 \ < 1\,650 \times 10^3 \times 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad 550 \times 10^3 \times 2\pi < \frac{1}{\sqrt{LC}} < 1\,650 \times 10^3 \times 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad (550 \times 10^3 \times 2\pi)^2 < \frac{1}{0{,}2\times10^{-3}.C} < (1\,650 \times 10^3 \times 2\pi)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1\,650\times10^3\times2\pi)^2} < 0{,}2 \times 10^{-3} \,.\, C < \frac{1}{(550\times10^3\times2\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10^3}{(0{,}2)(1650\times10^3\times2\pi)^2} < C < \frac{10^3}{(0{,}2)(550\times10^3\times2\pi)^2}$$

Por lo tanto: $46{,}5 < C < 418{,}7 \times 10^{-12}$

ó $46{,}5$ pF $< C < 418{,}7$ pF

37. Un circuito RLC se usa en un radio para sintonizar una estación de FM que transmite a 99,7 MHz. La resistencia en el circuito es 12,0 Ω y la inductancia es 1,40 μH. ¿Qué capacitancia debe emplearse?

Resolución:

Datos: Dado el circuito RLC en serie; donde:
$f = 99{,}7$ MHz $R = 12{,}0\ \Omega$; $L = 1{,}40\ \mu H$
$C = ?$

Sabemos que cuando hay resonancia se cumple que:

$$\omega_0 . 2\pi . f = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$$\Rightarrow \quad (2\pi . f)^2 = \frac{1}{L.C}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{L}\times\frac{1}{(2\pi . f)^2} = \frac{1}{1{,}40\times10^{-6}}\times\frac{1}{(2\pi\times99{,}7\times10^6)^2}$$

$$\therefore \quad C = 1{,}82\times10^{-2}\ F \equiv 1{,}82\ pF$$

38. Un circuito RLC en serie tiene los siguientes valores: $L = 20{,}0$ mH, $C = 100$ nF, $R = 20{,}0\ \Omega$ y $\Delta V_{máx} = 100$ V, con $\Delta v = \Delta V_{máx}$ sen ωt. Encuentre a) la frecuencia resonante, b) la amplitud de la corriente a la frecuencia resonante, c) la Q del circuito y d) la amplitud del voltaje a través del inductor en resonancia.

Resolución:

Datos: Dado el circuito RLC donde:
$L = 20$ mH; $C = 100$ nF; $R = 20{,}0\ \Omega$
$\Delta V_{máx} = 100V$; con: $\Delta v = \Delta V_{máx} . \text{sen}(\omega t)$

Parte (a)

Sabemos que: $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{\sqrt{20\times10^{-3}\times100\times10^{-9}}}$$

$$\therefore \quad \omega_0 = 224\times10^6 \text{ rad/s (frecuencia de resonancia)}$$

Luego: $$2\pi . f = \omega_0 = 224\times10^6$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{224\times10^6}{2\pi} \qquad \therefore \quad f_{\text{de la fuente}} = 35{,}65\times10^6\ Hz$$

Parte (b)

Sabemos que la amplitud de la corriente a la frecuencia resonante es $I_{máx}$ tenemos que:

$$X_L = \omega . L = X_C$$

Entonces: $Z = R = 20{,}0\ \Omega$

Luego: $$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{R} = \frac{100V}{20\Omega} \quad \therefore \quad I_{máx} = 5{,}0\ A$$

Parte (c)

Sabemos que: $$Q = \frac{\omega_0 . L}{R} = \frac{224\times10^6\times20\times10^{-3}}{20}$$

$$\therefore \quad Q = 224\times10^3$$

Parte (d)

Sabemos que: $\Delta V_{máx} = I_{máx} . X_L$ (a través del inductor)

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{máx} = (5{,}0)\times(224\times10^6)(20\times10^{-3})$$

$$\therefore \quad \Delta V_{máx} = 22{,}4\times10^6\ V \equiv 22{,}4\ MV$$

39. Un resistor de $10{,}0\ \Omega$, un inductor de $10{,}0$ mH y un capacitor de $100\ \mu F$ se conectan en serie a una fuente de $50{,}0$ V (rms) que tiene frecuencia variable. ¿Cuál es la energía entregada al circuito durante un periodo si la frecuencia de operación es dos veces la frecuencia de resonancia?

40. Un resistor R, un inductor L y un capacitor C se conectan en serie a una fuente de ca de voltaje rms ΔV y frecuencia variable. ¿Cuál es la energía entregada al circuito durante un periodo si la frecuencia de operación es dos veces la frecuencia de resonancia?

Resolución 39 y 40:

Datos: $R = 10{,}0\ \Omega$; $C = 100\ \mu F$
$L = 10{,}0$ mH ; $\Delta V_{rms} = 50$ V
$\omega = 2\omega_0$

Nos piden: $P_{prom} = ?$ ó $\dfrac{\text{energía entregada}}{\text{periodo}} = ?$

Sabemos que: $$P_{\text{prom entregada}} = I^2_{rms} . R$$

$$\Rightarrow \quad P_{\text{prom. entregada}} = \frac{\Delta V^2_{rms}}{Z^2} . R = \frac{\Delta V^2_{rms} . R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Donde: $$X_L = \omega . L \quad \wedge \quad X_C = \frac{1}{\omega . C} = \frac{L}{\omega . L . C} = \frac{L . \omega_0^2}{\omega}$$

Entonces: $$P_{\text{prom. entregada}} = \frac{\Delta V^2_{rms} . R}{R^2 + \left[\omega L - \dfrac{L . \omega_0^2}{\omega}\right]^2} = \frac{\Delta V^2_{rms} . R . \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Como: $\omega = 2\omega_0$; entonces:

$$P_{\text{prom. entregada}} = \frac{\Delta V^2_{rms} . R . 4 . \omega_0^2}{4 . \omega_0^2 . R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{\Delta V^2_{rms} . 4R . \omega_0^2}{4\omega_0^2 R^2 + 9L^2 . \omega_0^4} = \frac{\Delta V^2_{rms} . 4R . C}{4R^2 C + 9L}$$

Reemplazando datos:

$$P_{\text{Prom entregada}} = \frac{4(10)(50)^2(100\times10^{-6})}{4(10)^2.(100\times10^{-6}) + 9.(10\times10^{-3})}$$

$$\therefore \quad P_{\text{Prom entregada}} = 76{,}923 \text{ W}$$

Por otro lado: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\omega_o} = \dfrac{\pi}{\omega_o} = \pi\times\sqrt{LC} = \pi\times\sqrt{10\times10^{-3}\times(100\times10^{-6})}$

$$\therefore \quad T = 3{,}1416 \text{ ms}$$

En consecuencia:

$$\text{Energía entregada} = 76{,}923\ \frac{\text{J}}{\text{s}} \times (3{,}1416 \text{ ms}) = 242 \text{ mJ}$$

41. Calcule el factor de caida para los circuitos descritos en los problemas 22 y 23. ¿Cuál circuito tiene la resonancia más pronunciada?

Resolución:

Datos del Problema 22:

$L = 160$ mH ; $C = 99\ \mu$F $\quad R = 68{,}0\ \Omega$

Nos piden: $Q = ?$

Sabemos que: $Q = \dfrac{\omega_o . L}{R} = \dfrac{L}{R\times\sqrt{L.C}} = \dfrac{160\times10^{-3}}{68\sqrt{160\times10^{-3}\times(99\times10^{-6})}}$

$$\therefore \quad Q = 0{,}591$$

Datos del Problema 23:

$R = 150\ \Omega$; $C = 21\ \mu$F ; $L = 460$ mH

Nos piden $Q = ?$

Sabemos que: $Q = \dfrac{\omega_o . L}{R} = \dfrac{L}{R\times\sqrt{L.C}} = \dfrac{460\times10^{-3}}{150\times\sqrt{460\times10^{-3}\times(21\times10^{-6})}}$

$$\therefore \quad Q = 0{,}987$$

EL TRANSFORMADOR Y LA TRANSMISIÓN DE ENERGÍA

42. Un transformador reductor se emplea para recargar las baterías de dispositivos portátiles como grabadoras de cinta. La relación de vueltas dentro del transformador es 13:1 y se usa con el servicio doméstico de 120 V (rms). Si un transformador ideal particular consume 0,350 A de la toma de corriente de la casa, ¿cuáles son a) el voltaje y b) la corriente suministrados al tocacintas por el transformador? c) ¿Cuánta potencia se entrega?

Resolución:

Datos: $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{13}{1}$; $\quad \Delta V_{1\,(\text{rms})} = 120$ V

$I_2 = 0{,}350$ A

Parte (a)

Sabemos que en un transformador se cumple que:

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1}.\Delta V_1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{2\text{ rms}} = 1/13\times\Delta V_{1\text{ rms}} = \frac{120\text{ V}}{13}$$

$$\therefore \quad \Delta V_{2\text{ rms}} = 9{,}23 \text{ V (suministrado al tocacintas)}$$

Parte (b)

Sabemos que: $R_{\text{equiv}} = \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 . R_{\text{tocacintas}} = \dfrac{\Delta V_1}{I_1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{120}{0{,}350} = (13)^2 . R_{\text{tocacintas}}$$

$$\therefore \quad R_{\text{tocacintas}} = 2{,}03\ \Omega$$

En consecuencia: $I_{\text{suministrado al tocacintas}} = \dfrac{\Delta V_{2(\text{rms})}}{R_{\text{tocacintas}}} = \dfrac{9{,}23\text{ V}}{2{,}03\,\Omega} = 4{,}55$ A

Parte (c) $\quad P_{\text{que se entrega}} = I^2 . R_{\text{toc}} = (4{,}55)^2\times(2{,}03)$

$$\therefore \quad P_{\text{que se entrega al tocacintas}} = 42{,}00 \text{ W}$$

43. Un transformador tiene $N_1 = 350$ vueltas y $N_2 = 2\,000$ vueltas. Si el voltaje de entrada es $\Delta v(t) = (170\text{ V})\cos\omega t$, ¿qué voltaje rms se desarrolla a través de la bobina secundaria?

Resolución:

Datos: Un transformador tiene los siguientes datos:

$N_1 = 350$ vueltas y $N_2 = 2\,000$ vueltas

$\Delta V_1\ (t) = (170\ V)\ .\ \cos\omega t$

$\Delta V_{2\ rms} = ?$

Sabemos que en un transformador se cumple que :

$$\Delta V_{2\ rms} = \frac{N_2}{N_1} . \Delta V_{1rms} = \frac{N_2}{N_1} . (0{,}707)\ \Delta V_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{2\ rms} = \frac{2\,000}{350} \times (0{,}707)(170\ V)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{2\ rms} = 687\ V$$

44. Un transformador elevador se diseña para tener un voltaje de salida de 2 200 V (rms) cuando el primario se conecta a través de una fuente de 110 V (rms). a) Si hay 80 vueltas en el devanado primario, ¿cuántas vueltas se requieren en el secundario? b) Si un resistor de carga a través del secundario requiere una corriente de 1,50 A, ¿cuál es la corriente en el primario, suponiendo condiciones ideales? c) Si el transformador de hecho tiene una eficiencia de 95,0%, ¿cuál es la corriente en el primario cuando la corriente en el secundario es 1,29 A?

Resolución :

Datos: $\Delta V_{2rms} = 2\ 200\ V$ (salida)
$\Delta V_{1rms} = 110\ V$ (primario)

Parte (a)

Si: $N_1 = 80$ vueltas ; hallar $N_2 = ?$

Sabemos que en un transformador se cumple que:

$$\Delta V_{2\ rms} = \frac{N_2}{N_1} \times \Delta V_{1rms} \quad \Rightarrow \quad 2\ 200\ V = \frac{N_2}{80} \times 110$$

$$\therefore \quad N_2 = 1\ 600 \text{ vueltas}$$

Parte (b)

Si: $I_2 = 1{,}50\ A \Rightarrow I_1 = ?$

Sabemos que: $\Delta V_1 . I_1 = \Delta V_2 . I_2$

$\Rightarrow \quad (110\ V)(I_1) = 2\ 200 \times (1{,}5)$

$\therefore \quad I_1 = 30{,}0\ A$

Parte (c)

Si el transformador tiene una eficiencia de 95%, entonces el 5% de pérdidas la consume el secundario a una corriente de 1,20 A. Entonces:

$$5\%\ (\Delta V_{1rms} . I_1) = \Delta V_{2\ rms} . I_2$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}05)\ (110)\ (I_1) = (2\ 200)\ (1{,}20)$$

$$\therefore \quad I_{1\ (\text{en el primario})} = 480\ A$$

45. En el transformador mostrado en la figura P33.45, el resistor de carga es de 50,0 Ω. La relación de vueltas N_1:N_2 es 5:2 y el voltaje de la fuente es 80,0 V (rms). Si un voltímetro a través de la carga mide un voltaje de 25,0 V (rms), ¿cuál es la resistencia de la fuente R_s?

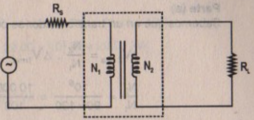


Figura P33.45

Resolución :

Donde: $R_L = 50{,}0\ \Omega$; $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{5}{2}$

$\Delta V_{fuente} = 80{,}0\ V$ (rms)

Nos piden: $R_s = ?$

Nota: voltaje a través de la carga es de 25,0 V

Sabemos que en un transformador se cumple que:

$$\Delta V_{total} \times \frac{N_2}{N_1} = \Delta V_L$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{total} = \frac{N_1}{N_2} \times \Delta V_L = \frac{5}{2} \times 25 = 62{,}5\ V$$

Pero: $62{,}5V = \Delta V_s - I_s.R_s = 80{,}0\ V - I_s.R_s$

$\Rightarrow \quad I_s.R_s = 17{,}5\ V \quad ...\ (1)$

Además sabemos que en un transformador no hay pérdida de potencia, entonces:

$$\Delta V_s.I_s = I_s^2.R_s + \frac{\Delta V_L^2}{R_L} = I_s\ (17{,}5) + \frac{(25)^2}{50}$$

$$\Rightarrow \quad 80.I_s = 17{,}5I_s + 12{,}5 \qquad \therefore \quad I_s = 0{,}200\ A$$

En consecuencia de (1): $R_s = 17{,}5/I_s = 17{,}5/0{,}2 = 87{,}5\ \Omega$

46. El voltaje secundario de un transformador de encendido que se utiliza en un horno es de 10,0 kV. Cuando el primario opera a un voltaje rms de 120 V, la impedancia primaria es de 24,0 Ω y el transformador es 90,0% eficiente. a) ¿Qué relación de vueltas se requiere? ¿Cuáles son b) la corriente y c) la impedancia en el secundario?

Resolución :

Datos: $\Delta V_{2\ rms} = 10\ kV$; $\Delta V_1 = 120\ V$ (rms)
$Z_1 = 24{,}0\ \Omega$

Eficiencia del transformador 90%

Parte (a)
Sabemos que en un transformador se cumple que:

$$\Delta V_{2\,rms} = \frac{N_2}{N_1}\cdot\Delta V_{1rms} \Rightarrow 90\%\,(120)\times\frac{N_2}{N_1} = 10\times10^3$$

$$\therefore\quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{10^6}{90\times120} = \frac{10\,000}{108} = \frac{5\,000}{59}$$

Parte (b)
Sabemos que: $90\%\,\Delta V_1\,I_1 = \Delta V_2\,.\,I_2$

Pero: $\Delta V_1 = I_1 Z_1 \quad \Rightarrow 120 = I_1\times(24)$

$\therefore\quad I_1 = 5{,}00\text{ A}$

Entonces: $90\%\,(120)(5{,}00) = 10\times10^3\times I_2$

$\therefore\quad I_2 = 54\times10^{-3}\text{ A} \equiv 54\text{ mA}$

Parte (c)
Sabemos que: $\Delta V_2 = I_2\,.\,Z_2$

$$\Rightarrow\quad Z_2 = \frac{\Delta V_2}{I_2} = \frac{10\times10^3}{54\times10^{-3}}$$

$\therefore\quad Z_2 = 185\times10^3\ \Omega \equiv 185\text{ k}\Omega$

47. Con una línea de transmisión que tiene una resistencia por unidad de longitud de $4{,}50\times10^{-4}\ \Omega/\text{m}$ se transmitirán 5,00 MW a lo largo de 400 millas ($6{,}44\times10^5$ m). El voltaje de salida del generador es 4,50 kV. a) ¿Cuál es la pérdida en la línea si un transformador se utiliza para elevar el voltaje hasta 500 kV? b) ¿Qué fracción de la potencia de entrada se pierde en la línea en estas circunstancias? c) ¿Qué dificultades se encontrarán al intentar transmitir los 5,00 MW a un voltaje del generador de 4,50 kV?

Resolución :

Datos: $\dfrac{R_{\text{línea}}}{\text{longitud}} = 4{,}50\times10^{-4}\ \Omega/\text{m}$

$P_{\text{transm.}} = 5{,}00\text{ MW}$ a una long. = 400 millas ≡ $6{,}44\times10^5$ m

$\Delta V_{\text{salida del generador}} = 4{,}50\text{ kV}$

Parte (a)
Al usar el transformador el voltaje alterno se convierte en voltaje directo de 4,5 kV a 500 kV, entonces podemos utilizar la siguiente relación:

$P = I\,.\,\Delta V$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{5{,}00\times10^6}{500\times10^3} \qquad \therefore\ I = 10{,}00\text{ A}$$

En consecuencia:

$$P_{\text{pérdida en las líneas}} = I^2.R = (10)^2\times(4{,}50\times10^{-4})\times(6{,}44\times10^5)$$

$$\therefore\quad P_{\text{pérdida en las líneas de transmisión}} = 29{,}00\times10^3\text{ W} \equiv 29{,}00\text{ kW}$$

Parte (b)
Sabemos que: $P_{\text{entrada}} = 5{,}00\times10^6\text{ W}$

Entonces: $$\frac{P_{\text{pérdida en las líneas de transmisión}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{29{,}00\times10^3\text{ W}}{5{,}00\times10^6\text{ W}}$$

$$\frac{P_{\text{pérdida en las líneas}}}{P_{\text{entrada}}} = 5{,}8\times10^{-3}$$

Parte (c)
Si $\Delta V = 4{,}50\text{ kV} \Rightarrow I = \dfrac{P_{\text{total}}}{\Delta V} = \dfrac{5{,}00\times10^6}{4{,}50\times10^3}$

$\therefore\quad I = 1{,}1\times10^3\text{ A}$

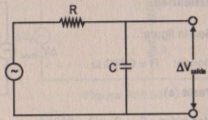
Entonces: $P_{\text{entrega o pérdida en las líneas}} = (1{,}1\times10^3)^2\,.\,(4{,}50\times10^{-4})(6{,}44\times10^5) = 350\text{ MV}$

Esto implicará que nunca se entregarán los 500 kW a la carga.

RECTIFICADORES Y FILTROS

48. El filtro de paso bajo RC que se muestra en la figura 33,23 tiene una resistencia $R = 90{,}0\ \Omega$ y una capacitancia $C = 8{,}00$ nF. Calcule la ganancia ($\Delta V_{\text{salida}}/\Delta V_{\text{entrada}}$) para frecuencias de entrada de a) 600 Hz y b) 600 kHz.

Resolución :
Sea la figura:



Donde: $R = 90{,}0\ \Omega$
$C = 8{,}00$ nF

Nos piden: $\dfrac{\Delta V_{\text{salida}}}{\Delta V_{\text{entrada}}} = ?$

Si $f = 600$ Hz
Según la figura, nos encontramos en un filtro de paso bajo, entonces se cumple que:

$$\frac{\Delta V_{\text{salida}}}{\Delta V_{\text{entrada}}} = \frac{\dfrac{1}{\omega.C}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\dfrac{1}{2\pi.f.C}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{2\pi.f.C}\right)^2}}$$

Entonces:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{\dfrac{10^9}{2\pi\times600\times8}}{\sqrt{(90)^2+\left(\dfrac{10^9}{2\pi\times600\times8}\right)^2}} = \frac{33,16\times10^3}{\sqrt{8\,100+\left(33,16\times10^3\right)^2}}$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} \approx 1$$

Parte (b)

Si: f = 600 KHz

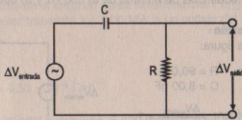
$$\text{Entonces:}\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{\dfrac{10^6}{2\pi\times600\times8}}{\sqrt{90^2+\left(\dfrac{10^6}{2\pi\times600\times8}\right)^2}} = \frac{33,16}{\sqrt{8\,100+1\,099,16}}$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = 0,346$$

49. El filtro de paso alto RC mostrado en la figura 33.22 tiene una resistencia R = 0,500 Ω. a) ¿Qué capacitancia produce una señal de salida que tiene la mitad de la amplitud de una señal de entrada de 300 Hz? b) ¿Cuál es la ganancia ($\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada}$) para una señal de 600 Hz?

Resolución:

Sea la figura:



Donde: R = 0,500 Ω

Parte (a)

Nos piden C = ? si f = 300 Hz y $\Delta V_{salida} = \frac{1}{2}\Delta V_{entrada}$

Sabemos que en un "filtro de paso alto" RC se cumple que:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\text{Entonces:}\quad 0,5 = \frac{0,500}{\sqrt{(0,500)^2+\left(\dfrac{1}{(2\pi)(300)\times C}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow\quad (0,500)^2+\left(\frac{1}{600\pi\times C}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow\quad C = \sqrt{\frac{1}{(0,75)(600\pi)^2}}\quad \therefore\quad C = 613\times10^{-6}\ F = 613\ \mu F$$

Parte (b)

Si: f = 600 Hz nos piden $\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada}$ = ?

$$\text{Sabemos que:}\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\quad \text{(filtro de paso alto)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{0,500}{\sqrt{(0,500)^2+\left[\dfrac{10^6}{(2\pi)(600)(613)}\right]^2}}\quad \text{(desarrollando)}$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = 0,756$$

50. El circuito de la figura P33.50 representa a un filtro de paso alto en el cual el inductor tiene resistencia interna. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente si el voltaje de salida ΔV_2 es la mitad del voltaje de entrada?

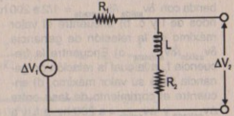


Figura P33.50

Resolución:

Donde: R_1 = 20 Ω ; L = 250 mH
R_2 = 5,0 Ω

Además: $\Delta V_2 = \frac{1}{2}\Delta V_1$

Nos piden f = ?

Sabemos que: $\Delta V_1 = I_{máx}\cdot Z = I_{máx}\cdot\sqrt{(R_1+R_2)^2+(X_L)^2}$

Además: $\Delta V_2 = I_{máx}\,.\,Z' = I_{máx}\cdot\sqrt{R_2^2 + X_L^{\,2}}$

Entonces: $$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = 0,5 = \frac{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + X_L^2}}$$

$$\Rightarrow\quad 0,5 = \frac{\sqrt{5^2 + \left[2\pi.f\left(250\times10^{-3}\right)\right]^2}}{(25)^2 + \left[2\pi.f\times\left(250\times10^{-3}\right)\right]^2}$$

$$\Rightarrow\quad (0,5)\,[625 + (2\pi\, f \times 250 \times 10^{-3})^2] = 25 + (2\pi f \times 250 \times 10^{-3})^2$$

$$\Rightarrow\quad 156,25 + 0,25 \times (2\pi f \times 250 \times 10^{-3})^2 = 25 + (2\pi f \times 250 \times 10^{-3})^2$$

$$\Rightarrow\quad 131,25 = 0,75\,(2\pi \times f \times 250 \times 10^{-3})^2$$

$$\Rightarrow\quad f = \sqrt{\frac{131,25}{0,75}} \times \frac{1}{2\pi\times250\times10^{-3}}$$

$$\therefore\quad f = 8,42\text{ Hz}$$

51. El resistor en la figura P33.51 representa la bocina de rango medio en un sistema de tres bocinas. Suponga que su resistencia es constante a 8,00 ω. La fuente representa un amplificador de audio que produce señales de amplitud un amplificador de audio que produce señales de amplitud uniforme $\delta v_{entrada} = 10,0$ V a todas las frecuencias de audio. El inductor y el capacitor están para funcionar como filtros de banda con $\delta v_{salida}/\delta v_{entrada} = 1/2$ a 200 hz y a 4 000 hz. a) determine los valores requeridos de l y c. b) encuentre el valor máximo de la relación de ganancia $\delta v_{salida}/\delta v_{entrada}$. c) Encuentre la frecuencia f_0 a la cual la relación de ganancia tiene su valor máximo. d) encuentre el corrimiento de fase entre $\Delta v_{entrada}$ y Δv_{salida} = a 200 hz, a f_0 y a 4 000 hz. e) Encuentre la potencia promedio transferida a la bocina a 200 Hz, a f_0 y a 4 000 Hz. f) Tratando al filtro como un circuito resonante encuentre su factor de calidad.

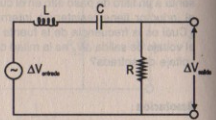


Figura P33.51

Resolución :51

Donde: $\delta v_{entrada} = 10,0$ V ; R = 8ω

$\delta v_{salida}/\,\delta v_{entrada} = 0,5$ a 200 Hz y 4 000 Hz

Parte (a)

Sabemos que según la figura nos encontraríamos en un filtro de paso alto, luego:

$$\frac{\delta V_{salida}}{\delta V_{entrada}} = \frac{1}{2} = \frac{8\omega}{\sqrt{64\,\omega^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{4}(64\omega^4C^2 + [\omega^2LC - 1]^2) = 64\omega^4\,.\,C^2$$

$$\Rightarrow\quad 64\omega^4\,.\,C^2 + [\omega^2LC - 1]^2 = 256\omega^4\,.\,C^2$$

Si $a = \omega^2 \quad\Rightarrow\quad a_1 = 4\pi^2 \times 16 \times 10^6 \;\vee\; a_2 = 4\pi^2 \times 4 \times 10^4$

- Para a_1: $64\,a_1^2\,.\,C^2 + [a_1LC - 1]^2 = 256\,a_1^2\,.\,c^2$

$$\Rightarrow\quad 256\,a_1^2\,C^2 - 64\,a_1^2\,.\,C^2 = (a_1LC - 1)^2$$

$$\Rightarrow\quad \pm\, a_1\,.\,C\,\sqrt{192} + 1 = a_1\,LC \qquad \ldots (1)$$

- Para a_1: $\pm\, a_2\,.\,C\,\sqrt{192} + 1 = a_2\,LC \qquad \ldots (2)$

Dividiendo: (1) ÷ (2) resulta que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 + a_1\,C\sqrt{192}}{1 - a_2\,C\sqrt{192}} \quad\Rightarrow\quad a_1 - a_1.a_2.C\,\sqrt{192} = a_2 + a_2.a_1C\,\sqrt{192}$$

$$\Rightarrow\quad a_1 - a_2 = 2a_1.a_2.C\sqrt{192} \quad\therefore\quad C = \frac{a_1 - a_2}{2a_1\,.\,a_2\,.\sqrt{192}} = 54,6\,\mu\text{F y } L = 580\,\mu\text{H}$$

Parte (b)

$f_0 = ?$

Entonces se tiene que cumplir que: $\dfrac{1}{\omega C} = \omega\,.\,L \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Entonces: $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{\left(54,6\times10^{-6}\right)\left(580\times10^{-6}\right)}} = 894\text{ Hz}$$

Parte (c)

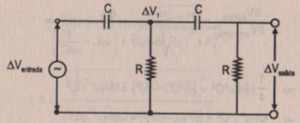
Sabemos que: $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega.L}{R} = \frac{2\pi\times(894)\times580\times10^{-6}}{54,6\times10^{-6}}$$

$$\therefore\quad Q = 0,408$$

52. Muestre que dos filtros de paso alto sucesivos que tienen los mismos valores de R y C proporcionan una ganancia combinada.

Resolución:

Sean los filtros sucesivos de "paso alto":



Por demostrar que: $\dfrac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}$

Sabemos que en un filtro de paso alto simple se cumple que:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_1} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{... (1)}$$

Además:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{... (2)}$$

Multiplicando (1) × (2) y dividiendo entre $\mathbf{R^2}$ resulta que:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2} \quad \text{Lqqd .}$$

53. Considere un filtro de paso bajo seguido por un filtro de paso alto, como se ilustra en la figura P33,53. Si R = 1 000 Ω y C = 0,050 0 μF, determine $\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada}$ para una frecuencia de entrada de 2,00 kHz.

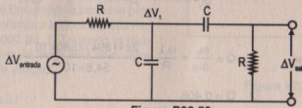


Figura P33.53

Resolución:

Donde: R = 1 000 Ω ; C = 0,050 μF ; f = 2,00 kHz

Nos piden: $\dfrac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = ?$

Sabemos que en un circuito de "paso alto" se cumple que:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_1} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

Sabemos que en un filtro de "paso bajo" se cumple que:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_{entrada}} = \frac{\dfrac{1}{\omega . C}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{... (2)}$$

Multiplicando (1) × (2) resulta que:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{\dfrac{R}{\omega . C}}{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R.\omega.C}{\omega^2.R^2.C^2+1}$$

Entonces reemplazando datos:

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{1\,000\times(2\pi\times 2000)\left(0{,}050\times 10^{-6}\right)}{\left(10^3\times 0{,}050\times 10^{-6}\times 2\pi\times 2\times 10^3\right)^2+1}$$

$$\therefore \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = 0{,}45$$

PROBLEMAS ADICIONALES

54. Muestre que el valor rms para el voltaje de diente de sierra mostrado en la figura P33.54 es $\Delta V_{máx}/\sqrt{3}$

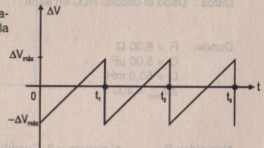


Figura P33.54

Resolución :

Por demostrar que: $\boxed{\Delta V_{rms} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{3}}}$

En un tiempo $t_1 = \dfrac{1}{3}\,\Delta V_{máx} =$

$t_2 = \dfrac{1}{3}\,\Delta V_{máx} =$ donde: $t_1 = t_2 = t_3 = T/3$

$t_3 = \dfrac{1}{3}\,\Delta V_{máx} =$ Además $= t_1 = t_2 = t_3 = T$ (período)

Entonces : $\Delta \overline{V}^2_{máx} = \left(\dfrac{1}{3}\Delta V_{máx}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\Delta V_{máx}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\Delta V_{máx}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \Delta \overline{V}^2_{máx} = \dfrac{3.\Delta V^2_{máx}}{9} = \dfrac{\Delta V^2_{máx}}{3}$

Como : $i_{rms} = \dfrac{\sqrt{\overline{i}^2}}{\sqrt{2}}$

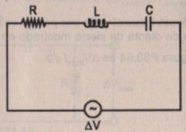
$\Rightarrow \quad \Delta V_{rms} = \sqrt{\Delta \overline{V^2_{máx}}} = \sqrt{\dfrac{\Delta V^2_{máx}}{3}}$

$\therefore \quad \Delta V_{rms} = \dfrac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{3}}$

55. Un circuito RLC en serie se compone de un resistor de 8,00 Ω, un capacitor de 5,00 μF y un inductor de 50,0 mH. Una fuente de frecuencia variable aplica una fem de 400 V (rms) a través de la combinación. Determine la potencia entregada al circuito cuando la frecuencia es igual a la mitad de la frecuencia de resonancia.

Resolución :

Datos : Dado el circuito RLC en serie :



Donde: $R = 8{,}00\ \Omega$
$C = 5{,}00\ \mu F$
$L = 50{,}0\ mH$
$\Delta V_{rms} = 400\ V$

Nos piden $P_{entregada}$ al circuito = ? Cuando: $\omega = \dfrac{1}{2}\omega_0$

Sabemos que: $\omega = \dfrac{1}{2}\omega_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{L.C}} = \dfrac{1}{2\sqrt{50\times10^{-3}\times(5\times10^{-6})}}$

$\therefore \quad \omega = 1\,000$ rad/s

Luego: $X_L = \omega\,.\,L = 1\,000 \times (50\times10^{-3}) = 50\ \Omega$

$X_C = \dfrac{1}{\omega.C} = \dfrac{1}{10^3\times(5\times10^{-6})} = 200\ \Omega$

Entonces: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{8^2 + (50-200)^2} = 150{,}2\ \Omega$

Luego: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \dfrac{400\ V}{150{,}2\Omega} \qquad \therefore\ I_{rms} = 2{,}663 A$

En consecuencia: $\cos\phi = \cos\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{-150}{8}\right)\right] = 0{,}053$

Por lo tanto: $P_{entregada\ al\ circuito} = I_{rms}\,.\,\Delta V_{rms}\,.\,\cos\phi$

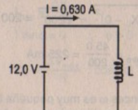
$\Rightarrow \quad P_{entregada\ al\ circuito} = (2{,}663)(400)(0{,}053)$

$\therefore \quad P_{entregada\ al\ circuito} = 56{,}7\ W$

56. Para determinar la inductancia de una bobina utilizada en un proyecto de investigación, un estudiante conecta primero la bobina a una batería de 12,0 V y mide una corriente de 0,630 A. Después, el estudiante conecta la bobina a un generador de 24,0 V (rms) y 60,0 Hz y mide una corriente rms de 0,570 A. ¿Cuál es la inductancia?

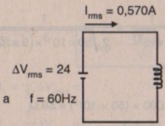
Resolución :

Inicialmente:



Aplicando Kirchhoff resulta que: $L = \dfrac{\Delta V}{\dfrac{dI}{dt}} = \infty$

Finalmente:



Aplicando Kirchhoff resulta que: $X_L \cdot I_{rms} = \Delta V_{rms}$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{\Delta V_{rms}}{I_{rms}.2\pi.f} = \frac{24{,}0}{(0{,}570)(120\pi)}$$

$$\therefore \quad L = 112 \text{ mH}$$

57. En la figura P33.57 encuentre la corriente entregado por el suministro de potencia de 45,0 V (rms) cuando a) la frecuencia es muy grande y b) la frecuencia es muy pequeña.

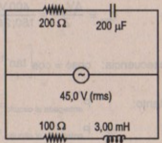


Figura P33.57

Resolución :

Parte (a)

Cuado f es muy grande, entonces ω es muy grande y en consecuencia X_C tiende a cero.

En ese caso consideramos el circuito R y C donde fluirá la corriente.

Entonces sabemos que:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - 0)^2} = \sqrt{200^2} = 200\ \Omega$$

Por lo tanto: $\quad I_{rms \times \text{el suministro}} = \dfrac{45{,}0}{200} = 225 \text{ mA}$

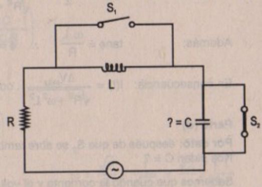
Parte (b)

Cuando f es muy pequeña, entonces ω es muy pequeña lo que significa que $X_L \to 0$, lo que significa que en este caso consideraríamos el circuito R y L donde fluiría la corriente.

Entonces sabemos que: $\quad Z = \sqrt{R^2} = 100\ \Omega$

Por lo tanto: $\quad I_{rms \times \text{el suministro}} = \dfrac{45{,}0}{100} = 450 \text{ mA}$

58. En el circuito mostrado en la figura P33.58 suponga que están dados todos los parámetros, excepto C. Encuentre: a) la corriente como una función del tiempo, b) la potencia entregada al circuito, c) la corriente como una función del tiempo sólo después de que el interruptor 1 se abre. d) Después de que el interruptor 2 también se abre, la corriente y el voltaje están en fase. Encuentre la capacitancia C. Encuentre: e) la impedancia del circuito cuando ambos interruptores están abiertos, f) la energía máxima almacenada en el capacitor durante las oscilaciones, g) la energía máxima almacenada en el inductor durante las oscilaciones. h) Ahora la frecuencia de la fuente de voltaje se duplica. Encuentre la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje. i) Encuentre la frecuencia que hace que la reactancia inductiva se la mitad de la reactancia capacitiva.



$\Delta v(t) = \Delta V_{máx} \cos \omega t$

Figura P33.58

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que en un circuito RLC se cumple que:

Si: $\quad \Delta V(t) = \Delta V_{máx} \cdot \cos\omega t$

Entonces : $\quad I(t) = I_{máx} \cdot \cos(\omega t - \phi)$

Por otro lado:

Como inicialmente los interruptores S_1 y S_2 en la figura están cerrados entonces por ahí fluirá la corriente y en consecuencia la corriente en el inductor y en el capacitor será cero. Luego.

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{R}$$

$$I \tan\phi = 0 \quad \therefore \quad \phi = 0$$

En consecuencia: $\quad I(t) = \dfrac{\Delta V_{máx}}{R} \cdot \cos(\omega t)$

Parte (b)

La potencia entregada al circuito estará dada por:

$$P_{entregada} = (I_{rms})^2 \cdot R = (0{,}707\ I_{máx})^2 \cdot R$$

$$\therefore \quad P_{entregada} = \frac{\Delta V_{máx}^2}{2R}$$

Parte (c)

$I(t)$ cuando el interruptor S_1 se abre estará dada por:

$$I(t) = I_{máx} \,.\, \cos(\omega t - \phi)$$

Donde: $$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{Z} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{R^2 + \omega^2.L^2}}$$

Además: $$\tan\phi = \frac{\omega.L}{R} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega.L}{R}\right)$$

En consecuencia: $$I(t) = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \,.\, \cos[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)]$$

Parte (d)

Por dato: después de que S_2 se abre también, la corriente y el voltaje están en fase.

Nos piden C = ?

Sabemos que cuando la corriente y el voltaje están en fase se cumple que:

$$\tan\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L = X_C$$

Entonces: $$\omega \,.\, L = \frac{1}{\omega.C} \qquad \therefore \quad C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

Parte (e)

Cuando S_1 y S_2 están abiertos Z está dada por:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\omega.C} \times \sqrt{\omega^2.C^2.R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

Parte (f)

Durante las oscilaciones: Energía máxima en el capacitor $= \frac{1}{2}.C.\Delta V_{máx}^2$

$\therefore$ Energía máxima en el capacitor $= \frac{1}{2}.C.\Delta V_{máx}^2$

Parte (g)

Durante las oscilaciones: Energía máxima en el inductor $= \frac{1}{2}.L.I_{máx}^2$

$\therefore$ Energía máxima en el inductor $= \frac{1}{2}.L.\left(\frac{\Delta V_{máx}^2}{Z^2}\right)$

Parte (h)

Por dato: $\omega_{final} = 2\omega$, nos piden: ϕ = ?

Sabemos que: $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{2\omega L - \frac{1}{2\omega C}}{R} = \frac{4\omega^2.CL - 1}{2\omega C \,.\, R}$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{4\omega^2 LC - 1}{2\omega C.R}\right)$$

Parte (i)

Nos piden f = ? si $X_L = \frac{1}{2} X_C$

Sabemos que: $$2\,\omega.L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 8.\omega^2.LC = 1 \qquad \therefore \quad \omega = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Entonces: $$2\pi.\,f = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \therefore \quad f = \frac{1}{8\pi} \times \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

59. Como una alternativa a los filtros RC descritos en la sección 33.9, los filtros LC se usan como de paso alto y como de paso bajo. Sin embargo, todos los inductores reales tienen resistencia, como se indica en la figura P33.59, y esta resistencia debe ser considerada. a) Determine cuál circuito en la figura P33.59 es el filtro de paso alto y cuál es el paso bajo. b) Derive las relaciones salida/entrada para cada circuito siguiendo el procedimiento empleado para los filtros RC en la sección 33.9.

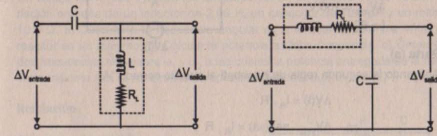


Figura (a) Figura (b)

Figura P33.59

Resolución:

Parte (a)

La figura (a) es el filtro de paso alto.

La figura (b) es el filtro de paso alto.

Parte (b)

Para la figura (a): $\Delta V_{entrada} = I_{máx} \cdot \sqrt{R_L^2 + (X_L - X_C)^2}$

$$\Delta V_{salida} = I_{máx} \cdot \sqrt{R_L^2 + X_L^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{\left(R_L^2 + X_L^2\right)^{1/2}}{\sqrt{R_L^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Para la figura (b): $\Delta V_{entrada} = I_{máx} \cdot \sqrt{R_L^2 + (X_L - X_C)^2}$

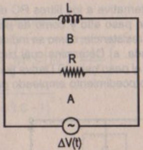
$$\Delta V_{salida} = I_{máx} \cdot X_C$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{X_C}{\sqrt{R_L^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

60. Un resistor de 80,0 Ω y un inductor de 200 mH se conectan en paralelo a través de una fuente de 100 V (rms) y 60,0 Hz. a) ¿Cuál es la corriente rms en el resistor? b) ¿En qué ángulo la corriente total adelanta o está retrasada del voltaje?

Resolución:

Sea la figura:



Donde: $L = 200$ mH
$R = 80\ \Omega$
$\Delta V_{rms} = 100$ V
$f = 60$ Hz

Parte (a)

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff al circuito cerrado "A"

$$\Delta V(t) = I_R \cdot R$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{máx} \cdot \text{sen}(\omega t) = I_R \cdot R$$

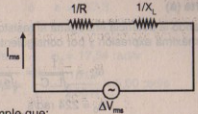
$$\Rightarrow \quad I_R(t) = \frac{\Delta V_{máx}}{R} \cdot \text{sen}(\omega t) = \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta V_{rms}}{R} \cdot \text{sen}\ \omega t$$

Reemplazando datos: $I_R(t) = \dfrac{\sqrt{2} \times 100}{80} \cdot \text{sen}\ (120\pi t)$

$\therefore \quad I_R(t) = (1{,}77\ \text{A})\ \text{sen}\ 377t$ Luego $I_{rms} = 1{,}25$ A (en el resistor)

Parte (b)

El circuito es equivalente a:



$$Z' = \frac{1}{Z}$$

Entonces en un circuito en serie se cumple que:

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{X_L} = \frac{80{,}0\,\Omega}{(120\pi)\left(200\times10^{-3}\right)\Omega}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = 1{,}06 \qquad \therefore\ \phi = \tan^{-1}(1{,}06) = 46{,}7°$$

En consecuencia:
La corriente está adelantada del voltaje en 46,7°

61. Haga una estimación del orden de magnitud de la corriente eléctrica que la compañía de electricidad entrega a una población a partir de una estación generadora remota. Establezca los datos que midió o estimó. Si lo desea, considere una comunidad dormitorio suburbana de 20 000 habitantes.

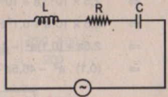
Resolución:

En este se tendrá que averiguar cuanto de potencia suministra o entrega la estación generadora a los 20 000 habitantes **(si fuera el caso)** y considerar la distancia en que se encuentra dicha estación con la comunidad suburbana al que va a aumentar.

62. Un voltaje $\Delta v = (100\ \text{V})\text{sen}\omega t$ (en unidades del SI) se aplica a través de una combinación en serie de un inductor de 2,00 H, un capacitor de 10,0 μF y un resistor de 10,0 Ω. a) Determine la frecuencia angular ω_0 a la cual la potencia entregada al resistor es un máximo. b) Calcule la potencia a dicha frecuencia. c) Determine las dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 a las cuales la potencia entregada es la mitad del valor máximo. [La Q del circuito es aproximadamente $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$.]

Resolución:

Sea el circuito "RLC" en serie:



Donde: $L = 2{,}00$ H
$C = 10\ \mu$F
$R = 10\ \Omega$

$\Delta v(t) = 100\text{V sen}\ (\omega t)$

Parte (a)

Cuando la potencia entregada al resistor es un máximo entonces la corriente llega a su máxima expresión y por consiguiente el circuito está en resonancia, luego:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}00\times10\times10^{-6}}}$$

$$\therefore \omega_0 = 224 \text{ rad/s}$$

Parte (b)

$$P_{entregada} = \frac{\Delta V_{rms}^2}{R} = \frac{(0{,}707\,\Delta V_{máx})^2}{R} = \frac{(0{,}707)^2\times(100)^2}{10}$$

$$\therefore \quad P_{\text{entregada al circuito}} = 500 \text{ W}$$

Parte (c)

Sabemos que: $\omega_0 = 224$ rad/s

Además: $$P_{prom} = \frac{(\Delta V_{rms})^2.R.\omega^2}{R^2.\omega^2 + L^2\left(\omega^2-\omega_o^2\right)^2}$$ (en un circuito RLC en serie)

Entonces por condición:

ω_1 y ω_2 existe cuando $P_{\text{prom entregada}} = \frac{1}{2}P_{prom}$

Entonces: $$250 \text{ W} = \frac{[0{,}707\times100]^2\times(10).\omega^2}{100.\omega^2+4\left(\omega^2-224\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 250 = \frac{5\times10^4.\omega^2}{10^2.\omega^2+\left[\omega^2-2{,}2\times10^2\right]^2}$$

Si: $\omega^2 = a$

Entonces: $2{,}5\times10^2\,[10^2a + 4(a - 2{,}2\times10^2)^2] = 5\times10^4\,.\,a$

$\Rightarrow \quad 2{,}5\times10^4\,.\,a + 10^3[a^2 - 4{,}4\times10^2a + (2{,}2\times10^2)^2] = 5\times10^4a$

$\Rightarrow \quad 2{,}5\times10^4a + 0{,}1^3a^2\ \times 10^4 - 44\times10^4a + 4\,840\times10^4 = 5\times10^4a$

$\Rightarrow \quad 2{,}5a + (0{,}1)a^2\ - 44a + 4\,840\ \times\ = 5a$

$\Rightarrow \quad (0{,}1)\,.\,a^2\ - 46{,}5a + 4\,840\ = 0$

$$\therefore \quad a = \frac{46{,}5\pm\sqrt{(46{,}5)^2-4(0{,}1)(4\,840)}}{2(0{,}1)} = \frac{46{,}5\pm\sqrt{226{,}25}}{2(0{,}1)}$$

En consecuencia: $a = 307{,}7$ ó $a = 157{,}3$

Por lo tanto: $\omega = \pm\sqrt{307{,}7}$ ó $\omega = \pm\sqrt{157{,}3}$

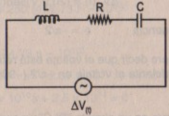
Luego: $\omega_1 = 12{,}54$ rad/s $\wedge$ $\omega_2 = 17{,}54$ rad/s

En consecuencia: $$\omega_2 - \omega_1 = 5 \text{ rad/s} \cong \frac{R}{L} = \frac{10\,\Omega}{2.00\,H} = 5{,}00 \text{ rad/s}$$

63. Considere un circuito RLC en serie que tiene los siguientes parámetros R = 200 Ω, L = 663 mH y C = 26,5 μF. El voltaje aplicado tiene una amplitud de 50,0 V y una frecuencia de 60,0 Hz. Encuentre lo siguiente: a) La corriente $I_{máx}$, inducida su constante de fase φ relativa al voltaje aplicado Δv, b) el voltaje ΔV_R a través del resistor y su fase relativa a la corriente; c) el voltaje ΔV_C a través del capacitor y su fase relativa a la corriente, y d) el voltaje V_L a través del inductor y su fase relativa a la corriente.

Resolución:

Sea el circuito RLC en serie:



Donde: R = 200 Ω

L = 663 mH

C = 26,5 μF

$\Delta V_{máx} = 50{,}0$ V

f = 60,0 Hz

Parte (a)

Sabemos que: $$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{Z} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}$$

Donde: $X_L = \omega.L = 2\pi.f.L = 2\pi\times(60)\times(663\times10^{-3}) = 250\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{2\pi.f.C} = \frac{1}{2\pi\times60\times26{,}5\times10^{-6}} = 100\ \Omega$$

Entonces:

$$I_{máx} = \frac{50}{\sqrt{(200)^2+(250-100)^2}} \qquad \therefore \quad I_{máx} = 0{,}200\text{A} \cong 200 \text{ mA}$$

Por otro lado: $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{250-100}{200}\right)$$

$$\therefore \quad \phi = 36{,}8°$$

En consecuencia:

El voltaje adelanta a la corriente en 36,8°

Parte (b)

Sabemos que en un circuito "RLC" en serie se cumnple que:

$$\Delta V_R\,(t) = \Delta V_{máx}\,.\,\text{sen}\,(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_R\,(t) = (200 \times 10^{-3})\,(200)\,.\,\text{sen}\,(2\pi \times 60\,t)$$

$$\therefore \quad \Delta V_R\,(t) = (40{,}0\text{ V})\,\text{sen}\,(377\,t)$$

En consecuencia:
Su fase a la corriente es $\phi = 0°$

Parte (c)

Sabemos que en un circuito "RLC" en serie el voltaje a través del capacitor está dado por:

$$\Delta V_C = \Delta V_{máx}\,.\,\text{sen}(\omega t - \pi/2)$$

Donde: $\Delta V_{máx} = I_{máx}\,.\,X_C = (0{,}200)(100) = 20{,}0\text{ V}$

Entonces: $\Delta V_C(t) = (20{,}0\text{ V})\text{sen}(377t - \pi/2)$

En consecuencia : $\phi = -\pi/2$

Lo cual quiere decir que el voltaje está retrasado $\pi/2$ con respecto de la corriente ó la corriente adelanta al voltaje en $-\pi/2$ (–90°).

Parte (d)

Sabemos que en un circuito "RLC" en serie el voltaje a través del inductor está dado por:

$$\Delta V_L(t) = \Delta V_{máx}\,.\,\text{sen}(\omega t + \pi/2)$$

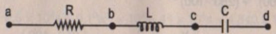
Donde: $\Delta V_{máx} = V_{máx}\,.\,X_L = (0{,}2)(250) = 50{,}0\text{ V}$

Entonces: $\Delta V_L(t) = (50{,}0\text{V})\,\text{sen}(377t + \pi/2)$

En consecuencia : $\phi = +\pi/2$

Lo cual quiere decir que el voltaje adelanta a la corriente en $+\pi/2$ ó 90°

64. Un suministro de potencia con $\Delta V_{rms} = 120$ V se conecta entre los puntos a y d en la figura P33.25. ¿A qué frecuencia entregará una potencia de 250 W?



Resolución :

Donde: $R = 40{,}0\ \Omega$, $L = 185$ mH , $C = 65\ \mu$F

$\Delta V_{rms} = 120$ V

Nos piden: f = ?, si entrega: $P_{entregada} = 250$ W

Sabemos que en un circuito en serie "RLC" se cumple que:

$$P_{entregada} = I_{rms}^2\,.\,R = \left(\frac{\Delta V_{rms}}{Z}\right)^2.\,R \;\Rightarrow\; \left[\frac{\Delta V_{rms}^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2}\right] \times R = 250$$

Donde: $X_L = 2\pi.f.L = 2\pi \times 185 \times 10^{-3}\,.\,f = 370\,\pi \times 10^{-3}\,.\,f$

$$X_C = \frac{1}{2\pi\,.\,f\,.\,C} = \frac{1}{2\pi \times 65 \times 10^{-6}.\,f} = \frac{10^6}{130\,\pi\,.\,f}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(120)^2 \times (40)}{(40)^2 + \left[370\,\pi \times 10^{-3}.f - \dfrac{10^6}{130\,\pi\,.\,f}\right]^2} = 250$$

$$\Rightarrow \quad (120)^2 \times 40 \times (130\pi\,.\,f)^2 = 250[40^2 \times (130\pi\,.\,f)^2 + (370\pi \times 130\pi \times f^2 \times 10^{-3} - 10^6)^2]$$

$$\Rightarrow \quad 9{,}6 \times 10^{10}\,.\,f^2 = 6{,}67 \times 10^{10}\,.\,f^2 + 250\,(474{,}73\,f^2 - 10^6)^2$$

Si: $f^2 = a$

Entonces: $2{,}9 \times 10^{10}\,.\,a = 250(474{,}73\,a - 10^6)^2$

$$\Rightarrow \quad 2{,}9 \times 10^{10}a = 5{,}63 \times 10^7.\,a^2 - 2{,}37 \times 10^{11}\,.\,a + 2{,}5 \times 10^{14}$$

$$\Rightarrow \quad 5{,}63 \times 10^7\,a^2 - 26{,}6 \times 10^{10}a + 2{,}5 \times 10^{14} = 0$$

$$\therefore \quad 5{,}63\,.\,a^2 - 26{,}6 \times 10^3a + 2{,}5 \times 10^7 = 0$$

$$\text{Entonces: } a = \frac{26{,}6\times10^3 \pm \sqrt{(26{,}6\times10^3)^2 - 4(2{,}5\times10^7)(5{,}63)}}{2(5{,}63)}$$

Luego: $a = 0{,}343 \times 10^4$ ó $a = 0{,}130 \times 10^4$

En consecuencia a:

$$\left.\begin{aligned} f &= \sqrt{0{,}343\times10^4} = 58{,}6\text{ Hz} \\ \text{ó}\quad f &= \sqrt{0{,}130\times10^4} = 36{,}0\text{ Hz} \end{aligned}\right\}\ \text{Entregará una potencia de 250 W}$$

65. El ejemplo 28.2 mostró que la potencia máxima se transfiere cuando la resistencia interna de una fuente de cd es igual a la resistencia de la carga. Es posible emplear un transformador para proporcionar máxima transferencia de potencia entre dos circuitos de ca que tienen diferentes impedancias. a) Demuestre que la relación de vueltas N_1/N_2 necesaria para cumplir esta condición es

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

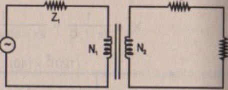
b) Suponga que usted desea emplear un transformador como un dispositivo de igualación de impedancia entre un amplificador de audio que tiene una impedancia de salida de 8,00 kΩ y un altavoz que tiene una impedancia de entrada de 8,00 Ω. ¿Cuál debe ser su relación N_1/N_2?

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\dfrac{N_1}{N_2} = \sqrt{\dfrac{Z_1}{Z_2}}$

Sea la figura:



Sabemos que en un transformador se cumple que:

$P_{entregada} = cte$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V_1^2}{Z_1} = \frac{\Delta V_2^2}{Z_2} \quad \therefore \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado se cumple que:

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1}.\Delta V_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{... (2)}$$

Igualando (1) = (2), resulta que: $\dfrac{N_1}{N_2} = \sqrt{\dfrac{Z_1}{Z_2}}$ Lqqd.

Parte (b)

Si: $Z_2 = 8 \times 10^3\ \Omega$ y $Z_1 = 8{,}00\ \Omega$

Entonces: $\dfrac{N_1}{N_2} = \sqrt{\dfrac{8 \times 10^3}{8}} = 31{,}6$

66. La figura P33.66a muestra un circuito RLC en paralelo, y el correspondiente diagrama de fasores se presenta en la figura P33.66b. El voltaje instantáneo y el voltaje rms a través de cada uno de los tres elementos del circuito son los mismos, y cada uno se encuentra en fase con la corriente que atraviesa el resistor. Las corrientes en C y L adelantan a o están retrasadas de la corriente en el resistor, como se muestra en la figura P33,66b. a) Muestre que la corriente rms entregada por la fuente es

$$I_{rms} = \Delta V_{rms} = \left[\frac{1}{R_2} + \left(\omega_C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{1/2}$$

b) Muestre que el ángulo de fase ϕ entre ΔV_{rms} e I_{rms} es

$$\tan\phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$

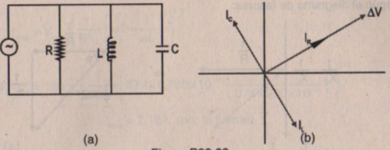


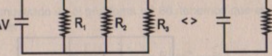
Figura P33.66

Resolución :

Parte (a)

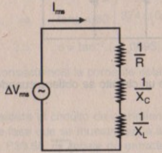
Por demostrar que: $I_{rms} = \Delta V_{rms} = \left[\dfrac{1}{R_2} + \left(\omega_o - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{1/2}$

Aplicando artificio: recordando:



$$\frac{1}{R_{equiv.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Entonces según la figura:



Donde: $\dfrac{1}{Z} = Z' = \sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}\right)^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{Z} = Z' = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

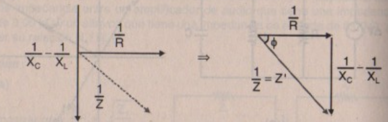
Entonces: $I_{rms} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{Z} = \left(\dfrac{1}{Z}\right).\Delta V_{rms} = Z'.\Delta V_{rms}$

$$\therefore \quad I_{rms} = \Delta V_{rms} \times \left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $\tan\phi = R\left(\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}\right)$

Según el diagrama de fasores:

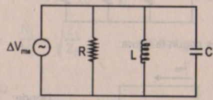


$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \qquad \therefore \quad \tan\phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

67. Un resistor de 80,0 Ω, un inductor de 200 mH y un capacitor de 0,150 μF se conecta en paralelo a través de una fuente de 130 V (rms) que opera a 374 rad/s. a) ¿Cuál es la frecuencia resonante del circuito? b) Calcule la corriente rms en el resistor, el inductor y el capacitor. c) ¿Cuál es la corriente rms entregada por la fuente? d) ¿La corriente se adelanta o está retrasada del voltaje? ¿En qué ángulo?

Resolución:

Sea la figura :



Donde : $R = 80\ \Omega$

$L = 200$ mH

$C = 0{,}150\ \mu F$

$\Delta V_{rms} = 120$ V

$\omega = 374$ rad/s

Parte (a)

Sabemos que la frecuencia de resonancia de un circuito se obtiene cuando:

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_L}$$

$$\Rightarrow \quad \omega \cdot C = \frac{1}{\omega \cdot L} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{10^6}{2\times10^{-1}\times(0{,}150)}} \qquad \therefore \quad f = 919 \text{ Hz}$$

Parte (c)

Por lo demostrado en el problema n.° 66 la corriente I_{rms} en un circuito en paralelo está dado por:

$$I_{rms} = V_{rms}\left(\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow I_{rms} = 120 \times \left[\frac{1}{80^2} + \left(374\times0{,}150\times10^{-6} - \frac{1}{374\times200\times10^{-3}}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad I_{rms} = 2{,}19\text{A} \ \text{(por la fuente)}$$

Parte (b)

Sabemos que: $I_{rms\ (resistor)} = \dfrac{\Delta V_{rms}}{R} = \dfrac{120}{80} = 1{,}5$ A

$$I_{rms\ (inductor)} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_L} = \frac{120}{374\times200\times10^{-3}} = 1{,}6 \text{ A}$$

$$I_{rms\ (capacitor)} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_C} = 120 \times (374 \times 0{,}150 \times 10^{-6}) = 6{,}73 \times 10^{-3} \text{ A}$$

Parte (d)

Por lo demostrado en el problema n.° 66, tenemos que en un circuito en paralelo se cumple que:

$$\tan\phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{\omega L}\right) = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = 80\left(374\times(0{,}150\times10^{-6}) - \frac{1}{374\times200\times10^{-3}}\right)$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}(-1{,}0695) = -46{,}7°$$

En consecuencia la corriente está retrasada −46,7°

68. Considere el circuito de corrimiento de fase que se muestra en la figura P33.68. El voltaje de entrada se describe mediante la expresión $\Delta v = (10{,}0 \text{ V})$ sen 200t (en unidades del SI). Suponiendo que $L = 500$ mH, encuentre a) el valor de R de modo que el voltaje de salida esté retrasado en 30,0° del voltaje de entrada, y b) la amplitud del voltaje de salida.

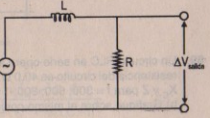


Figura P33.68

Resolución :

Donde: $\Delta V = 10{,}0\ V\ \text{sen}200t$
$R = ?$, Si $L = 500\ mH$

Parte (a)

Nos piden R = ?; si el voltaje de salida está retrasado en 30° del voltaje de entrada.

Sabemos que en un circuito en serie se cumple que:

$$\tan\phi = \tan(30°) = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega . L}{R} = \frac{200 \times 500 \times 10^{-3}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}577 . R = 100 \qquad \therefore \qquad R = 173{,}2\ \Omega$$

Parte (b)

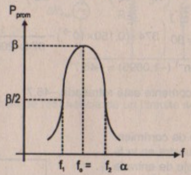
Sabemos que: $\Delta V_{\text{salida máxima}} = (I_{rms} \cdot \sqrt{2}) . R = \frac{\Delta V_{\text{máx. entrada}}}{Z} . R$

Donde: $Z = \sqrt{(173{,}2)^2 + (200 \times 500 \times 10^{-3})^2} = 200\ \Omega$

Entonces: $\Delta V_{\text{salida máxima}} = \frac{10{,}0}{200} \times (173{,}2) = 8{,}66\ V$

$$f = \sqrt{\frac{1}{a-b}} = \sqrt{\frac{1}{-79 \times 10^{-18} + 39{,}5 \times 10^{-9}}} = \alpha$$

Aproximadamente:



69. Un circuito RLC en serie opera a 2 000 Hz. A esta frecuencia, $X_L = X_C = 1\ 884\ \Omega$. La resistencia del circuito es 40,0 Ω. a) Prepare una tabla que muestre los valores de X_L, X_C y Z para f = 300; 600; 800; 1 000; 1 500; 2 000; 3 000; 4 000; 6 000 y 10 000 Hz. b) Grafique sobre el mismo conjunto de ejes X_L, X_C y Z como funciones de ln f.

Resolución : (Hacerlo en computadora)

Datos: Sea el circuito "LCR" en serie donde:

Si f = 2 000 Hz $\Rightarrow$ $X_L = X_C = 1\ 884\ \Omega$

Además: R = 40 Ω

Nos piden: tabla de valores para X_L, X_C y Z para: f = 300 Hz, 600 Hz, 800 Hz, 1 000 Hz, 1 500 Hz, 2 000 Hz.

Por dato: $X_L = X_C = 1\ 884$ cuando f = 2 000 Hz

Entonces: $\omega = 2\pi \times 2000 = 12{,}6 \times 10^3$ rad/s

Luego: $L = \frac{1{,}884 \times 10^3}{12{,}6 \times 10^3} = 149\ mH$ y $C = \frac{1}{(1{,}884 \times 10^3)(12{,}6 \times 10^3)} = 42nF$

Tabulando:

f(Hz)	X_L (W)	X_C (W)	Z (W)
300 Hz	282	12 600	12 300
600 Hz	565	6 290	5 720
800 Hz	754	4 710	3 960
1 000 Hz	942	3 770	2 830
1 500 Hz	1 410	2 510	1 100
2 000 Hz	1 880	1 880	40

70. Un circuito RLC en serie, en el cual R = 1,00 Ω, L = 1,00 mH y C = 1,00 nF se conecta a un generador de ca que entrega 1,00 V (rms). Elabore una gráfica cuidadosa de la potencia entregada al circuito como una función de la frecuencia y verifique que el ancho total del pico de resonancia a la mitad del máximo sea R/2πL.

Resolución : (Por computadora)

Datos: Sea el circuito "RLC" en serie donde:

R = 1,00 Ω, L = 1,00 mH , C = 1,00 nF

$\Delta V_{ca\ rms} = 1{,}00\ V$

Nos piden gráfica de la potencia en función de la frecuencia.

Sabemos que: $P_{prom} = I^2_{rms} . R$

Donde: $I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z} = \frac{\Delta V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$

Entonces: $$P_{prom} = \frac{\Delta V^2_{rms} . R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\Delta V^2_{rms} . \omega^2 . C . R}{R^2 . \omega^2 . C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{prom}(f) = \frac{\Delta V^2_{rms} . 4\pi^2 . C . R . f^2}{4\pi^2 . R^2 . C^2 . f^2 + (4\pi^2 . f^2 . LC - 1)^2}$$

Reemplazando datos:

$$P_{prom}(f) = \frac{(1)(4\pi^2)(10^{-9})(1).f^2}{4\pi^2 \times (1)(10^{-9})^2.f^2 + (4\pi^2.f^2.10^{-3}\times 10^{-9}-1)^2}$$

$$\therefore \quad P_{prom}(f) = \frac{39,5.f^2\times 10^{-9}}{39,5\times 10^{-18}f^2 + (39,5f^2\times 10^{-12}-1)^2}$$

Aproximando: $P_{prom}(f) = \dfrac{39,5\times 10^{-9}\times f^2}{79\times 10^{-18}.f^2+1}$

Empleando cálculo: $P_{prom}(f) = \dfrac{a.f^2}{bf^2+1}$

Entonces: $\dfrac{dP}{df} = \dfrac{2af(af^2-bf^2+1)}{(af^2+1)^2}$

$\therefore$ P_{prom} máxima cuando: $af^2 - bf^2 + 1 = 0$

Capítulo 34

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

ECUACIONES DE MAXWELL Y DESCUBRIMIENTOS DE HERTZ

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS:

1. Si la Estrella del Norte, o Polaris, se apagara hoy, ¿en qué año desaparecería de nuestra visión? La distancia desde la Tierra a Polaris es alrededor de $6,44 \times 10^{18}$ m.

Resolución:

Datos: distancia = $6,44 \times 10^{18}$ m ; T = ?

Sabemos que: $\lambda.f = c = \lambda.\dfrac{1}{T} = \dfrac{d}{T}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{d}{c} = \frac{6,44\times 10^{18}\,m}{3,00\times 10^8\,m/s}\times\left(\frac{1\text{ año}}{365\,d}\times\frac{1\text{día}}{24\,h}\times\frac{1h}{3\,600\,s}\right)$$

Por lo tanto: T = 680 años

En consecuencia: La estrella polaris desaparecería de nuestra visión en el año 2 680

2. La rapidez de una onda electromagnética que viaja en una sustancia transparente no magnética es $v = \dfrac{1}{\sqrt{k.\varepsilon.\mu_o}}$, donde k es la constante dieléctrica de la sustancia. Determine la rapidez de la luz en el agua, la cual tiene una constante dieléctrica a frecuencias ópticas de 1,78.

Resolución:

Por dato: $v = \dfrac{1}{\sqrt{k.\varepsilon.\mu_o}}$ (para una sustancia transparente)

Nos piden: $v_{en\ el\ agua} = ?$, si $k = 1,78$

Sabemos que por condición se cumple que:

$$v = \frac{1}{\sqrt{(1,78)(4\pi\times 10^{-7})(8,85\times 10^{-12})}}$$

$$\therefore \quad v_{en\ el\ agua} = 2,25\times 10^8\ m/s$$

3. Una onda electromagnética en el vacío tiene una amplitud de campo eléctrico de 220 V/m. Calcule la amplitud del campo magnético correspondiente.

Resolución :

Datos: $E_{máx} = 220$ V/m ; $B_{máx} = ?$

Sabemos que en una onda electromagnética se cumple que:

$$\frac{E_{máx}}{B_{máx}} = c$$

$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{220}{3{,}00\times10^8} \qquad \therefore \; B_{máx} = 733 \times 10^{-9}\ \text{T} \equiv 733\ \text{nT}$$

4. Calcule el valor máximo del campo magnético de una onda electromagnética en un medio donde la rapidez de la luz es dos tercios de la rapidez de la luz en el vacío, y donde la amplitud del campo eléctrico es de 7,60 mV/m.

Resolución :

Datos: $E_{máx} = 7{,}60 \times 10^{-3}$ V/m ; donde: $c_{medio} = \frac{2}{3}\, c_{vacío}$

Sabemos que en una onda electromagnética se cumple que:

$$\frac{E_{máx}}{B_{máx}} = c_{medio} = \frac{2}{3}\, c_{vacío}$$

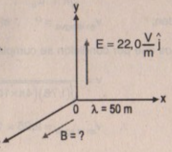
$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{3E_{máx}}{2c_{vacío}} = \frac{3\times\left(7{,}60\times10^{-3}\right)}{2\times\left(3{,}00\times10^{8}\right)}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 38 \times 10^{-12}\ \text{T} \equiv 38\ \text{pT}$$

5. La figura 34.3a muestra una onda sinusoidal electromagnética plana que se propaga en lo que se eligió como la dirección x. Suponga que la longitud de onda es 50,0 m y que el campo eléctrico vibra en el plano xy con una amplitud de 22,0 V/m. Calcule a) la frecuencia de la onda y b) la magnitud y dirección de B cuando el campo eléctrico tiene su valor máximo en la dirección y negativa. c) Escriba una expresión para B en la forma

$$B = B_{máx} \cos(kx - \omega t)$$

Con valores numéricos para $B_{máx}$, k y ω.



Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\lambda . f = c \quad \Rightarrow \quad F = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00\times10^8}{50}$

$\therefore \quad f = 6{,}00 \times 10^6\ \text{Hz} \equiv 6{,}00\ \text{MHz}$

Parte (b)

Sabemos que: $\frac{E_{máx}}{B_{máx}} = c$

$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{22{,}0\ \text{V/m}}{3{,}00\times10^8}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 73{,}3 \times 10^{-9}\ \text{T} \equiv 73{,}3\ \text{nT (magnitud)}$$

Luego la dirección será: $\vec{B}_{máx} = \frac{\vec{E}_{máx}}{\vec{c}} = +\,73{,}3\ \text{nT}\,(-\hat{k})$

Parte (c)

Sabemos que: $\omega = 2\pi\, .\, f = 2\pi \times 10^6 \times 6 = 12\pi \times 10^6$ rad/s $= 3{,}77 \times 10^7\ \text{s}^{-1}$

Además: $\frac{\omega}{k} = c$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{c}{\omega} = \frac{3{,}00\times10^8}{12\pi\times10^6} = 0{,}126$$

Entonces:

$$B(x;\, t) = (-73{,}3\ \text{nT}) \cos[0{,}126x - 3{,}77 \times 10^7 t]\ \hat{k}$$

6. Escriba expresiones para los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana sinusoidal que tiene una frecuencia de 3,00 GHz y viaja en la dirección x positiva. La amplitud del campo eléctrico es 300 V/m

Resolución :

Datos : $f = 3{,}00 \times 10^9$ Hz $\quad E_{máx} = 300$ V/m

Sabemos que las expresiones para una ecuación de onda están dadas por:

$$B(x, t) = B_{máx} . \cos(kx - \omega t)$$

$$E(x, t) = E_{máx} . \cos(kx - \omega t)$$

Donde: $B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{3\times10^2}{3\times10^8} = 1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{T}$

$$\omega = 2\pi\, .\, f = 2(3{,}1416)(3{,}00 \times 10^9) = 18{,}85 \times 10^9\ \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{18{,}85\times10^9}{3{,}00\times10^8} = 62{,}8$$

En consecuencia:

$$B(x;t) = (1{,}00\ \mu T).\cos(62{,}8x - 18{,}85 \times 10^9 t)$$
$$E(x;t) = (300\ V/m)\cos(62{,}8x - 18{,}85 \times 10^9 t)$$

7. En unidades SI el campo eléctrico en una onda electromagnética se describe por medio de

$$E_y = 100\ \text{sen}\,(1{,}00 \times 10^7\, x - \omega t)$$

Encuentre a) la amplitud del campo magnético correspondiente, b) la longitud de onda λ, y c) la frecuencia f.

Resolución :

Datos : $E_y = 100\text{sen}(1{,}00 \times 10^7 x - \omega t)$

Parte (a)

Sabemos que en una onda electromagnética se cumple que:

$$\frac{E_{máx}}{B_{máx}} = c \quad \Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{1{,}00\times10^2}{3{,}00\times10^8}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 0{,}333\ \mu T$$

Parte (b)

Sabemos que $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2(3{,}1416)}{1{,}00\times10^7}$

$$\therefore \quad \lambda = 0{,}628\ \mu m$$

Parte (c)

Sabemos que $\lambda \,.\, f = c$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00\times10^8}{0{,}628\times10^{-6}}$$

$$\therefore \quad f = 477 \times 10^{12}\ Hz \equiv 477\ THz$$

8. Verifique por sustitución que las siguientes ecuaciones son soluciones para las ecuaciones 34.8 y 34.9, respectivamente:

$$E = E_{máx}\cos(kx - \omega t)$$
$$B = B_{máx}\cos(kx - \omega t)$$

Resolución :

Nos piden verificar que: $\quad E = E_{máx}.\cos(kx - \omega t)$

$\qquad B = B_{máx}.\cos(kx - \omega t)$

Son soluciones de:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_o\,\varepsilon_o.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_o\,\varepsilon_o.\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Tenemos que: $\quad \dfrac{\partial E}{\partial x} = -E_{máx}.k.\text{sen}(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_{máx}.k^2.\text{sen}(kx - \omega t)$$

Por otro lado: $\quad \dfrac{\partial E}{\partial t} = E_{máx}.\omega.\text{sen}(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -E_{máx}.\omega^2.\cos(kx - \omega t)$$

Entonces: reemplazando:

$$-E_{máx}.k^2.\cos(kx - \omega t) = (\mu_o\,\varepsilon_o).(-E_{máx}.\omega^2.\cos[kx - \omega t])$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_o\,\varepsilon_o} = \frac{\omega^2}{k^2} \quad \therefore \quad \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\,\varepsilon_o}} = c \ \text{(que es cierto)}$$

En consecuencia:

$E = E_{máx}.\cos(kx - \omega t)$ si es solución de la ecuación

Por otro lado:

Tenemos que: $\quad \dfrac{\partial B}{\partial x} = -B_{máx}.k\,\text{sen}(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -B_{máx}.k^2.\cos(kx - \omega t)$$

Además: $\quad \dfrac{\partial B}{\partial t^2} = B_{máx}.\omega.\text{sen}(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -B_{máx}.\omega^2.\cos(kx - \omega t)$$

Luego reemplazando:

$$-B_{máx}.k^2.\cos(kx - \omega t) = (\mu_o\,\varepsilon_o).-B_{máx}.\omega^2.\cos(kx - \omega t)$$

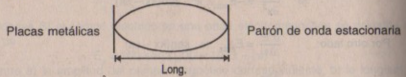
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_o\,\varepsilon_o} = \frac{\omega^2}{k^2} \qquad \therefore \quad \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\,\varepsilon_o}} = c\ \text{(que es cierto)}$$

En consecuencia:

$B = B_{máx}.\cos(kx - \omega t)$ es solución de la ecuación

9. **Problema de repaso.** Ondas de radio establecen un patrón de interferencia de onda estacionaria entre dos placas metálicas separadas 2,00 m. Ésta es la distancia mínima entre las placas que producirá un patrón de onda estacionaria. ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

Resolución :



De nodo a nodo hay: $\dfrac{\lambda}{2}$ = Longitud = 2,00 m (por dato)

$$\Rightarrow \lambda = 4{,}00 \text{ m}$$

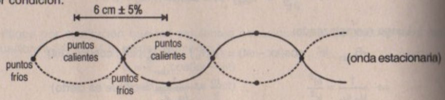
Luego: $f_1 = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3{,}00\times10^8}{4{,}00} = 75 \times 10^6 \text{ Hz} \equiv 75 \text{ MHz}$

10. Un horno de microondas es activado por un tubo de electrones llamado magnetrón, el cual genera ondas electromagnéticas de 2,45 GHz de frecuencia. Las microondas entran al horno y se reflejan en las paredes. El patrón de onda estacionaria producido en el horno puede cocinar comida de manera irregular, con puntos calientes en la comida en los antinodos y puntos fríos en los nodos, de modo que con frecuencia se usa una mesa giratoria para rotar la comida y distribuir la energía. Si en vez de usar un horno de microondas con una mesa giratoria, como se supone que debe hacerse, se usa con un platón en una posición fija, los antinodos pueden aparecer como marcas de quemadura sobre alimentos como tiras de zanahoria o queso. La distancia de separación entre las quemaduras se mide en 6 cm ± 5%. A partir de estos datos calcule la rapidez de las microondas.

Resolución :

Datos: $f_{ondas} = 2{,}45 \times 10^9$ Hz, nos piden: velocidad de las microondas

Por condición:



Recordando:

Sabemos que: de antinodo a antinodo hay $\dfrac{\lambda}{2}$ onda; es decir entre 2 puntos calientes; entonces:

$$\frac{\lambda}{2} = \text{Long.} = v_{ondas} \cdot \text{tiempo}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} \times f = v_{ondas\ (microondas)}$$

$$\Rightarrow 2{,}45 \times 10^9 \times \left(\frac{6\times10^{-2}}{2}\right) = v_{ondas\ microondas}$$

Por lo tanto: $v_{ondas\ microondas} = 73{,}5 \times 10^6 \pm 5\%$ m/s

ENERGÍA TRANSPORTADA POR ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

11. ¿Cuánta energía electromagnética por metro cúbico está contenida en la luz solar si la intensidad de la misma en la superficie terrestre bajo cielo despejado es de 1 000 W/m²?

Resolución :

Datos: $I = 100 \text{ W/m}^2$

Nos piden: $\dfrac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \mu_E = ?$

Sabemos que: $I = S_{prom} = c \cdot \mu_E \Rightarrow \mu_E = \dfrac{I}{c} = \dfrac{1{,}00\times10^3}{3{,}00\times10^8}$

$$\therefore \mu_E = 3{,}33 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3 \equiv 3{,}33\ \mu\text{J/m}^3$$

12. Una estación de radio de AM transmite isotrópicamente (de igual manera en todas direcciones) con una potencia promedio de 4,00 kW. Una antena receptora de dipolo de 65,0 cm de largo se localiza a 4,00 millas del transmisor. Calcule la fem inducida por esta señal entre los extremos de la antena receptora.

Resolución :

Datos: $P_{prom\ (estación)} = 4{,}00$ kW
Long. antena = 0,65 m
Distancia = 4,00 millas ≡ $6{,}44 \times 10^3$ m
$\varepsilon_{ind} = ?$

Sabemos que (recordando) la intensidad de onda a una determinada distancia "d" está dada por: r

$$I = \frac{P_{prom.}}{4\pi d^2} = \frac{E_{máx}}{2\mu_o . c}$$

$$\Rightarrow E_{máx} = \sqrt{\frac{2\mu_o . c . P_{prom}}{4\pi . d^2}} = \sqrt{\frac{(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)(4{,}00\times10^3)}{2\pi(6{,}44\times10^3)^2}}$$

$$\therefore E_{máx} = 76 \times 10^{-3} \text{ V/m} \equiv 76 \text{ mV/m}$$

Luego:
Por la ley de Maxwell (Faraday)

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \varepsilon_{ind}$$

$\Rightarrow \quad E_{máx} \cdot (2\pi \cdot r) = \varepsilon_{ind} \Rightarrow \varepsilon_{ind} = 76 \times 10^{-3} \times (2\pi \times 0,65)$

$\therefore \quad \varepsilon_{ind} = 0,31$ V

13. ¿Cuál es la magnitud promedio del vector de Poynting a 5,00 millas de un transmisor de radio que emite su señal isotrópicamente con una potencia promedio de 250 kW?

Resolución :

Datos: $d = 5,00$ millas $\equiv 8,04 \times 10^3$ m
$P_{prom} = 250$ kW
$S_{prom} = ?$

Recordando: $I_{onda} = \dfrac{P_{prom}}{4\pi . d^2} = S_{prom}$

$$\Rightarrow \quad S_{prom} = \frac{250\times10^3}{4\pi\times\left(8,04\times10^3\right)^2}$$

$\therefore \quad S_{prom} = 307 \times 10^{-6}$ W/m² $\equiv 307$ μW/m²

14. Una fuente de luz monocromática emite 100 W de potencia electromagnética uniformemente en todas las direcciones. a) Calcule la densidad de energía del campo eléctrico promedio a 1,00 m de la fuente. b) Calcule la densidad de energía del campo magnético promedio a la misma distancia de la fuente. c) Encuentre la intensidad de onda en este punto.

Resolución :

Datos: P = 100 W

Parte (a)

Nos piden $\mu_E = ?$ a $d = 1,00$ m de la fuente

Sabemos que: $I = S_{prom} = \dfrac{P}{4\pi . d^2} = \dfrac{1,00\times10^2}{4\pi\times(1,00)^2}$

$\therefore \quad I = 7,96$ W/m²

Por otro lado: $S_{prom} = I = \dfrac{E^2_{máx}}{2\mu_o C} = \dfrac{c}{2\mu_o}B^2_{máx}$

Nos piden: $\mu_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_o \cdot E^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_o\ (B^2 \cdot C^2)$

Como: $I = S = c \cdot \mu_{total}$

$\Rightarrow \quad I = c \cdot (\mu_E + \mu_B) = c(2\ \mu_E)$

$$\Rightarrow \quad \mu_E = \frac{I}{2.c} = \frac{7,96}{2\times\left(3,00\times10^8\right)}$$

$\therefore \quad \mu_E = 13,27 \times 10^{-9}$ J/m³

Parte (b)

En una onda electromagnética se cumple que:

$I = S_{prom} = c \cdot m_{total\ prom}$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{1}{2}c \cdot (2\ \mu_{E\ prom})$

$\Rightarrow \quad I = c \cdot \mu_E = (3,00 \times 10^8) \cdot \mu_{E\ prom}$

$\therefore \quad \mu_{E\ prom} = 26,5 \times 10^{-9}$ J/m³

15. Una comunidad planea construir una instalación para convertir la radiación solar en potencia eléctrica. Requieren 1,00 MW de potencia, y el sistema que se va a instalar tiene una eficiencia de 30,0% (esto es, 30,0% de la energía solar incidente sobre la superficie se convierte en energía eléctrica). ¿Cuál debe ser el área efectiva de una superficie que absorbe a la perfección utilizada en una instalación de este tipo, suponiendo una intensidad constante de 1 000 W/m²?

Resolución :

Datos: P = 1,00 MW con 30% de eficiencia
I = 1 000 W/m²

Nos piden Área = ?

Recordando: $I = \dfrac{\text{potencia}}{\text{área}}$

$$\Rightarrow \quad \text{área} = \frac{30\%\ \text{potencia}}{I} = \frac{(0,30)\left(1,00\times10^6\right)}{1,00\times10^3}$$

$\therefore$ área efectiva = 300 m²

16. Suponiendo que la antena de una estación de radio de 10,0 kW radia ondas electromagnéticas esféricas, calcule el valor máximo del campo magnético a 5,00 km de la antena, y compare este valor con el campo magnético superficial de la Tierra.

Resolución :

Datos: P = 10,0 kW
Distancia = 5,00 km
$B_{máx} = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{P}{4\pi d^2} = \dfrac{c.B_{máx}^2}{2\mu_o}$

$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \sqrt{\frac{\mu_o.P}{2\pi c.d^2}} = \sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}\times(10\times10^3)}{2\pi\times(3\times10^8)(5\times10^3)^2}}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 516 \times 10^{-12}\ T \equiv 516\ pT$$

17. El filamento de una lámpara incandescente tiene una resistencia de 150 Ω y conduce una corriente directa de 1,00 A. El filamento mide 8,00 cm de largo y 0,900 mm de radio. a) Calcule el vector de Poynting en la superficie del filamento. b) Encuentre la magnitud de los campos eléctrico y magnético en la superficie del filamento.

Resolución:

Datos: $R_{lámpara} = 150\ \Omega$; $I = 1,00\ A$

Longitud $= 0,08\ m$; radio $= 0,900\ mm$

Parte (a)

Sabemos que: $S = I_{lamp.} = \dfrac{\text{Potencia}}{A_{lateral}}$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{I^2.R}{2\pi.r.\text{longitud}} = \frac{(1,00)^2(150)}{2\pi(0,9\times10^{-3})(0,08)}$$

$$\therefore \quad S = 332 \times 10^2\ W/m^2 \equiv 332\ kW/m^2 \text{ (radialmente)}$$

Parte (b)

Recordando: $\Delta V = E.d$

$$\Rightarrow \quad I.R = E.Long \Rightarrow E = \frac{I.R}{long.} = \frac{(1,00)(150)}{0,08}$$

$$\therefore \quad E = 1,88 \times 10^3\ V/m$$

Luego: $B = \dfrac{E}{c} = \dfrac{1,88\times10^3}{3,00\times10^8}$

$$\therefore \quad B = 222 \times 10^{-6}\ T \equiv 222\ \mu T$$

18. En una región del espacio libre del campo eléctrico en algún instante de tiempo es E = (80,0i + 32,0j – 64,0k) N/C y el campo magnético es B = (0,200i + 0,080 0j + 0,290k) μT. a) Muestre que los dos campos son perpendiculares entre sí. b) Determine el vector de Poynting para estos campos.

Resolución:

Datos: $\vec{E} = (80\hat{i} + 32\hat{j} - 64\hat{k})\ N/C$

$\vec{B} = (0,200\ \hat{i} + 0,080\hat{j} + 0,290\hat{k})\ \mu T$

Parte (a)

Por demostrar que: $\vec{B} \perp \vec{E}$

Supongamos que (por hipótesis) $\vec{B} \perp \vec{E}$

Entonces: $|\vec{E} \times \vec{B}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{B}|$

Luego:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 80 & 32 & -64 \\ 0,2 & 0,08 & 0,290 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \times \vec{B} = \hat{i}\begin{vmatrix} 32 & -64 \\ 0,08 & 0,290 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 80 & -64 \\ 0,2 & 0,290 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 80 & 32 \\ 0,2 & 0,08 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} \times \vec{B} = (14,4\hat{i} - 36\hat{j} + 0\hat{k}) \times 10^{-6}$$

Luego: $|\vec{E} \times \vec{B}| = \sqrt{(14,4)^2 + (36)^2} = 38,77 \times 10^{-6}$ ... (α)

Por otro lado: $|\vec{E}| = \sqrt{(80)^2 + (32)^2 + (64)^2} = 107,33$

$|\vec{B}| = \sqrt{(0,200)^2 + (0,080)^2 + (0,290)^2} = 0,361 \times 10^{-6}$

Luego: $|\vec{E}| \cdot |\vec{B}| = 38,77 \times 10^{-6}$ ... (β)

En consecuencia: $\alpha = \beta$

Por lo tanto: $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son ⊥ entre sí.

Parte (b)

Sabemos que: $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_o} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \vec{S} = \frac{1}{4\pi\times10^{-7}} \times (14,4\hat{i} - 36\hat{j} + 0\hat{k}) \times 10^{-6}$$

$$\therefore \quad \vec{S} = 11,46\hat{i} - 28,65\hat{j} + 0\hat{k}$$

19. El filamento de un foco eléctrico tiene una resistencia de 110 Ω. El foco se conecta en una toma estándar de 120 V(rms) y emite 1,00% del potencial eléctrico que se le suministra como radiación electromagnética de frecuencia f. Suponiendo que el foco se cubre con un filtro que absorbe todas las demás frecuencias, encuentre la amplitud del campo magnético a 1,00 m del foco.

Resolución :

Datos: $R_{foco} = 110\ \Omega$; $\Delta V = 120$ V (rms)

$1{,}00\ \%\ P_{foco}$ = onda ó radiación electromagnética

Nos piden $B_{máx}$ a una distancia de 1,00 m

Sabemos que: $$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{(120)^2}{110} = 130{,}9\ \text{W}$$

Entonces: $$I = \frac{1{,}00\%P}{4\pi.d^2} = S_{prom} \Rightarrow \frac{0{,}01\times(130{,}9)}{4\pi(1{,}00)^2} = \frac{c.B_{máx}^2}{2\mu_o}$$

$$\Rightarrow B_{máx} = \sqrt{\frac{2\mu_o\times(0{,}01)(130{,}9)}{4\pi\times(3{,}00\times10^8)}}$$

$$\Rightarrow B_{máx} = \sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}\times(0{,}01)\times(130{,}9)}{2\pi\times(3{,}00\times10^8)}}$$

$$\therefore\quad B_{máx} = 29{,}5\times10^{-9}\ \text{T} \equiv 29{,}5\ \text{nT}$$

20. Cierto horno de microondas contiene un magnetrón con una salida de 700 W de potencia de microonda para una potencia eléctrica de entrada de 1,40 kW. Las microondas son transferidas por completo desde el magnetrón hacia adentro de la cámara del horno a través de una onda guía, la cual es un tubo metálico de sección transversal rectangular con un ancho de 6,83 cm y una altura de 3,81 cm. a) ¿Cuál es la eficiencia del magnetrón? b) Suponiendo que la comida está absorbiendo todas las microondas producidas por el magnetrón, y que no se refleja energía de regreso a la onda guía, encuentre la dirección y magnitud del vector de Poynting, promediado sobre el tiempo, en la onda guía cerca de la entrada a la cámara del horno. c) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico máximo en este punto?

Resolución :

Datos: $P_{salida} = 700$ W

$P_{entrada} = 1{,}40$ kW

Altura del tubo de entrada metálico = 3,81 cm

Ancho del tubo metálico = 6,83 cm

Parte (a)

Eficiencia: $$\frac{P_{salida}}{P_{entrada}}\times100\% = \frac{700}{1{,}40\times10^3}\times100$$

$$\therefore\quad \text{Eficiencia} = 50\%$$

Parte (b)

Sabemos que: $$I = S_{prom} = \frac{P_{salida}}{\text{área}} = \frac{700}{(3{,}81)(6{,}83)\times10^{-4}}$$

$$\Rightarrow\quad I = S_{prom} = 269\times10^3\ \text{W/m}^2 \equiv 269\ \text{KW/m}^2$$

Parte (c)

Sabemos que en una onda electromagnética se cumple que:

$$S_{prom} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_o.c}$$

$$\Rightarrow\quad E_{máx} = \sqrt{2\mu_o.c.S_{prom}}$$

$$\Rightarrow\quad E_{máximo} = \sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times(3{,}00\times10^8)(269\times10^3)}$$

$$\therefore\quad E_{máximo} = 14{,}2\times10^3\ \text{V/m} \equiv 14{,}2\ \text{kV/m}$$

21. En lagunas fábricas se emplean rayos láser de alta potencia para cortar ropa y metal (Fig.P34.21). Uno de dichos rayos tiene un haz de 1,00 mm de diámetro y genera un campo eléctrico con amplitud de 0,700 MV/m en el blanco. Encuentre a) la amplitud del campo magnético producido, b) la intensidad del láser y c) la potencia entregada por el láser.

Figura P34.21 Un dispositivo para cortar con láser montado sobre un brazo robot se está usando para cortar una placa metálica. (Philipe Plailly/SPL/Photo Researchers)

Resolución :

Datos: Diámetro del Haz = 1,00 mm

$E_{máximo} = 0{,}700$ MV/m

Parte (a)

Sabemos que la intensidad del haz está dado por:

$$I = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_o.c} = \frac{c.B_{máx}^2}{2\mu_o}$$

$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{0{,}700\times10^6}{3{,}00\times10^8}$$

$$\therefore \quad B_{máximo} = 2{,}33 \times 10^{-3}\ T \equiv 2{,}33\ mT$$

Parte (b)

Tenemos que: $I = \dfrac{E^2_{máx}}{2\mu_o.c} = \dfrac{(0{,}700\times10^6)^2}{2\times4\pi\times10^{-7}\times(3\times10^8)}$

$$\therefore \quad I_{láser} = 650 \times 10^6\ W/m^2 \equiv 650\ MW/m^2$$

Parte (c)

Recordando: $I = \dfrac{P_{entregada}}{área}$

$$\Rightarrow \quad P_{entregada} = I\ .\ área = (650 \times 10^6) \times (\pi\ .\ 0{,}5 \times 10^{-3})^2$$

$$\therefore \quad P_{entregada} = 510\ W$$

22. ¿A qué distancia de una fuente puntual de una onda electromagnética de 100 W es $E_{máx} = 15{,}0$ V/m?

Resolución :

Datos: $P = 100$ W
$E_{máx} = 15{,}0$ V/m

Nos piden: distancia a una fuente = ?

Sabemos que: $I = \dfrac{P}{4\pi.r^2} = \dfrac{E^2_{máx}}{2\mu_o.c}$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2\mu_o.c.P}{4\pi.E^2_{máximo}}} = \sqrt{\frac{2\times4\pi\times10^{-7}\times(3{,}00\times10^8)(100)}{4\pi\times(15{,}0)^2}}$$

$$\therefore \quad r = 5{,}16\ m$$

23. Un rayo láser de 10,0 mW tiene un diámetro de haz de 1,60 mm. a) ¿Cuál es la intensidad de la luz, suponiendo que ésta es uniforme en todo el haz circular? b) ¿Cuál es la densidad de energía promedio del haz?

Resolución :

Datos: $P_{rayo\ láser} = 10{,}0$ mW
Diámetro del haz = 1,60 mm

Parte (a) $I = \dfrac{P_{rayoláser}}{\frac{\pi}{4}(diámetro)^2} = \dfrac{10{,}0\times10^{-3}\times4}{\pi\times(1{,}60\times10^{-3})^2}$

$$\therefore \quad I_{de\ la\ luz} = 4{,}97 \times 10^3\ W/m^2 \equiv 4{,}97\ kW/m^2$$

Parte (b)

Sabemos que: $I = S_{prom} = c\ .\ \mu_{total\ prom}$

$$\Rightarrow \quad \mu_{total\ prom} = \frac{I}{c} = \frac{4{,}97\times10^3}{3{,}00\times10^8}$$

$$\therefore \quad \mu_{total\ prom} = 16{,}6 \times 10^{-6}\ J/m^3 \equiv 16{,}6\ \mu J/m^3$$

24. En cierto lugar de la Tierra, el valor rms del campo magnético provocado por la radiación solar es 1,80 µT. A partir de este valor calcule a) el campo eléctrico promedio debido a la radiación solar, b) la densidad de energía promedio de la componente solar de la radiación electromagnética en esta localidad, y c) la magnitud del vector de Poynting para la radiación del Sol. d) Compare el valor encontrado en la parte c) con el valor de la intensidad solar dado en el ejemplo 34.5.

Resolución :

Datos: $B_{rms} = 1{,}80 \times 10^{-6}$ T (provocado por la radiación solar)

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{E_{rms}}{B_{rms}} = c$

$$\Rightarrow \quad E_{rms} = c\ .\ B_{rms} = (3{,}00 \times 10^8)(1{,}80 \times 10^{-6}) = 540\ V/m$$

Parte (b)

Sabemos que $\mu_{total\ prom} = \dfrac{1}{2}\epsilon_o\ .\ E^2{}_{máx} = \dfrac{1}{2}\epsilon_o\left(\dfrac{E_{rms}}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad \mu_{total\ prom} = 0{,}25\ .\ (8{,}85 \times 10^{-12})(540)^2$$

$$\therefore \quad \mu_{total\ prom} = 645 \times 10^{-9}\ J/m^3 \equiv 645\ nJ/m^3$$

Parte (c)

Sabemos que: $S = \dfrac{E.B}{\mu_o} = \dfrac{E_{rms}.B_{rms}}{2\mu_o} \Rightarrow S = \dfrac{540\times1{,}80\times10^{-6}}{2(4\pi\times10^{-7})}$

$$\therefore \quad S = 3{,}86.75\ W/m^2$$

MOMENTUM Y PRESIÓN DE RADIACIÓN

25. Una onda de radio transmite 25,0 W/m² de potencia por unidad de área. Una superficie plana de área A es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Calcule la presión de radiación sobre ella si la superficie es un absorbente perfecto.

Resolución :

Datos: $\dfrac{P}{\text{área}} = 25{,}0\ W/m^2$

Nos piden presión de radiación = ?

Sabemos que: Presión $= \dfrac{1}{A} = \dfrac{dp}{dt}$

Pero: $p = \dfrac{U}{c} \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{c}\dfrac{dU}{dt} = \dfrac{1}{c}\,.\,P$

Entonces: Presión $= \dfrac{1}{c}\,.\,\dfrac{\text{Potencia}}{\text{área}} = \dfrac{1}{3{,}00\times10^8} \times (25{,}0)$

$\therefore$ Presión de radiación $= 83{,}3 \times 10^{-9}\ N/m^2 \equiv 83{,}3$ nPa

26. Una onda electromagnética plana que tiene una intensidad de $6{,}00\ W/m^2$ golpea un pequeño espejo de bolsillo, cuya área es de $40{,}0\ cm^2$, mantenido perpendicular a la onda que se aproxima. a) ¿Qué *momentum* transfiere la onda al espejo cada segundo? b) Encuentre la fuerza que la onda ejerce sobre el espejo.

Resolución :

Datos: $I_{onda} = 6{,}00\ W/m^2$
Área $= 40{,}0\ cm^2$

Parte (a)

Sabemos que: $p = \dfrac{U}{c}$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}.\frac{dU}{dt} = \frac{1}{c} \times \text{Potencia}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \times I_{onda} \times \text{Área} = \frac{6{,}00\times40\times10^{-4}}{3{,}00\times10^8}$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = 80 \times 10^{-12}\ \frac{Js}{m}$$

Parte (b)

Sabemos que: Presión $= \dfrac{\text{potencia}}{A.c} = \dfrac{I_{onda}}{c}$

$$\Rightarrow \text{Presión} = \frac{6{,}00}{3{,}00\times10^8} = 20 \times 10^{-9}\ N/m^2$$

Luego: $F = 20 \times 10^{-9} \times (40 \times 10^{-4}) = 80 \times 10^{-12}\ N \equiv 80$ pN

27. Un posible medio para volar en el espacio es poner una lámina aluminizada perfectamente reflectora en la órbita de la Tierra y usar la luz del Sol para empujar esta "vela solar". Suponga que una vela de $6{,}00 \times 10^5\ m^2$ de área y 6 000 kg de masa se pone en órbita frente al Sol. a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre la vela? b) ¿Cuál es la aceleración de la misma? c) ¿Cuánto tarda la vela en llegar a la Luna, a $3{,}84 \times 10^8$ m de distancia? Ignore todos los efectos gravitacionales, suponga que la aceleración calculada en el inciso b) permanece constante y considere una intensidad solar de $1\,340\ W/m^2$.

Resolución :

Datos: Área de la vela solar $= 6{,}00 \times 10^5\ m^2$
Masa de la vela = 6 000 kg

Parte (a)

Considerando $I_{solar} = 1\,340\ W/m^2$

Entonces: Presión $= \dfrac{F}{\text{área}} = \dfrac{2I}{c}$ (perfectamente reflectora)

$$\Rightarrow F = \frac{\text{área}\times I}{c} = \frac{(6{,}00\times10^5)(1340)}{3{,}00\times10^8} \quad \therefore F = 5{,}36\ N$$

Parte (b)

Sabemos que: $F = m.a$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{5{,}36}{6{,}00\times10^3}$$

$$\therefore a = 8{,}93 \times 10^{-4}\ m/s^2$$

Parte (c)

Considerar: distancia a la Luna $= 3{,}84 \times 10^8$ m

Por cinemática: $x = \dfrac{1}{2}\,.\,at^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.x}{a}} = \sqrt{\frac{2\times(3{,}84\times10^8)}{8{,}99\times10^{-4}}}$$

$$\therefore t_{tarda} = 0{,}927 \times 10^6\ s \equiv 10{,}7 \text{ días}$$

28. Un rayo láser de 100 mW se refleja de regreso sobre sí mismo por medio de un espejo. Calcule la fuerza sobre el espejo.

Resolución :

Datos: $P_{rayo} = 100$ mW
$F_{\text{sobre el espejo}} = ?$

Sabemos que en un espejo ocurre una absorción completa y se cumple que:

$$P = \frac{2S}{c} = \frac{2I}{c}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{2.I.A}{c} = \frac{2.Potencia}{c}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{sobre el espejo}} = \frac{2\times(100\times10^{-3})}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad F_{\text{sobre el espejo}} = 0{,}67 \times 10^{9}\ \text{N} \equiv 0{,}67\ \text{nN}$$

29. Un láser de helio-neón de 15,0 mW ($\lambda = 632{,}8$ nm) emite un haz de sección transversal circular cuyo diámetro es de 2,00 mm. a) Encuentre el campo eléctrico máximo en el haz. b) ¿Qué energía total está contenida en una longitud de 1,00 m del haz? c) Determine el *momentum* transportado por una longitud de 1,00 m del haz.

Resolución:

Datos: $P_{\text{láser}} = 15{,}0$ mW (l = 632,8 nm)

Diámetro del haz = 2,00 mm

Parte (a)

Sabemos que: $$I = \frac{P}{\text{área}} = \frac{E^2_{\text{máx}}}{2\mu_o.c}$$

$$E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2\mu_o.c.P}{\frac{\pi}{4}\times\text{diámetro}^2}} = \sqrt{\frac{8\times4\pi\times10^{-7}\times(3{,}00\times10^{8})(15\times10^{-3})}{\pi\times(2{,}00\times10^{-3})^2}}$$

$$\therefore \quad E_{\text{máximo}} = 1{,}90 \times 10^{3}\ \text{N/C} \equiv 1{,}90\ \text{kN/C}$$

Parte (b)

Sabemos que: $$\mu_E = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2_{\text{máx}}$$

$$\Rightarrow \text{Energía} = \text{área . Long . } \frac{1}{2}\varepsilon_o \text{ . } E^2_{\text{máx}}$$

$$\Rightarrow \text{Energía} = 0{,}25\,\pi \text{ . } (2{,}00 \times 10^{-3})^2 \times (1{,}00) \times (0{,}5)(8{,}85 \times 10^{-12})(1{,}90 \times 10^{3})$$

$$\therefore \text{Energía total} = 50{,}0 \times 10^{-12}\ \text{J} \equiv 50\ \text{pJ}$$

Parte (c)

Sabemos que: $$p = \frac{\text{energía total}}{C} = \frac{50{,}0\times10^{-12}}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad p = 1{,}67 \times 10^{-19}\ \text{kg.m/s}$$

30. Dado que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la atmósfera superior de la Tierra es de 1 340 W/m², determine a) la radiación solar incidente sobre Marte, b) la potencia total incidente sobre Marte, y c) la fuerza total que actúa sobre este mismo planeta. d) Compare esta fuerza con la atracción gravitacional entre Marte y el Sol (véase la tabla 14.2).

Resolución:

Datos: $I_{\text{onda solar}} = 1\,340$ W/m² (a la Tierra)

Parte (a)

Sabemos que la intensidad de onda solar es proporcional a la distancia de separación en cada planeta, entonces:

$$1\,340\ \frac{W}{m} \ \text{———}\ 1{,}496 \times 10^{11}$$

$$(\text{Marte})\ x \ \text{———}\ 2{,}28 \times 10^{11}$$

$$\therefore \quad I_{\text{onda solar a Marte}} = \frac{1\,340\times(2{,}28\times10^{11})}{1{,}496\times10^{11}} = 2\,042\ \text{W/m}^2$$

Parte (b)

$$P_{\text{total incidente sobre Marte}} = I \text{ . } A = 2\,042 \times (4\pi \times [2{,}28 \times 10^{11}]^2)$$

$$\therefore \quad P_{\text{total incidente sobre Marte}} = 1{,}33 \times 10^{27}\ \text{W}$$

Parte (c)

Sabemos que: $$F = P.A = A \text{ . } \frac{S}{c} = A \text{ . } \frac{I}{c}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{4\pi\times(2{,}28\times10^{11})^2\times(2\,042)}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad F_{\text{total}} = 4{,}45 \times 10^{18}\ \text{N} \equiv 4{,}45\ \text{EN}$$

31. Una onda electromagnética plana tiene una intensidad de 750 W/m². Una superficie rectangular plana de 50,0 cm × 100 cm de dimensiones se colcoca perpendicularmente a la dirección de la onda Si la superficie absorbe la mitad de la energía y refleja la mitad, calcule a) la energía total absorbida por la superficie en 1,00 min y b) el momentum absorbido en este tiempo.

Resolución:

Datos: $I_{\text{onda}} = 750$ W/m² ; ancho = 0,5 m

Longitud = 1,00 m

Además: la superficie absorbe la mitad de la energía y refleja la mitad

Parte (a)

Sabemos que: $$I = \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \frac{2\,\text{energía}}{\text{área}\times\text{tiempo}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía} = I \times \text{área} \times \text{tiempo} = \frac{750\times(0{,}5\times1)\times(60)}{2}$$

$$\therefore \quad \text{Energía total} = 11{,}3\times10^{3}\ \text{J}$$

Parte (b)

Sabemos que: $$p = \frac{\text{energía}}{2c} = \frac{11{,}3\times10^{3}}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad p = 1{,}67\times10^{-6}\ \text{kg . m/s}$$

RADIACIÓN DE UNA LÁMINA DE CORRIENTE INFINITA

32. Una gran lámina que conduce corriente emite radiación en cada dirección (normal al plano de la lámina) con una intensidad de 570 W/m². ¿Qué valor máximo de densidad de corriente sinusoidal se requiere?

Resolución:

Datos: $I = 570\ \text{W/m}^2$

$J_{s\,\text{máx}} = ?$

Sabemos que en una lámina de corriente infinita se cumple que:

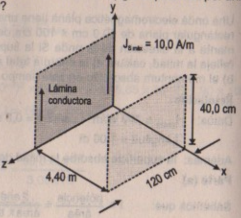
$$I = S_{prom} = \frac{\mu_o J^2_{\text{máx}} . c}{8} \quad \Rightarrow \quad J_{s\,\text{máx}} = \sqrt{\frac{8I}{\mu_o . c}} = \sqrt{\frac{8\times570}{3\times10^{8}\times\left(4\pi\times10^{-7}\right)}}$$

$$\therefore \quad J_{s\,\text{máximo}} = 3{,}48\ \text{A/m}$$

33. Una superficie rectangular de 120 cm × 40,0 cm de dimensiones está paralela a 4,40 m de la lámina conductora mucho más grande en la cual hay una corriente superficial que varía sinusoidalmente y que tiene un valor máximo de 10,0 A/m. a) Calcule la potencia incidente promedio sobre la lámina más chica. b) ¿Qué potencia por unidad de área radia la lámina más grande?

Resolución:

Datos: Sea la figura:



Parte (a)

Sabemos que:

$$I = \frac{P_{prom}}{\text{área}} = \frac{J^2_{S\,\text{máx}} \cdot \mu_o . c}{8}$$

$$\Rightarrow \quad P_{prom} = \frac{\text{área}\times J^2_{s\,\text{máx}} \cdot \mu_o . c}{8} = \frac{(0{,}4)(1{,}2)(10)^2\left(3{,}00\times10^{8}\right)\left(4\pi\times10^{-7}\right)}{8}$$

$$\therefore \quad P_{prom} = 2{,}26\times10^{3}\ \text{W} \equiv 2{,}26\ \text{kW}$$

Parte (b)

Sabemos que $I = \dfrac{P}{A} = \dfrac{J^2_{S\,\text{máx}} \cdot \mu_o . c}{8}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \frac{(10)^2\times\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(3{,}00\times10^{8}\right)}{8}$$

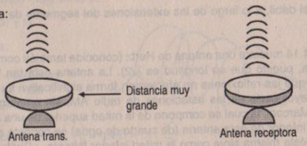
$$\therefore \quad \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = 4{,}71\times10^{3}\ \text{W/m}^2 \equiv 4{,}71\ \text{kW/m}^2$$

PRODUCCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS POR MEDIO DE UNA ANTENA

34. Dos radios transceptores portátiles con antenas de dipolo están separados una gran distancia fija. Suponiendo que la antena transmisora es vertical, ¿qué fracción de la potencia de recepción máxima ocurrirá en la antena receptora cuando ésta esté inclinada de la vertical por a) 15,0°, b) 45,0°, c) 90,0°?

Resolución:

Sea la figura:



Parte (a)

Sabemos que en una antena de dipolo: $P_{\text{antena trans.}} = P_{\text{antena receptora}}$

Sabemos que en una antena de dipolo la intensidad de radiación varía como $\dfrac{\text{sen}^2\,\theta}{r^2}$

Como: $$P = I.A = \frac{1}{r^2}(\text{sen}^2\theta)$$

Si $\theta = 15°$ respecto de la vertical o eje de la antena, entonces:

$$\frac{P_{\text{antena receptora}}}{P_{\text{antena transmisora}}} = \text{sen}^2(15) = 0{,}067$$

Parte (b)

Si: la antena receptora está inclinada 45° respecto de la vertical ó eje, entonces:

$$\frac{P_{\text{antena receptora}}}{P_{\text{antena transmisora}}} = \text{sen}^2(45°) = 0{,}5$$

Parte (c)

Si: la antena receptora está inclinada 90° respecto de la vertical ó eje, entonces:

$$\frac{P_{\text{antena receptora}}}{P_{\text{antena transmisora}}} = \text{sen}^2(90°) = 1$$

35. Dos antenas de transmisión de radio están separadas por la mitad de la longitud de onda de transmisión y se excitan en fase una respecto de la otra. ¿En qué direcciones se radian a) la señal más intensa y b) la señal más débil?

Resolución :

Datos: Distancia de separación $(A_1 - A_2) = \frac{\lambda}{2}$ onda

Parte (a)

Habrá mayor señal, alejada a lo largo del bisector perpendicular del segmento de línea que une las antenas.

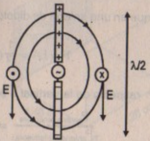
Parte (b)

Habrá señal débil, a lo largo de las extensiones del segmento de recta que une las antenas.

36. La figura 34.14 muestra una antena de Hertz (conocida también como una antena de media onda, puesto que su longitud es λ/2). La antena está tan lejos de la tierra como para que las reflexiones no afecten en forma significativa su patrón de radiación. La mayor parte de las estaciones de radio AM, sin embargo, emplean una antena de Marconi, la cual se compone de la mitad superior de una antena de Hertz. El extremo inferior de esta antena (de cuarto de onda) se conecta a la superficie de la Tierra, y ésta misma sirve como la mitad inferior faltante. ¿Cuáles son las alturas de las antenas de Marconi para transmisores de estaciones de radio a a) 560 kHz y b) 1 600 kHz?

Resolución :

Sea la figura:



Parte (a)

Si: $f = 560 \times 10^3$ Hz, nos piden $\frac{\lambda}{2} = ?$

Sabemos que: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00\times10^8}{560\times10^3} = 536$ m

Por lo tanto: $\frac{\lambda}{2}$ = altura de la antena Marconi = $\frac{1}{2}(536) = 268$ m

Parte (b)

Si: $f = 1\,600 \times 10^3$ Hz nos piden $\lambda/2 = ?$

Sabemos que: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00\times10^8}{1{,}6\times10^6} = 187{,}5$ m

Por lo tanto:

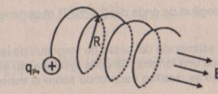
$$\text{Altura de la antena de Marconi} = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}(187{,}5) = 93{,}75 \text{ m}$$

37. **Problema de repaso.** Cargas aceleradas pueden radiar ondas electromagnéticas. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón en un ciclotrón de 0,500 m de radio y un campo magnético con una magnitud de 0,350 T.

38. **Problema de repaso.** Cargas aceleradas pueden radiar ondas electromagnéticas. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón en un ciclotrón de radio R y campo magnético B.

Resolución 37 y 38:

Sea la figura:



Donde: R = 0,500 m
B = 0,350 T
λ = ?

Sabemos que: $F_B = q.v.B = m \,.\, \frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad v = \omega \,.\, R = \frac{q.R.B}{m}$$

Entonces: $\omega = \frac{q.B}{m} = 2\pi \,.\, f \quad \therefore \quad f = \frac{q.B}{2\pi.m}$

Luego: $\lambda \,.\, f = c \quad \Rightarrow \quad l = \frac{c}{f} = \frac{c.2\pi.m}{q.B}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{(3{,}00\times10^8)(2\pi)(1{,}67\times10^{-27})}{(1{,}6\times10^{-19})(0{,}350)}$$

$$\therefore \quad \lambda_{\text{onda}} = 56{,}2 \text{ m}$$

EL ESPECTRO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

39. a) Clasifique ondas con frecuencias de 2 Hz, 2 kHz, 2 MHz, 2 GHz, 2 THz, 2 PHz, 2 EHz, 2 ZHz y 2 YHz sobre el espectro electromagnético. b) Clasifique las ondas con longitudes de onda de 2km, 2 m, 2 mm, 2 μm, 2 nm, 2 pm, 2 fm y 2 am.

Resolución :

Parte (a)

1. A una distancia de: 2 Hz pertenece a una "onda larga"
2. A una distancia de: 2 000 Hz pertenece a una "onda larga"
3. A una distancia de: 2×10^6 Hz pertenece a una "onda de radio"
4. A una distancia de: 2×10^9 Hz pertenece a una "microondas"
5. A una distancia de: 2×10^{12} Hz pertenece a una "infrarrojo"
6. A una distancia de: 2×10^{15} Hz pertenece a una "ultravioleta"

Parte (b)

1. A una longitud de onda de: 2×10^3 m pertenece a una "onda larga"
2. A una longitud de onda de: 2,00 m pertenece a una "microondas"
3. A una longitud de onda de: $2{,}00 \times 10^{-3}$ m pertenece a una "onda microondas"
4. A una longitud de onda de: 2×10^{-6} m pertenece a una "infrarrojo"
5. A una longitud de onda de: 2×10^{-9} m pertenece a una "ultravioleta"
6. A una longitud de onda de: 2×10^{-12} m pertenece a una "rayos Gamma"

40. Calcule una estimación del orden de magnitud de la frecuencia de una onda electromagnética con una longitud de onda igual a a) su altura; b) el grosor de esa hoja de papel. ¿Cómo se clasifica cada onda sobre el espectro electromagnético?

Resolución :

Parte (a)

Si λ = altura = 20 cm = 0,2 m

Entonces: $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3{,}00\times10^8}{0{,}2} = 1{,}5 \times 10^9 \text{ Hz} \equiv 1{,}5 \text{ GHz}$

Parte (b)

Si λ = grosor de una hoja de papel = 5×10^{-3} m

Entonces: $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3{,}00\times10^8}{5{,}00\times10^{-3}} = 60 \times 10^9 \text{ Hz} \equiv 60 \text{ GHz}$

Esta frecuencia se encuentra dentro del espectro electromagnético del microondas.

41. El ojo humano es más sensible a la luz que tiene una longitud de onda de $5{,}50 \times 10^{-7}$ m, lo cual está en la región verde-amarillo del espectro electromagnético visible. ¿Cuál es la frecuencia de esta luz?

Resolución :

Datos: $\lambda = 5{,}50 \times 10^{-7}$ m

Sabemos que: $\lambda \cdot f = c \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{3{,}00\times10^8}{5{,}50\times10^{-7}}$

$\therefore \quad f = 545 \times 10^{12} \text{ Hz} \equiv 545 \text{ THz}$

42. Suponga que usted está ubicado a 180 m de un transmisor de radio. a) ¿A cuántas longitudes de onda se encuentra usted del transmisor si la estación se autodenomina 1 150 AM? (Las frecuencias de la banda de AM están en kilohertz.) b) ¿Cuál es si esta estación fuese la 98,1 FM? (Las frecuencias de la banda de FM están en megahertz.)

Resolución :

Parte (a)

A una distancia de = 180 m de un transmisor de radio
Nos piden n.° λ si la estación es 1 150 AM

Sabemos que dicha estación está en una frecuencia 10^3 (aproximadamente).

Entonces sabemos que:

$$\lambda \cdot f = c \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00\times10^8}{10^3} = 300 \text{ km}$$

Luego: $\text{n.° } \lambda = \dfrac{3{,}00\times10^5}{1{,}8\times10^2} = 1\,667$ Longitudes de onda

Parte (b)

Si la estación fuese 98,1 FM entonces la frecuencia de banda estarán aproximadamente 10^6 Hz Luego:

$$\lambda \cdot f = c \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3{,}00\times10^8}{10^6} = 300 \text{ m}$$

Luego: $\text{n.° } \lambda = \dfrac{300}{180} = 1{,}7$ longitudes de onda

43. ¿Cuáles son las longitudes de onda de las ondas electromagnéticas en el espacio libre que tienen frecuencias de a) $5{,}00 \times 10^{19}$ Hz y b) $4{,}00 \times 10^9$ Hz?

Resolución :

Parte (a)

Si : $f = 5{,}00 \times 10^{19}$ Hz , entonces:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00\times10^8}{5{,}00\times10^{19}} = 6{,}00 \times 10^{-12}\ m \equiv 6{,}00\ pm$$

Parte (b)

Si: $f = 4{,}00 \times 10^9$ Hz, entonces:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00\times10^8}{4{,}00\times10^9} = 75 \times 10^{-3}\ m \equiv 75\ mm$$

44. Un pulso de radar regresa al receptor después de un tiempo de viaje total de $4{,}00 \times 10^{-4}$ s. ¿Cuán alejado está el objeto que reflejó la onda?

Resolución :

Datos: $T_{total} = 4{,}00 \times 10^{-4}$ s

Distancia total del objeto = ?

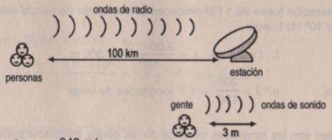
Sabemos que: 2 distancia total = c . T_{total} (ida y vuelta)

$$\Rightarrow \quad \text{Distancia total} = \frac{3{,}00\times10^8 \times \left(4{,}00\times10^{-4}\right)}{2}$$

$$\therefore \quad \text{Distancia total del objeto} = 60 \times 10^3\ m \equiv 60\ km$$

45. *¡Esto justamente!* Un importante anuncio noticioso se transmite por ondas de radio a personas que se encuentran sentadas junto a sus radios, a 100 km de la estación, y por medio de ondas sonoras a gente que se encuentra sentada en la sala de noticias, a 3,00 m del comentarista. ¿Quién recibe la noticia primero? Explique. Considere la rapidez del sonido en el aire como 343 m/s.

Resolución :



Considerar: $c_{sonido} = 343$ m/s

$$f_{\text{ondas de radio (personas)}} = \frac{3{,}00\times10^8}{1{,}00\times10^5} = 3\,000\ Hz \equiv 3\ kHz$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{en llegar de la onda}} = 3{,}33 \times 10^{-4}\ s \equiv 0{,}33 \times 10^{-3}\ s$$

Por otro lado: $$f_{\text{ondas de radio}} = \frac{343}{3} = 114{,}3\ Hz$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{en llegar a la gente}} = 8{,}75 \times 10^{-3}\ s$$

Como T en llegar a las personas de las ondas de radio es menor que T en llegar a la gente de las ondas de sonido, entonces los que recibirán la noticia primero serán los que se encuentran a 100 km de la estación de una diferencia de 8,41 ms.

46. La armada de Estados Unidos hace mucho propuso la construcción de un sistema de comunicación de frecuencia extremadamente baja (ELF, por sus siglas en inglés). Tales ondas podrían penetrar los océanos para alcanzar submarinos distantes. Calcule la longitud de una antena de longitud de cuarto de onda para un transmisor que genera ondas ELF con una frecuencia de 75,0 Hz. ¿Qué tan práctico es esto?

Resolución :

Datos: Long. antena = $\frac{\lambda}{4}$ onda = ?

f = 75,0 Hz

Sabemos que: $\lambda . f = c \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{4}.f = \frac{c}{4}$

$$\Rightarrow \quad \text{Long. antena} = \frac{1}{4}.\frac{c}{f} = \frac{0{,}25\times\left(3{,}00\times10^8\right)}{75}$$

$$\therefore \quad \text{Long. antena} = 1{,}00 \times 10^6\ m \equiv 1\,000\ km$$

47. ¿Cuáles son los intervalos de longitud de onda en a) la banda de radio de AM (540 – 1 600 kHz), y b) la banda de radio FM (88,0 – 108 MHz)?

Resolución :

Parte (a)

Si: $540\ Hz < f < 1600 \times 10^3\ Hz$

$$\Rightarrow \frac{1}{1600\times10^3} < \frac{1}{f} < \frac{1}{540} \quad \Rightarrow \quad \frac{3{,}00\times10^8}{1\,600\times10^3} < \lambda < \frac{3{,}00\times10^8}{540}$$

$$\therefore \quad 187{,}5\ m < \lambda < 555\ km$$

Parte (b)

Si: $88 \times 10^6\ Hz < f < 108 \times 10^6\ Hz$

$$\Rightarrow \frac{1}{108\times10^6} < \frac{1}{f} < \frac{1}{88\times10^6} \quad \Rightarrow \quad \frac{3{,}00\times10^8}{108\times10^6} < \lambda < \frac{3{,}00\times10^8}{88\times10^6}$$

$$\therefore \quad 2{,}78\ m < \lambda < 3{,}40\ m$$

48. Hay doce canales de televisión VHF (canales 2-13) que se encuentran en el intervalo de frecuencias entre 54,0 MHz y 216 MHz. Cada canal tiene asignado un ancho de 6,0 MHz, con los dos rangos 72,0 – 76,0 MHz y 88,0 – 174 MHz reservados para propósitos no de televisión. (El canal 2, por ejemplo, se encuentra entre 54,0 y 60,0 MHz.) Calcule el intervalo de longitud de onda para a) el canal 4, b) el canal 6 y c) el canal 8.

Resolución:

Datos: 54 MHz < f (canales [2 –13]) < 216 MHz

Además cada canal tiene un ancho de banda de: 6,00 MHz

y el canal 2 oscila entre 54,0 MHz y 60,0 MHz

Parte (a)

Si $\quad 54\text{ MHz} < f_{(canal)} < 60{,}0\text{ MHz}$

Entonces: $\quad 60{,}0\text{ MHz} < f_{(canal\ 3)} < 66{,}00\text{ MHz}$

Por lo tanto: $\quad 60{,}0\text{ MHz} < f_{(canal\ 4)} < 72{,}0\text{ MHz}$

$$\Rightarrow \frac{1}{72\times10^6} < \frac{1}{f\,(\text{canal }4)} < \frac{1}{66\times10^6}$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}00\times10^8}{72\times10^6} < \lambda_{onda} < \frac{3{,}00\times10^8}{66\times10^6}$$

Por lo tanto: $\quad 4{,}17\text{ m} < \lambda_{canal\ 4} < 4{,}54\text{m}$

Parte (b)

Si: $\quad 66\text{ MHz} < f_{(canal\ 4)} < 72\text{ MHz}$

Entonces: $\quad 76\text{ MHz} < f_{(canal\ 5)} < 82\text{ MHz}$

Por lo tanto: $\quad 82\text{ MHz} < f_{(canal\ 6)} < 88\text{ MHz}$

$$\Rightarrow \frac{1}{88\times10^6} < \frac{1}{f\,(\text{canal }6)} < \frac{1}{82\times10^6}$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}00\times10^8}{88\times10^6} < \lambda_{onda} < \frac{3{,}00\times10^8}{82\times10^6}$$

Por lo tanto: $\quad 3{,}4\text{ m} < \lambda_{(canal\ 6)} < 3{,}66\text{ m}$

Parte (c)

Si: $\quad 82\text{ MHz} < f_{(canal\ 6)} < 88\text{ MHz}$

Entonces: $\quad 174\text{ MHz} < f_{(canal\ 7)} < 180\text{ MHz}$

Por lo tanto: $\quad 180\text{ MHz} < f_{(canal\ 8)} < 186\text{ MHz}$

$$\Rightarrow \frac{1}{186\times10^6} < \frac{1}{f\,(\text{canal }8)} < \frac{1}{180\times10^6}$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}00\times10^8}{186\times10^6} < \lambda_{onda} < \frac{3{,}00\times10^8}{180\times10^6}$$

Por lo tanto: $\quad 1{,}61\text{ m} < \lambda_{(canal\ 8)} < 1{,}67\text{ m}$

PROBLEMAS ADICIONALES

49. Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre las nubes superiores de la Tierra es de 1 340 W/m². a) Calcule la potencia total radiada por el Sol tomando la separación promedio Tierra-Sol igual a 1,496 × 10¹¹ m. b) Determine los valores máximo de los campos eléctrico y magnético en la ubicación de la Tierra debidos a la radiación solar.

Resolución:

Datos: $\quad I_{onda\ solar} = 1\,340\text{ W/m}^2 \quad r: 1{,}496\times10^{11}\text{ m}$

Parte (a)

Sabemos que (recordando)

$$I_{onda} = \frac{P_{promedio}}{\text{área}} = \frac{P_{promedio}}{4\pi . r^2} \quad ;\text{ donde: r : separación promedio Tierra - Sol}$$

$$\Rightarrow P_{promedio} = I_{onda\ solar} \,.\, \text{área}$$

$$\Rightarrow P_{promedio} = 1{,}340\times10^3 \times [4\pi . (1{,}496\times10^{11})^2]$$

$$\therefore \quad P_{promedio} = 3{,}77\times10^{26}\text{ W}$$

Parte (b)

Sabemos que: $I = \dfrac{E^2_{máx}}{2\mu_o . c}$

$$\Rightarrow \quad E_{máx} = \sqrt{I.2\mu_o.c} = \sqrt{(1{,}340\times10^3)(2)(4\pi\times10^{-7})(3{,}00\times10^8)}$$

$$\therefore \quad E_{máximo} = 1{,}01\times10^3\text{ V/m} \equiv 1{,}01\text{ kV/m}$$

Luego: $\quad B_{máx} = \dfrac{E_{máx}}{c} = \dfrac{1{,}01\times10^3}{3{,}00\times10^8} = 3{,}35\times10^{-6}\text{ T} \equiv 3{,}35\ \mu\text{T}$

50. La intensidad de la radiación solar en la parte alta de la atmósfera de la Tierra es de 1 340 W/m³. Suponiendo que el 60% de la energía solar entrante alcanza la superficie de la Tierra, y que usted absorbe 50% de la energía incidente, realice una estimación del orden de magnitud de la cantidad de energía solar que absorbe en un baño de sol de 60 minutos.

Resolución :

Datos: $I_{solar} = 1\ 340\ W/m^2$

Además: 60% energía solar entra a la superficie terrestre

50% de dicha energía absorbe el ser humano.

Nos piden: Energía solar que uno absorbe en un baño de Sol de 60 min.

Sabemos que: $60\%\ I_{solar} = \dfrac{60}{100} \times 1\ 340 = 804\ W/m^2$

Entonces: $I_{absorbe\ la\ persona} = 50\%\ (804)$

$\Rightarrow \quad I_{absorbe} = 402\ W/m^2$

Luego: $I_{absorbe} = \dfrac{energía}{t \times área}$

$\Rightarrow \quad Energía = área \times t \times I_{absorbe} = 4\pi R^2_{Tierra} \times t \times I_{absorbe}$

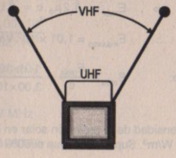
$\Rightarrow \quad Energía = 4\pi(6{,}37 \times 10^6)^2 \times (3\ 600) \times (402)$

$\therefore$ Energía que absorbe en un baño de 60 minutos $= 7{,}38 \times 10^{20}\ J \equiv 738\ EJ$

51. Problema de repaso. En la ausencia de una entrada de cable o una antena parabólica, un equipo de televisión puede usar una antena receptora de dipolo para canales VHF y una antena de espira para canales UHF (véase la Fig. P34.7). La antena UHF produce una fem desde el flujo magnético variable que pasa por la espira. La estación de TV transmite una señal con una frecuencia f, y la señal tiene una amplitud de campo eléctrico $E_{máx}$ y una amplitud de campo magnético $B_{máx}$ en la ubicación de la antena receptora. a) Usando la ley de Faraday derive una expresión para la amplitud de la fem que aparece en una antena de espira circular de una sola vuelta con un radio r, la cual es pequeña en comparación con la longitud de onda de la onda. b) Si el campo eléctrico en la señal apunta verticalmente, ¿cuál sería la orientación de la espira para mejor recepción?

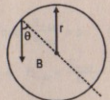
Resolución :

Sea la figura (por dato)



Donde:
Por dato: f, $E_{máx}$, $B_{máx}$

Parte (a)
Si:



Nos piden: $\varepsilon_{máx} = ?$

Usando por sugerencia la ley de Faraday

Sabemos que: $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B = -A\,.\dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{A}{dt}\,d\,(B_{máx}\,.\,\cos(\overbrace{\omega t}^{\theta}))$

Entonces: $\varepsilon_{ind} = (+)\ A\,.\,B_{máx}\ sen[\omega t] = \pi\,.\,r^2 \times 2\pi\,.\,f\,.\,B_{máx}\,.\,sen(\omega t)$

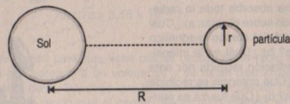
Donde: $\varepsilon_{máx} = 2\pi^2.r^2.f.B_{máx}$

Parte (b)
Si el campo eléctrico apunta verticalmente, la espira debería estar en el plano vertical que contiene la línea de visión al transmisor.

52. Considere una pequeña partícula esférica de radio r localizada en el espacio a una distancia R del Sol. a) Muestre que la relación F_{rad}/F_{grav} es proporcional a 1/r, donde F_{rad} es la fuerza ejercida por la radiación solar y F_{grav} es la fuerza de atracción gravitacional. b) El resultado del inciso a) significa que, para un valor de r suficientemente pequeño, la fuerza ejercida sobre la partícula por la radiación solar supera a la fuerza de atracción gravitacional. Calcule el valor de r para el cual la partícula está en equilibrio bajo las dos fuerzas. (Suponga que la partícula tiene una superficie. (Suponga que la partícula tiene una superficie que absorbe de manera perfecta y una densidad de masa de 1,50 g/cm³. Considere que la partícula está localizada a $3{,}75 \times 10^{11}$ m del Sol y tome 214 W/m² como el valor de la intensidad solar en ese punto).

Resolución :

Sea la figura:



Parte (a)

Por demostrar que: $\dfrac{F_{rad}}{F_{grav.}} = cte.\dfrac{1}{r}$

Sabemos que: $F_{grav} = \dfrac{G.M_{sol}.M_{partícula}}{R^2} = \dfrac{GM_{sol}.\rho.4\pi.r^3}{3R^2}$

Por otro lado: $F_{radiación} = P . A = \frac{I_{solar}}{c}$

$$\Rightarrow \quad F_{radiación} = \frac{I_{solar}.\pi.r^2}{c}$$

En consecuencia:

$$\frac{F_{radiación}}{F_{gravitatoria}} = \frac{3I_{solar}.R^2}{4.G.\rho.M_{Sol}.c.r} = cte.\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{Lqqd.}$$

Parte (b)

Si se cumple que: $F_{radiación} = F_{gravitatoria}$; nos piden $r = ?$

Si: $R = 3{,}75 \times 10^{11}$ m ; $I_{solar} = 214$ W/m² ; $\rho = 1{,}50$ g/cm³

Además considerar:

$$c = 3{,}00 \times 10^{8} \text{ m/s} \;;\; M_{sol} = 1{,}99 \times 10^{30} \text{ kg} \;;\; G = 6{,}67 \times 10^{-11} \text{ . N.m}^2/\text{kg}^2$$

$$F_{radiación} = F_{grativatoria} \quad \Rightarrow \quad \frac{G.M_{Sol}.\rho}{R^2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{I_{solar}.\pi.r^2}{c}$$

Entonces:

$$r = \frac{3I_{solar}.R^2}{G.M_{solar}.\rho.4.c} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{214\times(3{,}75\times10^{11})^2}{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}\right)\left(\frac{1}{3{,}00\times10^{8}\times1{,}5\times10^{3}}\right)$$

$$\therefore \quad r = 37{,}8 \times 10^{-8} \text{ m} \equiv 3{,}78 \times 10^{-9} \text{ m} \equiv 3{,}78 \text{ nm}$$

53. Una antena parabólica con un diámetro de 20,0 m recibe (en incidencia normal) una señal de radio de una fuente distante, como se ilustra en la figura P34.53. La señal de radio es una onda sinusoidal continua con amplitud $E_{máx} = 0{,}200$ μV/m. Suponga que la antena absorbe toda la radiación que incide sobre el plato. a) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético en esa onda? b) ¿Cuál es la intensidad de la radiación recibida por esta antena? c) ¿Qué potencia es recibida por la antena? d) ¿Qué fuerza es ejercida sobre la antena por las ondas de radio?

Figura P34.53

Resolución :

Donde: Diámetro de la antena = 20,0 m

$E_{máx} = 0{,}200$ μV/m

Parte (a)

Sabemos que: $\frac{E_{máx}}{B_{máx}} = c$ (En una onda electromagnética)

$$\Rightarrow \quad B_{máx} = \frac{E_{máx}}{C} = \frac{0{,}200\times10^{-6}}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 6{,}67 \times 10^{-16} \text{ T}$$

Parte (b)

Sabemos que en una onda electromagnética se cumple que:

$$I = \frac{E^2_{máx}}{2\mu_o.c} = \frac{(0{,}200\times10^{-6})^2}{2\times(3{,}00\times10^{8})(4\pi\times10^{-7})}$$

$$\therefore \quad I_{radiación} = 5{,}3 \times 10^{-17} \text{ W/m}^2$$

Parte (c)

Recordando: $I = \frac{P}{A}$

$$\Rightarrow \quad P_{recibida} = I . A = 5{,}3 \times 10^{-17} \times (\pi \times \frac{1}{4}\,(20)^2)$$

$$\therefore \quad P_{recibida} = 1{,}67 \times 10^{-14} \text{ W}$$

Parte (d)

Sabemos que: Presión $= \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{I}{c}$

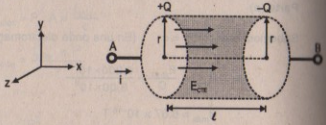
$$\Rightarrow \text{Fuerza} = \frac{A.I}{c} = \frac{\text{potencia}}{c} = \frac{1{,}67\times10^{-14}}{3{,}00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad \text{Fuerza} = 5{,}56 \times 10^{-23} \text{ N}$$

54. Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de radio r separadas una distancia ℓ. Se han cargado a un voltaje ΔV y se están descargando conforme la corriente i se retira de él. Suponga que la separación de placas ℓ es muy pequeña comparada con r, de modo que el campo eléctrico en esencia es constante en el volumen entre las placas y es cero afuera de este volumen. Advierta que la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor crea un campo magnético. a) Determine la magnitud y dirección del vector de Poynting en la superficie cilíndrica alrededor del campo eléctrico en el volumen. b) Use el valor del vector de Poynting y el área de la superficie lateral del cilindro para encontrar la potencia total transferida por el capacitor. c) ¿Cuáles son los cambios a estos resultados si la dirección de la corriente es invertida, de modo que el capacitor se está cargando?

Resolución:

Sea la figura:



Donde: $\Delta V_{ab} = \Delta V$

$E_{dentro} = \text{cte.}$

$E_{fuera} = 0$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = E.\ell \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\Delta V}{\ell}$

Luego: $B = \dfrac{E}{c} = \dfrac{\Delta V}{\ell c}$

En consecuencia: $|\vec{S}| = \dfrac{B.E}{\mu_o} = \left(\dfrac{\Delta V}{\ell}\right)\left(\dfrac{\Delta V}{\ell c}\right)\left(\dfrac{1}{\mu_o}\right) = \dfrac{\Delta V^2}{\ell^2.c.\mu_o}$

La dirección de $\vec{S}$ apunta hacia arriba en las y positiva

Parte (b)

Sabemos que: $I = \dfrac{P}{\text{área}} = S$

$\Rightarrow \quad \text{Potencia total} = \vec{S} \times \text{área} = \dfrac{\Delta V^2}{\ell^2.c.\mu_o} \times (2\pi.\, r \times \ell)$

$\therefore \quad \text{Potencia total} = \dfrac{2\pi.r.\Delta V^2}{\ell.c.\mu_o}$

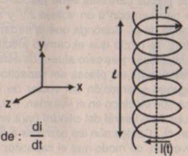
Parte (c)

La dirección del vector $\vec{S}$ se invertirá

55. Una sección de un solenoide de núcleo de aire muy largo, alejado de cualquier extremo, forma un inductor con radio r, longitud ℓ y n vueltas de alambre por unidad de longitud. En un instante particular la corriente del solenoide es I y está creciendo a la rapidez dI/dt. Ignore la resistencia del vector de Poynting sobre la superficie interior de esta sección de solenoide. b) Encuentre la rapidez a la cual la energía almacenada en el campo magnético del inductor está creciendo. c) Exprese la potencia en términos del voltaje ΔV a través del inductor.

Resolución:

Sea la figura:



Donde: $\dfrac{\text{n.° vueltas}}{\text{longitud}} = n$

Además "I" crece a la rapidez de : $\dfrac{di}{dt}$

Parte (a)

En un instante dado la corriente en el solenoide es "I" y el campo magnético está dado por:

$$\oint B\,ds = \int B\;ds = N.\mu_o.I \quad \text{(ley de Ampere)}$$

$$\Rightarrow \quad B.\ell = N.\mu_o.I \qquad \therefore \quad |B| = n.\mu_o.I$$

Por otro lado: Por Maxwell

$$\oint E\,ds = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int B dA\right) = -A.\frac{dB}{dt}$$

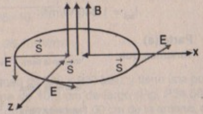
$$\Rightarrow \quad E\,(2\pi.\, r) = -\pi\,.\, r^2\,.\,\frac{d}{dt}\,(n\mu_o.I) = -\pi\,.\, r^2.n\mu_o.\frac{dI}{dt} \quad \text{(I varía con el tiempo)}$$

$$\therefore \quad |E| = \frac{1}{2}\, r\,.\, n\,.\, \mu_o\,.\,\frac{dI}{dt}$$

Luego: $|\vec{S}| = \dfrac{|B|.|E|}{\mu_o} = \dfrac{n.\mu_o.I}{\mu_o} \times \left(\dfrac{1}{2} r.n.\mu_o.\dfrac{dI}{dt}\right)$

$$\therefore \quad |\vec{S}| = \frac{1}{2}\, r.n^2.\mu_o.I.\frac{dI}{dt}$$

Entonces:



La dirección del vector $\vec{S}$ está dirigido radialmente hacia adentro; debido a que :

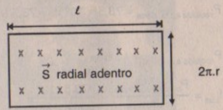
Parte (b)

Sabemos que: $I = S = \dfrac{\text{potencia}}{\text{área}} = \dfrac{1}{A} \times \dfrac{dU}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = S \times \text{área lateral} = \frac{1}{2}\, r\,.n^2.\mu_o.I.\frac{dI}{dt} \times (2\pi.r.\ell)$$

Ya que:

(Vista frontal)



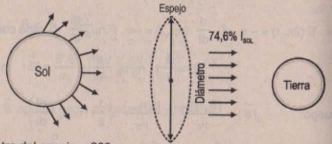
Parte (c)

Sabemos que: Potencia = ΔV.I (en un instante)

56. Una meta del programa espacial ruso es iluminar las oscuras ciudades norteñas con luz del Sol reflejada a la Tierra desde un espejo de 200 m de diámetro que esté en órbita. a) Suponga que luz del Sol con una intensidad de 1 340 W/m² cae en el espejo casi perpendicularmente, y que la atmósfera de la Tierra permite que el 74,6% de la energía de la luz solar la atraviese en un clima claro. ¿Qué potencia recibe una ciudad cuando el espejo espacial está reflejando luz hacia ella? b) El plan es que la luz solar reflejada cubra un círculo con un diámetro de 8,00 km. ¿Cuál es la intensidad de la luz (la magnitud promedio del vector de Poynting) que la ciudad recibe? c) Esta intensidad, ¿qué porcentaje de la componente vertical de la luz solar es en San Petersburgo en enero, cuando el Sol alcanza un ángulo de 7,00° sobre el horizonte al mediodía?

Resolución:

Sea la figura:



Donde: Diámetro del espejo = 200 m

$I_{sol} = 1\,340\ W/m^2$

Parte (a)

Tenemos que: $I_{total\ en\ la\ tierra} = I_{en\ el\ espejo} + I_{reflexión}$

$$\Rightarrow\quad I_{total\ en\ la\ Tierra} = 100\,\%\ I_{sol} + 74{,}6\%\ I_{sol}$$

$$\therefore\quad I_{total\ en\ la\ Tierra} = 174{,}6\%\ I_{sol}$$

Luego: $$I_{total\ en\ la\ Tierra} = \frac{174{,}6}{100}\,(1\,340) = \frac{P_{recibida}}{\frac{1}{4}\pi\,(\text{diámetro})^2}$$

Entonces: $$P_{recibida\ en\ la\ Tierra} = 0{,}25\,\pi \times (200)^2 \times \frac{174{,}6}{100} \times 1\,340$$

$$\therefore\quad P_{recibida\ en\ la\ Tierra} = 73{,}5 \times 10^6\ W \equiv 73{,}5\ MW$$

Parte (b)

Sabemos que: $P_{recibida\ a\ la\ Tierra} = I\,.\,\text{área}$

$$\Rightarrow\quad I_{Luz} = \frac{P_{recibida\ a\ la\ tierra}}{\text{área}} = \frac{73{,}5\times10^6}{\pi\times\left(4\times10^3\right)^2}$$

$$\therefore\quad I_{Luz} = 1{,}46\ W/m^2$$

Parte (c)

$$I_{vertical} = I_{Luz}\,.\,\cos 7° = 1{,}46 \times (0{,}992)$$

$$\therefore\quad I_{vertical} = 1{,}45\ W/m^2$$

En consecuencia: $I_{vertical} = \frac{1{,}45}{1{,}46}$ representa el 99,3%

57. En 1965 Arno Penzias y Rober Wilson descubrieron la radiación cósmica de microondas dejada por la expansión del Universo, producto del Big Bang. Suponga que la densidad de energía de esta radiación de fondo es igual a $4{,}00 \times 10^{-14}\ J/m^3$. Determine la amplitud del campo eléctrico correspondiente.

Resolución:

Datos: $\mu_{energía} = 4{,}00 \times 10^{-14}\ J/m^3$

Nos piden: $E_{máximo} = ?$

Sabemos que: $$\mu_{energía} = \frac{1}{2}\epsilon_o\,.\,E^2_{máx}$$

$$\Rightarrow\quad E_{máx} = \sqrt{\frac{2\mu_{energía}}{\epsilon_o}} = \sqrt{\frac{2\times\left(4{,}00\times10^{-14}\right)}{8{,}85\times10^{-12}}}$$

$$\therefore\quad E_{máximo} = 95{,}1 \times 10^{-3}\ V/m \equiv 95{,}1\ mV/m$$

58. Un teléfono celular de mano opera en la banda de 860 a 900 MHz y tiene una potencia de salida de 0,600 W desde una antena de 10,0 cm de largo (Fig. P34.58). a) Encuentre la magnitud promedio del vector de Poynting a 4,00 cm de la antena, en la ubicación típica en la cabeza de una persona. Suponga que la antena emite energía con frentes de onda cilíndrica. (La radiación real de las antenas sigue un patrón más complicado, como sugiere la Fig. 34.15). b) La norma de exposición máxima ANSI/IEEE C95,1-1991 es de 0,57 mW/m² para personas que viven cerca de las estaciones base de teléfonos celulares, quienes estarían expuestas de manera continua a la radiación. Compare la respuesta a la parte a) con esta norma.

Figura P34.58 (© 1998 Adam Smith / FPG Internacional)

Resolución :

Datos: 860 MHz < f < 900 MHz

$P_{salida} = 0{,}600$ W

Long . antena = 0,1 m

Parte (a)

Nos piden: $|\vec{S}_{prom}|$ a 4,00 cm de la antena

Sabemos que: $I = S_{prom} = \dfrac{\text{potencia}}{\text{área}} \Rightarrow |S_{prom}| = \dfrac{0{,}600}{4\pi(0{,}04)^2}$

$\therefore \quad |S_{prom}| = 29{,}84 \text{ W/m}^2$

Parte (b)

Si la norma de exposición máxima es de $0{,}57 \times 10^{-3}$ W/m², esta cantidad es despreciable comparada con el vector S_{prom}.

59. Una microonda polarizada en forma lineal, con una longitud de onda de 1,50 cm, se dirige a lo largo del eje x positivo. El vector de campo eléctrico tiene un valor máximo de 175 V/m y vibra en el plano xy. a) Suponga que la componente de campo magnético de la onda puede escribirse en la forma $B = B_{máx}\,\text{sen}(kx - \omega t)$ y dé los valores para $B_{máx}$, k y ω. Además, determina en qué plano vibra el vector de campo magnético. b) Calcule la magnitud del vector de Poynting para esta onda. c) ¿Qué presión de radiación máxima ejercería esta onda si se dirigiera con una incidencia normal sobre una lámina que refleja a la perfección? d) ¿Qué aceleración máxima se impartiría a una lámina de 500 g (perfectamente reflectora y en incidencia normal) cuyas dimensiones son 1,00 m × 0,750 m?

Resolución :

Datos: $\lambda_{microondas} = 1{,}50$ cm

$E_{máx} = 175$ V/m

Parte (a)

Si: $B = B_{máx} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$

Entonces: $B_{máx} = \dfrac{E_{máx}}{c} = \dfrac{175}{3{,}00\times10^8} = 583{,}3 \times 10^{-9}$ T

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5\times10^{-2}} = 419$$

$\dfrac{\omega}{k} = c \quad \Rightarrow \quad \omega = 419 \times (3{,}00 \times 10^8) = 1{,}26 \times 10^{11}$ rad/s $\equiv 12{,}6$ T rad/s

En consecuencia: $B = (583 \text{ nT}) \cdot \text{sen}(419x - 12{,}6 \text{ T.t})$

Parte (b)

Sabemos que: $S = \dfrac{B.F}{\mu_o} = \dfrac{1}{2}\dfrac{B_{máx} \cdot E_{máx}}{\mu_o} = \dfrac{583\times10^{-9}\times175}{4\pi\times10^{-7}}\times\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad S = 40{,}6 \text{ W/m}^2$

Parte (c)

Si hay reflexión perfecta entonces:

$$\text{Presión} = \frac{2S}{c} = \frac{2\times40{,}6}{3{,}00\times10^8}$$

$\therefore \quad \text{Presión} = 271 \times 10^{-9} \dfrac{N}{m^2} \equiv 271 \text{ nPa}$

Parte (d)

Si: $M_{lámina} = 500$ g (perfectamente reflectora y en incidencia normal)

Con dimensiones: 1,00 m × 0,750 m

Nos piden: $a_{máxima} = ?$

Sabemos que cuando hay reflexión perfecta se cumple que:

$$\text{Presión} = \frac{2S}{c} = \frac{F}{\text{área}}$$

$\Rightarrow \quad M \cdot a = \text{presión} \times \text{área}$

Luego: $a_{máxima} = \dfrac{\text{presión}\times\text{área}}{M} = \dfrac{271\times10^{-9}\times(1{,}00\times0{,}750)}{500\times10^{-3}}$

$\therefore \quad a_{máxima} = 406 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2 \equiv 406 \text{ nm/s}^2$

60. *Revisión de la sección 20.7 sobre la radiación térmica.* a) Una pareja de ancianos instaló un calentador solar de agua en el techo de su casa (Fig. P34.60). El colector de energía solar se compone de una caja plana cerrada con un muy buen aislante térmico. Su interior está pintado de negro, y su cara frontal está hecha de vidrio aislante. Suponga que su emisividad para luz visible es de 0,900 y su emisividad para luz infrarroja es de 0,700. Suponga que el sol del mediodía brilla en perpendicular al vidrio, con intensidad de 1 000 W/m², y que entonces no entra ni sale agua de la caja. Encuentre la temperatura de estado estable del interior de la caja. b) La pareja construyó una caja idéntica sin tubos de agua y la colocó plana sobre el piso enfrente de la casa para usarla como un marco frío y plantar semillas al comenzar la primavera. Si el mismo sol de mediodía está a un ángulo de elevación de 50,0°, encuentre la temperatura de estado estable del interior de esta caja, suponiendo que las rendijas de ventilación están firmemente cerradas.

Figura P34.60 (© Hill Banaszewski/Visuals Unlimited)

Resolución :

Sea la figura:

Donde: $I = W = 1\,000\ W/m^2$

$e_{luz\ visible} = 0{,}900$

$e_{luz\ infrarroja} = 0{,}700$

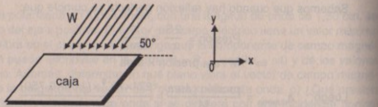
$\sigma = 5{,}6699 \times 10^{-8}\ W/m^2.K^4$

Por la ley de Stefan se cumple que: $W = e_{luz}\,.\,\sigma\,.\,T^4$

Entonces: $W = 1\,000 = (0{,}900)(5{,}6699 \times 10^{-8})\,.\,T^4$

$$\therefore\quad T_{int} = \sqrt[4]{\frac{1\,000 \times 10^8}{(0{,}900)(5{,}6699)}} \approx 374\ K$$

Parte (b)



Aplicando la ley de Stefan:

$$W\,.\,\text{sen}50° = e_{luz\ infrarroja}\,.\,\sigma\,.\,T^4$$

$$\Rightarrow\quad (1\,000)(0{,}766) = (0{,}700)(5{,}6699 \times 10^{-8})\,.\,T^4$$

$$\therefore\quad T_{int} = \sqrt[4]{\frac{(1\,000)(0{,}766)\times 10^8}{(0{,}700)(5{,}6699)}} \approx 372{,}7\ K$$

61. Un astronauta extraviado en el espacio a 10,0 m de su nave espacial, y en reposo en relación con ella, tiene una masa (incluido el equipo) de 110 kg. Como cuenta con una fuente luminosa de 100 W que forma un haz dirigido, decide usar el haz como un cohete de fotones para impulsarse en forma continua hacia la nave. a) Calcule cuánto tiempo tarda en llegar a la nave mediante este método. b) Suponga, en lugar de lo anterior, que el astronauta decide lanzar la fuente luminosa en una dirección opuesta a la nave. Si la masa de la fuente luminosa es de 3,00 kg, y, después de lanzarla, se mueve a 12,0 m/s respecto del retroceso del astronauta, ¿cuánto tarda el astronauta en llegar a la nave?

Resolución :

Sea la figura:

Donde:

$M_{astronauta\ y\ equipo} = 110\ kg$

Potencia del haz = 100 W

Parte (a)

Por cinemática: $$t_{lugar} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado: $$\rho = \frac{F}{A} = \frac{I}{c} = \frac{\text{potencia}}{Ac}$$

$$\Rightarrow\quad F = \frac{\text{potencia}}{c} = M\,.\,a \qquad \therefore\quad a = \frac{\text{potencia}}{cM} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$t_{lugar} = \sqrt{\frac{2.h.c.M}{\text{potencia}}} = \sqrt{\frac{2(10)(3{,}00 \times 10^8)(110)}{100}}$$

$$\therefore\quad t_{lugar\ a\ la\ nave} = 8{,}12 \times 10^4\ s \equiv 22{,}6\ \text{horas}$$

62. La Tierra refleja alrededor de 38,0% de la luz solar incidente por reflexión de sus nubes y superficie. a) Dado que la intensidad de la radiación solar es de 1 340 /m², ¿cuál es la presión de radiación sobre la Tierra, en pascales, cuando el Sol está sobre su cabeza? b) Compare esto con la presión atmosférica normal en la superficie de la Tierra, la cual es de 101 kPa.

Resolución :

Datos: La Tierra refleja alrededor de 38% de la luz solar

Además: $I_{solar} = 1\,340\ W/m^2$

Parte (a) $\qquad I_{Tierra} = 38\%\,.\,I_{solar} = 0{,}38\ (1\,340)$

$$\therefore\quad I_{Tierra} = 509{,}2\ W/m^2$$

Entonces: $$\text{Presión} = \frac{I_{Tierra}}{c} = \frac{509{,}2}{3{,}00\times10^{8}}$$

$\therefore$ Presión sobre la tierra $= 1{,}69 \times 10^{-6}$ Pa $\equiv$ 1,69 μPa

Parte (b)

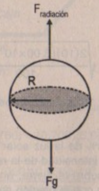
Como: Presión atmosférica en la superficie $= 1{,}01 \times 10^{5}$ pa
Podemos decir que la presión de radiación es una cantidad despreciable en comparación con la presión atmosférica.

63. Se han usado rayos láser para suspender cuentas de vidrio esféricas en el campo gravitacional de la Tierra. a) Si una cuenta tiene una masa de 1,00 μg y una densidad de 0,200 g/cm^3, determine la intensidad de radiación necesaria para sostener la cuenta. b) Si el haz tiene un radio de 0,200 cm, ¿cuál es la potencia requerida para ese láser?

64. Se han usado rayos láser para suspender cuentas de vidrio esféricas en el campo gravitacional de la Tierra. a) Si una cuenta tiene una masa m y una densidad ρ, determine la intensidad de radiación necesaria para sostener la cuenta. b) Si el haz tiene un radio r, ¿cuál es la potencia requerida para este láser?

Resolución 63 y 64 :

Sea la figura:



Cuenta de vidrio esférica

Donde: $M_{cuenta} = 1{,}00\,\mu g \equiv 10^{-9}$ kg
$\rho = 200$ kg/m^3

Parte (a)

Por condición: $F_{radiación} = F_{gravitacional}$

$$\Rightarrow \quad P.A = M_{cuenta}\cdot g \quad \Rightarrow \quad \frac{I.A}{c} = M_{cuenta}\cdot g$$

$$\therefore \quad I_{radiac} = \frac{c.M_{cuenta}\cdot g}{\text{área transv.}} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado:

$$\text{Volumen} = \frac{\text{masa}}{\text{densidad}} = \frac{4}{3}\pi.R^3 \text{ (Volumen de una esfera)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3\text{ masa}}{4\pi.\text{densidad}}} = \sqrt[3]{\frac{3\left(10^{-9}\right)}{4\pi\times(200)}}$$

$$\therefore \quad R = 1{,}06\times10^{-4}\text{ m} \quad \ldots (2)$$

Luego (2) en (1)

$$I_{radiación} = \frac{C.M_{cuenta}\cdot g}{\pi.R^2} = \frac{3{,}00\times10^{8}\times\left(1{,}00\times10^{-9}\right)(9{,}8)}{3{,}1416\times\left(1{,}06\times10^{-4}\right)^2}$$

$$\therefore \quad I_{radiación} = 8{,}32\times10^{7}\text{ W/m}^2$$

Parte (b)

Si: $R = 0{,}200$ cm $\equiv 2{,}0\times10^{-3}$ m

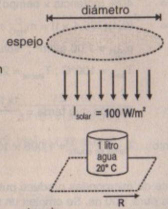
Entonces: Potencia: $I_{radiación} \times \text{área} = 8{,}32\times10^{7} \times (\pi\,.\,[2{,}0\times10^{-3}]^2)$

$\therefore$ Potencia requerida $= 1{,}05\times10^{3}$ W $\equiv$ 1,05 kW

65. Problema de repaso. Un espejo de 1,00 m de diámetro enfoca los rayos solares sobre una placa absorbente de 2,00 cm de radio, la cual sostiene una lata que contiene 1,00 L de agua a 20,0°C. a) Si la intensidad solar es de 1,00 kW/m^2, ¿cuál es la intensidad sobre la placa absorbente? b) ¿Cuáles son las magnitudes máximas de los campos E y B? c) Si 40,0% de la energía se absorbe, ¿cuánto tardaría llevar el agua a su punto de ebullición?

Resolución :

Sea la figura:



Donde: Diámetro del espejo = 1,00 m
Radio de la placa = 2,00 cm

Placa absorvente

Parte (a)

Sabemos que: $$I_{solar} = \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \frac{\text{potencia}}{\frac{\pi}{4}(\text{diámetro})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{1}{4}\pi(1,0)^2 \times 1\,000 = 785,4 \text{ W}$$

Luego: $$I_{\text{sobre la placa absov.}} = \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \frac{785,4}{\pi\left(2\times10^{-2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad I_{\text{sobre la placa absorv.}} = 625 \times 10^3 \text{ W/m}^2 \equiv 625 \text{ kW/m}^2$$

Parte (b)

Sabemos que: $I = S_{prom} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\mu_o . c}\ E^2_{máx} = \frac{c\,.B^2_{máx}}{2\mu_o}$

Entonces:

$$E_{máx} = \sqrt{2\mu_o.c.I} = \sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times\left(3,00\times10^8\right)\times\left(625\times10^3\right)}$$

$$\therefore \quad E_{máx} = 21,7 \times 10^3 \text{ N/C} \equiv 21,7 \text{ kN/C}$$

Por otro lado: $$B_{máx} = \sqrt{\frac{2\mu_o I}{c}} = \sqrt{\frac{2\times4\pi\times10^{-7}\times\left(625\times10^3\right)}{3,00\times10^8}}$$

$$\therefore \quad B_{máx} = 72,4 \times 10^{-6} \text{ T} \equiv 72,4 \ \mu\text{T}$$

Parte (c)

Por dato: 40% energía se absorve en el agua, nos piden el tiempo que tarda el agua en alcanzar su punto de ebullición.

Sabemos que: $$\text{Potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}}$$

$\Rightarrow$ 40% (potencia × tiempo) = Q_{ganado}

$\Rightarrow$ $(0,4)(785,4 \times t) = m_{H_2O} . C_e(\Delta T) = \rho_{H_2O} . \text{Volumen} \times C_e\,(T_f - T_i)$

Donde: $\rho_{H_2O} = 1,00$ g/cm³ ; Volumen = 1L ≡ 10^3 cm³; Ce = 4,186 J/g.°C

$T_{final} = 100°C$; $T_{inicial} = 20°C$

Entonces: $$\text{Tiempo que tarda} = \frac{1\times10^3\times(4,186)\times(80)}{(0,4)(785,4)}$$

Por lo tanto: $T_{\text{tarda en ebullir}} = 1,066 \times 10^3 \text{ s} \equiv 17,8 \text{ min}$

66. Una fuente de microondas produce pulsos de radiación de 20,0 GHz, cada uno de los cuales dura 1,00 ns. Se emplea un reflector parabólico (R = 6,00 cm) para enfocar estos pulsos en un haz de radiación paralelo, como se muestra en la figura P34.66. La potencia promedio durante cada pulso es de 25,0 kW. a) ¿Cuál es la longitud de onda de estas microondas? b) ¿Cuál es la energía total contenida en cada pulso? c) Calcule la densidad de energía promedio dentro de cada pulso. d) Determine la amplitud de los campos eléctrico y magnético en estas microondas. e) Si este haz de pulso incide sobre una superficie absorbente, calcule la fuerza ejercida sobre la superficie durante el 1,00 ns de duración de cada pulso.

Figura P34.66

Resolución:

Donde: f = 20 × 10⁹ Hz ; tiempo = 1,00 × 10⁻⁹ s

R = 6,00 cm ; $P_{Prom/pulso} = 25,0$ kW

Parte (a)

Sabemos que: $$\lambda\,.\,f = c \quad \Rightarrow \quad \lambda_{onda} = \frac{c}{f} = \frac{3,00\times10^8}{20\times10^9}$$

$$\therefore \quad \lambda_{onda} = 15 \times 10^{-3} \text{m} \equiv 15 \text{ mm}$$

Parte (b)

Sabemos que: $$\frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \text{Potencia}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía/pulso} = P_{prom} \times t_{total} = 25 \times 10^3 \times (1,00 \times 10^{-9})$$

$$\therefore \quad \text{Energía total/pulso} = 25 \times 10^{-6} \text{ J} \equiv 25 \ \mu\text{J}$$

Parte (c)

Sabemos que: $I = S_{prom} = \mu_{\text{energía prom}}\,.\,c$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \mu_E\,.\,c$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{\text{energía promedio}} = \frac{\text{potencia}}{c\times\text{área}} = \frac{25\times10^3}{3\times10^8\times\left(\pi\times(0,06)^2\right)}$$

$$\therefore \quad \mu_{\text{energía promedio}} = 7,37 \times 10^{-3} \text{ J/m}^3 \equiv 7,37 \text{ mJ/m}^3$$

Parte (d)

Sabemos que: $$S_{prom} = c\,.\,\mu_e = \frac{E^2_{máx}}{2\mu_o c} = \frac{c\,.B^2_{máx}}{2\mu_o}$$

Entonces: $$7,37 \times 10^{-3} \times (3,00 \times 10^8) = \frac{E^2_{máx}}{2\times4\pi\times10^{-7}\times3\times10^8}$$

$$\Rightarrow \quad E_{máx} = \sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times(3,00\times10^{8})^{2}\times7,37\times10^{-3}}$$

$$\therefore \quad E_{máximo} = 40,8\times10^{3}\ N/C \quad \equiv 40,8\ kN/c$$

Por otro lado: $B_{máximo} = \sqrt{2\mu_o\cdot\mu_{energía}} = \sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times(7,37\times10^{-3})}$

$$\therefore \quad B_{máximo} = 136\times10^{-6}\ T \equiv 136\ \mu T$$

Parte (e)

Sabemos que: Presión $= \dfrac{F}{A} = \dfrac{I}{c}$

$$\Rightarrow \quad Fuerza = \frac{A.I}{c} = \frac{P_{prom}}{c} = \frac{25,0\times10^{3}}{3,00\times10^{8}}$$

$$\therefore \quad Fuerza = 83,3\times10^{-6} N \equiv 83,3\ \mu N$$

67. La potencia electromagnética radiada por una carga puntual q en movimiento no relativista que tiene una aceleración a es

$$P = \frac{q^2.a^2}{6\pi.\varepsilon_o.c^3}$$

donde μ_0 es la permitividad del vacío (espacio libre) y c es la rapidez de la luz en el vacío. a) Muestre que el lado derecho de esta ecuación está en watts. b) Si un electrón se sitúa en un campo eléctrico constante de 100 N/C, determine su aceleración y la potencia electromagnética que radia. c) Si un protón se coloca en un ciclotrón de 0,500 m de radio y un campo magnético de 0,350 T de magnitud, ¿cuál es la potencia electromagnética radiada por este protón?

Resolución:

Datos: La potencia electromagnética de una carga está dada por:

$P = \dfrac{q^2.a^2}{6\pi.\varepsilon_o.c^3}$ Con: q, a: carga y aceleración respectivamente

Parte (a)

Por demostrar que el lado derecho está en Watt.

Sabemos que: $\varepsilon_0 = 8,85\times10^{-12}\ c^2/N\ .\ m^2$

Entonces: $\dfrac{q^2.a^2}{6\pi.\varepsilon_o.c^3} = \dfrac{c^2\times m^2.s^{-4}}{c^2.n^{-1}.m^{-2}\times m^3.s^{-3}} = \dfrac{m.s^{-1}}{N^{-1}} = \dfrac{N.m}{s} = \dfrac{J}{s}$

$\therefore$ Lado derecho $= \dfrac{J}{s}$ = Watts Lqqd.

Parte (b)

Si: $M_{e-} = 9,1\times10^{-31}$ kg ; $E = 100\ \dfrac{N}{C}$, nos piden a = ? ; Potencia = ?

Sabemos que: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{q_{e^-}.E}{m_{e^-}}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{(1,6\times10^{-19})\times10^{2}}{9,1\times10^{-31}} = 1,76\times10^{13}\frac{m}{s^2} = 17,6\ T\ m/s^2$$

Luego; $\quad Potencia = \dfrac{(-1,6\times10^{-19})^2\times(17,6\times10^{12})^2}{6\pi\times(8,85\times10^{-12})(3,00\times10^{8})^3}$

$$\therefore \quad Potencia = 1,75\times10^{-27}\ W$$

Parte (c)

Si un protón se coloca en un ciclotrón de 0,5 m de radio y B = 0,350 T; nos piden potencia electromagnética radiada.

Sabemos que en un ciclotrón se cumple que:

$$F_B = m_{p+}\ .\ a = q_+\ .\ B\ .\ v = \overbrace{m_{p+}\ .\frac{v^2}{r}}^{M.C.U}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{q_{p^+}.r.B}{m_{p+}} = \frac{1,6\times10^{-19}\times(0,5)(0,350)}{1,67\times10^{-27}}$$

$$\therefore \quad v_{p+} = 16,77\times10^{6}\ m/s$$

Luego: $\quad a_{p+} = \dfrac{1,6\times10^{-19}\times(0,350)(16,77\times10^{6})}{1,67\times10^{-27}}$

$$\therefore \quad a_{p+} = 5,62\times10^{-14}\ W$$

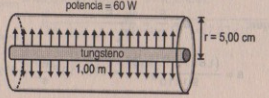
Entonces: $\quad Potencia = \dfrac{(1,6\times10^{-19})^2\times(5,67\times10^{14})^2}{6\pi\times(8,85\times10^{-12})\times(3,00\times10^{8})^3}$

$$\therefore \quad Potencia = 1,80\times10^{-24}\ W$$

68. Un delgado filamento de tungsteno de 1,00 m de largo radia 60,0 W de potencia en forma de ondas electromagnéticas. Una superficie que absorbe a la perfección, en forma de un cilindro hueco de 5,00 cm de radio y 1,00 m de largo, se coloca concéntricamente con el filamento. Calcule la presión de radiación que actúa sobre el cilindro. (Suponga que la radiación se emite en la dirección radial e ignore los efectos de los extremos).

Resolución :

Sea la figura:



Nos piden: presión de radiación = ?

Suponga que la radiación se emite en forma radial; e ignore los efectos de los extremos.

Como la radiación se emite en forma radial, entonces la intensidad de onda actúa en el área lateral del cilindro; luego:

$$I = \frac{\text{potencia}}{A_{\text{lateral}}} = \frac{60\text{ W}}{2\pi.R.\text{long}} = \frac{60}{2\pi(0{,}05)(1{,}00)}$$

$\therefore \quad I = 190{,}98\ \text{W/m}^2$

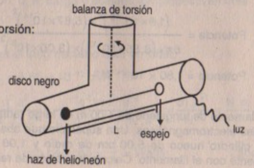
Luego: $\quad$ Presión de radiación $= \dfrac{I}{c} = \dfrac{190{,}98}{3{,}00\times10^{8}}$

$\therefore \quad$ Presión de radiación $= 637\times10^{-9}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2} \equiv 637\ \text{nPa}$

69. La balanza de torsión mostrada en la figura 34.8 se emplea en un experimento para medir presión de radiación. La fibra de suspensión ejerce un momento de torsión restaurador elástico. La constante de momento de torsión es $1{,}00\times10^{-11}$ N.m/grado, y la longitud de la barra horizontal es 6,00 cm. El haz de un láser de helio-neón de 3,00 mW incide sobre el disco negro, y todo el disco del espejo está blindado. Calcule el ángulo entre las posiciones de equilibrio de la barra horizontal cuando el haz pasa del estado "desactivado" al "activado".

Resolución :

Dada la figura de torsión:



Donde: $\quad$ Cte. del momento de torsión $= 1{,}00\times10^{-11}$ N.m/grado

$U = 3{,}00$ mW

$L = 6{,}00$ cm

Nos piden: el ángulo entre las posiciones de equilibrio de la barra horizontal cuando el haz pasa del estado "desactivado" al "activado".

Resolución:

Sabemos que: Cte. del momento de torsión $= \dfrac{2U.\cos\theta}{C}$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\text{cte}.c}{2.U} = \frac{(1{,}00\times10^{-11})(3{,}00\times10^{8})}{2.(3{,}00\times10^{-3})}$$

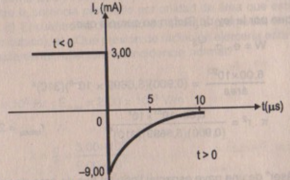
$\therefore \quad \cos\theta = 0{,}5$

Luego: $\quad \theta = \cos^{-1}(0{,}5) = 60°$ ó $300°$

Como:

Nos piden el $\angle$ desde el estado "desactivado" al "activado" el haz tiene que recorrer un ángulo de $3{,}00\times10^{2}$ grados, es decir: 300°.

Corriente que pasa por "R_2" antes y después de t = 0



Parte (c)

De la parte (a) sabemos que:

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R_1}.e^{-\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)t} \quad \text{... (tanto en } R_1 \text{ como en } R_2)$$

$\Rightarrow \quad$ Cuando $I_{(t)} = 2$m.A se cumple que:

$$2\text{mA} = \left(\frac{18\text{ V}}{2{,}00\text{k}\Omega}\right).e^{-\left(\frac{2{,}00\text{ k}\Omega+6{,}00\ \Omega}{0{,}400\text{ H}}\right)t}$$

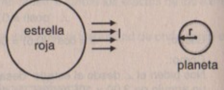
$$\Rightarrow \quad 2\text{mA} = 9\text{mA}.\ e^{-\left(\frac{8\text{ k}\Omega}{0{,}4\text{ H}}\right)t} \quad \Rightarrow \quad \ln(4{,}5) = \left(\frac{8\text{ k}\Omega}{0{,}4\text{H}}\right).t$$

$\therefore \quad t = 75{,}2\times10^{-6}\text{s} \equiv 75{,}2\ \mu\text{s}$

70. **Problema de repaso.** El estudio de la creación sugiere un Creador con un marcado gusto por los escarabajos y las pequeñas estrellas rojas. Una estrella roja, típica de la clase más común, radia ondas electromagnéticas con una potencia de $6{,}00 \times 10^{23}$ W, lo cual sólo es el 0,159% de la luminosidad del Sol. Considere un planeta esférico en una órbita circular alrededor de esa estrella. Suponga que la emisividad del planeta, como se define en la sección 20.7, es igual para la luz visible y la infrarroja. Suponga que el planeta tiene una temperatura superficial uniforme. Identifique el área proyectada sobre la cual el planeta absorbe luz estelar, y el área radiante del planeta. Si los escarabajos se desarrollan a una temperatura de 310 K, ¿cuál sería el radio de la órbita del planeta?

Resolución :

Sea la figura:



Donde: $W = I = 6{,}00 \times 10^{23}$ W/área

$e_{\text{luz visible}} = e_{\text{luz infrarroja}}$

$T = 310$ K

$\sigma = 5{,}6699 \times 10^{-8}\ \dfrac{W}{m^2 K^4}$

$r = ?$

Sabemos que por la ley de Stefan se cumple que:

$$W = e \cdot \sigma \cdot T^4$$

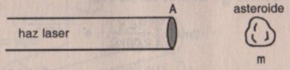
$$\Rightarrow \quad \frac{6{,}00\times10^{23}}{\text{área}} = (0{,}900)(5{,}6699 \times 10^{-8})(310)^4$$

$$\Rightarrow \quad \pi \cdot r^2 = \frac{6{,}00\times10^{23}\times10^{8}}{(0{,}900)(5{,}6699)(310)^4} \qquad \therefore\ r_{\text{orbita}} = 2{,}01 \times 10^{10}\ \text{m}$$

71. El "cañón láser" de una nave espacial tiene un haz de área de sección transversal A. El campo eléctrico máximo en el haz es E. ¿A qué proporción a un asteroide acelerara alejándose de la nave espacial si el haz láser golpea el asteroide perpendicularmente a su superficie, y ésta es no reflectora? La masa del asteroide es m. Ignore la aceleración de la nave espacial.

Resolución :

Sea la figura:



Datos: A, E

Nos piden: aceleración del asteroide cuando el haz lo golpee = ?

Sabemos que: $\quad \text{Presión} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{I}{c} = \dfrac{S_{\text{prom}}}{c}$

$$\Rightarrow \quad \text{Fuerza} = \frac{A \cdot S_{\text{prom}}}{c} = \frac{A}{c} \times \frac{E^2}{2\mu_o c}$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot a = \frac{A \cdot E^2}{2\mu_o \cdot c^2} = \frac{A \cdot E^2}{2\mu_o\left(\dfrac{1}{\mu_o\,\varepsilon_o}\right)}$$

$$\therefore \quad a_{\text{asteroide}} = \frac{\varepsilon_o A \cdot E^2}{2m}$$

72. Una onda electromagnética plana varía sinusoidalmente a 90,0 MHz a medida que viaja a lo largo de la dirección +x. El valor pico del campo eléctrico es 2,00 mV/m y está dirigido a lo largo de la dirección ±y. a) Encuentre la longitud de onda, el periodo y el valor máximo del campo magnético. b) Escriba expresiones en unidades SI para las variaciones en el espacio y el tiempo del campo eléctrico y del campo magnético. Incluya valores numéricos y subíndices para indicar las direcciones de las coordenadas. c) Encuentre la potencia promedio por unidad de área que esta onda propaga por el espacio. d) Encuentre la densidad de energía promedio en la radiación (en joules por metro cúbico). e) ¿Qué presión de radiación ejercería esta onda sobre una superficie perfectamente reflectora en incidencia normal?

Resolución :

Datos: $f = 90 \times 10^6$ Hz ; $E_{\text{máx}} = 2{,}00 \times 10^{-3}$ V/m

Parte (a)

Sabemos que: $\quad \lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3{,}00\times10^{8}}{9{,}00\times10^{7}}$

$$\therefore \quad \lambda_{\text{onda}} = 3{,}33\ \text{m}$$

El período: $\quad T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{9{,}0\times10^{7}} = 11{,}1 \times 10^{-9}\ \text{s} = 11{,}1\ \text{ns}$

$$B_{\text{máximo}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{2{,}00\times10^{-3}}{3{,}00\times10^{8}} = 6{,}67 \times 10^{-12}\ \text{T} = 6{,}67\ \text{pT}$$

Parte (b)

Las variaciones de E y B serán en el tiempo:

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$B(x, t) = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$$

Donde: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3,33} = 1,88$

$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \times (9 \times 10^7) = 565 \times 10^6$ rad/s

Entonces: $E(x;t) = 2,00\ \frac{mV}{m}\ .\ \text{sen}\ (1,88x - 565\ \text{Mrad/s}\ t)\ \hat{j}$

$B(x;t) = 6,67\ \text{pT.sen}\ (1,88x - 565\ \text{Mrad/s}\ t)\ \hat{k}$

Parte (c)

Sabemos que: $I = \frac{P_{prom.}}{\text{área}} = S_{prom}$

$\Rightarrow\ I = \frac{1}{2}\frac{E^2_{máx}}{\mu_o c} = \frac{\left(2,00\times10^{-3}\right)^2}{2\times\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(3,00\times10^{8}\right)}$

$\therefore\ I = 5,3 \times 10^{-9}\ \frac{W}{m^2} \equiv 5,3\ nW/m^2$

Parte (d)

Sabemos que: $I = S_{prom} = c.\ \mu_{E\ prom}$

$\Rightarrow\ \mu_{E\ prom} = \frac{I}{c} = \frac{5,3\times10^{-9}}{3,00\times10^{8}}$

$\therefore\ \mu_{E\ prom} = 1,77 \times 10^{-17}\ J/m^3$

Parte (e)

Sabemos que: Presión $= \frac{I}{c} = \mu_{E\ prom}$

$\therefore$ Presión $= 1,77 \times 10^{-17}\ \frac{N}{m^2} \equiv 1,77 \times 10^{-17}$ Pa

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L., Lima, Perú
RUC 10090984344

ISBN: 978-9972-38-206-2

9 789972 382062

Editorial San Marcos

Jr. Natalio Sánchez 220 of. 304. Jesús María, Lima
(alt. cdra. 5 Av. Arenales) Telf.: 423-1297 Fax: 332-0153 Nextel: 834*9054
Av. Garcilaso de la Vega 974 Lima Telf.: 424-6563
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com