# Resumen

- Derivadas conocidas:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$
$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$
$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$$

- Propiedades útiles:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'g + fg'$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'\cdot g - f g'}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'\cdot g'$$

- Series de Taylor:

$$f(x+x_0) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}$$

↳ Ejemplo: $f(x+x_0) = \frac{C}{(x+x_0)^2}$

$$\Rightarrow f(x+x_0) \simeq \frac{C}{x_0^2} - \frac{2C}{x_0^3}x + \frac{3C}{x_0^4}x^2$$

- Resolución de EDOs:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

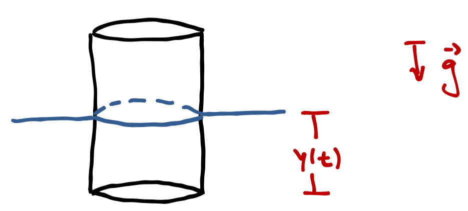
↳ Supongamos: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

↳ Si encontramos una solución a la EDO $x_p(t)$, entonces la solución general es $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$\Rightarrow \ddot{x}_h + \cancel{\ddot{x}_p} + \omega_0^2 x_h + \cancel{\omega_0^2 x_p} = \cancel{f(t)}$$

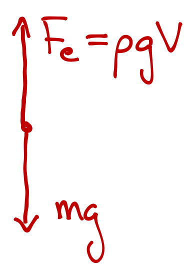
$$\Rightarrow \ddot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$ → La EDO se redujo al oscilador armónico más condiciones iniciales!

P1




(a)

- Hacemos el DCL:




$$m\ddot{y} = -mg - \rho g(\pi R^2 y)$$

↳ Viene de que $y$ mide la distancia hacia abajo!

- Imponemos equilibrio: $\ddot{y}_{eq} = \dot{y}_{eq} = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = -\pi R^2 \rho g y_{eq} - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{eq} = \dfrac{-m}{\pi R^2 \rho}}$

(*) Análisis dimensional:
$$[y_{eq}] = \frac{M}{L^2 \cdot ML^{-3}} = L \ //$$

(b)

$$m\ddot{y} = -\pi R^2 \rho g y - mg$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\underbrace{\frac{\pi R^2 \rho g}{m}}_{\omega_0^2}\Big(y - \underbrace{\frac{-m}{\pi R^2 \rho}}_{y_{eq}}\Big)$$

- Hacemos el cambio de variable $x = y - y_{eq} \Rightarrow \dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \rightarrow$ Oscilador Armónico!

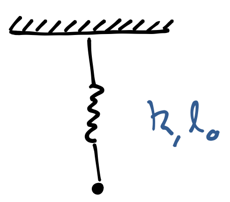
$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

- Si $x(0) = x_0 \quad \wedge \quad v(0) = v_0$

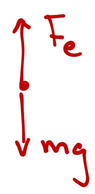
$\Rightarrow \quad x_0 = A \quad \wedge \quad v_0 = B\omega$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

## P2




(a)

- DCL: 


$$m\ddot{y} = -k(y - l_0) - mg$$

- Condición de equilibrio: $\ddot{y}_{eq} = \dot{y}_{eq} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

(b)

$$y_f(t) = F\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = -k\left(\left(y - F\sin(\omega t)\right) - l_0\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\left(y - \left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)\right) = F\frac{k}{m}\sin(\omega t) \quad / \quad x = y - y_{eq}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = F\omega_0^2\sin(\omega t) \quad / \quad \text{Ansatz: } x_p(t) = F\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)A\cancel{\sin(\omega t)} = F\omega_0^2\cancel{\sin(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{F\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

- Supongamos existe una solución mas general, de forma que

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_h + \cancel{\ddot{x}_p} + \omega_0^2 x_h + \cancel{\omega_0^2 x_p} = \cancel{F\omega_0^2\sin(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad \rightarrow$$

si resolvemos esta ec. con las condiciones iniciales encontramos la solución general

- Viendo el resultado de P1:

$$x_h(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)}$$