P1)

¿Cuál es la energía mínima de un oscilador armónico cuántico?

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

- Usamos $v = p/m$; $k = m\omega_0^2$

$$\Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2$$

- Primero, notamos que necesariamente $E > 0$ porque esto solo puede ocurrir si $x = p = 0$ y esto no puede ser debido al principio de indeterminación:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

- Ahora vamos a estimar la energía usando que $xp \sim \hbar/2$:

$$\Rightarrow E \sim \frac{\hbar^2}{8m} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} \sim -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{1}{x^3} + m\omega_0^2 x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = \frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{1}{m\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\Rightarrow E \sim \frac{\hbar^{\cancel{2}}}{\overset{}{4}\cancel{8}\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{m}\omega_0}{\cancel{\hbar}} + \frac{\cancel{m}\omega_0^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{\hbar}{2\cancel{m\omega_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \sim \frac{\hbar\omega_0}{2}}$$

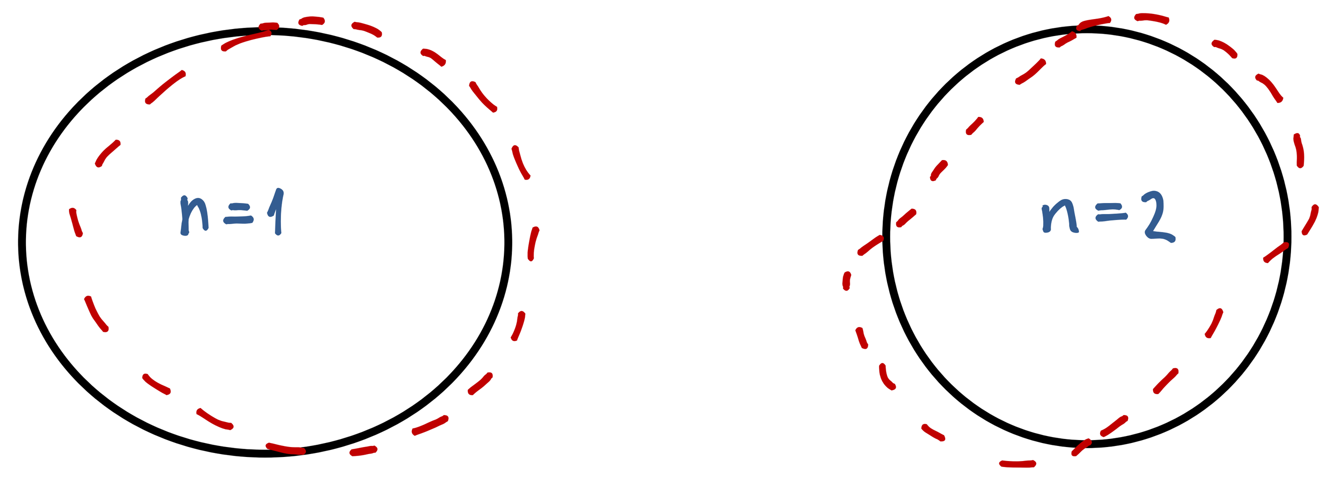
P2

¿Cuáles son los niveles de energía del átomo de hidrógeno?

- Por de Broglie, sabemos que los electrones también tienen un comportamiento tipo onda, con longitud de onda asociada

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

además, sabemo que el átomo tiene un núcleo, por lo que la imagen mental que debemos tener del átomo de hidrógeno es la de una cuerda en un círculo (n es el nivel energético):



- El largo de la cuerda y la longitud de onda debe estar relacionado por:

$$n\lambda_n = L \Rightarrow n\lambda_n = 2\pi r_n$$

↳ juntando esto con la longitud de onda de de Broglie

$$\Rightarrow n \cdot \frac{2\pi\hbar}{p} = 2\pi r_n \Rightarrow r_n \cdot p_n = n\hbar$$, donde podemos identificar $|\vec{L}| = |\vec{r}_n \times p_n| = r_n p_n$

por lo que concluimos que el momento angular está cuantizado. Cosa que Bohr se "saco de la manga" pero con el supuesto de de Broglie sale naturalmente.

- Ahora, podemos usar que la fuerza entre un protón y un electrón es:

$$F(r) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$, juntando eso con la aceleración centrípeta tenemos que:

$$\frac{m v_n^2}{\cancel{r_n}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_n^{\cancel{2}}} \Rightarrow m v_n^2 r_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$, como $p_n = m v_n \Rightarrow m v_n r_n = n\hbar$

$$\Rightarrow v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow r_n = \frac{n\hbar}{m} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar}{e^2} n \Rightarrow E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_n}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2} - m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}}$$