

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 26 de octubre de 2019

Índice general

I.	RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA	3
I.1.	Origen de la Relatividad Especial.	3
I.1.1.	Las Ondas y su Medio de Propagación	3
I.1.2.	Las Propiedades de la Luz y la Propuesta de la Existencia del Éter	4
I.2.	Los Postulados de Einstein y el Nuevo Protocolo para las Mediciones.	6
I.3.	Diagramas Espacio-Tiempo	12
I.4.	La Idea de Simultaneidad	15
I.4.1.	Descripción del Problema	15
I.4.2.	Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)	16
I.4.3.	Simultaneidad Relativa (La velocidad de la luz es finita)	17
I.4.4.	Simultaneidad Relativa: Dos Observadores en Movimiento.	19
I.5.	La Contracción del Largo	22
I.5.1.	La Aparente Contracción del Largo de una Barra en Movimiento Relativo	23
I.6.	La Dilatación del Tiempo	27
I.7.	Postulados de la Relatividad Especial	33
I.8.	Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.	37
I.8.1.	Transformaciones de Lorentz	37
I.8.2.	El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein	40
I.9.	Composición de Velocidades	44
I.9.1.	Velocidades paralelas.	44
I.10.	La función k: el Efecto Doppler	48
I.10.1.	El Efecto Doppler Relativista	48
I.10.2.	La función k	50

I.10.3.	Dilatación del Tiempo	53
I.11.	El tiempo transcurrido depende de la trayectoria: Paradoja de los Gemelos. . .	55
I.12.	El retorno de lo absoluto: los invariantes.	57
I.13.	Ejercicios Resueltos	58
I.13.1.	Las transformaciones de Lorentz: el método k.	58
I.14.	Dinámica Relativista.	70
I.14.1.	La Cuadrivelocidad.	70
I.14.2.	El cuádrimomentum	74
I.14.3.	La Conservación del Momentum.	75
I.14.4.	Ley de Transformaciones de Vectores.	79
I.15.	Ejercicios Propuestos	83

Capítulo I

RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA

I.1. Origen de la Relatividad Especial.

I.1.1. Las Ondas y su Medio de Propagación

A continuación describiremos cómo surgió la necesidad de introducir la idea acerca de la existencia de un elemento invisible que se denominó éter.

Tiene su origen en el valor de la velocidad de la luz en sistemas inerciales en movimiento relativo.

Una onda es una perturbación propagándose en un cierto medio. Cada punto oscila sin desplazarse y de alguna forma arrastra a su vecino. La oscilación puede ser en la dirección de propagación de la perturbación (como en el caso del sonido) y se las denomina longitudinales. Si la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación (como en el caso de una cuerda o la luz), éstas se denominan oscilaciones transversales. Ilustraremos estas definiciones a continuación.

Por ejemplo, el sonido es una onda propagándose a través del aire. Note que en el tubo de la figura I.1, las moléculas del gas oscilan en torno a su posición y en la dirección de propagación del sonido. El receptor se informa por el cambio de presión en el elemento de volumen de gas en su vecindad. No hay transporte de materia desde la fuente hasta el receptor.

El sonido es una onda longitudinal, se propaga en la dirección de propagación de las compresiones en el gas.

Al mover el extremo de una cuerda subiéndola y bajándola, vemos que aparece un onda propagándose. Los pequeños tramos de cuerda se desplazan en una dirección perpendicular a la dirección que se traslada la onda. Vibran alrededor de la posición horizontal de la cuerda.

Una piedra lanzada en una poza genera un tren de ondas propagándose en círculos visibles sobre



Figura I.1: *Propagación del sonido en un tubo. Las zonas de alta densidad (las más oscuras) corresponden a la mayor presión. Esta sobre-densidad se propaga hacia la derecha reemplazando a las zonas de densidad más baja. El volumen en cada tramo del tubo se comprime y descomprime pero las partículas de gas NO se trasladan hacia la derecha. la energía se traslada, no las partículas.*

la superficie del agua.

El punto que nos interesa destacar, es la necesidad que exista un medio a través del cual la perturbación se propague. Sin un medio de propagación NO hay sonido. No hay sonido en el vacío. En la Luna los astronautas se debían comunicar mediante ondas electromagnéticas aunque estuvieran a centímetros de distancia.

Las ondas transversales en el agua, necesitan un medio donde propagares. Lo mismo ocurre en la cuerda.

Una demostración de la diferencia entre ambos modos aparece en el video ¹

A partir de estos ejemplos de la vida diaria Es natural considerar que cualquier vibración requiere de un medio para propagarse.

I.1.2. Las Propiedades de la Luz y la Propuesta de la Existencia del Éter

En 1831 era conocido que una corriente eléctrica generaba un campo magnético. En 1862 J. C. Maxwell pensó que el proceso inverso también debía ser correcto: El cambio de un campo magnético debería generar un campo eléctrico. Para ello añadió un término a las ecuaciones que generaba este efecto. Junto con ello, descubrió que estas nuevas ecuaciones aceptaban una solución del tipo de ondas propagándose. Cuando calculó la velocidad de esta onda, usando solo datos obtenidos directamente de experimentos con electricidad y magnetismo, descubrió que el valor numérico obtenido era muy similar al valor de la velocidad de la luz, que provenía de experimentos que no tenían vinculación alguna con las ecuaciones propuestas por Maxwell. Esto no pasó desapercibido al genio de Maxwell y en 1862 propuso que la luz era efectivamente una onda electromagnética:

¹<http://www.youtube.com/watch?v=whlz95jX3pk&NR=1>



Figura I.2: Ejemplos de ondas transversales. <http://www.physics.isu.edu/hackmart/waves100.pdf>

un campo eléctrico y magnético se propagaban en forma sinusoidal. Esta propuesta fue confirmada experimentalmente más tarde ².

Sin embargo, lo que es relevante para la relatividad especial, es que las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio para propagarse. Lo pueden hacer en el vacío.

A esta altura y con los datos acerca de las ondas presentadas anteriormente, parece natural entonces invocar un medio: el **éter** en el cual se propaguen las ondas electromagnéticas. Es el peso de la tradición el que opera acá. Su único objetivo era servir de soporte para que las ondas electromagnéticas se propagaran en el vacío. Era el equivalente de lo que el agua proporciona a una onda transversal que se propaga a través de ella.

A finales del siglo XIX, la teoría del éter era ampliamente aceptada. Se suponía que el éter penetraba todos los cuerpos y representaba un sistema de referencia universalmente inmóvil. No era arrastrado por los cuerpos que se movían inmersos en este éter. Tenía el carácter de lo absoluto.

De acuerdo a esta teoría, la velocidad de la luz en el vacío es igual a c sólo en el sistema de referencia del éter. En cualquier otro sistema de referencia dotado de una cierta velocidad con respecto al éter, la velocidad de la luz se obtenía sumando (o restando, de acuerdo a la circunstancia) la velocidad de la luz a la del sistema. Esto se visualizaba a menudo como el viento del éter: la onda de la luz parecía tener una velocidad ($c \pm v$) al ser medida por la fuente en movimiento con respecto al éter. Por ejemplo, en la onda transversal viajando en la cuerda, si Ud. viaja a esa misma velocidad verá la protuberancia en reposo con respecto a su referencia.

Hasta esa fecha la existencia del éter no estaba probada. De existir, abría la posibilidad de medir la velocidad del movimiento orbital de la tierra alrededor del Sol, mediante un rayo de luz viajando a favor de la velocidad orbital de la Tierra y compararla con la velocidad de la luz viajando en oposición a la velocidad orbital de la Tierra.

Un sinnúmero de experimentos se realizaron para demostrar la existencia del éter. El más conocido es el realizado por Michelson y Morley (1881-1887) que se propuso demostrar la existencia

²<http://www.michaelbeeson.com/interests/GreatMoments/MaxwellDiscoversLightIsElectromagnetic.pdf>

del éter midiendo la velocidad de la luz a partir de rayos viajando a favor y en contra de la velocidad orbital de la Tierra. En retrospectiva, éste parece ser el único que definitivamente descartó la teoría del éter.

Sin embargo, Michelson creía fervientemente en la existencia del éter y, hasta el final de sus días, se cuestionó en qué podría haber fallado su procedimiento que impidió demostrar la existencia del éter. Nunca creyó en el resultado obtenido.

Por el contrario, Einstein postuló que la velocidad de la luz era una constante universal, la misma para todos los sistemas inerciales. Einstein no se basó en el resultado del experimento de Michelson-Morley.

Un video (en inglés) que relata esta historia aparece en³.

Para conocer la vida de Michelson, el primer norteamericano en ganar el Premio Nobel, ver⁴

I.2. Los Postulados de Einstein y el Nuevo Protocolo para las Mediciones.

La idea predominante en los tiempos de Einstein era la existencia de un éter, omnipresente, inamovible e inalterado por el movimiento de otros cuerpos y con un tiempo absoluto. La luz se propagaba con velocidad c en este medio intangible. En otros sistemas de referencia, en movimiento uniforme con respecto al éter, la velocidad debería cambiar apropiadamente.

En la mecánica inventada por Newton, el tiempo y la posición en un sistema de referencia inercial se relaciona con la posición y el tiempo en otro sistema inercial que se desplaza con una velocidad uniforme con respecto al anterior están dadas por las transformaciones de Galileo.

$$\text{Transformación de Galileo} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + u \cdot t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

De acuerdo al Principio de Superposición de Galileo, revisado en el Capítulo de Cinemática, si la velocidad de la luz es c en un sistema de referencia inercial, en otro con velocidad relativa u con respecto al anterior, la luz debería propagarse con velocidad $(c - u)$, como se indica en la Figura I.3.

³<https://www.youtube.com/watch?v=IpjdcA8fcw> Episode 41: The Michelson-Morley Experiment, in the Mechanical Universe

⁴<http://www.juliantrubin.com/bigten/michelsonmorley.html>

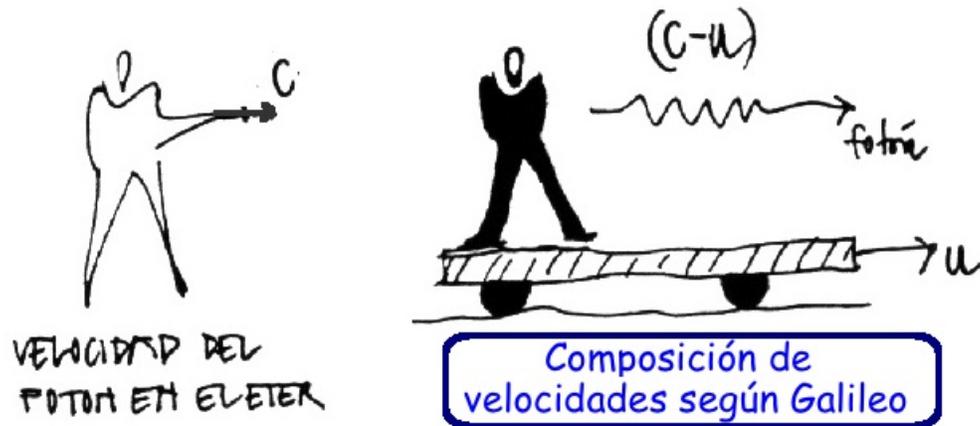


Figura I.3: De acuerdo a la ley de composición de velocidades de Galileo, un destello de luz (o fotón) lanzado por un observador en reposo absoluto tiene una velocidad c . Si su velocidad es medida por otro observador que se mueve con velocidad u con respecto al anterior, la velocidad del destello (o fotón) debería ser $(c - u)$.

La ley de composición de velocidades de Galileo NO es compatible con constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales propuesto por Einstein.

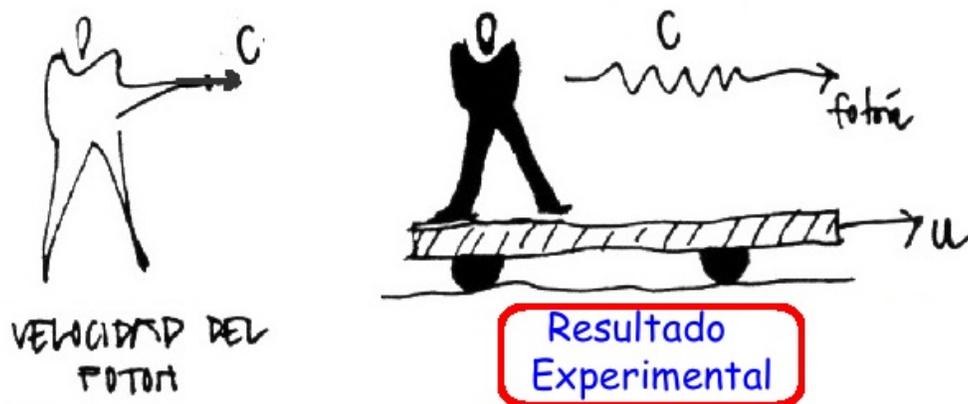


Figura I.4: Michelson y Morley usando un interferómetro, instrumento de su invención, no lograron encontrar un cambio en la velocidad de la luz relativa al movimiento orbital de la Tierra. En su informe, afirmaron que si existía un cambio en la velocidad de la luz, éste era menor que la resolución de su interferómetro, que era el instrumento más preciso de su época para realizar una medición de esta naturaleza.

En uno de los postulados propuesto por Einstein, mantiene la equivalencia de los sistemas inerciales tal como lo estableció Galileo. Esto se traduce en que no existe un experimento físico que

logre distinguir un sistema inercial de otro.

Einstein también postuló que la velocidad de la luz es **una constante universal**. Con esto ya no se requiere de un medio como el éter para que la luz se propague. Simplemente, cada observador inercial debe medir el valor c para la velocidad de la luz.

¿Cómo se logra esto? ¿Cómo es posible medir el mismo valor c para la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia inerciales? A. H. Lorentz, un prestigioso físico holandés que trabajaba en este tema, descubrió que existía una transformación de coordenadas para ir de un sistema inercial a otro mantenían la velocidad de la luz constante y con el mismo valor en diferentes sistemas inerciales en movimiento relativo uniforme. Más aún, cuando la velocidad relativa era pequeña con respecto al valor de la velocidad de la luz c , se volvía a las transformaciones propuestas por Galileo [I.1].

Por ejemplo, si en un sistema de referencia inercial la luz viaja entre el punto **Q** y **P** en el intervalo Δt medido en el sistema que nosotros dibujamos en reposo (ver Figura I.5). Con $\Delta x \equiv [x_P - x_Q]$, entonces $\Delta x / \Delta t = c$.

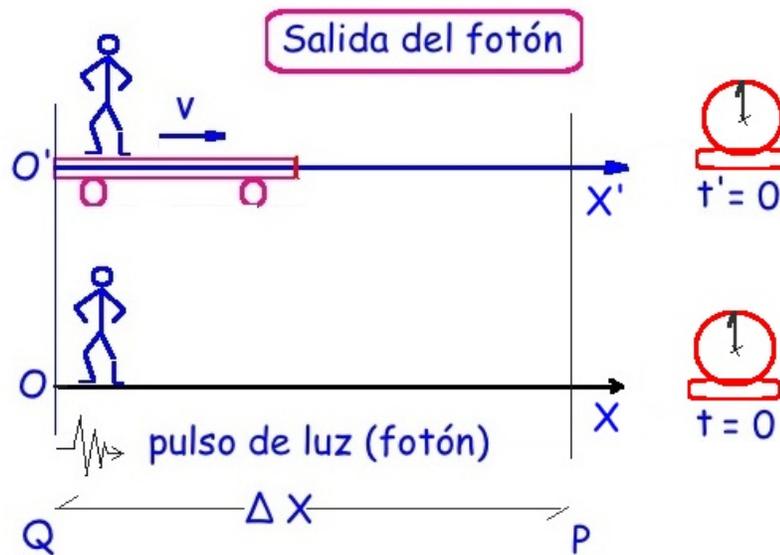


Figura I.5: Salida del pulso de luz (fotón). Cuando se dispara el fotón, el origen de ambos sistemas de referencia coinciden en el instante $t = 0 = t'$. De acuerdo al postulado de Einstein, ambos observadores miden el mismo valor para la velocidad de la luz c . La coordenada del punto de llegada es x_P y x'_P en el sistema inercial en movimiento.

Si evaluamos las coordenadas de los puntos **Q** y **P** en el sistema en movimiento relativo con velocidad V , manteniendo el mismo orden de los puntos, debemos obtener $\Delta x' / \Delta t' = c$, donde el valor de la coordenada x' corresponde al punto **P**, evaluado en el sistema en movimiento (ver I.6). Note que el tiempo también debe depender del sistema de referencia para mantener c constante en ambos sistemas. El tiempo no transcurre igual en ambos sistemas como ocurría en las

transformaciones de Galileo [I.1].

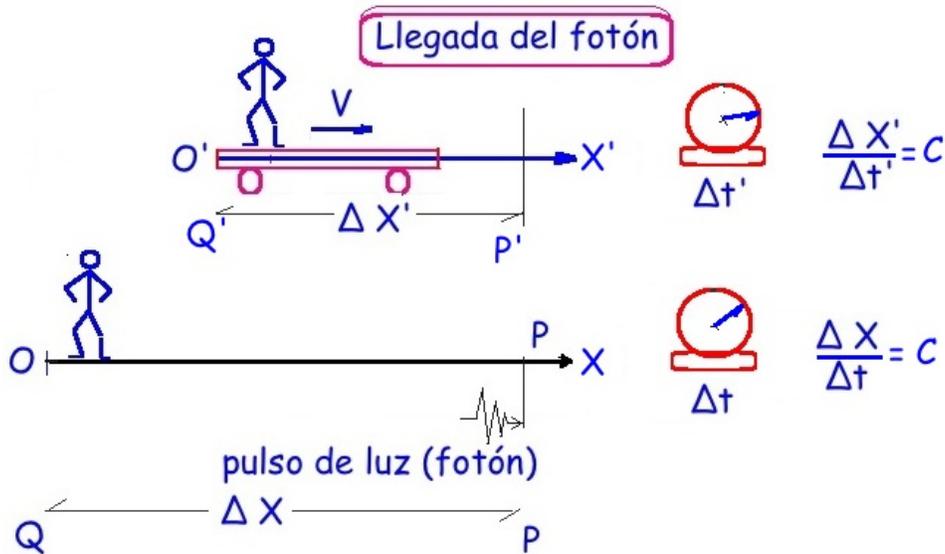


Figura I.6: Llegada del fotón al punto P . Según el observador en reposo, el fotón ha recorrido una distancia igual a Δx en un tiempo Δt . Para el observador en movimiento S' , la distancia recorrida es $\Delta x'$ medida, como se señala en la figura. El tiempo empleado es $\Delta t'$. Como mostraremos más adelante, el tiempo transcurre en forma diferente en cada sistema. Las coordenadas deben cumplir la condición: $\Delta x'/\Delta t' = c = \Delta x/\Delta t$.

Las ecuaciones que cumplen con esta condición, descubiertas por A. H. Lorentz, antes que lo hiciera Einstein, llevan su nombre. Las incluimos a continuación sin deducirlas. Lo haremos más adelante. Las transformaciones de Lorentz para un movimiento unidimensional como el ilustrado en las figuras I.5, y I.6, son

$$ct' = \frac{ct - \frac{Vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (I.2)$$

donde ct' y x' indican las coordenadas de un evento en el sistema de referencia del observador S' (aquél en movimiento) y las sin prima las coordenadas del mismo evento evaluado en S .

La luz adquiere un nivel superior, es una constante universal. De este modo la pregunta no es cómo se propaga sino, cómo se deben cambiar las transformaciones de coordenadas entre ambos sistemas para que cada observador inercial le adjudique el mismo valor c en su sistema de referencia. Esto debe ser independiente de la velocidad relativa (menor que la velocidad de la luz) entre ambos sistemas.

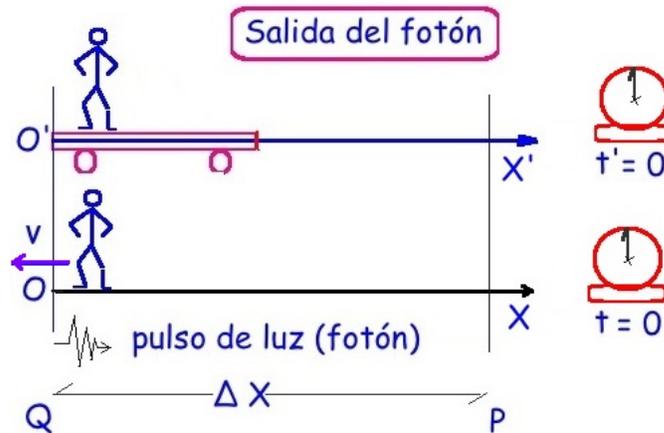


Figura I.7: Salida del pulso de luz (fotón). Conviene resaltar que lo mismo ocurre si nos ubicamos en el sistema S' y observamos que el sistema S se desplaza con la misma velocidad pero en sentido opuesto. La velocidad de la luz sigue siendo c . La velocidad de la luz NO depende de la velocidad de la fuente.

Ejemplo

No hemos explicado cómo obtener las transformaciones de Lorentz [I.2], pero podemos estudiar sus propiedades algebraicas y comenzar a familiarizarnos con ellas, ya que son las mismas encontradas posteriormente por Einstein.

a.- Verifique que las dimensiones de las transformaciones de Lorentz desplegadas en [I.2] son las correctas.

b.- Muestre que en el límite de $c \gg v$, las transformaciones de Lorentz tienen como límite las transformaciones de Galileo [I.1]. Debemos imponer que $v/c \rightarrow 0$.

c.- Demuestre que usando las transformaciones de Lorentz se verifica que $\Delta x' / \Delta t' = c = \Delta x / \Delta t$. Note que la coordenada del punto de partida Q coincide con el origen O y O' de cada uno de los sistemas de referencia en el instante inicial de salida del pulso de luz. Por tanto, en este instante inicial $X_Q = X_{Q'} = 0$ para $t=0$ y $t'=0$.

Solución

a.- El uso de la coordenada ct en lugar de t se justifica para tener un cuadri-vector con todas sus componentes con la misma dimensión: $[L]$. Es posible apreciar que, escrito de esta forma, todos los numeradores de la fórmula de transformación [I.2] tienen dimensión de longitud.

b.- Para el caso del tiempo, donde aparezca v/c lo ponemos igual a cero y obtenemos $t' = t$ y $X' = X - vt$, que son las transformaciones de Galileo [I.1]. Las transformaciones de Galileo son válidas sólo cuando la $v \ll c$, en el límite no-relativista.

c.- Como se desprende de las Figuras I.5 y I.6 la coordenada del punto **Q** es nula por construcción: $X_Q = X'_Q = 0$. Por tanto $\Delta X = (X_P - X_Q) = X_P$. Lo mismo es verdadero en el sistema en movimiento relativo $\Delta X' = (X'_P - X'_Q) = X'_P$. Y el argumento se repite también para el tiempo: $\Delta t = t_P$ y $\Delta t' = t'_P$.

Por tanto sólo nos debemos preocupar por la relación entre las coordenadas entre ambos sistemas del punto **P**. Escribiendo las transformaciones de Lorentz para el punto **P**

$$c t'_P = \frac{c t_P - \frac{V X_P}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad X'_P = \frac{X_P - V t_P}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \text{donde } X_P = c t_P. \quad (\text{I.3})$$

Reemplazando X_P por $c t_P$ en la expresión para t'_P y t_P obtenemos

$$c t'_P = c t_P \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = c t_P \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (\text{I.4})$$

Análogamente, reemplazando t_P por X_P/c en la expresión para X'_P en la ecuación [I.3], obtenemos

$$X'_P = X_P \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = X_P \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (\text{I.5})$$

Dividiendo la ecuación [I.5] por [I.4], obtenemos

$$\frac{X'_P}{t'_P} = \frac{X_P}{t_P} = c. \quad (\text{I.6})$$

Bajo esta transformación de coordenadas, la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas de referencia inerciales.

Hemos jugado con el álgebra de estas transformaciones. En las siguientes secciones indicaremos los desafíos a las ideas preconcebidas que provoca el hecho que la velocidad de la luz sea la misma en ambos sistemas de referencia.

Note que este resultado es válido para cualquier valor de la velocidad relativa. \square

Los postulados de Einstein.

Los sistemas inerciales son equivalentes. Es imposible diferenciar un sistema inercial de otro mediante un experimento físico. El resultado del experimento es el mismo en todos ellos.

La velocidad de la luz c , es una constante universal. Tiene el mismo valor en cada uno de los sistemas inerciales. No es posible transmitir información a una velocidad mayor que c .

A pesar que estos postulados parecen muy simples, tienen consecuencias notables, todas verificadas al día de hoy.

Resultados que se desprenden de estos Postulados.

- A.- El Tiempo es Relativo.** Relojes idénticos marcan tiempos diferentes si se ubican en sistemas de referencia en movimiento relativo.
- B.- La Simultaneidad es Relativa.** La simultaneidad está definida para un sistema de referencia inercial específico. No existe la simultaneidad absoluta, como en el sistema de Galileo.
- C.- El Protocolo de Medición.** La propuesta de Einstein define en forma precisa el protocolo para realizar una medición, por ejemplo el largo de una barra o cómo sincronizar dos relojes idénticos.
- D.- Lo Relevante es el Espacio-Tiempo.** Si no existe un tiempo absoluto, igual para todos los sistemas inerciales, se requiere especificar el tiempo en cada sistema, además de las coordenadas espaciales. Se requieren cuatro números para describir la trayectoria de una partícula. Las coordenadas de un punto **P** están dadas por una tétrada [ct, x, y, z].

I.3. Diagramas Espacio-Tiempo

Sabemos que la propuesta de Einstein resultó exitosa. Por tanto tomamos como una verdad científica que el tiempo no transcurre igual en todos los sistemas de referencia.

El cuadro de lo conocido de mecánica comienza a cambiar drásticamente.

Si el tiempo NO es el mismo para todos los observadores inerciales, debemos incluirlo en el sistema de coordenadas. Por ejemplo el punto P en el sistema de referencia S , se debe especificar por cuatro números $[ct, x, y, z]$. Para conocer sus coordenadas en otro sistema, debemos usar las transformaciones de Lorentz [I.2] y obtenemos $P(ct', x', y', z')$.

Todas las componentes de las coordenadas deben tener la misma dimensión, por esto usamos ct en lugar de t en el eje temporal.

Otro factor son las unidades de los ejes en los gráficos. Dado el valor de la velocidad de la luz, el uso de las escalas usuales de longitud, un metro por ejemplo, hace imposible apreciar una característica en un gráfico. Para hacer el uso gráfico más intuitivo y evidente, usamos como unidad para todas las coordenadas espaciales $3 \times 10^8 m$, la velocidad de la luz. No genera problemas puesto que es una constante universal.

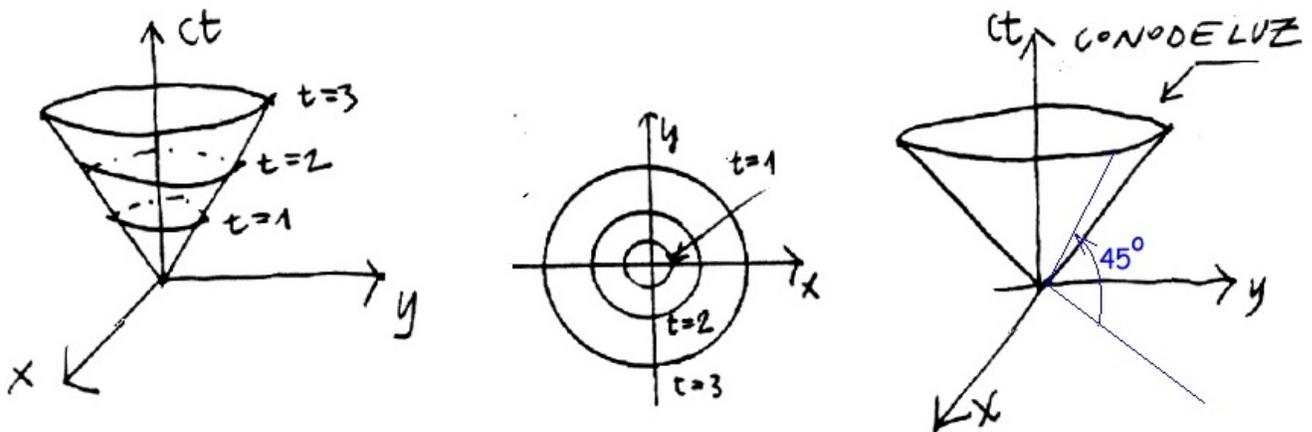


Figura I.8: A la izquierda se dibuja un destello de luz en dos dimensiones espaciales y una temporal. Se representa por un frente circular dibujado en distintos tiempos en la figura. Al centro se dibuja el desplazamiento de esta onda para distintos tiempos, sin incluir explícitamente el eje del tiempo. En la figura de la derecha, el ángulo del vértice del cono es de 90° . Esto refleja que la onda de luz viaja en 45° con respecto al plano de los ejes (x,y) .

Con esta escala los rayos de luz siempre viajan en la bisectriz del ángulo formado el eje ct y el eje x , si el rayo de luz viaja en este eje coordenado.

Este cambio de escala facilita la interpretación, no contiene ningún cambio conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales para entender esta teoría y constituyen un elemento fundamental en el protocolo de las mediciones.

Si una piedra cae en una fuente con agua (ver Figura I.2), se genera una onda superficial que se aleja del punto donde cayó con una velocidad característica. El frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama espacio-tiempo, provisto de una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales, la trayectoria de una de las ondas aparece como un cono

cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas (Ver Figura I.8). Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de tres dimensiones. En los diagramas en dos dimensiones espaciales, esta onda se transforma en un **cono de luz**.

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto e instantáneo. Por ejemplo, el punto e instante en que un objeto puntual toca el suelo al caer, o un martillo golpea a un clavo, o una luz se enciende... etc. Esto se denomina un **evento**.

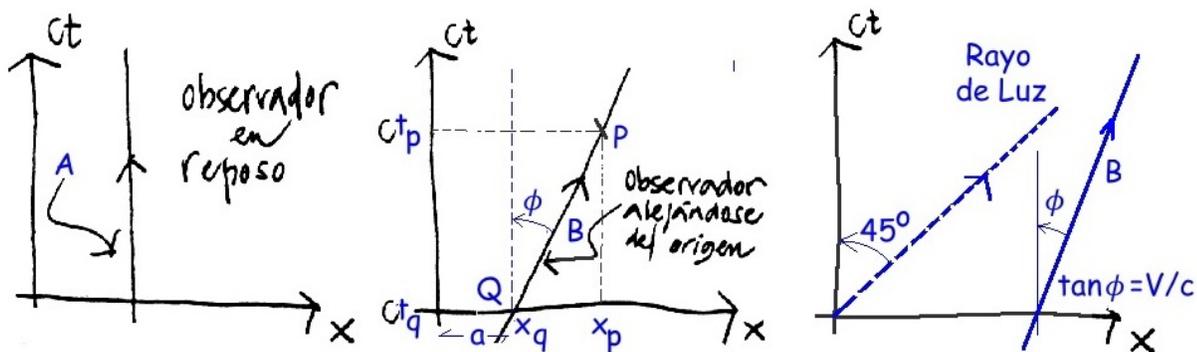


Figura I.9: La línea A, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo en el sistema de referencia. En el diagrama del centro, se dibuja la línea de universo (recta inclinada) de un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad V . A la derecha se indica la trayectoria de un rayo de luz con su inclinación de 45° y se muestra que $\tan \phi = V/c$, corresponde a la velocidad del observador **B**.

Por otra parte, si dejamos un libro (considerado como objeto puntual) sobre una mesa, ese evento se propaga en el tiempo, pero mantiene su coordenada espacial x y se transforma en una línea vertical en el espacio-tiempo. Esta línea se denomina **línea de universo** de la partícula (el libro en este caso). Si la partícula está en movimiento uniforme, en línea recta, su línea de universo es una recta inclinada. Estos dos últimos casos están representados en la Figura I.9.

A partir del gráfico se puede deducir que

$$\tan \phi = \frac{x_p - x_q}{c(t_p - t_q)} = \frac{V}{c}. \quad (\text{I.7})$$

Como no es posible representar 4 dimensiones en el papel, dibujaremos sólo una o dos coordenadas espaciales. Las figuras incluidas a continuación representan un observador en una o dos dimensiones espaciales.

La Relatividad Especial relaciona las coordenadas de un evento en un sistema de referencia con las coordenadas que otro observador, en movimiento relativo, le asocia a ese mismo evento. Se requiere ser cuidadoso con el protocolo de la medición. La noción de simultaneidad es fundamental junto con la interpretación de los gráficos espacio-tiempo.

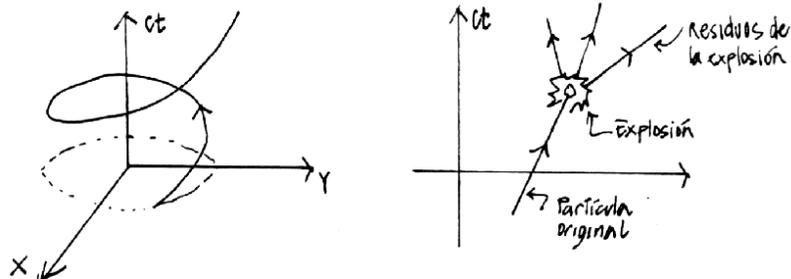


Figura I.10: Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio a . A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál parece propagarse con una velocidad mayor que la velocidad de la luz?

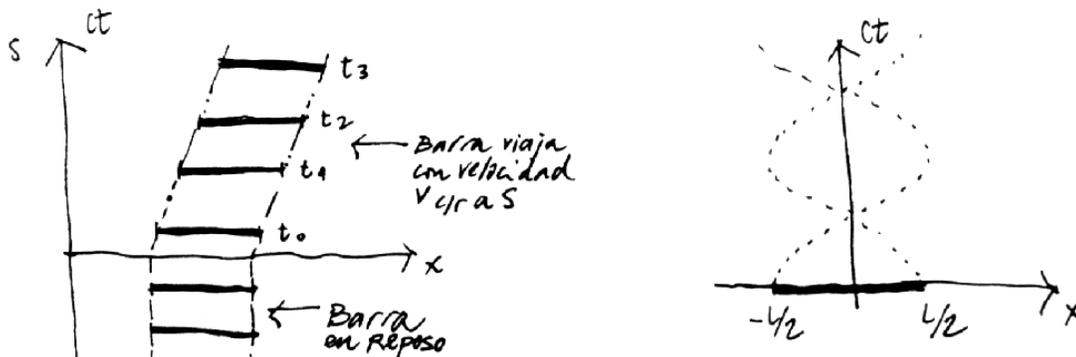


Figura I.11: Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que permanece en reposo para $t \leq 0$ y en seguida viaja con velocidad v con respecto al sistema S . A la derecha se indica la línea de universo, proyectada en el plano (ct,x) de los extremos de una barra que gira en torno al origen.

I.4. La Idea de Simultaneidad

I.4.1. Descripción del Problema

Si existe un sólo tiempo, un tiempo universal o absoluto, dos eventos son simultáneos si ocurren al mismo tiempo. El tiempo transcurre igual en todos los relojes. Para sincronizarlos, los relojes se acercan, se ponen a la misma hora y después uno de ellos se traslada al punto donde quedará ubicado. De esta forma, repitiendo la misma operación, se arma una red de relojes sincronizados, que marcan el mismo tiempo simultáneamente.

Ésta es la definición de simultaneidad absoluta.

El problema con esta definición surge al considerar los postulados de la Relatividad Especial de

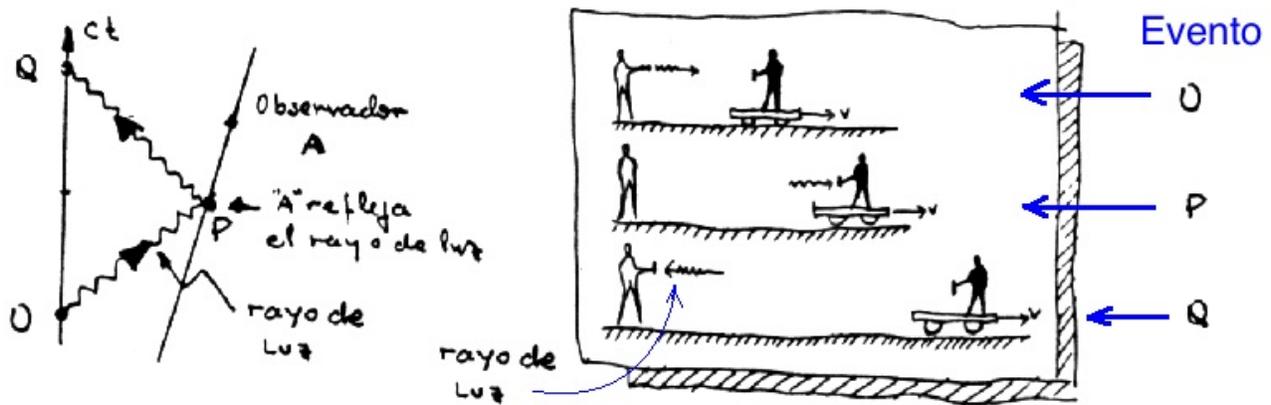


Figura I.12: En la figura de la izquierda, el observador A (en movimiento) recibe un pulso de luz proveniente del observador O (en reposo) y lo refleja de vuelta. En el diagrama de la derecha se representa la misma situación pero como una filmación. En este diagrama el observador A se ubica en el carro que se aleja con velocidad V . Los tres eventos relevantes de la Figura están señalados y son: O, P y Q.

Einstein en este modo de sincronizar relojes. En esta teoría el tiempo transcurre más lentamente en un reloj en movimiento relativo con respecto a otro⁵. Por tanto, al desplazar un reloj, adquiere una velocidad relativa con respecto al reloj de referencia y, al transcurrir el tiempo más lentamente en éste, se pierde la sincronización. El método anterior para sincronizar relojes no opera en este caso.

Así surge la definición de simultaneidad relativa, aquella que es válida sólo en el sistema inercial en el cual se realizó.

Los eventos simultáneos para un sistema de referencia inercial, NO lo son para otro observador en movimiento uniforme relativo. De aquí el nombre de simultaneidad relativa.

I.4.2. Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)

Para todos los efectos de la vida diaria, la luz se propaga con **velocidad infinita**. Con esta consideración, no existe retardo al recibir la información entre dos eventos separados una distancia dada. Cuando recibo el fotón (o un destello de luz) nos indica que el evento que lo originó tomó lugar en el preciso instante en que lo recibí.

En el diagrama espacio-tiempo, esta situación se representa como dos eventos ubicados en un plano ortogonal al eje del tiempo. Esta es la definición de **dos eventos simultáneos**.

El fotón que arranca desde el laser ubicado en **A** se refleja instantáneamente en **B** y retorna hasta

⁵Demostraremos este resultado en la próxima sección

A. Al impactar en **B**, el reloj que se ubica allí, comienza a funcionar. Como la velocidad es infinita, no hay retardo en el tiempo. La coordenada espacial se determina cuando se ubica el reloj, y se graban estas coordenadas en la base del reloj. De esta forma **A** y **B** quedan sincronizados.

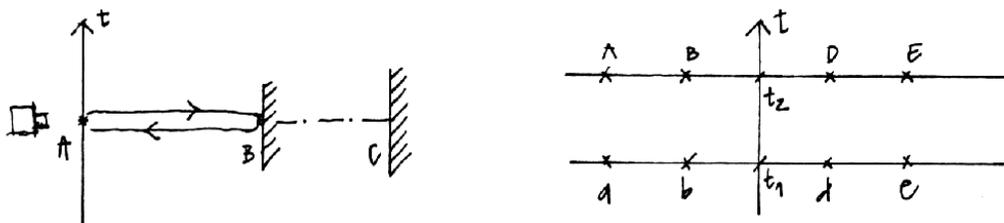


Figura I.13: *Un destello de luz viajando con velocidad infinita. Llega a todos los lugares simultáneamente.*

El mismo procedimiento se aplica a cualquier otro punto. Por ejemplo el punto **C**. Al fijarlo en su posición sabemos sus coordenadas. El rayo de luz hace funcionar el reloj con la información del tiempo al cual debe partir.

De esta forma, al sincronizar de esta forma una nube de relojes podemos formar **líneas de simultaneidad absoluta**. Estas son rectas perpendiculares al eje **c t** (Ver Figura I.13).

Los eventos **a, b, d** y **e** son simultáneos, ocurren en el instante **t₁**.

Los eventos **A, B, C, D** y **E** son también simultáneos, pero ocurren en el instante **t₂** con posterioridad a **t₁**.

Supongamos un observador que viaja con velocidad **v** con respecto al anterior, la pregunta: ¿Cuál es la línea de simultaneidad asociada al observador bautizado como **S'**? (Ver Fig. I.14)

La respuesta es la misma que le asociamos al observador en reposo: al considerar la velocidad de la luz infinita, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador **S'** con respecto a **S**, los eventos **A** y **B**, son simultáneos debido a que la luz no demora en recorrer cualquier distancia.

La simultaneidad absoluta se usa en la física no-relativista.

I.4.3. Simultaneidad Relativa (La velocidad de la luz es finita)

Se denomina *simultaneidad relativa* porque está asociada a un sistema de referencia específico. Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia en el cual así se determinó.

Para establecer simultaneidad relativa entre dos eventos, enviamos un pulso de luz desde el reloj maestro, hacia el reloj a sincronizar (**B** o **D** en la figura I.15). Al rebotar en el reloj, lo activa y el pulso retorna a la fuente. Allí se calcula el instante en que se activó el reloj en **B** y la distancia que los separa referida al sistema **S**, **d = c T**. Se envía otra señal, que no se indica en la figura I.15, y que adelanta el tiempo del reloj en **B** en **d/c** segundos para sincronizarlo con el reloj maestro y

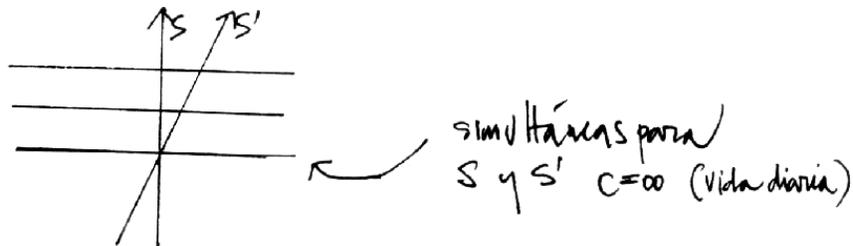


Figura I.14: Los planos de simultaneidad son las líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales. Si la velocidad de la luz es infinita, nos lleva a la existencia de la simultaneidad absoluta.

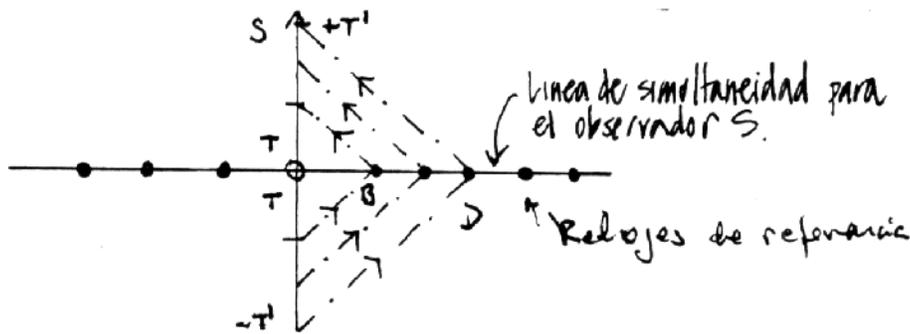


Figura I.15: La luz viaja desde el reloj maestro hasta el punto **B**, rebota y vuelve al reloj maestro. Demora **T** segundos en ir y **T** segundos en volver. El punto medio del intervalo de **2T** corresponde al instante cuando el rayo de luz impacta al reloj en **B** y lo activa. Definimos como simultáneos el instante **O** del reloj maestro y el evento **B**. También su distancia queda determinada, es **cT**.

marca su coordenada como $d = Tc$.

Con esta estrategia podemos sincronizar todos los relojes en el sistema **S**.

De esta forma la simultaneidad con respecto a un evento en el eje ct está definida de la misma forma que en el caso anterior (con $c = \infty$). Para el caso unidimensional, está formada por una serie de líneas todas perpendiculares al eje vertical ct que representa al tiempo que marca el reloj asignado al observador ubicado en el origen.

Podemos imaginar que distribuimos una infinidad de relojes en todo el espacio y mediante una serie de señales como la indicada, sincronizar cada uno de ellos con el reloj maestro y, al mismo tiempo, asignarle una coordenada de la forma ya explicada. (Ver I.16).

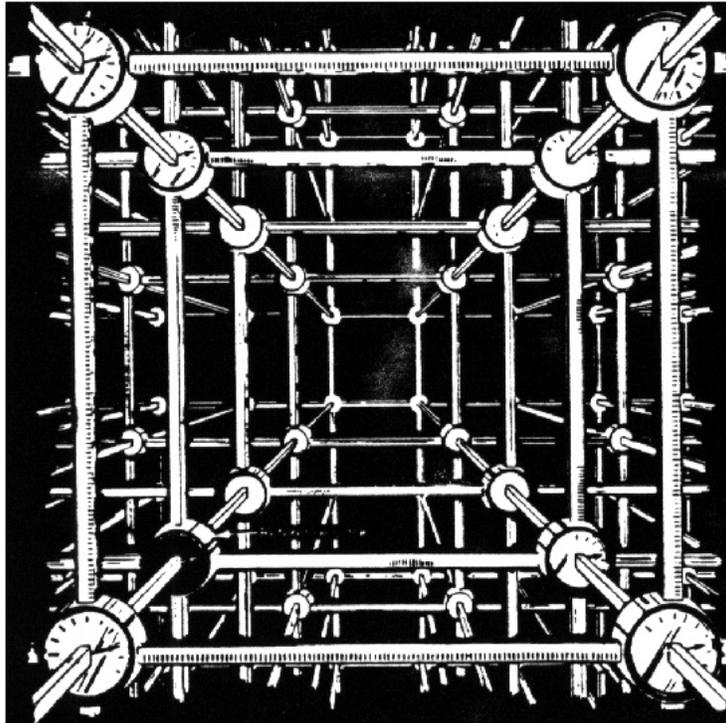


Figura I.16: *El observador construye un andamio en su Laboratorio donde cada reloj en cada vértice tiene un tiempo dado por el reloj ubicado allí y también sus coordenadas espaciales. Ambas cantidades fueron asignadas en el proceso de sincronización de cada reloj con el reloj maestro. (Extraído del libro **Spacetime Physics**, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.)*

Cómo sincronizar relojes de acuerdo a la teoría de la Relatividad especial.

Para sincronizar una red de relojes, los fijamos uniformemente a lo largo del eje-x (o en los vértices de una malla tridimensional, por ejemplo) donde permanecen fijos al sistema de referencia elegido. A partir de un reloj de referencia enviamos pulsos de luz a cada reloj. Al recibirlo, comienza a marcar el tiempo y lo refleja hacia el reloj maestro. Al recibir la señal, el reloj maestro calcula la distancia desde donde fue reflejado. Este valor se re-envía al reloj a sincronizar indicando la distancia que los separa. Este protocolo origina la simultaneidad relativa: válida sólo para el sistema de referencia en el cual los relojes permanecen en reposo. Estudiaremos los detalles geométricos en la próxima sub-sección.

I.4.4. Simultaneidad Relativa: Dos Observadores en Movimiento.

Analizamos esta situación utilizando un experimento pensado. Primero estudiamos el caso más simple. En el sistema en reposo S y desde el punto medio de una barra de largo $2L$, se lanza dos destellos apuntando hacia cada extremo de la barra. Los destellos viajan, rebotan y llegan

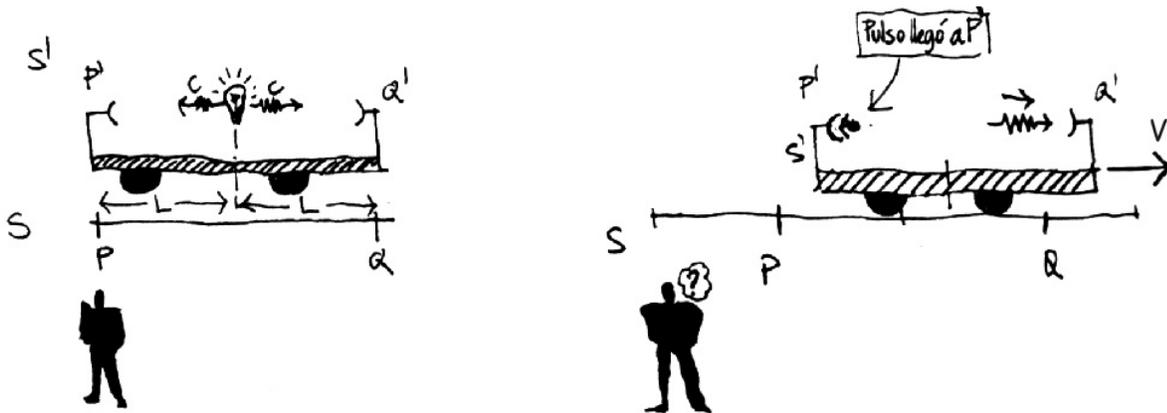


Figura I.17: A la izquierda se muestra el lanzamiento de dos destellos de luz simultáneamente desde el punto medio del carro que se encuentra en reposo en el sistema fijo S . Ambos alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro. A la derecha se ilustra el mismo fenómeno, dos destellos de luz que arrancan desde el punto medio del carro en movimiento donde viaja el observador S' . De acuerdo a S , el pulso de la izquierda llega antes puesto que el otro pulso el punto a' se aleja. la velocidad del destello no depende de la velocidad del carro, es una constante universal.

simultáneamente al centro desde donde salieron. este ejemplo es simple pero sirve para familiarizarse con lo diagramas de espacio-tiempo y la notación utilizada (Ver Figura ??).

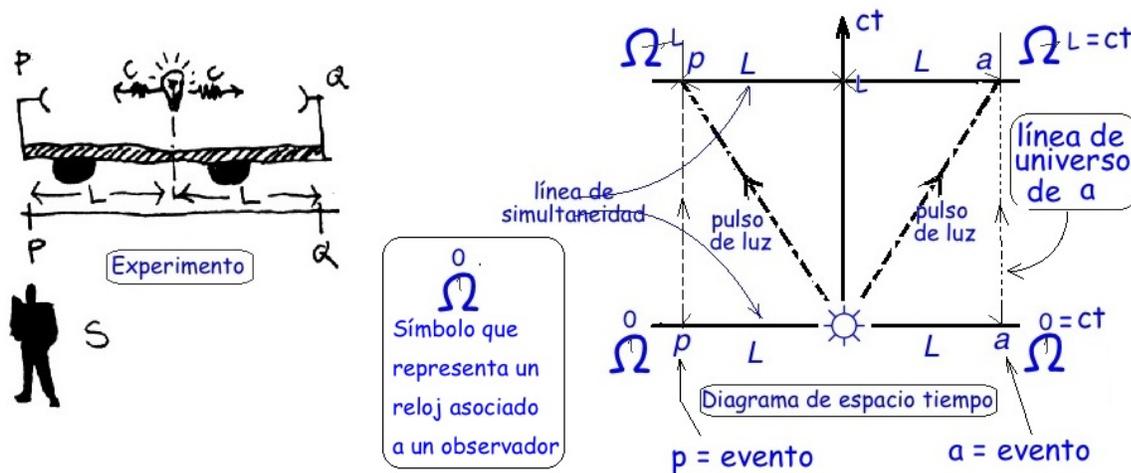


Figura I.18: Dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio del carro que se encuentra en reposo en el sistema S . Ambos alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro. A la derecha se incluye el diagrama de espacio-tiempo de este experimento.

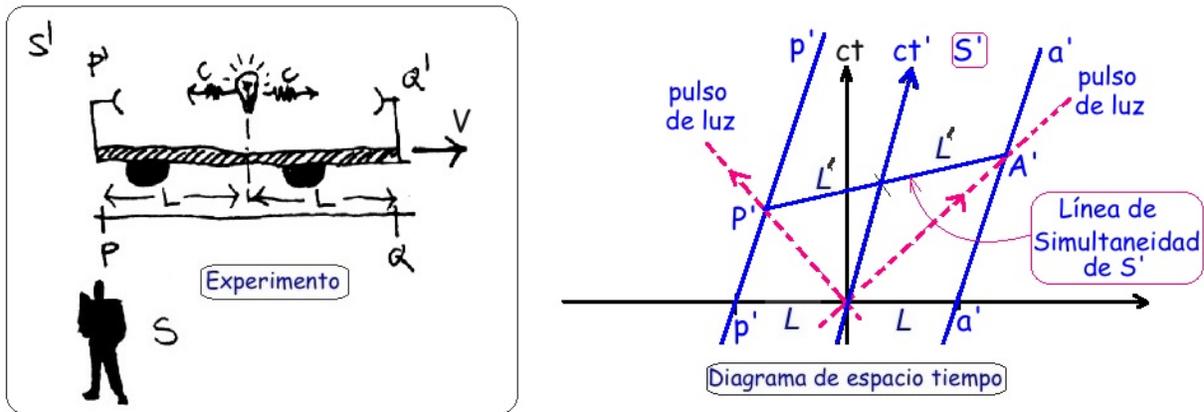


Figura I.19: *Dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio de la barra de largo $2L'$. Esta barra viaja fija al sistema S' . Como se fundamenta en el texto, estos dos pulsos llegan simultáneamente, de acuerdo al sistema S' , en los eventos marcados en la Figura a la derecha, como A' y P' . La recta $P'A'$ es la recta de simultaneidad para S' . Queda claro que la simultaneidad en el sistema S y S' son diferentes. Esta es la definición de simultaneidad relativa, asociada a un sistema de referencia inercial específica.*

A continuación consideramos un sistema, que designamos como S' , y que aleja con velocidad V del observador S . Examinaremos la simultaneidad en este sistema de referencia usando: los dos pulsos simultáneos saliendo de una fuente puntual, la barra de largo $2L'$ que viaja fija a S' , representada por las rectas inclinadas p' y a' en la Figura I.19 y siguiendo los postulados de Einstein para la Relatividad Especial (Ver Figura I.19).

De acuerdo a S' , la fuente de luz pasa por el punto medio de la barra con una velocidad $-V$. Al coincidir con el punto medio de la barra, lanza los dos destellos como se indica en la Figura I.19. Como la velocidad de la luz **no** depende de la velocidad de la fuente, por tanto se propaga en S' con la velocidad c de acuerdo al postulado de Einstein.

En la figura I.19 se indican los puntos P' y A' que son los eventos donde el pulso impacta los extremos de la barra usada para este experimento pensado. Como los pulsos partieron del punto medio de la barra, estos dos eventos son simultáneos de acuerdo al observador S' . (Ver figura derecha de I.19).

Después de determinar estos dos eventos como simultáneos, en la Figura I.19, los unimos mediante una recta $P'A'$, esta es la línea de simultaneidad para S' . Todos los relojes sincronizados ubicados sobre esta línea marcan el mismo tiempo ct' . Vemos que **NO** coincide con la línea de simultaneidad encontrada para el observador S , ver Figura I.18.

Si repetimos el proceso con otros pares de puntos simétricos con respecto al origen, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador S' similar a la familia de rectas dibujadas en S .

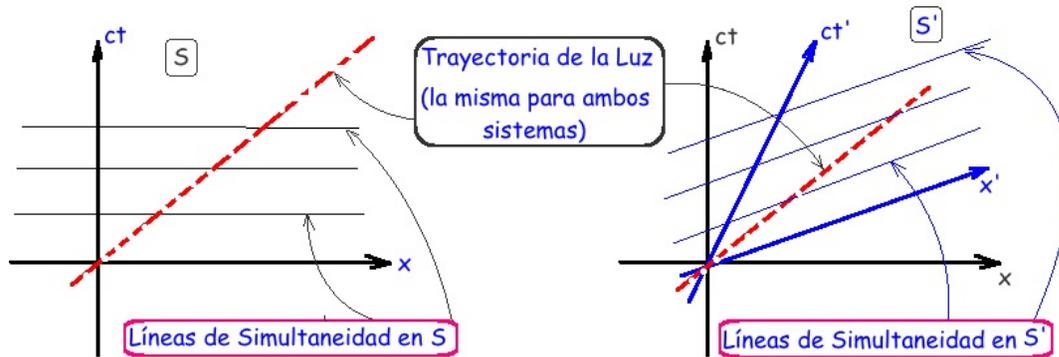


Figura I.20: A la izquierda se dibujan líneas de simultaneidad para el sistema S . A la derecha se ilustra una familia de líneas de simultaneidad en el sistema que consideramos en movimiento relativo con respecto a S , y que denominamos S' . Estas son las líneas construidas en la Figura anterior I.19.

Sincronización mediante rayos de luz en un sistema de referencia en movimiento.

Es un buen ejercicio dibujar cómo se aprecia la situación desde el punto de vista de un sistema de referencia en movimiento S' .

El rayo de luz siempre viaja bisectando el ángulo formado por el eje x y el eje temporal ct . Cuando son perpendiculares, el ángulo es 45° , si se aleja hacia la derecha, como en este caso, el ángulo es menor.

En la Figura siguiente I.21, se aprecia que los eventos A y B , son simultáneos para el observador S , pero **no** lo son para el observador designado por S' . En el sistema S' , A es simultáneo con A' y A' ocurre antes que b en el sistema S . sucede antes que B .

Ejercicio

Dibuje el evento A'' simultáneo con A' en el sistema S . Hacer lo mismo para el punto B : encontrar el evento simultáneo en el sistema S' .

I.5. La Contracción del Largo

A continuación, utilizando las transformaciones de Lorentz definidas en [I.2] y los diagramas de espacio tiempo introducidos previamente, encontraremos estos dos efectos que son centrales en la teoría de la Relatividad Especial. Al mismo tiempo tendremos la oportunidad de apreciar la importancia de los gráficos espacio-tiempo para entender y visualizar los efectos poco intuitivos de la relatividad.

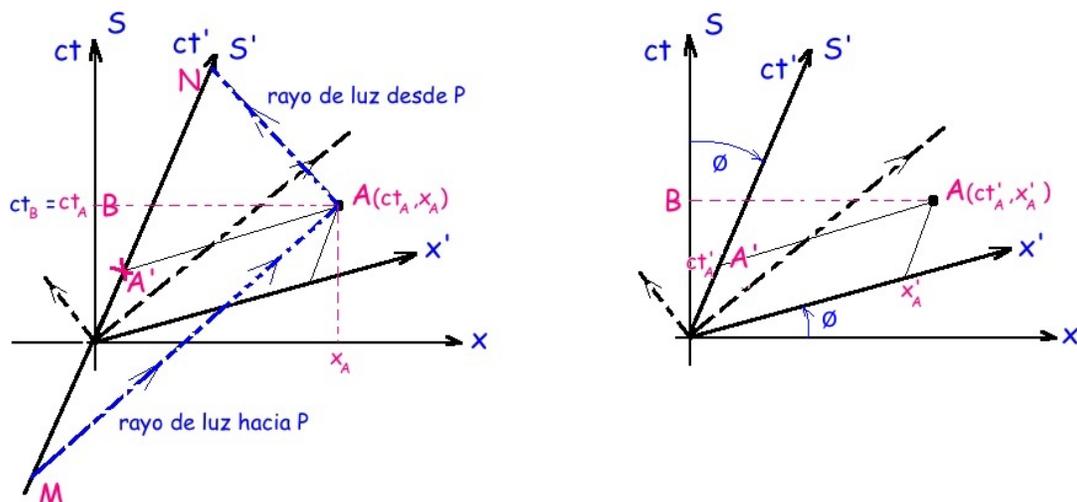


Figura I.21: A la izquierda, se dibuja el rayo de luz que se inicia desde M , rebota en A e impacta en N . De acuerdo al protocolo, el punto medio del trazo \overline{NM} , A' , es el evento simultáneo con A , por tanto para S' los puntos A y A' son simultáneos. Se indican también las coordenadas del punto A en el sistema S (a la izquierda de la figura) y S' . Las coordenadas de A en los sistemas S y S' están relacionadas por las transformaciones de Lorentz [I.2].

I.5.1. La Aparente Contracción del Largo de una Barra en Movimiento Relativo

Definición:

La medición del largo de una barra en un sistema inercial se **define** como la distancia espacial que existe entre sus dos extremos medidos a lo largo de una línea de simultaneidad del sistema inercial escogido.

Como la simultaneidad es relativa, el largo también depende del observador que mida. Por tanto resulta que una barra en movimiento parece acortarse (como mostraremos). Pero esto no es real, no es físico. Es una consecuencia de la simultaneidad utilizada para la definición del largo. *Una barra en movimiento relativo con velocidad constante, no se acorta ni se alarga. No le ocurre absolutamente nada.* Cualquier cambio que pudiera experimentar atentaría contra el principio de equivalencia entre todos los sistemas inerciales: ¿Cómo se podría explicar que la misma barra resulte ser más corta en un sistema inercial comparada con su largo en otro? ¿No son todos indistinguibles?

Medición de una barra en movimiento: método gráfico.

Las siguientes definiciones aparecen en todos los textos debido a la frecuencia con la cual aparecen en los diversos cálculos de la relatividad especial.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2}}, \quad \beta \equiv \frac{V}{C}. \quad (\text{I.8})$$

Los puntos **A**, **B** y **C** de la Figura I.22, están elegidos para hacer más fáciles la comparación entre los valores de ambos largos **L** y **L'**.

Claramente **L** y **L'** son diferentes, pero como mostraremos a continuación que el resultado sea **L** > **L'**, va contra nuestra intuición.

Las líneas l_A y l_B son paralelas puesto que la barra está en reposo en el sistema **S'**. De este modo la coordenadas de los eventos **B** y **C** en el sistema **S'** son las mismas: $X'_B = X'_C = L'$. Análogamente, $X'_A = 0$, puesto que permanece en el origen del sistema **S'**.

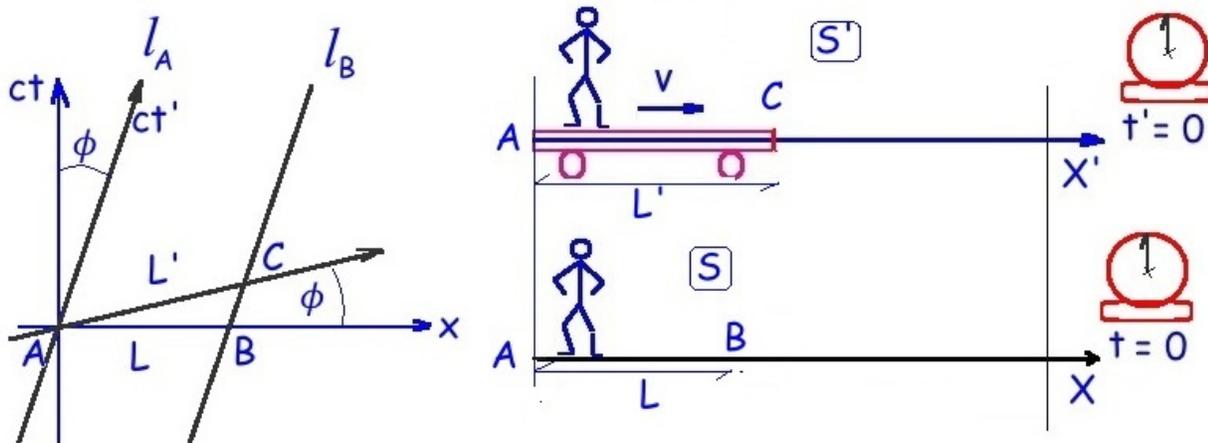


Figura I.22: Las líneas l_A y l_B , representan la línea de universo (o trayectorias en el espacio-tiempo) de los extremos **A** y **B** de la barra rígida en movimiento con respecto al sistema fijo **S**. El largo definido por el sistema **S** para la barra es $L = \overline{AB}$, puesto que es la distancia entre los extremos de la barra y son eventos simultáneos. De la misma forma, $L' = \overline{AC}$, es el largo definido para la barra por el sistema **S'** puesto que **A** y **C** son eventos simultáneos en el sistema en movimiento **S'**.

Note que en la Figura a la derecha el evento **B** está corrido hacia la izquierda con respecto a **C** en la figura superior. La idea es destacar que el evento **C** ocurre *después* que el reloj de **S** marcaba $t=0$. La barra se desplaza. Es lo que se ve claramente en el gráfico espacio-tiempo de la izquierda. Calcularemos este retraso a continuación.

Medición de una barra en movimiento: método analítico

Para comparar los largos **L** y **L'** utilizaremos las ecuaciones de Lorentz [I.2] y las coordenadas de los dos extremos de la barra evaluadas de acuerdo a cada uno de los observadores **S** y **S'**. Para

encontrar la relación entre los valores medidos por cada uno de los observadores **S** y **S'** debemos usar las transformaciones de Lorentz, puesto que estamos comparando dos sistemas inerciales en movimiento relativo.

En el sistema **S**, las coordenadas de los extremos de la barra las denominamos **A** y **B**. Cuando nos referimos al sistema de referencia **S'** nos referimos a los eventos **A'** y **B'**, específicamente $X'_{A'}$ y $X'_{B'}$.

Cuadro I.1: A continuación especificamos las Coordenadas respectivas en los Dos Sistemas de Referencia incluidos en la Figura.

Coordenadas Sistema S		Coordenadas Sistema S'	
X_A	$= 0,$	$X'_{A'}$	$= 0$
X_B	$\equiv L,$	$X'_{B'}$	$= L'$
$X_B - X_A$	$= L$	$X'_{B'} - X'_{A'}$	$= L'$
$X_{B'}$	$= L + V(t_{B'} - t_A),$		
t_A	$\equiv 0.$		

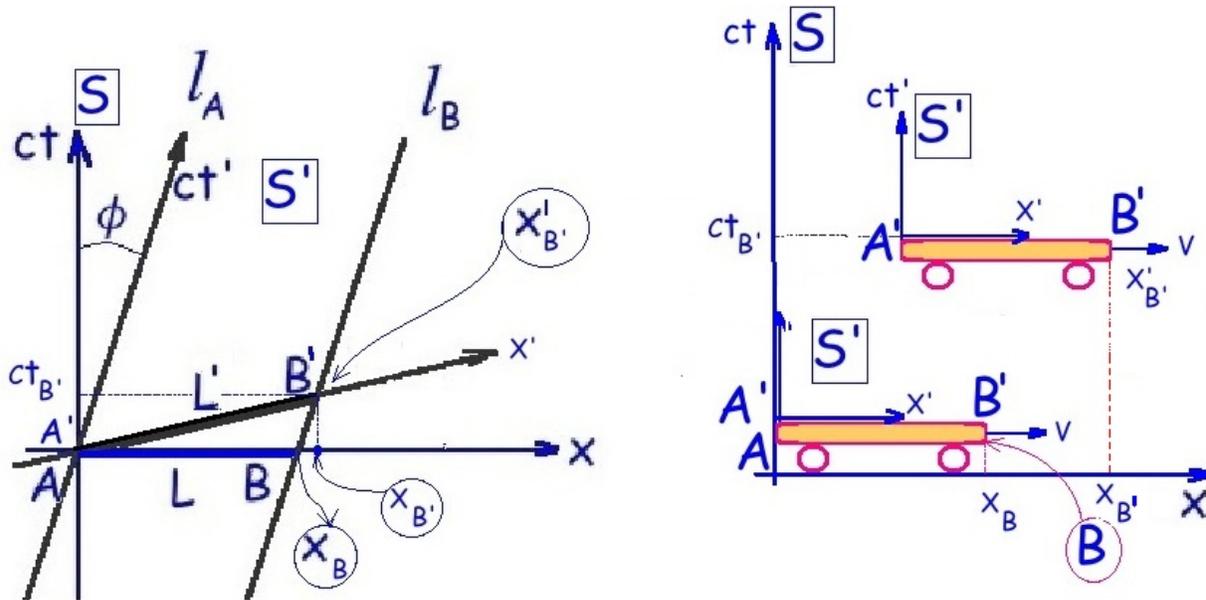


Figura I.23: Las líneas ℓ_A y ℓ_B , representan la línea de universo (o trayectorias en el espacio-tiempo) de los extremos **A** y **B** de la barra rígida en movimiento con respecto al sistema fijo **S**. A la derecha, el extremo **B'** medido en el sistema **S'** es $X'_{B'}$. Como los eventos **B** y **B'** están en la misma línea de universo ℓ_B , ambos tienen la misma coordenada en **S'**, o sea $X'_B = X'_{B'}$.

Utilizando los valores indicados en la Tabla anterior I.1 relacionamos las coordenadas del evento

\mathbf{B}' en ambos sistemas de coordenadas. Como debemos atenernos a los postulados de la relatividad especial, utilizamos las transformaciones de Lorentz [I.2], que garantizan que la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas.

$X'_{B'}$ es la coordenada espacial del evento \mathbf{B}' en \mathbf{S}' . $X_{B'}$ es la coordenada espacial del evento \mathbf{B}' en el sistema \mathbf{S} .

$$\begin{aligned} X'_{B'} &= L' = \gamma(X_{B'} - V t_{B'}) \\ &= \gamma(L + V t_{B'} - V t_{B'}) \\ \Rightarrow L' &= \gamma L \end{aligned}$$

Otro método para obtener la contracción del largo

Recurriendo a la interpretación de la línea de universo del extremo \mathbf{B} de la barra en el sistema \mathbf{S}' podemos apreciar del gráfico que

$$X'_{B'} \equiv X'_B = L', \quad (\text{I.9})$$

dado que \mathbf{B} y \mathbf{B}' se ubican en la misma línea de universo en \mathbf{S}' y que permanece paralela a la línea que cruza el origen. Permanece por tanto a la misma distancia del origen en toda la trayectoria y así tiene el mismo valor de la coordenada que -en este caso- \mathbf{B}' .

$$\begin{aligned} X'_{A'} &= X'_A = 0 \\ X'_{B'} - X'_{A'} &= L' = X'_B \end{aligned}$$

usando la transformación de Lorentz [I.2]

$$X'_B = \gamma(X_B - v t_B), \quad (\text{I.10})$$

Como $t_B = 0$ (puesto que es simultáneo con \mathbf{A}) y $X_B \equiv L$, obtenemos

$$\boxed{L' = \gamma L.} \quad (\text{I.11})$$

Si analizamos el procedimiento seguido para comparar el largo L de una barra en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, podemos notar que la diferencia surge de la forma en que se definió la longitud: Se debe medir la distancia entre ambos extremos en forma *simultánea*. Como la *simultaneidad* es propia de cada sistema de referencia, eso explica la diferencia en la longitud asociada a la barra por dada uno de los observadores.

La barra no sufre ningún acortamiento ni elongación. La diferencia proviene del protocolo establecido para definir asociar el largo de una barra rígida.

I.6. La Dilatación del Tiempo

Para medir la dilatación del tiempo debemos comparar un reloj que lleva S' en el origen (el punto O') con un conjunto de relojes sincronizados pegados al eje- x en el Sistema S . El sistema S' se desplaza con una rapidez V_0 con respecto S .

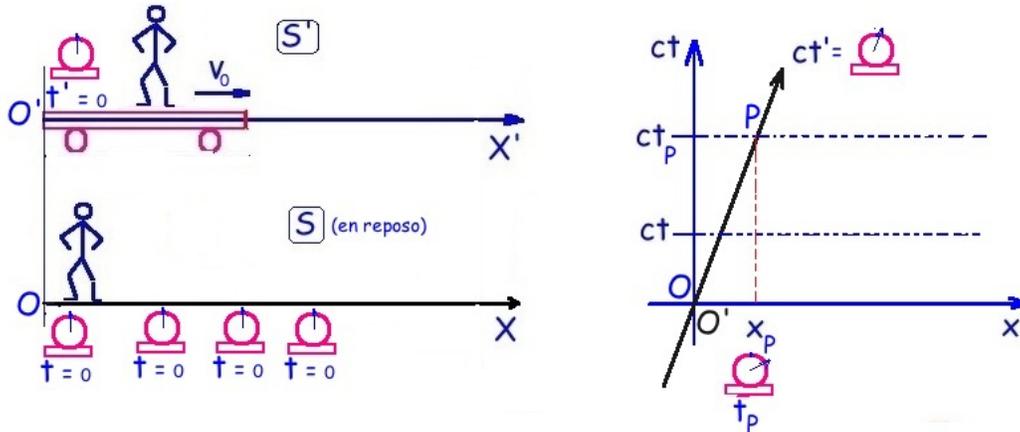


Figura I.24: Las líneas ct y ct' , representan las trayectorias en el espacio-tiempo del origen O y O' de los sistemas de referencia S y S' . P es un punto arbitrario donde se comparan los tiempos indicados por el reloj, fijo en S y ubicado en la coordenada x_P con el reloj fijo al origen de S' .

Usando las transformaciones de Lorentz [I.2] obtenemos:

$$c t'_{0'=P'} = \gamma \left(c t_P - \frac{V_0}{c} x_P \right), \quad x'_{0'=P} = 0 = \gamma (x_P - V_0 t_P). \quad (\text{I.12})$$

Despejando el tiempo en esta última ecuación,

$$\Rightarrow t_P = \frac{x_P}{V_0}$$

y reemplazando este valor en la ecuación I.12 obtenemos

$$\begin{aligned} c t'_{0'} &= \gamma \left(c t_P - \frac{V_0^2}{c^2} c t_P \right) = \gamma c \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_P \\ \Rightarrow t'_{0' \equiv P} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}} \times \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_P = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} t_P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_P = \gamma t'_{0' \equiv P} \quad \text{Como } \gamma \geq 1, \quad \text{entonces, } t'_{0' \equiv P} < t_P. \quad (\text{I.13})$$

Por tanto el tiempo medido por el reloj en movimiento transcurre más lentamente que el tiempo medido por el sistema de relojes sincronizados que, nosotros consideramos arbitrariamente, permanecen en reposo.

Existe un elemento que debemos considerar: ¿Qué ocurre si, a diferencia del caso estudiado, consideramos el sistema S' en reposo y el sistema S está en movimiento? ¿Puede afectar este cambio nuestra conclusión?

De acuerdo a los principios de la Relatividad Especial, los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí. A partir de la ecuación I.13 podríamos inferir que en el sistema en reposo el tiempo transcurre más rápido y así podríamos identificar el sistema en reposo absoluto: aquel en el cual el tiempo transcurre más rápidamente que en cualquier otro sistema inercial. Esto es una contradicción a los postulados iniciales.

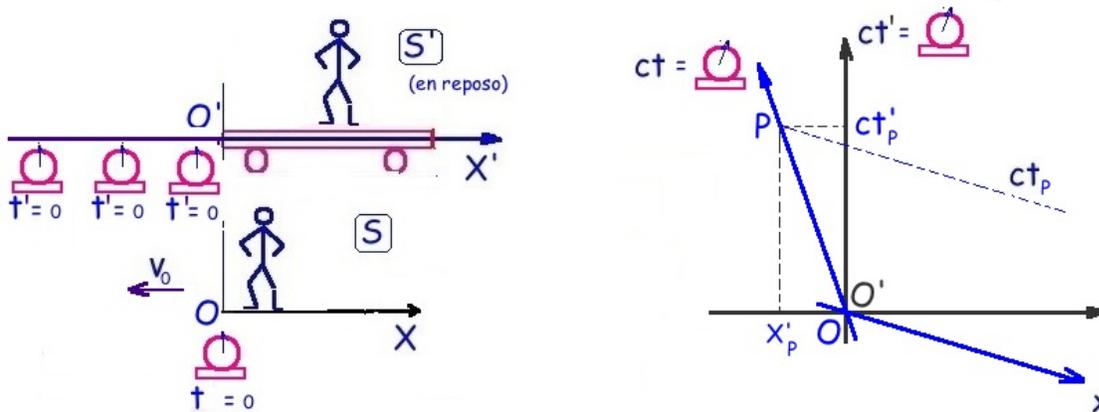


Figura I.25: La línea ct' es vertical porque consideramos a S' en reposo. Ahora es el sistema S se desplaza en el sentido negativo del eje X con velocidad $-V_0$. La tangente $\tan \phi = V/c$ es negativa y por eso el sistema de referencia se abre, a diferencia del caso anterior. Se indica una línea de simultaneidad en el sistema S .

Estudiamos qué ocurre si invertimos la situación. Consideraremos entonces el sistema S' en reposo y con un conjunto de relojes sincronizados y un reloj en el origen del sistema S para comparar tiempos (Ver Fig I.25).

$$ct_{p'} = \gamma \left(ct'_{p'} + \frac{V_0}{c} x'_{p'} \right), \quad x_{p'} = \gamma (x'_{p'} + V_0 t'_{p'}) = 0. \quad (\text{I.14})$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera,

$$ct_{p'} = \gamma \left[ct'_{p'} + \frac{V_0}{c} \left(-\frac{V_0}{c} ct'_{p'} \right) \right] = \gamma ct'_{p'} \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} ct'_{p'}$$

$$\gamma t_{p'} = t'_{p'} \Rightarrow t_{p'} < t'_{p'} \quad \text{debido a que } \gamma \geq 1. \quad (\text{I.15})$$

Repetimos la frase usada en el caso anterior: El tiempo medido por el reloj en movimiento transcurre más lentamente que el tiempo medido por el sistema de relojes sincronizados que, nosotros consideramos arbitrariamente, permanecen en reposo.

Comparando las ecuaciones , vemos que efectivamente el resultado es simétrico. Al intercambiar el papel de reposo y movimiento en estos sistemas, obtuvimos los resultado dados por las ecuaciones I.13 y I.15.

Al comparar el reloj en el sistema en movimiento con los relojes en el sistema en reposo, observamos que en el sistema en movimiento, el tiempo siempre transcurre más lentamente: el tiempo se dilata. Si intercambiamos su papel de reposo y movimiento, el tiempo se dilata siempre en el sistema considerado en movimiento. Esta es la conclusión válida.

Hasta aquí, la dilatación del tiempo ocurre en el sistema que designamos en movimiento relativo.

Buscamos un resultado que no dependa de esta elección. Debemos quebrar la simetría de los sistema inerciales en el esquema de la Relatividad Especial. Es la conclusión sacada a partir de los dos ejemplos anteriores.

El esquema siguiente quiebra la simetría o intercambiabilidad reflejada en los resultados previos e ilustra de manera más concreta la dilatación del tiempo.

Ejemplo

Considere un par de gemelos ubicados inicialmente en el mismo punto. Repentinamente uno de ellos comienza a alejarse con velocidad constante V_0 . Transcurrido un tiempo retorna con la misma rapidez $-V_0$, mientras el otro gemelo permaneció en reposo en el origen durante este intervalo. Calcule el tiempo que transcurre en el intervalo de ida y vuelta de acuerdo a los relojes de cada uno de los gemelos.

Solución

Antes de plantear el problema, un par de comentarios.

Cada gemelo representa un sistema de referencia inercial por casi todo el intervalo entre la ida y vuelta con una excepción. El gemelo viajero parte con una velocidad V_0 y retorna con $-V_0$, por tanto debió sufrir una aceleración en una parte de su trayectoria y NO constituye un sistema inercial durante todo su trayecto. Así, estos dos sistemas de referencia no son simétricos. El gemelo en el origen NO sufre ninguna aceleración.

Suponemos que la aceleración transcurre en un intervalo muy pequeño que no afecta el resultado final ni la conclusión. De hecho, confinamos el cambio de velocidad a un punto, el punto Q . Esta suposición no afecta nuestro resultado, pero no lo demostraremos acá.

El gemelo viajero regresa y comprueba que está más joven que su par. Esto ilustra que el tiempo transcurrido depende de la trayectoria seguida en el espacio-tiempo. Ilustra la dilatación del

tiempo del viajero. También ilustra la dilatación del tiempo en un sistema biológico -la edad de los gemelos-, y establece así que este resultado es válido donde se considere el tiempo como una variable.

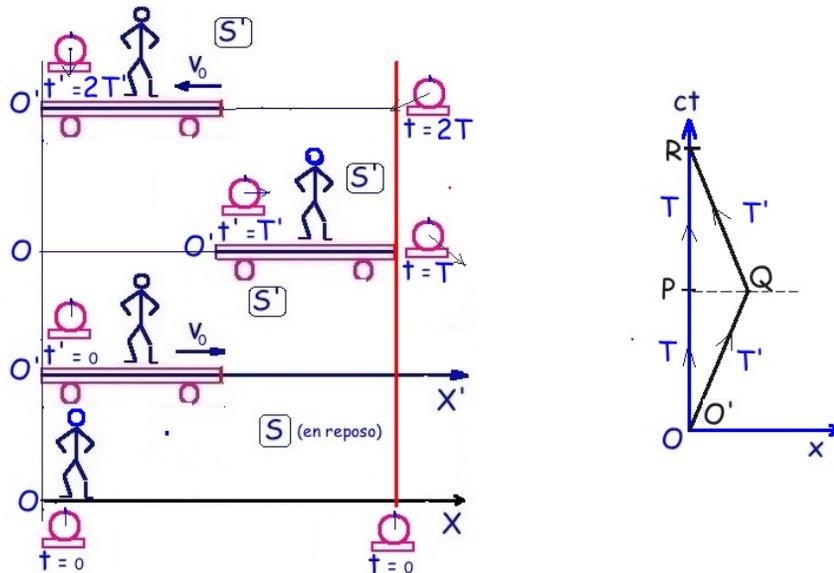


Figura I.26: Diagrama de los gemelos. Uno de ellos emprende un viaje. Al reencontrarse, aquel que fue de viaje es más joven. El quiebre de simetría entre ambos sistemas está en el punto Q de la figura. El gemelo de viaje experimenta una aceleración en esa vecindad y por tanto pierde su carácter de inercial. Los tiempos de ida y regreso mantienen la misma rapidez constante salvo el intervalo con aceleración, y toman el mismo tiempo de viaje por tramo.

Solución

En el evento 0 se activan los relojes de ambos gemelos: $t_0 = t'_0 = 0$.

Dividimos el problema en dos partes: la trayectoria de O a P y de P a R , en el caso del gemelo en reposo, y de O' a Q y de Q a R para el gemelo en viaje. Como los tramos recorridos son iguales y son cubiertos con la misma rapidez, los tiempos asociados a cada gemelo T y T' , deben ser también los mismos. (Ver Fig. I.26).

La solución consiste en encontrar relaciones entre T y T' . Para ello usamos las transformaciones de Lorentz [I.2] que, recordamos, dadas la coordenadas de un evento en un sistema inercial, encuentra las coordenadas de dicho punto o evento en un sistema inercial en movimiento relativo.

En este modelo simple, reducimos el tramo con aceleración al punto Q , de forma que hay un cambio a bruto de velocidad a la entrada de Q y a su salida.

En el sistema del gemelo en viaje $x'_Q = 0$. Veamos las relaciones entre las coordenadas del punto Q en ambos sistemas.

$$t'_Q = \gamma \left(t_Q - \frac{V_0}{c^2} x_Q \right), \quad x'_Q = 0 = \gamma(x_Q - V_0 t_Q), \quad (\text{I.16})$$

reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos

$$t'_Q \equiv T' = \gamma \left(t_Q - \frac{V_0^2}{c^2} t_Q \right)$$

Los eventos **P** y **Q** son simultáneos (ver Figura I.26) para el gemelo en reposo. Si denominamos el tiempo transcurrido desde **O** hasta **P** como **T**, entonces $t_P = t_Q \equiv T$.

Para el gemelo viajero, $t'_{O'} = 0, \Rightarrow (t'_Q - t'_{O'}) \equiv T'$.

$$T' = \gamma \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_P = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} t_P = \frac{1}{\gamma} t_P = \frac{T}{\gamma}. \quad (\text{I.17})$$

El gemelo en viaje demora lo mismo en ir desde el origen hasta alcanzar el punto **Q**, que en retornar al origen, el punto **R**. Este trayecto, que denominamos \overline{QR} , lo recorre con una velocidad $[-V_0]$.

$$(t''_R - t''_Q) = \gamma \left[(t_R - t_Q) + \frac{V_0}{c^2} (x_R - x_Q) \right], \quad (x''_R - x''_Q) = \gamma [(x_R - x_Q) + v_0(t_R - t_Q)]. \quad (\text{I.18})$$

En forma similar, reemplazando la segunda ecuación en la primera y teniendo en consideración los valores de algunas de las variables, obtenemos

$$x''_R = 0 = x''_Q, \quad (t''_R - t''_Q) \equiv T'' = \gamma \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) (t_R - t_Q). \quad (\text{I.19})$$

$$\text{Como } T'' = \frac{1}{\gamma} (t_R - t_Q),$$

y lo que tarda en el viaje de ida es igual a lo que tarda en volver

$$T'' = T' = \frac{1}{\gamma} T$$

Entonces

$$\boxed{[T' + T''] = 2T' = \frac{2T}{\gamma} \text{ como } \gamma > 1 \text{ entonces } 2T' < 2T.} \quad (\text{I.20})$$

Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la Figura (I.27) es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo (primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen O' del sistema S' , son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u \Delta t_s)^2 + L^2 = (c \Delta t_s)^2,$$

donde $u \Delta t_s$ es la distancia que recorre la nave en el intervalo Δt_s , tiempo que tarda el rayo en ir desde la base al espejo superior de la nave medida en S . L es la distancia entre espejos en S' (que es la misma que en S) y $c \Delta t_s$ es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a S .

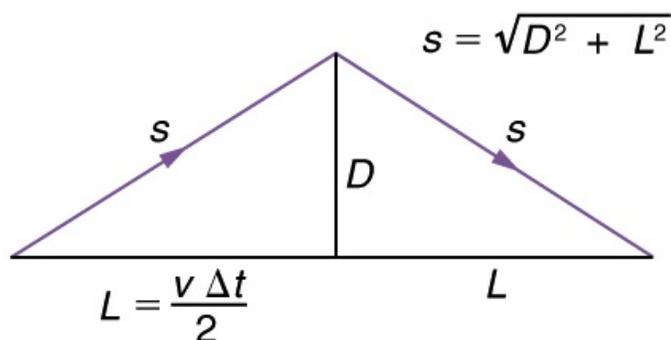


Figura I.28: Geometría de la trayectoria del rayo de luz visto por el observador en tierra.

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen O') hasta el espejo superior nos indica que es $\Delta t_{s'} = L/c$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior y despejando Δt_s en función de $\Delta t_{s'}$, tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Delta t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma \Delta t_{s'}$$

Conclusión : $\Delta t > \Delta t'$. El tiempo en S transcurre más rápido que en S' .

□

I.7. Postulados de la Relatividad Especial

Veamos las bases de la cinemática de la relatividad especial. Acá se ignora todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas: gravitación, eléctrica... .

Para construir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores. esta emisión o absorción no los afecta dinámicamente: no cambian de posición ni adquieren velocidad.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

Postulado 0 *El espacio es homogéneo e isotrópico.*

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes coordenados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida dictada por la gravitación. Como señalamos, no la consideraremos. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que $\pm 2 \times 10^{-15}$ [16].

Postulado 1 *Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador.*

Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Postulado 2 *Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a uno inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.*

Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Si cambian al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Esto no se puede llevar a cabo, por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Postulado 3 *La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.*

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley. Estos dos físicos norteamericanos intentaron medir el cambio que debería experimentar la velocidad de la luz al propagarse a favor y en contra del movimiento de la tierra. El resultado del experimento resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre las velocidades en los distintos sentidos. Experimentos más recientes, con mayor precisión, han llegado a la misma conclusión [17].

Este experimento no se ajusta a las transformaciones de Galileo (I.1). Si la velocidad de la luz en un sistema de referencia es c , en el sistema que se mueve con una velocidad V con respecto al

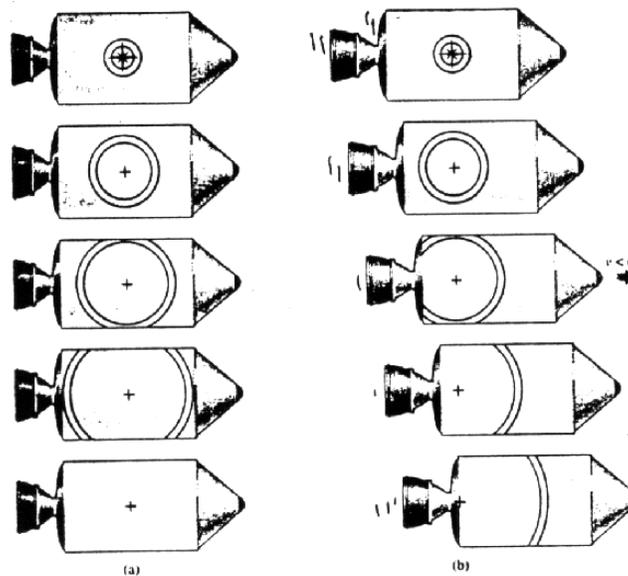


Figura I.29: La propagación de un pulso de luz visto por un observador en reposo en la nave (izquierda, son los círculos concéntricos) y el pulso visto por un observador en reposo fuera de la nave (figura derecha, el centro del círculo permanece en reposo con respecto al sistema de referencia del observador). Para éste el pulso se propaga con la velocidad c y alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.

anterior, de acuerdo a las ecuaciones (I.1), debería ser $c' = c \pm V$, dependiendo del sentido en que se traslade.

Postulado 4 En relatividad especial la distancia espacial queda definida como un número real y positivo asociado a dos eventos simultáneos. Este número es la distancia Euclídea entre estos dos eventos.

Finalmente:

Postulado 5 El largo de una barra que se desplaza en forma perpendicular a la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales, no experimenta cambio alguno. Su longitud es la misma medida en cualquiera de los sistema de referencia.

Ejemplo

A partir de la figura que se acompaña, Los autores J. A. Wheeler y R. Taylor en [2], argumentan que en el contexto de la relatividad especial no puede existir un cambio en las longitudes perpen-

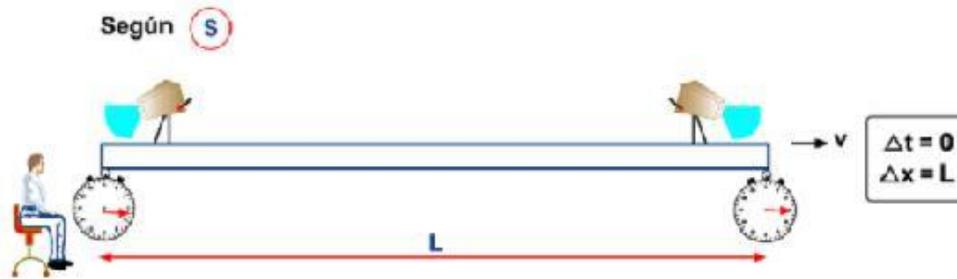


Figura I.30: *Los dos extremos de la barra son fotografiados simultáneamente en el sistema S. El largo de la barra es la distancia euclídea entre ambos eventos.*

diculares de una barra que se desplaza perpendicular a la velocidad relativa de los sistemas de referencia inerciales. Complete Ud. la explicación.

Solución

Dos observadores inerciales deben alcanzar las mismas conclusiones acerca de un evento. Por ejemplo, si un observador ve que una luz se enciende, otro observador debe percibir el mismo evento. No puede ocurrir que en una ampolla se encienda en un sistema inercial y no lo haga en otro.

En este ejemplo, consideraremos si el carro de la Figura permanece sobre los rieles, dentro de los rieles o fuera de ellos. En ambos sistemas inerciales se debe alcanzar la misma conclusión.

Esta es una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que una longitud perpendicular al movimiento relativo se acorta debido al movimiento. Esto indica que si mido un largo L de una barra en mi sistema de referencia, esa misma barra si se desplaza con respecto a mi sistema de referencia, y mido su largo, éste resulta ser menos que el original L .

Apliquemos esto al carro de la Figura. Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo a los rieles y el otro fijo al carro del tren. Lo que mediremos es el ancho de las ruedas del carro (vistas de frente en la Figura). En reposo las ruedas del carro permanecen sobre los rieles.

Consideremos el acortamiento propuesto en el párrafo anterior. En este caso un sistema de referencia fijo a los rieles ve (por ejemplo) que el ancho de los carros (que normalmente viajan a lo largo de los rieles, es decir entrando o saliendo de la hoja) se acorta. Por tanto este observador afirma que el tren en movimiento cae en el interior de los rieles.

Otro observador inercial, fijo al carro observa que los rieles (o mejor los durmientes), viajan y por tanto la distancia entre ellos se acorta y las ruedas del tren caen fuera de los rieles. Para un observador inercial el carro cae dentro de los rieles y para el otro observador inercial, el carro cae

fuera de los rieles.



Figura I.31:

Claramente esto es contradictorio. O el carro cae dentro o cae fuera, pero no ambos.

La salida a esta contradicción es que NO ocurre ni acortamiento, como se supuso acá, ni alargamiento, alternativa que no se consideró pero que conduce a la contradicción señalada).

□

Esta conclusión descansa en la premisa que los sistemas inerciales son indistinguibles el uno del otro.

Este postulado puede entonces considerarse que se desprende de los anteriores.

I.8. Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.

I.8.1. Transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas de referencia: S , en el cual nos ubicamos y S' , que se desplaza con rapidez v con respecto a S . El vector velocidad \vec{v} , quiebra la isotropía del espacio. Seleccionamos la dirección de la velocidad como el eje x y nos restringimos a este caso particular.

Suponemos que la relación entre las coordenadas de un evento visto desde el sistema S y desde S' , sea lineal en las coordenadas. Suponemos también por simplicidad que los orígenes de coordenadas de ambos sistemas de referencia coinciden $x = x' = 0$ en $t = t' = 0$. Analicemos sólo la coordenada x' por ahora.

$$x' = a x + b t, \quad (\text{I.21})$$

donde a y b son funciones de la velocidad, $a = a(v)$ y $b = b(v)$.

Considere una partícula ubicada en el origen de coordenadas del sistema S' , por definición: $x' = 0$. De manera que la ecuación anterior nos da

$$0 = a x + b t, \quad (\text{I.22})$$

donde x representa la posición del origen de coordenadas de S' en el instante t .

De aquí obtenemos $0 = a x + b t$, de modo que

$$\frac{x}{t} \equiv \frac{dx}{dt} = v = -\frac{b}{a}.$$

Las funciones $a(v)$ y $b(v)$ están relacionadas. La transformación general de coordenadas toma la siguiente forma:

$$x' = a(v) (x - v t). \quad (\text{I.23})$$

Utilizando el Postulado que afirma que todos los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí deducimos que esta misma relación debe ser válida para el sistema S' :

$$x = a(|v|) [x' + v t'], \quad (\text{I.24})$$

donde hemos supuesto que $a(v) \equiv a(|v|)$. El factor multiplicativa $a(v)$ depende del módulo de la velocidad relativa.

Consideremos ahora la constancia de la velocidad de la luz. Si en el instante $t = 0 = t'$ enviamos un pulso de luz en el sentido positivo del eje x , en cada uno de los sistemas inerciales se debe cumplir:

$$x' = c t' \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S'$$

$$x = c t \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S.$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en I.23 y I.24 obtendremos una expresión para la función $a(v)$, como se indica a continuación:

$$c t' = a(v)(x - v t) = a(v) (c t - v t)$$

$$c t = a(v) (x' + v t') = (c t' + v t')$$

$$\Rightarrow t' = a(v) \left(1 - \frac{v}{c}\right) t$$

$$t = a(v) \left(1 + \frac{v}{c}\right) t'$$

Reemplazando la expresión de t en la última ecuación de t' , podemos obtener $a(v)$.

De estas igualdades se desprende

$$\alpha(v) \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{I.25})$$

donde definimos $\alpha(v) \equiv \gamma$, por convención.

En definitiva la transformación I.23, se escribe:

$$x' = \gamma(v) (x - vt). \quad (\text{I.26})$$

Para obtener la transformación del tiempo operamos algebraicamente con las mismas transformaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ x &= \gamma[\gamma(x - vt)] + \gamma vt' \end{aligned}$$

Si despejamos t' de la ecuación anterior, obtenemos:

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \right) x.$$

Re-escribimos esta última ecuación, utilizando las siguientes igualdades:

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2,$$

con $\beta \equiv v/c$. Finalmente la expresión para t' es:

$$t' = \gamma \left\{ t - \frac{v}{c^2} x \right\}. \quad (\text{I.27})$$

Las ecuaciones I.23 y I.24, son las transformaciones de Lorentz. Dadas las coordenadas de un evento en un sistema S , podemos obtener las coordenadas en el sistema S' a través de estas ecuaciones.

Las coordenadas perpendiculares a la velocidad y y z , se transforman igual que en las transformaciones de Galileo.

Note que para $v \ll c$ se recuperan las transformaciones de coordenadas de Galileo.

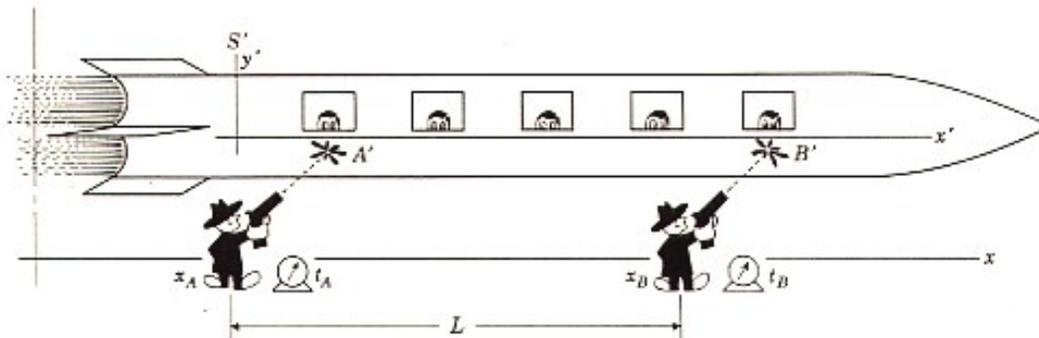
I.8.2. El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein

Definimos VER cuando todos los fotones emitidos desde el objeto que nos interesa llegan simultáneamente a nuestro ojo. Es claro que los puntos más alejados del ojo deben emitir antes los pulsos de luz para llegar al mismo tiempo que aquellos ubicados más cerca. También en el caso de objetos lejanos o que el tamaño del objeto es pequeño comparado con la distancia que lo separa del ojo, se considera que los rayos de luz emergen paralelos.

MEDIR es una operación que debe considerar: un sistema de referencia inercial dado con una red de relojes sincronizados, cada uno con una cámara que grabe un evento, el tiempo y sus coordenada. El observador en este sistema recopila los datos y compara. Por ejemplo si quiere medir el largo de una barra en movimiento con respecto a su sistema de referencia, debe ubicar dos fotos, una en que aparezca el comienzo de la barra y otra con el otro extremo de la misma barra. Ambas deben indicar el mismo tiempo (simultaneidad). La diferencia entre las coordenadas permite conocer el largo de la barra.

Ejemplo

Un tren S' se mueve con velocidad $V = 0.6 c$ en la dirección $+x$ con respecto a un observador en reposo en el sistema S . Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a $L = 5$ m de distancia entre ellos, en el sistema S . Ambos rufianes disparan simultáneamente, de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema S . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas A' y B' en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es $L = 5$ m. Consideramos que la distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).



a.- Los relojes de los pasajeros del tren están sincronizados en su sistema de referencia. De acuerdo a estos pasajeros ¿Quién disparó primero?

b.- ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en *reposo con respecto al tren*?

c) ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en *reposo con respecto al tren*?

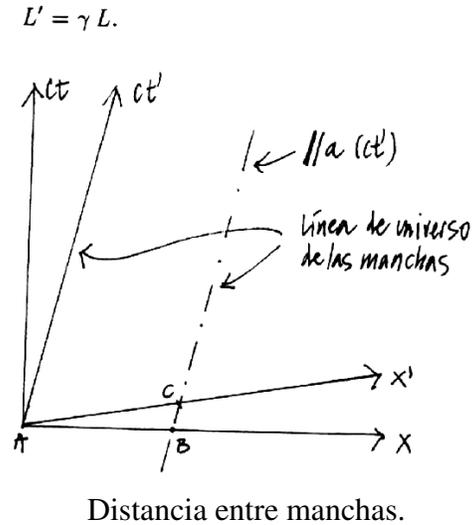
de modo que:

$$x'_c = \gamma [L + v(t_c - t_A) - v(t_c - t_A)] = \gamma L.$$

$$x'_c = \gamma L \quad L' = \gamma L.$$

ii) *Segundo método.*

C es la proyección de la coordenada x' de **B**. Eso es precisamente lo que representan las Transformaciones de Lorentz: una proyección del vector (**AB** en este caso, del sistema (x, t) al sistema (x', t')). La proyección de **B** en x' es simplemente $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$, ($\Delta t = 0$, puesto que **AB** es simultáneo **S**). Además $x'_B = x'_C$ puesto que **B** y **C** están en la línea de universo de un observador en reposo en S' . $L' = 1,25 L = 6m$. Note que $AC > AB$ $AC_1 > A_1B$.



c) La línea de universo de los dos rufianes son rectas verticales en el diagrama de espacio-tiempo fijo en la tierra (**S**).

A y **B** señalan la posición de los rufianes. Esta distancia según un observador en el tren es la intersección entre la línea de universo de **B** y la línea de simultaneidad de un observador en el tren (por ejemplo : el punto **C**. La coordenada de **C** en el sistema (t', x') :

$$x'_c = \gamma [x_c - (t_c - t_B)v],$$

$$x_c = x_B = x_B - 0 = x_B - x_A = L,$$

$$x'_c = x'_c - x'_A = L'',$$

$$L'' = \gamma [L - v(t_c - t_B)]$$

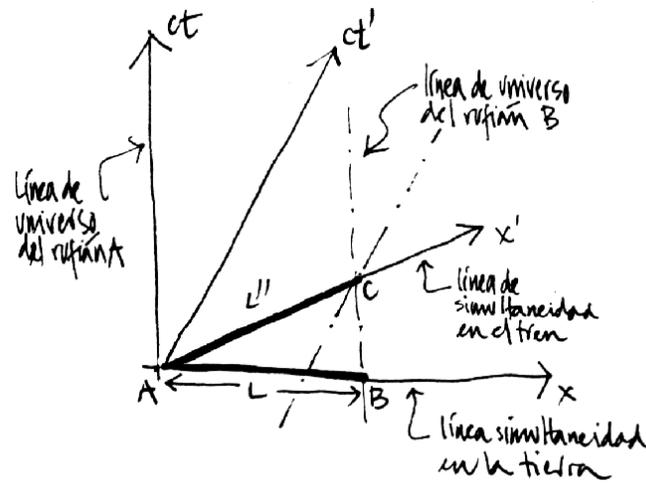
$$\text{pero } t'_c - t'_A = \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_c - x_A) \right]$$

$$\text{A y C son simultáneos en } S', \text{ luego: } \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}L \right]$$

$$t_B \equiv t_A \quad (\text{simultáneo en } S)$$

$$x_c \equiv x_B \quad \text{en } S$$

$$L'' = \gamma \left[L - \frac{v^2}{c^2}L \right] = \frac{1}{\gamma} L. \square$$



Ejemplo

Sean S y S' , dos sistemas inerciales que coinciden en un instante. S' se mueve con respecto a S en la dirección $(x+)$, con una velocidad $v = \text{constante}$. En el origen de S existe una pantalla de cine que proyecta una película de t' minutos, la cual es vista por un observador que se encuentra en el origen de S . ¿Cuánto tiempo dura la película para el observador en S ? Suponer $v = 0,6c$.

Utilizando las transformaciones de Lorentz, se obtiene:

$$\text{Para } S': \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x),$$

$$\text{Para } S: \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x').$$

Sabemos lo que dura la película en $S' \Rightarrow \Delta t'$ es conocido (con respecto a las mediciones que hace un observador en S'). Además $\Delta x' = 0$ (la pantalla permanece fija en S'). Luego $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Sin embargo, debemos calcular el tiempo que demora en llegar a S el último fotón de la pantalla.

i.e. $\Delta t^* = \frac{\Delta x}{c}$ ya que cuando en S' terminó la película, ésta aún no ha finalizado en S .

Por otra parte $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma v\Delta t'$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\Delta t' + \Delta t^* = \gamma\Delta t' \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 2\Delta t'$$

I.9. Composición de Velocidades

De qué se trata esto.

Si en el sistema S un móvil se desplaza con velocidad $v = \Delta x / \Delta t$. La pregunta es: suponga un sistema de referencia S' que se desplaza con una velocidad relativa a S , ¿Cuál es la velocidad del móvil medida por este observador S' .

I.9.1. Velocidades paralelas.

A continuación incluimos una derivación que relaciona estas dos velocidades.

Usaremos el Postulado # 5 planteado previamente.

Supongamos que un cuerpo P viaja con velocidad u' con respecto a un sistema S' . A su vez, este sistema viaja con una velocidad v con respecto a S . Queremos calcular la velocidad u de este cuerpo con respecto al sistema s .

Designamos las coordenadas de P con respecto a S' como (t'_p, x'_p) . Las coordenadas de este punto con respecto al sistema s son (t_p, x_p) . La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice p)

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Por definición

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad \text{la velocidad } P \text{ con respecto al sistema } S'. \text{ Por otra parte:}$$

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{la velocidad de } P \text{ c/r al sistema } S$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}$$

Despejando u de esta ecuación

$$u'(1 - \frac{v \cdot u}{c^2}) = u - v,$$

$$(1 + \frac{v \cdot u'}{c^2})u = u' + v,$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}}$$

Esta es la ley de composición de velocidades. Es directo comprobar que si $u' = c$, $v = c \Rightarrow u = c$.

No es posible lograr velocidades mayores que la velocidad de la luz sumando velocidades con esta ecuación relativista.

Velocidades Perpendiculares

Supongamos que el observador en S' se mueve en un eje perpendicular a la dirección de desplazamiento de los dos sistemas de referencia, digamos el eje y . La velocidad relativa, de acuerdo a un observador en S es:

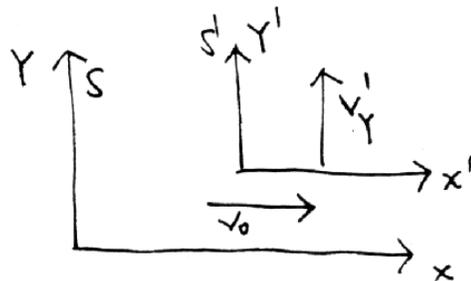
$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma [\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2}]}$$

dividiendo ambos factores por Δt y definiendo

$$v'_y \equiv \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, y$$

$$v_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = v'_y = \frac{v_y}{\gamma [1 - \frac{v^2}{c^2}]} = \gamma v_y$$



Esta es la fórmula que relaciona una velocidad perpendicular a la dirección de movimiento en el sistema S' , con la velocidad medida desde el sistema de referencia en reposo.

El objetivo del siguiente ejemplo es recordar que cuando las mediciones se realizan en el mismo sistema de referencia, toda la cinemática y la geometría de un curso de Introducción a la Física son válidas. Sólo cuando queremos relacionar medidas en sistemas de referencia inerciales diferentes es necesario recurrir a las transformaciones de Lorentz y a la geometría del espacio-tiempo.

Ejemplo

Un sistema S' está en movimiento uniforme con respecto a otro, S . En S' se ubica una barra que forma un ángulo θ' con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en S ?

De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot \theta'$$

Usamos esta relación porque $\Delta y'$ es perpendicular al movimiento y por el Postulado # 5 : $\Delta y' = \Delta y$.

Cualquier diferencia en el valor del ángulo que aparezca en S proviene de la relación entre $\Delta x'$ y Δx . Gráficamente lo que mide S se ve en la figura I.32:

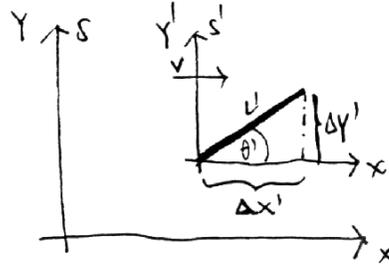


Figura I.32: .

Coordenada de A :

$$x'_A = \gamma x_A \quad (\text{puesto que } \Delta t = 0 \text{ en } S)$$

$$x'_A \equiv x'_c \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x'}{\gamma \Delta y'} = \frac{1}{\gamma} \cot \theta'$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \cot \theta$$

$$\cot \theta = \sqrt{1 - \beta^2} \cot \theta'$$

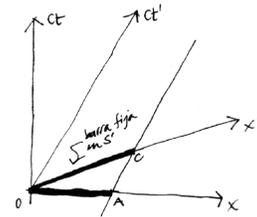


Figura I.33: La figura señala lo que mide el observador S y S'.

Ejemplo

Si observamos una estrella fija desde la Tierra, debemos inclinar la orientación del telescopio debido al movimiento relativo de la Tierra con respecto a la estrella. Este fenómeno se denomina aberración de la luz y consiste en el cambio de dirección de la propagación de la luz, al pasar de un sistema en reposo a otro en movimiento relativo, si el ángulo de incidencia no es paralelo a la velocidad relativa entre los sistemas de referencia.

Calcule la inclinación θ' con que debe posicionarse el telescopio, de acuerdo a la Figura, en los dos casos siguientes:

- Calcule el valor del ángulo θ' , en la forma clásica, es decir sin usar relatividad especial.
- Desarrolle el cálculo del ángulo θ' en forma relativista y compare este resultado con el anterior.

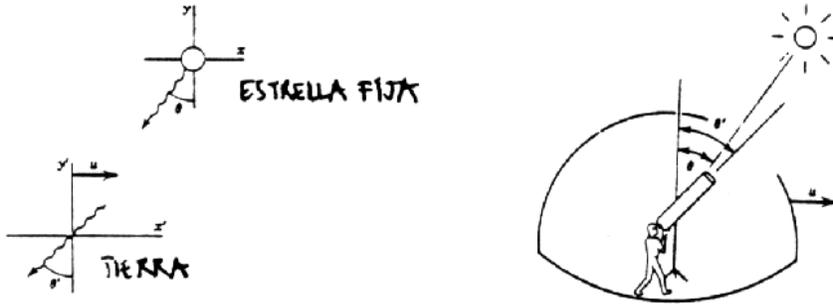


Figura I.34: A la izquierda aparecen los dos sistemas de referencia que están en movimiento relativo. A la derecha se da una idea del cambio de dirección que se le debe dar al telescopio para enfocar la estrella fija (sin movimiento propio).

a) Como la Tierra se está acercando a la estrella, de acuerdo al esquema indicado, la velocidad relativa *aumenta* $u + c \text{ sen } \theta$, recordemos que no estamos utilizando la relatividad especial.

$$\tan \theta' = \frac{u + c \text{ sen } \theta}{c \text{ cos } \theta}$$

$$\tan \theta' = \left[\tan \theta + \frac{u}{c \text{ cos } \theta} \right]$$

En forma no-relativista las velocidades se suman en forma usual.

Como la luz - de acuerdo a la figura - va al encuentro del sistema de referencia, la velocidad relativa aumenta.

$$v'_x = -c \text{ cos } \theta$$

$$v'_y = -(u + c \text{ sen } \theta)$$

b) Ahora procedemos con el formalismo relativista.

De acuerdo a las fórmulas dadas

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[1 - \frac{u v_x}{c^2} \right]}$$

$$v_x = -c \text{ sen } \theta \quad v_y = -c \text{ cos } \theta$$

$$v'_x = -\frac{[c \text{ sen } \theta + u]}{1 + \frac{u \text{ sen } \theta}{c}} \quad v'_y = -\frac{c \text{ cos } \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \text{ sen } \theta}{c} \right]}$$

$$\tan \theta' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c} \right]} \right\}}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{c \cos \theta} = \gamma \left[\tan \theta + \frac{u}{c \cos \theta} \right]$$

La diferencia con el tratamiento no-relativista es un factor γ en frente de toda la expresión.

Ejercicio

Explique si la figura que se acompaña es correcta o no. Justifique su respuesta.

Un par de comentarios finales con respecto al tiempo. Es la variable que se puede determinar con mayor precisión. Esta es una ventaja técnica, que nos permite hacer experimentos y confrontarlos con predicciones bien precisas, como ya lo describimos anteriormente.

Por otra parte, utilizando las palabras de Penrose [?]: "...la relatividad especial nos enseña algo profundo acerca de la realidad física, en relación a la naturaleza del tiempo".

Una de estas enseñanzas –como hemos visto–, se refiere al cambio en el concepto de simultaneidad, dos fenómenos A y B que ocurren al mismo tiempo en un sistema de referencia, de acuerdo a otro observador que viaja con una velocidad v , constante, con respecto al anterior, A ocurre antes que B. El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

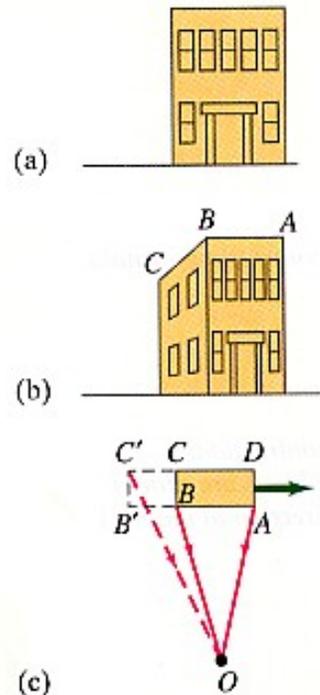


Figura I.35

I.10. La función k: el Efecto Doppler

I.10.1. El Efecto Doppler Relativista

Utilizaremos un método geométrico, además del analítico para determinar la corrección debida al efecto Doppler. El método se debe a H. Bondi, un físico inglés quien lo introdujo. El factor que refleja la corrección del efecto Doppler lo denominaremos el factor k para escribir menos. Es notable que con este factor podemos re-obtener las transformaciones de Lorentz, las transformaciones de la velocidad..., en resumen todo lo conocido de relatividad especial.

Desde los años 1920 sabemos que las galaxias están alejándose de la nuestra con una velocidad proporcional a la distancia que nos separa. La frecuencia $\nu \equiv 1/T$ de la luz que proviene de

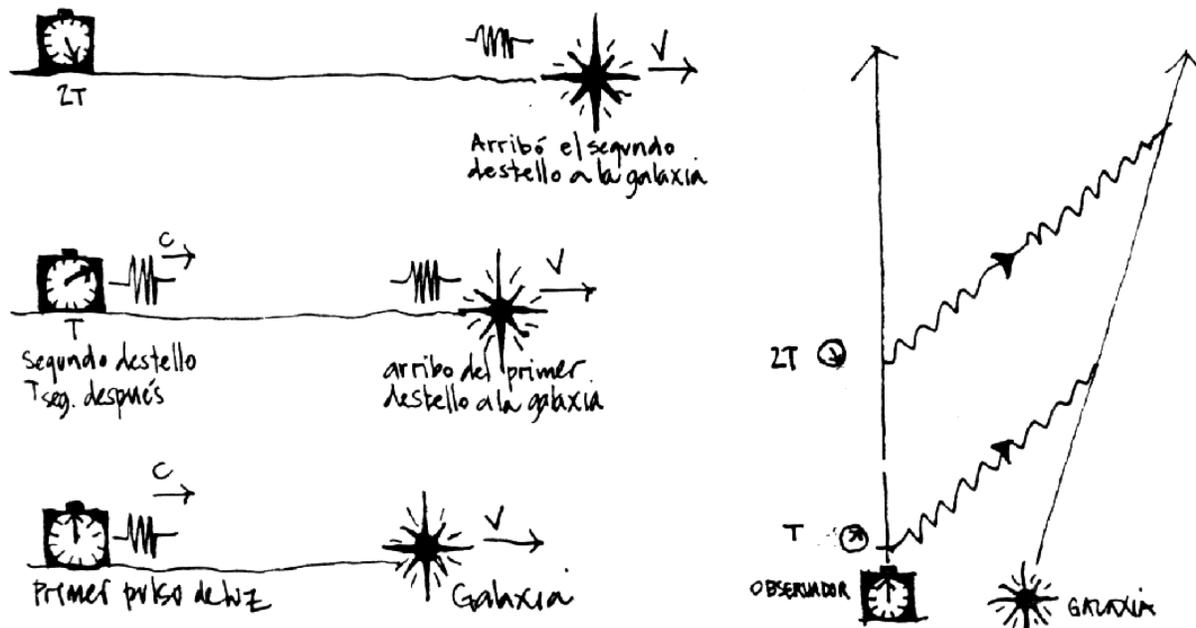


Figura I.36: En la figura de la izquierda se ilustra cómo un fotón alcanza una fuente en movimiento. A la derecha se incluye el diagrama de Bondi para este mismo caso.

estas galaxias y la identificación del átomo que las emitió, revela que nos llegan con un cierto corrimiento en el valor de la frecuencia $\nu' = \nu + \Delta\nu$. Esta diferencia, más algunos resultados básicos de cosmología, nos permite estimar la velocidad con que se están alejando. Este fenómeno se denomina *corrimiento al rojo*, que resalta el hecho que las galaxias se alejan. Si las galaxias estuviesen acercándose, el corrimiento cambiaría de signo y se denominaría *corrimiento al azul* (la frecuencia aumenta).

Una explicación cualitativa de lo que aquí sucede es la siguiente: suponga que enviamos una señal a un habitante de dicha galaxia, ésta consiste en dos destellos de luz separados por un intervalo T . Como, desde nuestro punto de vista, la otra galaxia se aleja, el segundo destello debe recorrer un trayecto más largo que el primero y por lo tanto demora más en alcanzar la galaxia y en ser detectado por uno de sus habitantes. Este retraso depende linealmente del lapso que media entre ambas señales T y de la velocidad relativa entre ambos medios. Si designamos como kT , el intervalo con que se recibe la señal, donde $k = k(v)$ es una función que sólo depende de la velocidad de separación de estos dos objetos.

Utilizaremos esta función $k(v)$ para desarrollar las ecuaciones que caracterizan a la relatividad especial. Toda la relatividad especial es comparar las mediciones de un sistema inercial con las de otro que se desplaza con velocidad relativa.

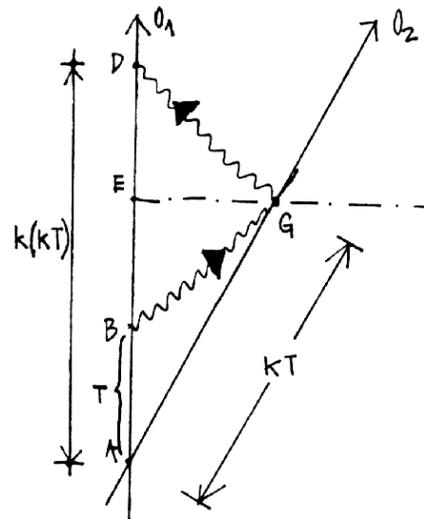
Esta función k tiene una interpretación física bien concreta: es el efecto Doppler relativista, de esta manera, cuando en la siguiente sección calculemos el valor de k , habremos encontrado el valor que debemos utilizar para determinar el corrimiento de la frecuencia de un objeto que se aleja (o

acerca) en forma relativista.

I.10.2. La función k

La función k fue introducida hace alrededor de 50 años por Hermann Bondi, un físico del Reino Unido. El desarrollo que hemos adoptado aquí es una versión más detallada de lo expuesto por R. Wald [10] en su libro.

A continuación calcularemos analíticamente la relación entre las mediciones hechas en distintos sistemas de referencia. Usaremos el método gráfico. Primero calcularemos el efecto Doppler relativista, cuyo nombre se refiere al cambio de color (o longitud de onda) que detecta un observador en reposo cuando un rayo de luz (o un sonido) es emitido desde una fuente en movimiento, o viceversa, el observador está en movimiento y la fuente emisora en reposo. Para que este fenómeno ocurra debe existir una velocidad relativa V entre la fuente y el observador.



En A dos observadores (puntos) inerciales O_1 y O_2 , se cruzan y sincronizan sus relojes. De acuerdo al reloj de O_1 , T segundos más tarde, éste envía un rayo de luz a O_2 . Este lo recibe en el instante que definimos como kT . Postulamos aquí que cualquier diferencia en los intervalos puede ser explicada en base a esta función $k(v)$. La función k sólo puede depender de la velocidad relativa v , puesto que es el único parámetro del problema: $k = k(v) \geq 0$. Además, si $v \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$, puesto que no hay velocidad relativa en este caso.

Si a su vez O_2 , al recibir la señal la responde inmediatamente, entonces O_1 la recibirá en el instante $k(kT)$.

El último argumento se apoya en el postulado # 3, que señala que ambos sistemas son equivalentes, de forma que si al ir de O_1 hasta O_2 el intervalo de tiempo aparece multiplicado por un factor k , lo mismo debe suceder al viajar de O_2 hacia O_1 . Ambos son sistemas inerciales, indistinguibles y sincronizaron sus relojes en A . Cada vez que un observador (S) detecte que otro sistema de referencia (S') se está alejando, los intervalos de tiempo se relacionarán con la función $k(v)$ como se ha especificado aquí.

La distancia espacial \overline{EG} que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

Primer Método: podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto G que, como es simultáneo con E en el sistema S , es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en E . Este valor es:

$$\overline{EG} = c \cdot \frac{DB}{2} = c \cdot [k^2 - 1] \frac{T}{2}. \quad c \equiv \text{velocidad de la luz.} \quad (\text{I.28})$$

Recuerde que la simultaneidad es un concepto relativo en esta teoría, por lo tanto cuando decidimos comparar dos eventos simultáneos para el observador O_1 , hemos quebrado la simetría entre los dos sistemas inerciales O_1 y O_2 . Los resultados son válidos sólo para el sistema de referencia O_1 .

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó O_2 a partir del punto en que ambos coincidían, (A) es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \cdot (k^2 + 1) \frac{T}{2}. \quad (\text{I.29})$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1] \frac{T}{2} = c(k^2 - 1) \frac{T}{2}, \quad \text{despejando } (v/c), \text{ se obtiene:}$$

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Notemos que, si $k = 1$, entonces $\beta \rightarrow 0$ lo cual equivale a que la velocidad de la luz c , sea infinita. Este es el límite Newtoniano: en este caso las transformaciones de Lorentz, que deduciremos más adelante, toman la forma de las transformaciones de Galileo (I.1).

Ya hemos encontrado k como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados con un intervalo de tiempo T . Estos al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad v_o vuelven en un intervalo $(k^2 - 1) \cdot T$. Al medir este intervalo y conociendo T y la expresión –ya obtenida– de k^2 podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

<p>Para dos sistemas <u>alejándose</u>: $k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$</p> <p>Para dos sistemas <u>acercándose</u>: $\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$</p>
--

Ejercicio

Demuestre que:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2\gamma, \quad \text{donde hemos definido } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Contracción del largo

Estudiaremos la contracción del largo usando el álgebra de los k .

Por definición la longitud es la distancia *espacial* entre dos eventos simultáneos. Aquí vamos a comparar el largo L' de un barra en reposo en un sistema S' , con el largo de esta misma barra, pero medido en el sistema S , que lo denominamos L . La configuración se indica en la Figura adyacente.

El método que usaremos nos permitirá manipular coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Calculemos las coordenadas del evento N en el sistema S . De la Figura se desprende que

$$c \Delta t_+ = (L + v \Delta t_+), \quad \text{y que} \quad c \Delta t_- = (L - v \Delta t_-).$$

Este resultado se obtiene siguiendo la trayectoria del punto M en la Figura. En $t = 0$ su coordenada espacial es L , en Δt_+ es $[L + v \Delta t_+]$, puesto que se está alejando de S .

En Δt_+ , la barra está representada por NN' según el observador S .

En ese instante se envía un rayo de luz hacia el origen de la barra. Lo alcanza en Δt_- segundos más tarde y la distancia que debe recorrer es el largo de la barra menos lo que ésta se acerca, en el intervalo de tiempo Δt_- , una distancia $L - v \Delta t_-$. Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de estas dos expresiones obtenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}.$$

Como los eventos marcados por A y B son simultáneos, utilizando los resultados del último ejercicio, tenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{\Delta t'_+ + \Delta t'_-}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [\text{ii}]$$

Finalmente, como en el sistema S' , el rayo de luz parte del origen de la barra en $t_0 = 0$ y vuelve a S' en B, después de rebotar en el otro extremo de la barra, entonces tenemos:

$$c[\Delta t'_+ + \Delta t'_-] = 2L' \quad [\text{iii}]$$

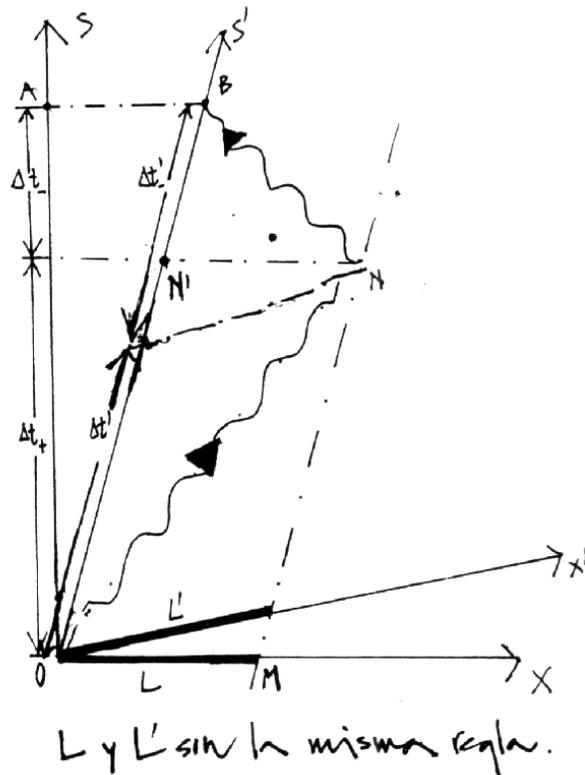
Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de las ecuaciones [i] y [ii], e incluyendo el valor de $(\Delta t'_+ + \Delta t'_-)$ obtenido en [iii]), tenemos la relación deseada entre L y L' :

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Comprobamos que $L < L'$, al medir el largo de una barra en movimiento, medimos un largo menor. Como hemos señalado, este hecho es consecuencia de que la simultaneidad es relativa. A la barra no le pasa absolutamente nada, no se comprime.

I.10.3. Dilatación del Tiempo

Usando la definición del factor $k(v)$, podemos demostrar que el tiempo transcurre más lentamente para un observador que se aleja de nosotros con velocidad constante. En este caso haremos las comparaciones entre dos eventos que son simultáneos con respecto a nosotros, el sistema de referencia en *reposo*. De esta forma nuestros resultados no son universales, son sólo válidos en nuestro sistema de referencia. La razón: la simultaneidad es *relativa*.



*Qué mide el observador S y qué mide el observador S'.
Líneas de simultaneidad en cada sistema de referencia.*

De la Figura, los eventos A y B, son simultáneos en el sistema S. Si definimos como $\Delta t|_S = OA$, los segundos que marca el reloj del observador en reposo con respecto a S, debemos evaluar la cantidad $\Delta t' \equiv \Delta t|_{S'} = OB$: es decir ¿qué tiempo indica el reloj que se mueve con el observador S'?

De la geometría de la Figura obtenemos que:

$$OA = \frac{k^2 - 1}{2} T + T = \frac{k^2 + 1}{2} T.$$

El reloj del observador S', que se aleja de A, al pasar frente a B marca (de acuerdo a la definición de k)

$$OB = kT.$$

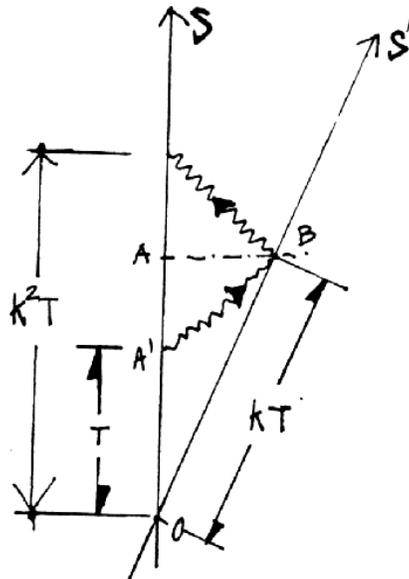
Si comparamos los tiempos:

$$OA \equiv \Delta t|_S = \frac{k^2 + 1}{2} T,$$

$$\text{con } OB \equiv \Delta t'|_{S'} = kT,$$

despejando T de las ecuaciones anteriores, obtengo

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{I.30})$$



Esta es la dilatación del tiempo de acuerdo al observador en reposo en S. Si $\Delta t' = 1$, entonces $\Delta t > 1$, el tiempo transcurre más lentamente en el sistema S'. □

El hecho que el tiempo transcurre más lentamente en el sistema que está en movimiento, *no* determina si un sistema se encuentra en reposo absoluto con respecto a otro. La razón es la siguiente: al comparar los tiempos $\Delta t|_S$ y $\Delta t'|_{S'}$ para dos eventos *simultáneos en S*, estamos quebrando la simetría entre los sistemas S y S', y de esta forma obtenemos el resultado asimétrico ya señalado.

A continuación se demuestra que la expresión para la dilatación del tiempo es simétrica: el observador en reposo en S', midiendo dos eventos simultáneos en su sistema de referencia encuentra que el tiempo transcurre más lentamente en S.

Ejercicio

Repetir el mismo procedimiento para comparar lo que marcan los relojes, *pero ahora midiendo eventos simultáneos en S'*. Obtenga:

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \square$$

¿Realmente se atrasa el tiempo para un observador en movimiento?

La palabra *realmente* utilizada en la pregunta parece esperar una respuesta que traiga a escena el tiempo absoluto. Al formularla no se hace mención al sistema de referencia que se considera.

La respuesta es que este resultado sólo señala que el sistema de relojes sincronizados por S' se atrasan con respecto a aquellos sincronizados por S. Pero este resultado, de acuerdo a Sño permite concluir nada puesto que, en su opinión, los relojes de S no están sincronizados. Para ilustrar esto, podemos ubicarnos en el sistema de S' y considerar que S está retrocediendo con respecto a nosotros y repetir el mismo cálculo. Lo que obtenemos es que ahora el reloj de S se atrasa con respecto al de S'.

De aquí se desprende que este experimento no permite concluir que el tiempo transcurre diferente en ambos observadores.

Para lograr una respuesta definitiva con respecto a la evolución del tiempo en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, debemos comparar *los mismos relojes dos veces*. Con esta consideración, ya no es posible refutar un resultado debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes de los dos sistemas de referencia. En la siguiente sección daremos una respuesta concluyente a este problema.

I.11. El tiempo transcurrido depende de la trayectoria: Paradoja de los Gemelos.

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

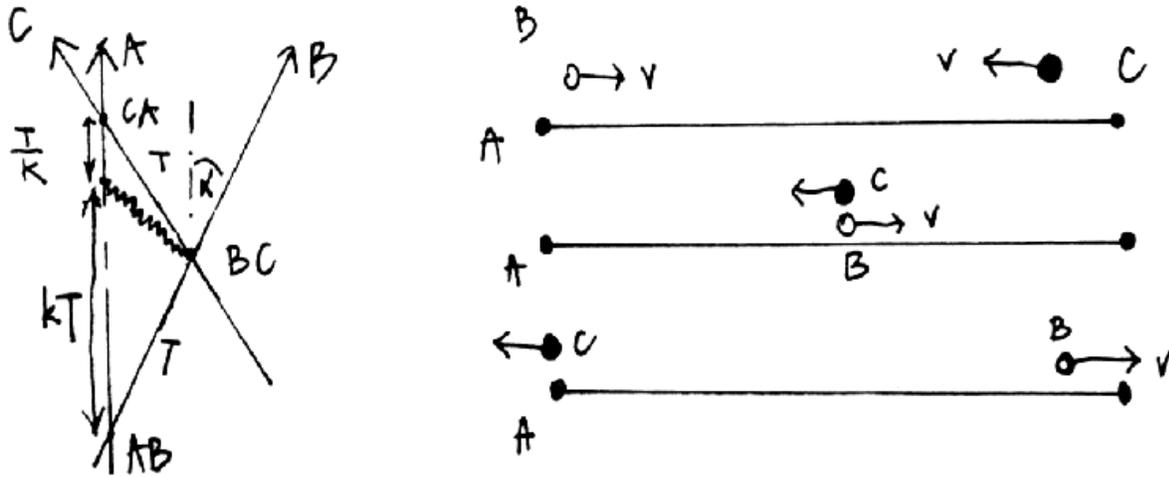


Figura I.37: Nos ubicamos en A, sistema en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa V y C se aproxima hacia A con una velocidad V (según A). A la izquierda se indica el gráfico ct versus x y a la derecha el esquema habitual con la coordenada x en el eje horizontal.

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de k en función de v en las páginas anteriores. Note que $k(-v) = 1/k(v)$, es decir que cuando dos observadores se aproximan debemos usar $(1/k)$ en lugar de k para relacionar los intervalos correspondientes de tiempo. Para demostrar que el tiempo **no** es absoluto y depende del camino recorrido necesito 3 observadores (o relojes) A, B y C.

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

- A coincide con B definido como: AB
- B coincide con C definido como: BC
- C coincide con A definido como: CA

Denominamos T al tiempo indicado por el reloj de B que transcurre entre el evento: [A coincide con B] y el otro evento [B coincide con C]. El intervalo que transcurre entre el evento: [B coincide con C] y el evento [C coincide con A] es también T , según el reloj de C. Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de C y B son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [AB], hasta [BC] y desde [BC] hasta [CA], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor T .

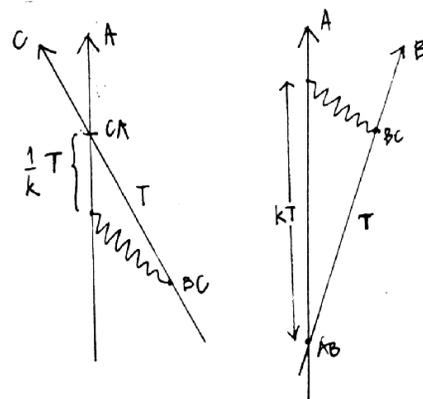


Figura I.38: El factor k y $1/k$ aparecen cuando los observadores se alejan y cuando se están acercando, respectivamente.

De acuerdo al álgebra de los k el tramo entre los eventos [AB] y [AC] es $[kT + T/k]$.

Por otra parte, si en [BC], el observador B accionó el reloj de C y lo dejó marcando T segundos, cuando C llegue al encuentro con A marcará un tiempo 2T. Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$\left(k + \frac{1}{k}\right) T \geq 2T$$

Estas expresiones son iguales sólo si $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$, ó $c = \infty$.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj C es menor que el indicado por A. El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaje sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en A, pero lo esencial aquí es que el reloj C al compararlo con el de A, traía información acerca del tiempo empleado por un reloj B al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino $AB \rightarrow BC \rightarrow CA$, es más corto que el tiempo contabilizado por S entre AB y CA.

I.12. El retorno de lo absoluto: los invariantes.

Se puede verificar, a través de las transformaciones de Lorentz, que la combinación

$$(ct')^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

es un *invariante*: posee el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Esta *distancia* la denominamos $(\Delta s)^2$. Aquí hemos encontrado una cantidad que tiene un valor independiente del sistema de referencia, es el equivalente al tiempo absoluto en la teoría de Galileo y Newton.

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Sabemos por experiencia lo importante que son las cantidades conservadas en mecánica, electricidad...etc.. El equivalente en relatividad especial son los *invariantes*.

Como ejercicio, podemos re-obtener la dilatación del tiempo (que el reloj en B funciona más lento que un reloj, idéntico, en A). O_1Q y O_2P son líneas (o planos en tres dimensiones) de simultaneidad con respecto al observador A. Llamemos $\Delta s = \overline{PQ}$.

$\Delta s^2 = c^2 T'^2$, puesto que P y Q se ubican en la línea de universo de B y por lo tanto $x'_P = x'_Q$.

$$\Delta s^2 = \overline{PQ}^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2.$$

Hemos definido $\Delta x = x_P - x_Q$.

Como $(\Delta s)^2$ es un invariante,

$$\Delta s^2 = c^2 T'^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2$$

$$cT' = cT \left[1 - \left(\frac{\Delta x}{cT} \right)^2 \right]^{1/2},$$

pero $\Delta x/T = V_0$, velocidad con que B se aleja de A.

$$T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow T = T' / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Si $T = 1$ s, $T < 1$, puesto que $\beta \leq 1$ y $1/\sqrt{1 - \beta^2} \geq 1$. Esto se denomina la dilatación del tiempo.

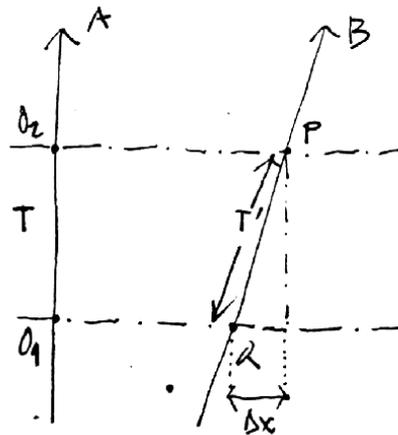


Figura I.39: .

I.13. Ejercicios Resueltos

I.13.1. Las transformaciones de Lorentz: el método k.

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un evento $P = (t_p, x_p)$, en un sistema inercial S , con las coordenadas que describen el mismo evento P, en otro sistema S' : $P = (t'_p, x'_p)$.

El punto **P** es lo que hemos denominado un evento en el espacio-tiempo. Con respecto al observador **A**, el punto **P** tiene coordenadas **P** (**t**, **x**) puesto que consideramos sólo dos coordenadas una espacial y otra temporal, para mantener la simplicidad. En la figura, el origen del tiempo se ubica arbitrariamente en cualquier punto de la línea de universo de **A**.

El sistema de coordenadas se ubica con el observador A, éste tiene coordenadas $(t, 0)$. El punto Q es simultáneo con P y por lo tanto ambos tienen la misma coordenada temporal en el sistema A.

$$Q = Q(t, 0), \quad P = P(t, x).$$

Para enviar un rayo de luz desde A hasta P, debo gatillar el haz de luz en el instante $(t - x/c)$. Dicho rayo rebota en P y alcanza A en el instante $(t + x/c)$.

La cantidad (x/c) tiene dimensiones de tiempo.

Supongamos que existe otro observador inercial B, que asigna al evento P, las coordenadas (t', x') . La relación entre (t, x) y (t', x') , que respeta los postulados de la relatividad especial, se denominan las transformaciones de Lorentz. Ubicamos el origen del tiempo en la intersección de las líneas de universo de A y B. Al enviar un rayo de luz desde A, este cruza la línea de universo de B en $(ct' - x')$ y posteriormente alcanza el punto P. De vuelta toca la línea de universo de B en $(ct' + x')$ y A en $(ct + x)$.

Usando el método de la función k , podemos relacionar ambos sistemas de referencia.

$$ct' - x' = k(ct - x),$$

Este caso corresponde a la relación que existe entre el tiempo que transcurrió entre el origen del tiempo (intersección de las líneas de universo de A y B) y el instante en que se envía el primer rayo desde A y el tiempo que tarda B en recibirlo: $T' = k T$.

El siguiente caso, corresponde al rayo de luz reflejado desde el punto P y relaciona el tiempo que ha transcurrido según el reloj de B cuando recibe el rayo de luz, con el tiempo que ha transcurrido para A cuando recibe de regreso el mismo rayo de luz:

$$(ct + x) = k(ct' + x')$$

De estas dos ecuaciones se puede despejar x' y t' como funciones de x y t .

$$2ct' = k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

$$2x' = -k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

pero recordando que:

$$\frac{1}{2}(k \pm \frac{1}{k}) = \begin{cases} \gamma \\ \beta \gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

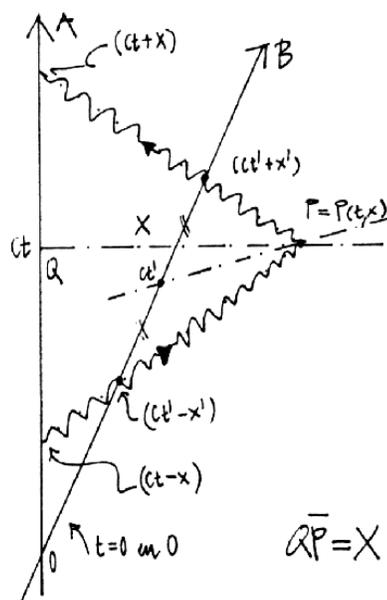


Figura I.40: Un rayo de luz cruza a los dos observadores.

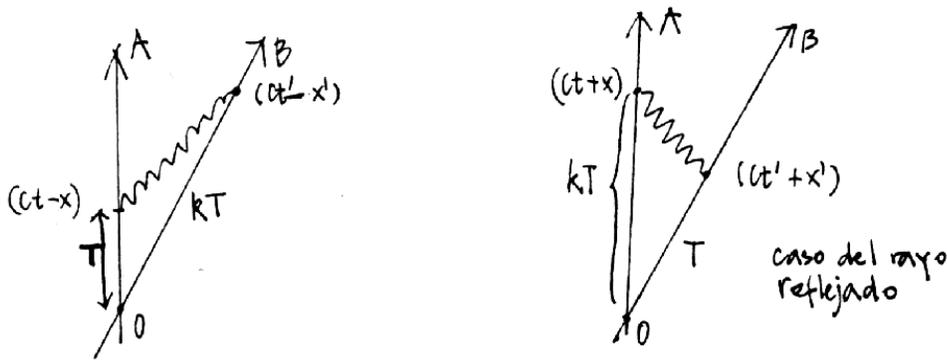


Figura I.41: En la figura de la izquierda debemos identificar T con $(ct - x)$ y kT con $(ct' - x')$.

Donde hemos definido $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Despejando x' y t' de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\{x - vt\}, \\ t' &= \gamma\{t - \frac{v}{c^2}x\}. \end{aligned} \tag{I.31}$$

□

El siguiente ejemplo ilustra lo que sucede con un objeto *macroscópico* que viaja con una velocidad cercana a la de propagación de la luz. También podemos considerar esta situación como lo que sucedería si la velocidad de la luz tuviera un valor más pequeño y todo el resto de la física no experimentara cambios.

Si un avión se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento, puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el avión) se acerca a velocidades muy cercanas (pero inferiores) a la velocidad de propagación de la luz.

Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad u , cercana a la velocidad de la luz y a una altura H sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores A y B en reposo, descansan detrás del muro de altura h . B se ubica justo detrás del muro, mientras que A permanece a una distancia ℓ de B .

Al pasar sobre la muralla (punto D , en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador B . En este ejemplo, nos interesa sólo estas dos linternas, la situada en el punto P y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto D , justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre B .

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad u del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en P , al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador A justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto D , alcanza al observador B .

Hallar el rango de valores del ángulo ϕ para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se propaga desde B , al lado de la muralla, hacia A . Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

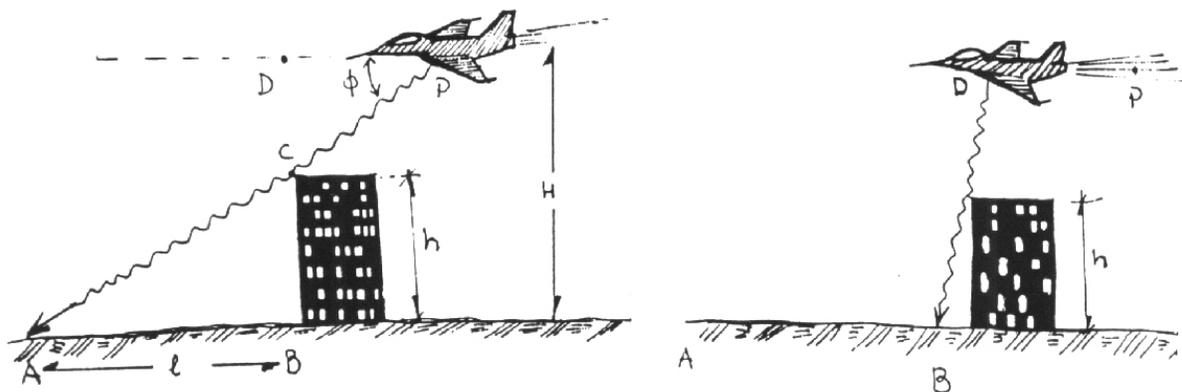


Figura I.42: Al pasar por los puntos P y D el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

Solución

a) Para encontrar el valor buscado para u , calcularemos el tiempo que tarda el rayo de luz en

recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \rightarrow C \rightarrow A) \equiv T_A,$$

$$T(P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B) \equiv T_B.$$

Calculemos T_A .

Como los triángulos rectángulos $\Delta CDP \sim \Delta CBA$, entonces

$$\frac{\bar{A}P}{\bar{A}C} = \frac{H}{h}, \quad \text{de aquí se obtiene } \bar{A}P = \frac{H}{h} \bar{A}C = \frac{H}{h} \sqrt{\ell^2 + h^2},$$

donde hemos usado $\bar{C}A = \sqrt{h^2 + \ell^2}$.

Pero T_A es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia $\bar{P}A$, de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h} \sqrt{h^2 + \ell^2} \cdot \frac{1}{c}. \quad (\text{I.32})$$

Para calcular la velocidad u de modo que el destello emitido en D llegue a B simultáneamente con el fotón que salió desde P y alcanza A , debo considerar el tramo PD que recorrió el avión.

$$T_B = T(P \rightarrow D) + T(D \rightarrow C \rightarrow B).$$

El tiempo que transcurrió entre $P \rightarrow D$ es

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\bar{P}D}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{P}D}{\bar{D}C} = \frac{\ell}{h},$$

de modo que

$$\bar{P}D = \frac{\ell}{h} \bar{D}C = \frac{\ell}{h} (H - h), \quad (\text{I.33})$$

de esta forma

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\ell (H - h)}{h u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre D y B es:

$$T(D \rightarrow B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B, contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P:

$$T_B \equiv T(P \rightarrow B) = \frac{\ell(H-h)}{hu} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que A y B reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que $T_A = T_B$, y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell(H-h)}{hu} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c} \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2}}{h},$$

despejando u/c , obtenemos:

$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} - \frac{h}{\ell}}$$

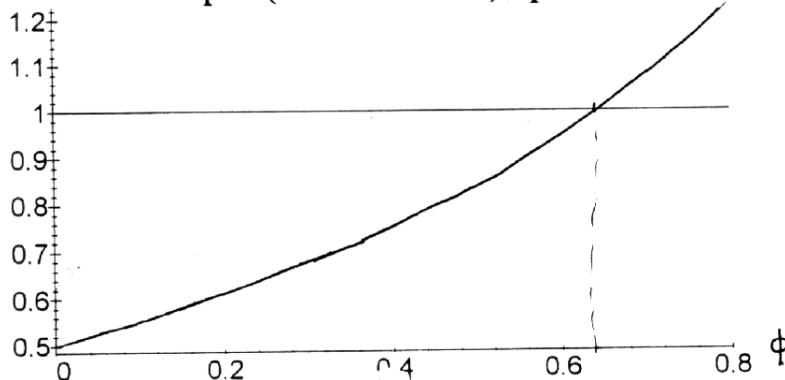
$$\text{como } \frac{h}{\ell} \equiv \tan \phi, \quad \text{entonces: } \frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\left[\frac{1}{\cos \phi} - \tan \phi\right]}. \quad (\text{I.34})$$

El ángulo ϕ debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \text{sen } \phi}{\cos \phi} > \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar ϕ .

u/c versus ϕ (en radianes), para $h/H=0.5$



b) Es claro que si la velocidad del avión u aumenta, entonces el destello emitido en P, llega a A después que el emitido desde C, puesto que el avión viaja más rápido y el tiempo T_{PD} se acorta.

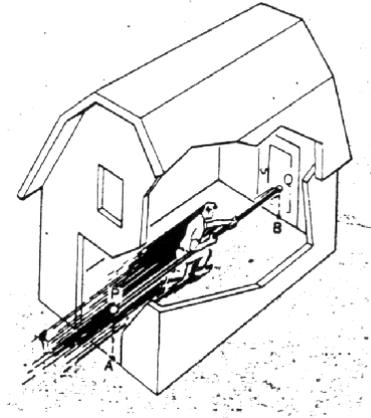


Figura I.43

Si el avión viaja con una velocidad $u = u(\phi)$ que se ajusta a la ecuación I.34, la región $\bar{A}\bar{B}$ se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{u}{c} > \left(\frac{1 - \frac{h}{H}}{1 - \sin \phi} \right) \cos \phi.$$

entonces la zona $\bar{A}\bar{B}$ se ilumina desde B hacia A, siempre que no emita destellos cuando $\phi < 0,6$. Para $\phi > 0,6$ no se cumple que $\frac{u}{c} < 1$.

Ejemplo

La Paradoja del Granero

Considere un atleta corriendo con una garrocha de largo propio 20 m. (La velocidad del atleta con respecto al granero es de $\frac{\sqrt{3}c}{2}$). Éste sostiene la garrocha de modo que se mantiene paralela a la dirección de movimiento del atleta. En su carrera, el deportista pasa por un granero de longitud propia = 10 m. ¿Es posible cerrar los dos extremos del cobertizo de manera que el atleta y la garrocha queden atrapados en su interior?

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del observador en el interior del granero.

Solución:

Sea $L_g \equiv$ longitud propia del granero, $L_g = 10$ m.

$L \equiv$ longitud propia de la garrocha, $L = 20$ m.

i) Análisis con respecto al atleta:

El atleta opina que L_g sufre una contracción puesto que ve aproximarse al granero con velocidad $(\sqrt{3}c)/2$, por tanto

$$L_g^{(A)} = L_g \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L_g}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{m}$$

y como la longitud de su garrocha es L (largo propio) \Rightarrow para el atleta es imposible quedar atrapado en el interior del granero puesto que: $L > L_g/2$.

ii) Análisis con respecto al observador parado en el granero.

El observador B considerado en reposo ahora, ve aproximarse al atleta con $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, por lo tanto, la contracción de la garrocha es:

$$L^{(B)} = L \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{m}$$

y como $L_g = 10\text{m}$ (largo propio del granero) entonces para observador B es perfectamente posible que el atleta (A) quede atrapado en el granero, ya que:

$$L^{(B)} = L_g \quad L^{(B)} \equiv \text{long. medida por B de la garrocha de A}$$

Alternativa # 2: Uso directo de las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned} \text{sea } \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

donde **1** y **2** eventos que indican la entrada y salida del granero para análisis (i) y el fin y comienzo de la garrocha en análisis (ii)

Las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{aligned} (*) \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ (**) \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \end{aligned}$$

i) S' desea medir la longitud del granero $\Rightarrow \Delta t' = 0$ en (*) $\Rightarrow \Delta x = \gamma\Delta x'$

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv \text{longitud granero medido por } S \\ \Delta x' &\equiv \text{longitud granero medido por } S' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta x' = L_g^{(A)} = \frac{L_g}{\gamma} = \frac{L_g}{2} < L$$

\Rightarrow Para s' es imposible quedar atrapado

ii) Ahora

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = \text{largo garrocha con respecto } s \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \text{largo garrocha con respecto } s'\end{aligned}$$

S desea medir la longitud de la garrocha $\Rightarrow \Delta t = 0$

$$\text{de(**)} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$$

$$\text{en(*)} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

$$L^{(B)} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} = L_g$$

\Rightarrow Para S es posible quedar atrapado

Ejemplo

Una cámara muy distante saca una fotografía de una bala viajando. Esta bala tiene una velocidad v y un largo ℓ , con respecto al sistema en reposo.

Detrás de la bala y paralelo a su camino se ubica una regla en reposo con respecto a la cámara.

La cámara hace un ángulo α con respecto a la velocidad de la regla.

¿Cuál será el largo aparente de la bala de acuerdo al sentido de la velocidad de la bala?

OJO: Ambos fotones deben llegar **simultáneamente** a la cámara, es decir no salen simultáneamente de la fuente.

Definamos $\ell \equiv$ largo de la bala en su sistema propio (medido por un observador moviéndose con ella: sistema S')

$L_{\square} \equiv$ largo de la bala medido en el sistema en reposo S con respecto a la cámara y a la regla.

$L \equiv$ longitud de la bala registrada por la foto.

Ambos fotones deben llegar simultáneamente a la cámara, de esta forma el fotón que sale de la cola de la bala debe hacerlo anticipadamente. De acuerdo a la figura debe recorrer una distancia adicional igual a $L \cos \alpha$.

$$\Delta t = \frac{L \cos \alpha}{c}.$$

En este intervalo, la bala avanzó una distancia

$$v\Delta t = \frac{v}{c} L \cos \alpha$$

El largo que registra la cámara es

$$L = L_{\square} + \frac{v}{c} L \cos \alpha$$

donde L_{\square} es el largo de la bala según S y $\frac{v}{c} L \cos \alpha$ lo que avanzó entre los dos destellos.

$$L = \frac{L_{\square}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}$$

La relación entre L_{\square} y ℓ está dada por

$$\Delta x' \equiv x'_{\lambda} - x'_{\circ} = \gamma[(x_{\lambda} - x_{\circ}) - v(t_3 - t_0)]$$

$$\Delta x' = \gamma[L_{\square} - v \cdot o]$$

$$\Delta x' = x'_{\lambda} - x'_{\circ} = x'_{\text{B}} - x'_{\circ} = \ell$$

puesto que $x'_{\text{B}} = x'_{\text{A}}$, entonces

$$\ell = \gamma L_{\square}$$

De modo que

$L \equiv$ Largo medido por la cámara

$$L = \frac{\ell}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)}$$

Ejemplo

Un carro rueda sobre una larga mesa con velocidad v . Un carro un poco más pequeño rueda sobre el primer carro con velocidad relativa al primer carro v . Un tercer carro rueda sobre el anterior con la misma velocidad v con respecto al segundo carro.

a.- ¿Cuál es la velocidad del tercer carro con respecto a la mesa en reposo?

b.- Suponga que el proceso se repite hasta infinito, ¿cuál es la velocidad del carro n -ésimo con respecto a la mesa?

Solución

a.- A partir de las transformaciones de Lorentz, tenemos

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) - v}{1 - \frac{v}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad \text{o} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad \text{donde,}$$

u' \equiv velocidad del carro con respecto al sistema S' .

u \equiv velocidad del carro con respecto al sistema S .

En nuestro caso, el carro se desplaza con rapidez $u' = v$, con respecto a S' , entonces

$$u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Para mayor comodidad redefinimos la velocidad en unidades de la velocidad de la luz

$$u = \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)} \Big/ \frac{1}{c}, \quad \text{se obtiene} \quad \left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\left(\frac{u'}{c}\right) + \left(\frac{v}{c}\right)}{1 + \left(\frac{u'}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)},$$

de este modo, haciendo $c=1$, se tiene $u = \frac{u' + v}{1 + u'v}$ y como $u' = v \Rightarrow u = \frac{2v}{1 + v^2}$.

Parte b.- . Si aumentamos el número de sistemas de referencia en una unidad, tenemos que n' no es v sino $u' = \frac{2v}{1 + v^2}$ por el resultado de la parte a)

u \equiv velocidad del carro con respecto a S

u' \equiv velocidad del carro con respecto a S'

$$u = \frac{\frac{2v}{1 + v^2} + v}{1 + \frac{2v}{1 + v^2} \cdot v} = \frac{3v + v^3}{1 + 3v^2}$$

Si sumamos un sistema de referencia adicional, tenemos:

u' \equiv velocidad del carro con respecto al sistema S'

$$u' = \frac{3v + v^3}{1 + 3v^2}$$

u \equiv velocidad del carro de la figura con respecto al sistema S'

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v} = \frac{4v + 4v^3}{1 + 6v^2 + v^4}$$

En este punto conviene hacer notar que:

$$\begin{aligned} (1 \pm v)^4 &= 1 \pm 4v + 6v^2 \pm 4v^3 + v^4 \\ (1 + v)^4 - (1 - v)^4 &= 2(4v + 4v^3) \\ (1 + v)^4 + (1 - v)^4 &= 2(1 + 6v^2 + v^4) \\ u^{(4)} &= \frac{(1 + v)^4 - (1 - v)^4}{(1 + v)^4 + (1 - v)^4} \end{aligned}$$

Análogamente, el caso anterior

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= \frac{(1 + v)^3 - (1 - v)^3}{(1 + v)^3 + (1 - v)^3}, \\ u^{(2)} &= \frac{(1 + v)^2 - (1 - v)^2}{(1 + v)^2 + (1 - v)^2}. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= \frac{(1 + v)^n - (1 - v)^n}{(1 + v)^n + (1 - v)^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1 - v}{1 + v}\right)^n}{1 + \left(\frac{1 - v}{1 + v}\right)^n} \end{aligned}$$

Defino $x \equiv \frac{1 - v}{1 + v} < 1$, puesto que $v > 0$. Pero $x < 1, \Rightarrow x^n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, de este modo $u^{(n)} \rightarrow 1$ y como estamos utilizando la velocidad de la luz como unidad, tenemos

$$u^{(n)} \rightarrow c.$$

I.14. Dinámica Relativista.

En esta sección definiremos la velocidad en 4 dimensiones y a partir de ella el momentum usando análisis dimensional. También justificaremos la expresión obtenida para el 4-momentum recurriendo al Principio Variacional usado para obtener las ecuaciones de movimiento en la mecánica de Newton.

En ambos casos debemos recordar que las expresiones relativistas obtenidas por cualquiera de los dos métodos, deben tener como caso límite la forma usual de la mecánica de Newton cuando las velocidades de las partículas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

I.14.1. La Cuadrivelocidad.

Lo que nos interesa ahora es aplicar este método a la velocidad en relatividad especial. Las transformaciones de interés, en este caso, son las transformaciones de Lorentz. Para que un objeto de 4 componentes sea cuadvectores, debe transformar igual que las coordenadas x^μ al efectuar un cambio de sistema de referencia, puesto que nos interesa que las leyes físicas tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales. Queremos escribir las leyes en forma covariante; que tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales.

Al intentar resolver un problema específico, seleccionamos el sistema de referencia que juzgamos más adecuado, y sabemos que las leyes tienen la misma expresión formal en ese sistema como en cualquier otro inercial.

Si queremos cambiar de sistema de referencia, usamos las transformaciones de Lorentz, puesto que todas las cantidades usadas deben ser cuadvectores y por lo tanto obedecen la misma ley de transformación.

Entonces:

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{I.35})$$

donde Λ es la matriz que representa a la transformación de Lorentz.

$$\begin{bmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \\ d\bar{y} \\ d\bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

¿Cómo definimos la cuadrivelocidad? Si ya sabemos que Δx^μ transforma como un cuadvectores, tal como en la definición anterior, entonces para definir la cuadrivelocidad debemos dividir esta cantidad por un *invariante*: una cantidad que tenga el mismo valor en ambos sistemas de referencia inerciales, en analogía con lo realizado en la mecánica Newtoniana.

Figura I.44

Ya conocemos una cantidad, que cumple con esta propiedad: precisamente el elemento de longitud en 4 dimensiones.

$$d s^2 = c^2 (d t)^2 - d \vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} d x^\mu d x^\nu.$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, definida junto con la transformación de Lorentz en una dimensión espacial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Como $d s' = ds$, podemos dividir ambos lados de la ecuación y obtener la cuadrivelocidad:

$$\mathbf{u}^\mu \equiv \frac{d x^\mu}{d s}. \quad (\text{I.36})$$

Las propiedades de transformación de \mathbf{u}^μ son las esperadas

$$\bar{\mathbf{u}}^\mu \equiv \frac{d \bar{x}^\mu}{d s} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{d x^\nu}{d s} = \Lambda^\mu{}_\nu \mathbf{u}^\nu. \quad (\text{I.37})$$

Si una partícula permanece en reposo en el sistema de referencia que estamos usando entonces $d \vec{x} = 0$. y \mathbf{u}^μ toma la siguiente forma (escrita en forma horizontal para ahorrar espacio)

$$\mathbf{u}^\mu = \left[\frac{c d t}{c d t}, 0, 0, 0 \right] = [1, 0, 0, 0].$$

Ahora, si la partícula se desplaza en el sistema de referencia que estamos usando, entonces podemos factorizar el tiempo a partir de la expresión de $d s^2$, para que la cuadrivelocidad se asemeje lo más posible a la expresión usual de la velocidad.

$$d s^2 = c^2 (d t)^2 [1 - [d \mathbf{x}/(c d t)]^2], \quad (\text{I.38})$$

pero dx/dt es la velocidad de la partícula con respecto al sistema de referencia elegido en la dirección x . Análogamente con el resto de las coordenadas, de forma que la expresión anterior se transforma en:

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 \left[1 - \vec{v}^2/c^2 \right], \quad (\text{I.39})$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula. Tomando la componente positiva de la raíz cuadrada de esta expresión y recordando la definición de β y γ podemos escribir la cuadrivelocidad de la siguiente forma:

$$u^\mu = [\gamma, \vec{\beta} \gamma]. \quad (\text{I.40})$$

Note que la expresión obtenida no tiene dimensiones.

Receta para subir y bajar índices

Los índices superiores identifican a un vector u^μ (o tensor si hay más de un índice $F^{\mu\nu}$) *contravariante*. Si figura como subíndice u_μ , se denomina *covariante*.

Cada una de estas cantidades tiene un significado geométrico bien determinado pero aquí sólo nos interesa dar una receta que nos indique cómo subir o bajar índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene exactamente la misma expresión de la métrica de Minkowski.

Para subir un índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la métrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ análogamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La métrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) índices.

Ejemplo

Encuentre la expresión asociada a la transformación de Lorentz, con los dos índices arriba (dos veces contravariante) o los dos índices abajo (dos veces covariante).

La Transformación de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tiene un índice superior y uno inferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el índice α . Análogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Clasificación de los cuadri-vectores

Dados dos cuadvectores cualquiera A^{μ} y B^{ν} , mediante la métrica de Minkowski podemos definir un número a partir de ellos, de la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \equiv A^{\mu} B_{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}$$

La expresión a la derecha de la ecuación es un número, puesto que proviene de la suma de cada una de las componentes.

El caso más interesante es aquel en el cual usamos el mismo vector dos veces:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = A^0 A^0 - A^1 A^1 - A^2 A^2 - A^3 A^3 \equiv A^{\mu} A_{\mu} \equiv A_{\mu} A^{\mu}$$

Ahora, mediante esta operación podemos asociar un número a este vector:

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **tiempo**}$$

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **luz**}$$

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **espacio**}$$

De esta forma podemos clasificar a los cuadvectores; puesto que el signo y el valor de esta cantidad $A_{\mu} A^{\mu}$, es un invariante: vale lo mismo en todos los sistema inerciales.

El significado físico de esta cantidad es el siguiente: si un cuadvector es *tipo tiempo*, indica que es un vector que está contenido dentro del cono de luz. Por ejemplo si el cuadvector representa a la quadri velocidad de una partícula, ésta se desplaza con velocidades menores que la velocidad de la luz. En cualquier otro sistema de referencia inercial, se cumple la misma condición.

Si la partícula es *tipo luz*, el vector se apoya en el manto del cono de luz. Finalmente si el vector es *tipo espacio*, indica que el vector se ubica fuera del cono de luz.

La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadiaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadvirvelocidad, tenemos:

$$u^{\mu} u_{\mu} = +1. \quad (\text{I.41})$$

De aquí derivando con respecto a ds :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{I.42})$$

Definiendo la cuadriaceleración $a^\mu \equiv \frac{d u^\mu}{d s}$, y en forma similar a_μ ,

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{I.43})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{I.44})$$

Ejercicio

Encontrar la expresión de a^μ como función de γ , $\vec{\beta}$ y $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

I.14.2. El cuádrimomentum

Usando los resultados de la sección anterior, podemos definir el cuádrimomentum P^μ , como

$$P^\mu = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, m_0 c \gamma \vec{\beta} \right) = m_0 c (\gamma, \gamma \vec{\beta}), \quad (\text{I.45})$$

introduciendo la expresión de u^μ ,

$$P^\mu = m_0 c u^\mu. \quad (\text{I.46})$$

Como u^μ es un cuádrivector, P^μ también lo es.

El factor $(m_0 c)$ aparece por razones dimensionales, el cuádrivector u^μ , no tiene dimensiones. La primera componente del cuádrivector momentum P^μ se define como la energía asociada a la partícula. Las otras tres componentes constituyen el vector momento, es decir, éstas son las componentes que en un régimen no relativista se transformarán en el momentum usual de la mecánica Newtoniana.

Mencionamos que los invariantes son importantes puesto que toman el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas. Calculemos el invariante obtenido a partir del cuádrimomentum.

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right) \quad (\text{I.47})$$

$$P^\mu P_\mu = (m_0 c)^2 u^\mu u_\mu = (m_0 c)^2 \quad (\text{I.48})$$

$$P^\mu P_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{P}^2 = m_0^2 c^2 \quad (\text{I.49})$$

En un sistema en que la partícula se encuentre en reposo, $\vec{\mathbf{P}} = 0$, y por lo tanto la energía toma el valor conocido

$$E = m_0 c^2 \quad (\text{I.50})$$

Otra consecuencia de este cálculo es que la definición de masa en reposo está bien definida: es proporcional al valor del invariante $P^\mu P_\mu$, por lo tanto es un número que no depende del sistema de referencia utilizado.

I.14.3. La Conservación del Momentum.

Continuando con la generalización de las cantidades que aparecen en la mecánica usual de Newton, nos queda por definir la cuadrifuerza. Se define a partir del cuadrimomentum en la forma que se indica a continuación:

$$F^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{ds}. \quad (\text{I.51})$$

Si **no** hay fuerzas externas actuando sobre el sistema de partículas que estamos estudiando, entonces $F^\mu = 0$ y en un choque entre partículas ocurre que

$$P^\mu_{\text{Total}} = \text{Constante}. \quad (\text{I.52})$$

Como el cuadrimomentum se conserva, cada una de sus componentes se conserva, toma el mismo valor antes y después del choque.

$$P^0_{\text{antes}} = P^0_{\text{después}} \rightarrow \text{la energía se conserva.} \quad (\text{I.53})$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{\text{antes}} = \vec{\mathbf{P}}_{\text{después}} \rightarrow \text{el momentum se conserva.} \quad (\text{I.54})$$

Una de las consecuencias de la conservación del 4 - momentum p^μ es que la masa y la energía no sean independientes como ocurría en la mecánica de Newton. La ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la energía se vuelven una sola en el contexto de la Relatividad Especial.

En relatividad Especial las ecuaciones son cuatro:

$$\begin{aligned} P^0_{\text{inic}} &= P^0_{\text{final}} && (\text{conservación de masa y energía}) \\ \vec{\mathbf{P}}_{\text{inic}} &= \vec{\mathbf{P}}_{\text{final}} && (3 \text{ ecuación, conservación del momentum}) \end{aligned}$$

Transformación de masa en energía

Supongamos que una masa M , inicialmente en reposo se divide en dos partículas idénticas.

Utilizando el invariante

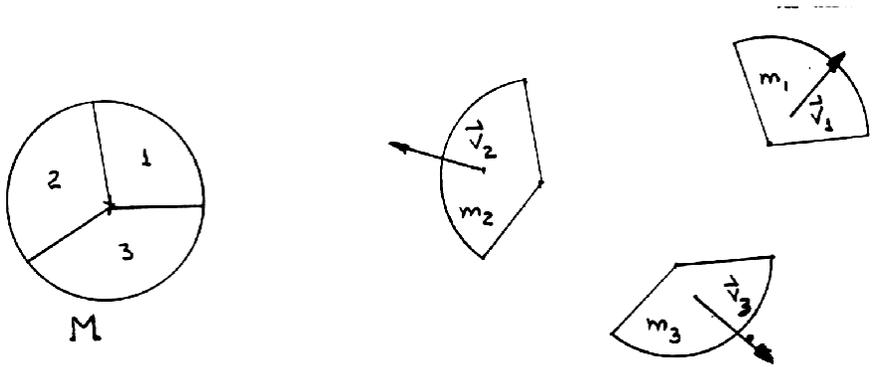


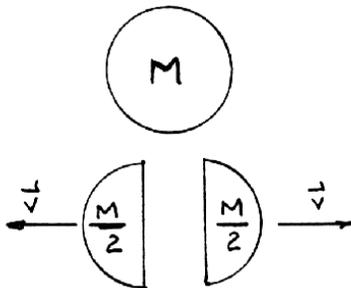
Figura I.45: En la mecánica de Newton ocurre que: $M = m_1 + m_2 + m_3$, $p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ y $E_i = E_f$, $E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$. Estas 5 ecuaciones se transforman en 4 ecuaciones en la relatividad especial.

$$P_{\mu}^{inic} P_{\mu}^{fin} = P_{\mu}^{fin} P_{\mu}^{inic}$$

tenemos

$$P_{inic}^{\mu} = \{M c, \vec{0}\}$$

$$P_{final}^{\mu} = \{(m_1 + m_2) c \gamma, \gamma m_1 \vec{v}_1 - \gamma m_2 \vec{v}_2\}$$



Si ambos trozos 1 y 2 son idénticos $m_1 = m_2$, entonces

$$P_{final}^{\mu} = \{2m c \gamma, \vec{0}\}, \quad \text{puesto que } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0. \text{ Además}$$

$$P_{inic}^{\mu} P_{\mu}^{inic} = M^2 c^2 = m^2 c^2 \gamma^2 = P_{final}^{\mu} P_{\mu}^{final}$$

De aquí tenemos

$$M = 2m \gamma, \quad \text{como } \gamma \geq 1,$$

entonces $M > 2m$. La masa no se conserva. Parte de la masa inicial se transformó en energía. Con el objeto de hacer una analogía con la mecánica de Newton, afirmamos que la masa se convirtió en energía cinética. Definimos la energía cinética como:

$$T \equiv E - E_0, \quad (\text{I.55})$$

donde E_0 proviene del invariante $P^\mu P_\mu$

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_0^2}{c^2}, \quad \text{con } p = \gamma m v. \\ E &= \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \\ T &\equiv \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0. \end{aligned}$$

Otra forma que puede adoptar este resultado, se obtiene desarrollando γ en serie de potencias de $(v/c)^2$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2 \\ T &= m c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 \mp \dots \right\} - m c^2 \\ T &\equiv \text{Energía Cinética Relativista} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3m}{8} \left(\frac{v^4}{c^2} \right) \mp \dots \end{aligned}$$

Este es el valor de la energía cinética para cada partícula m . Para comparar con el valor inicial M

$$2T = 2m\gamma c^2 - 2mc^2 = (M - 2m)c^2,$$

la diferencia de masa se transformó en energía cinética.

La ley de conservación de masa de Lavoisier no es exacta. Claro está que la diferencia entre la masa inicial y final es, en la mayoría de los casos, despreciable.

La energía se transforma en masa

En la reacción



la energía traspasada al agua se convierte en masa. En 1000 toneladas de agua convertida a hidrógeno y oxígeno, estos productos gaseosos tienen alrededor de 0,3 gramos de masa en exceso del original.

Ejemplo

- a.- Suponga que dos masas iguales chocan frontalmente para producir una sola partícula de masa en reposo **4 m**.
- b.- El mismo caso anterior, pero ahora una de las partículas está en reposo en el Laboratorio y la otra choca frontalmente. Calcule la energía de la partícula incidente.

Solución parte a.-

Utilicemos los invariantes

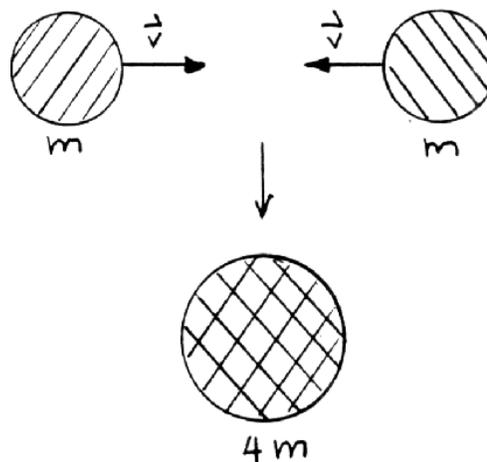
$$P_{in}^{\mu} P_{\mu}^{in} = P_{fin}^{\mu} P_{\mu}^{fin}$$

$$P_{in}^{\mu} = \left(2 \frac{E_i}{c}, P_1 + P_2 \right),$$

pero $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, luego :

$$\frac{2E_i^2}{c^2} = \frac{E_f^2}{c^2} \quad E_i = m\gamma \quad E_f = 4m,$$

$$2m\gamma = 4m \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,87c$$



Ambas partículas deben aproximarse con la velocidad $v = 0,87c$

En el caso b.-, la partícula de masa $4m$ no puede estar en reposo, de esta forma

$$\left(\frac{E_i}{c} + mc\right)^2 - P_i^2 = \left(\frac{E_f}{c}\right)^2 - P_f^2$$

como $P_i = \gamma m v$, $E_i = mc\gamma$, entonces

$$(mc)^2(\gamma_i + 1)^2 - \gamma_i^2 m^2 v^2 = (4\gamma_f mc)^2 - (4m\gamma_f v_f)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}}, \quad \gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}}$$

$$(mc)^2 + 2(mc)^2\gamma_i + \gamma_i^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right) = 16\gamma_f^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2}\right)$$

$$2(mc)^2(1 + \gamma_i) = 16m^2 c^2, \quad \text{de aquí se obtiene } \gamma_i = 7, \quad \Rightarrow \quad v_i \simeq 0,99c.$$

En este caso, bombardear una partícula contra un blanco en reposo, se necesita una cantidad apreciablemente mayor de energía que el caso anterior. Es por esta razón que los aceleradores modernos utilizan haces de partículas que chocan frontalmente para producir como partículas más masivas.

Por ejemplo, el descubrimiento del bosón Z, que era una predicción de la teoría de Weinberg, Salam y Glashow y que les valió el premio Nobel en 1979, tiene una masa mil veces mayor que la de un átomo.

La partícula Z se produce en los aceleradores a partir del choque de dos partículas suficientemente energéticas puesto que la masa de la partícula Z es 100.000 veces mayor que la masa de cada una de las partículas incidentes.

Esta partícula fue detectada en Enero de 1983. Para tener una idea de la magnitud del acelerador, éste contiene un magneto de 800 toneladas para producir un campo magnético de 0.7 Tesla.

I.14.4. Ley de Transformaciones de Vectores.

Las cantidades que tienen un significado físico -aquellas que representan una observación-, tienen existencia por sí mismas, independientes del sistema de referencia utilizado. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad...etc. no cambian al rotar el sistema de referencia, permanecen iguales y sólo se altera el valor de sus coordenadas.

Figura I.46: En mecánica utilizamos cantidades como: escalares, vectores, pseudo-vectores, tensores...etc. El nombre de cada uno de estos objetos responde a las propiedades de transformación que obedece dicha cantidad al realizar una rotación del sistema de referencia o al reflejarlo en un espejo

La segunda ley de Newton se escribe: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ y no se especifica la orientación del sistema de referencia. Nosotros seleccionamos uno, el más conveniente, y escribimos las ecuaciones en dicho sistema de referencia. Si posteriormente queremos cambiar de sistema de referencia a otro que forme un cierto ángulo con respecto al anterior, debemos usar las propiedades de transformación de los vectores y la ecuación queda escrita correctamente en el nuevo sistema de referencia. Esta operación es correcta porque todas las cantidades que aparecen en la ecuación transforman de la misma forma bajo rotaciones, es decir son **vectores**.

Ejemplo

Estudiemos el caso de una rotación en un ángulo θ . Para preparar el camino a las transformaciones de Lorentz, incluiremos aquí el tiempo.

a) Escribir la rotación en forma matricial, incluyendo el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t, \\ x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, \\ y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta, \\ z \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial,

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=3} R^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (\text{I.56})$$

Hemos introducido la matriz de rotación $R^\mu{}_\nu$. Esta matriz incluye la componente temporal, los índices μ y ν toman los valores 0, 1, 2 y 3. Es una matriz de 4×4 .

Convención de Einstein

A continuación se define la convención de Einstein para las sumas. Consiste en omitir el símbolo de la sumatoria \sum y adoptar la convención siguiente: cada vez que aparezca un índice repetido, se debe sumar sobre todos los valores que toma dicho índice. En esta notación la expresión anterior se escribe

$$\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \quad (I.57)$$

donde la matriz R^μ_ν tiene la siguiente forma

$$R^\mu_\nu = \begin{bmatrix} R^0_0 & R^0_1 & R^0_2 & R^0_3 \\ R^1_0 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ R^2_0 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ R^3_0 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Las velocidades deben transformar de la misma forma. Usando la forma tensorial definida en [I.14.4], y diferenciando con respecto a x^ν (y manteniendo fijo el ángulo de rotación) tenemos que

$$\Delta \vec{x} \equiv \vec{X}_p - \vec{X}_q, \quad d\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu dx^\nu, \quad (I.58)$$

de aquí podemos encontrar la forma de la velocidad recordando que t toma el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Sólo debemos dividir ambos miembros de la ecuación anterior por dt :

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = R^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad \bar{V}^\mu = R^\mu_\nu V^\nu. \quad (I.59)$$

Es claro que esta expresión transforma igual que los vectores bajo una rotación, y por lo tanto es un vector.

Podemos seguir con este método y aplicarlo a la aceleración, y obtener un resultado similar: también es un vector, como uno supone.

Receta para subir y bajar índices

Los índices superiores identifican a un vector u^μ (o tensor si hay más de un índice $F^{\mu\nu}$) *contravariante*. Si figura como subíndice u_μ , se denomina *covariante*.

Cada una de estas cantidades tiene un significado geométrico bien determinado pero aquí sólo nos interesa dar una receta que nos indique cómo subir o bajar índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene exactamente la misma expresión de la métrica de Minkowski.

Para subir un índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la métrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ análogamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La métrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) índices.

Ejemplo

Encuentre la expresión asociada a la transformación de Lorentz, con los dos índices arriba (dos veces contravariante) o los dos índices abajo (dos veces covariante).

La Transformación de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tien un índice superior y uno inferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el índice α . Análogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadriaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadrivelocidad, tenemos:

$$u^\mu u_\mu = +1. \quad (\text{I.60})$$

De aquí derivando con respecto a ds :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{I.61})$$

Definiendo la cuadriaceleración $\alpha^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds}$, y en forma similar α_μ ,

$$\alpha^\mu u_\mu + u^\mu \alpha_\mu = 0, \quad (\text{I.62})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$\alpha^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{I.63})$$

Ejercicio

Encontrar la expresión de α^μ como función de γ , $\vec{\beta}$ y $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

I.15. Ejercicios Propuestos

1.- Dos barras **A** y **B**, cuyo largo propio (medido en su propio sistema de referencia) es **L**, se desplazan con rapidez constante en el mismo sentido y dirección. Las respectivas velocidades son **4 c/5** para **A** y **3 c/5** para **B** se miden con respecto a un sistema fijo **S**. Al comienzo **A** viaja detrás de **B**.

a.- Si hay un observador externo, que denominamos **C** en reposo en **S**. Dibuje un diagrama de s-t que grafique la situación.

b.- ¿Cuánto tarda **A** en sobrepasar a **B**. Esto quiere decir el intervalo medido por **C**, entre el instante que el frente de **A** coincide con la cola de **B** y el instante en que la cola de **A** coincide con el frente de **B**.

2.- Existe una familia de partículas elementales llamadas **muones** que son similares a los electrones pero tienen una masa 200 veces mayor y que, a diferencia del electrón, decaen en otras partículas (electrones y neutrinos) después de una vida media de 2×10^{-6} s medido en su propio sistema de coordenadas. La vida media es el tiempo que debe transcurrir para que el número de partículas que existía inicialmente disminuye a la mitad de su valor inicial. Los muones (identificados como μ) que se crean en la parte alta de la atmósfera se mueven hacia la superficie de la Tierra con una alta velocidad $V = 0.9999 c$.

Suponga que un muón μ se crea a 20 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si esta partícula μ no colisiona con ninguna otra partícula cuando se aproxima a la Tierra: Decida si este muón alcanza la superficie de la Tierra antes de decaer en un electrón y neutrino.

3.- Retomando los datos presentados en el problema 1, acerca de los dos carros **A** y **B**, moviéndose en una dimensión con uno de ellos adelantando al otro.

a.- ¿Cuánto demora **A** en adelantar **B** según un observador en reposo en cada uno de ellos? Lo que afirma **A** y lo que afirma **B**.

- b.- Definimos el evento **P** como aquel en que el frente de **A** coincide con la cola de **B**. Analogamente el evento **Q** representa el instante en que la cola de **A** coincide con el frente de **B**. Un observador **D** camina con rapidez constante sobre **B** de forma que coincide con **P** en la partida y con **Q** al final de su caminata sobre la barra **B**. ¿Cuánto demora, según **D**, el adelanto de **A** a **B**?
- 4.- Dos trenes de largo propio **L** viajan en líneas paralelas con velocidad **V** con respecto al piso común. Cuando los frentes de ambos trenes se cruzan, ambos conductores ponen su relojes en $t=0$. De ese modo todos los relojes de cada uno de los trenes quedan sincronizados con el de su conductor.
- a.- Unos instantes más tarde, cuando la cola de ambos trenes coinciden, qué tiempo marca el reloj de cada uno de los trenes. Refiera los tiempos al sistema fijo al piso.
- b.- La misma pregunta anterior pero ahora tome como referencia el reloj del conductor **B**.
- 5.- Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante **v**. **A** y **B** están en los extremos del vagón y los observadores **C** y **D** están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como en que **A** pasa frente a **C**. Las otras coincidencias se definen en forma similar.
- a.- De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿Cuáles de éstos sirven para que los dos observadores sobre la vía puedan determinar el paso del reloj llevado por A?
- b.- Sea Δt el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?
- c.- Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no lo son, ¿cuál ocurre primero?
- 6.- Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno H_{α} , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de $10^{-3}c$, $10^{-2}c$, y $10^{-1}c$. ¿Es una buena aproximación el resultado obtenido a primer orden en v/c ?
- 7.- Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de $630 \frac{m}{seg}$, con respecto a la Tierra.
- a.- ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?
- b.- ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo?
- 8.- El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parece acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, debido al movimiento orbital de la Tierra?
- 9.- Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.

- a.- ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador?
 b.- ¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?

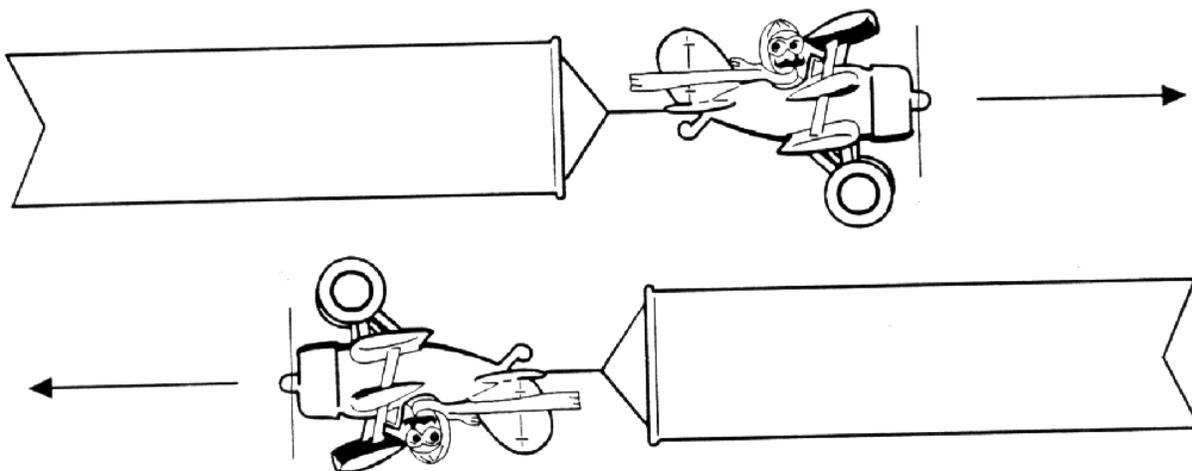


Figura I.47

- 10.- Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es $2,50 \times 10^{-6}$ segundos. A partir de este dato, encuentre:
- a.- ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?
 b.- ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

- 11.- Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

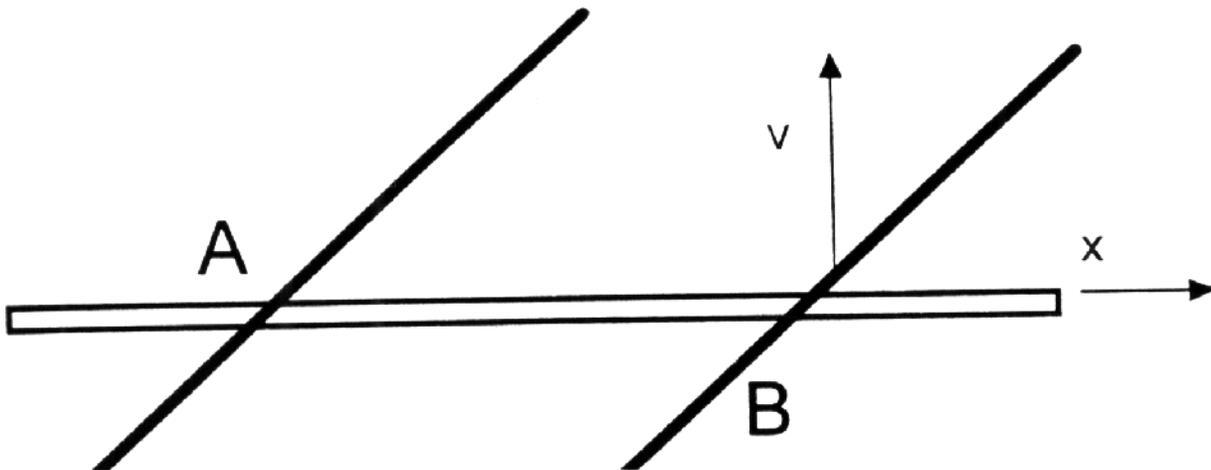
$$N(t) = N_0 \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

Siendo N_0 el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_0, \quad N(\tau) = \frac{N_0}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8}$

- s. Suponiendo que N_0 mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez $0.9999c$ llegando solamente el 1 %:
- Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.
 - Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.
- 12.– a.- Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es $2,3 \times 10^{-6}$ segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0,00c$, $0,60c$, $0,90c$, y $0,99c$ respectivamente.
- b.- Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.
- 13.– A 200 km sobre el nivel del mar, un rayo cósmico primario (una partícula) choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0.99c$ y, en su sistema propio, se desintegra 2.5×10^{-8} s después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?
- 14.– En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje x (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección $+y$ (sin cambiar de inclinación) a una velocidad v .
- Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad $u = v \cot \theta$ hacia la izquierda.
 - Sea $\theta = 30^\circ$ y $v = \frac{2}{3}c$. Demuestre que, en este caso, u excede a c y explique por qué no existe ninguna contradicción con la relatividad.



- 15.– Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de $0,9c$ y el

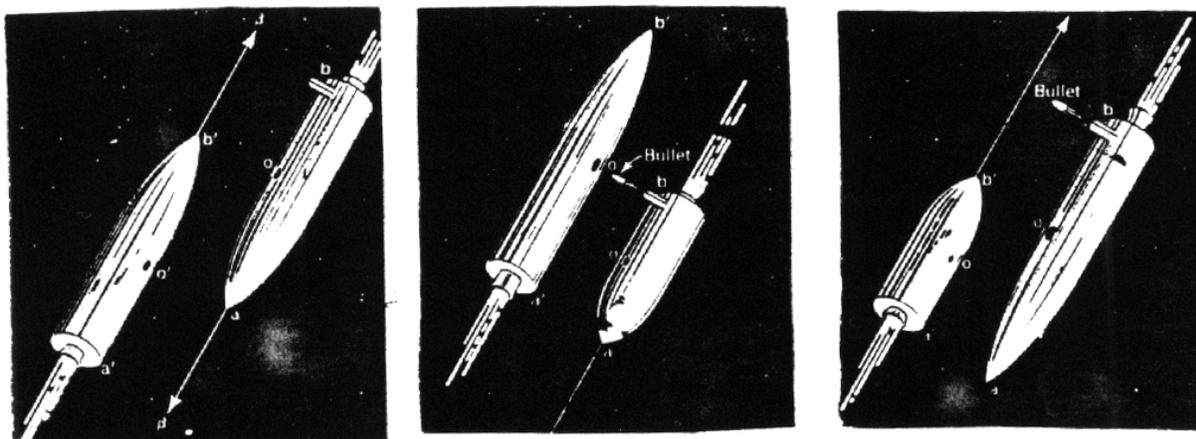
segundo a una velocidad de $0,7 c$. Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.

16.- Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de $0,6 c$, con respecto a A.

a.- ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?

b.- ¿A qué intervalos recibe C las señales de A?

c.- ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?



17.- Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.

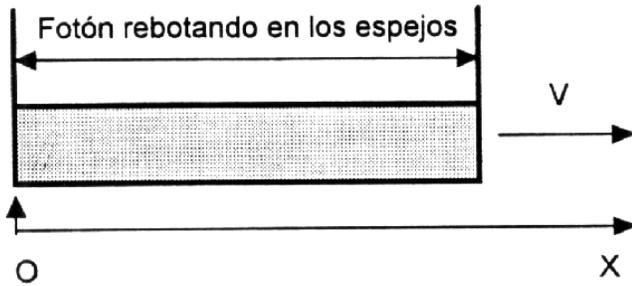
a.- Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha que su bala no dará en el blanco. Pero en el sistema de referencia de O', es el misil O el que aparece contraído y por lo tanto, cuando A y A' coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

(a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.

b.- Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota: $L \equiv$ largo propio de los misiles. $u \equiv$ velocidad del misil O con respecto a O'.

18.- Se tiene una barra de largo L que se desplaza con velocidad v . En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en $t = 0$ el espejo de la izquierda coincide con el punto $x = 0$ y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo $c = 1$.



19.- En el sistema S' , un sujeto corre en la dirección del eje y' con velocidad constante $V = \frac{L'}{T'}$, donde L' es la distancia propia con respecto a S' y T' es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a S' .

A su vez, S' se mueve con una velocidad U con respecto a otro sistema de referencia inercial S .

a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema S , calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema S' hay una serie de interruptores separados por una distancia propia L' . A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia S en la dirección del eje x del sistema S*.

Calcule la velocidad ω_y con que los detectores se encienden en el sistema S , a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de S' . Suponga, si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema S' se encontraba a una altura H sobre S . Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

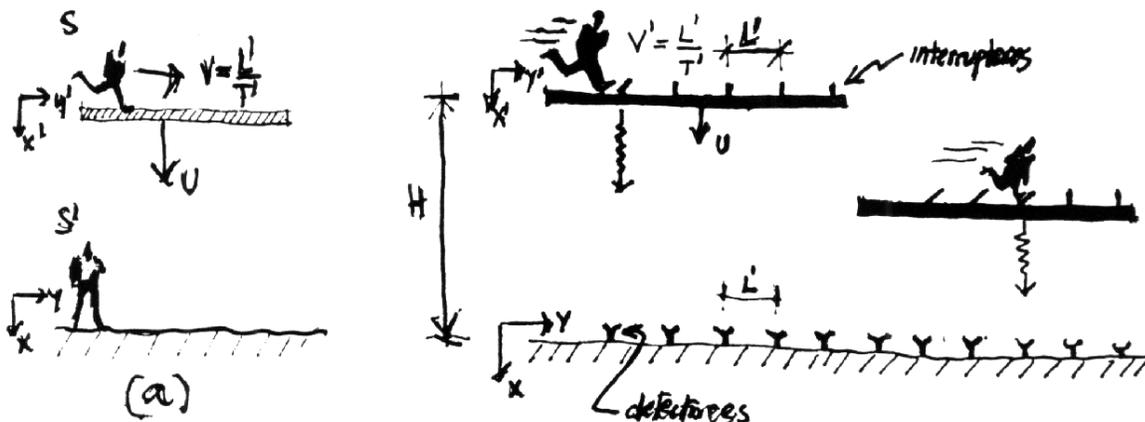


Figura I.48: Ejercicio # 19

c) Si el observador en S , $U = \bar{V} \cos \theta$, $V = \bar{V} \sin \theta$, representan las componentes de

la velocidad \bar{V} con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema S es:

$$w_y = \frac{\bar{V} \sin \theta}{1 - \frac{\bar{V} \cos \theta}{c}}$$

d) Demuestre que si $\bar{V} \approx c$ (es decir, $\beta \approx 1$) y el ángulo θ es muy pequeño, la velocidad w_y toma su máximo valor para $\theta^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$.

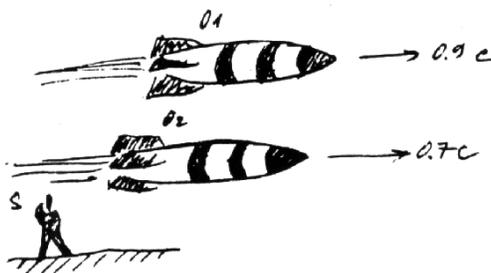
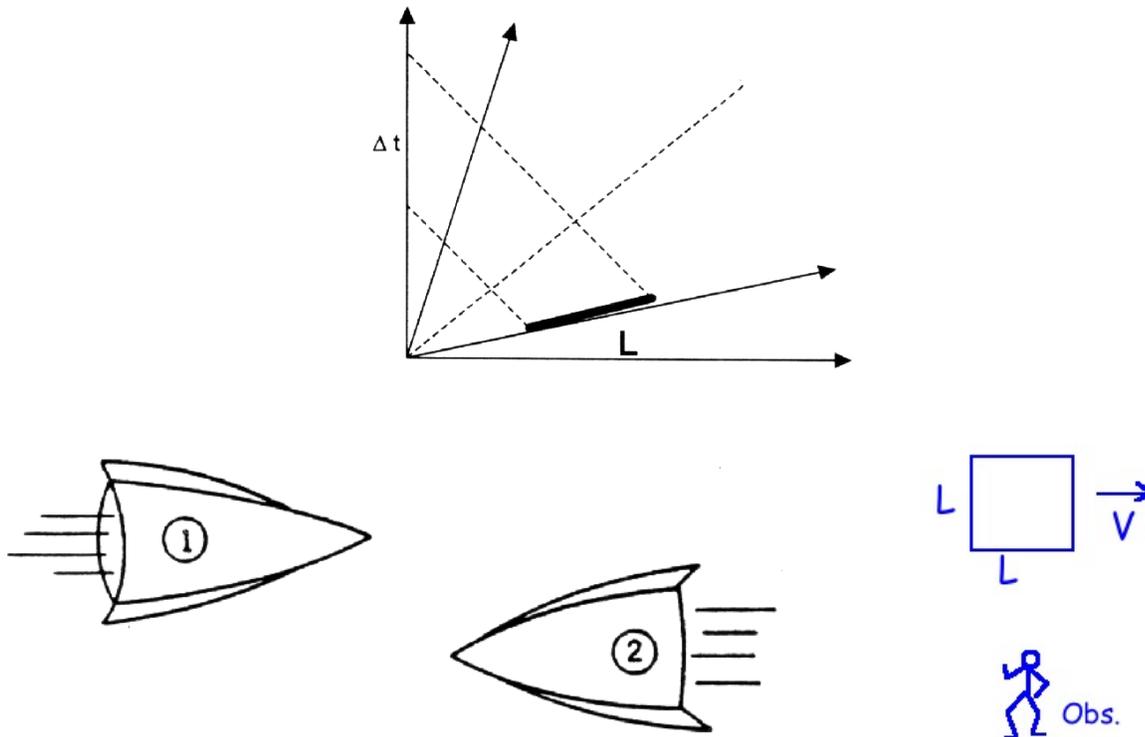


Figura I.49: Ejercicio # 16

- 20.- Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por O_1 y le asociamos la velocidad $V_1 = 0,9c$ y al otro, O_2 la velocidad $V_2 = 0,7c$:
- Encuentre la velocidad de O_1 con respecto a O_2 .
 - Si los largos propios son L_1 y L_2 respectivamente, cuál es el largo del cohete L_2 , de acuerdo a O_1 .
- 21.- Una barra de largo L' con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad V_0 de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra*, calcule la diferencia de tiempo Δt con la cual arriba cada uno de los destellos al observador S .
- Nota:** El intervalo Δt , *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de S . Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.
- 22.- Un cuadrado de largo propio L pasa frente a un observador con una velocidad V , como indica la figura. Para los efectos que nos interesan acá, el observador es un punto. El cuadrado y el punto se encuentran en el mismo plano. Cuando el cuadrado pasa frente al observador, éste lo ve rotado en vez de contraído. Muestre que efectivamente se ve rotado y encuentre el ángulo de rotación aparente.

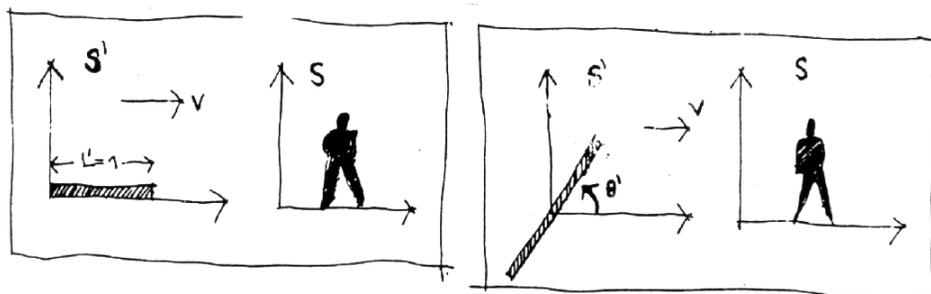


NOTA: Acá se trata de VER y puede suponer que el largo L es mucho menor que la distancia que separa al cuadrado del observador, de modo que los rayos provenientes de los extremos de L se pueden considerar paralelos.

La historia de este problema es interesante. Lo resolvió R. Penrose en 1959. Einstein estimó que sólo había contracción del largo. Para más detalles y dibujos muy interesantes y la solución, puede ver el sitio

<https://physicsworld.com/a/the-invisibility-of-length-contraction/>

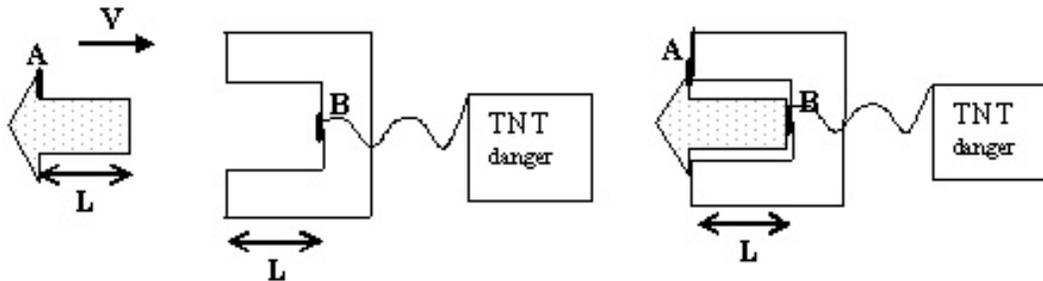
aparece en la revista Physics World 13 Aug 2019, "Taken from the August 2019 issue of Physics World. Members of the Institute of Physics can enjoy the full issue via the Physics World app."



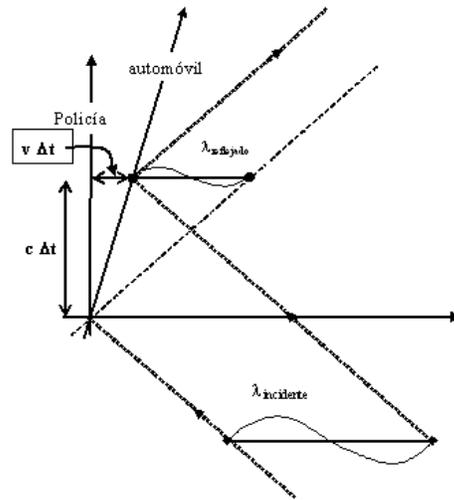
23.- Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en

reposito con una velocidad $\frac{24}{25}c$, como se indica en la Figura.

- ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?
- Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo $\theta' = \arcsin(5/6)$, en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.
- Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.



- 24.- La estructura de la izquierda (remache) tiene una protuberancia de largo L que al insertarse en el objeto con forma de U a la derecha alcanza justo a tocar el interruptor B ubicado al fondo de la cavidad. Esto ocurre cuando ambos objetos están en reposo (primera figura). B es un interruptor que, al ser tocado, gatilla la bomba de TNT señalada. Note que la cabeza del remache (por ejemplo el borde A) se apoya en los bordes del objeto en U al ser insertado.
- Suponga que el mismo remache se acerca con una rapidez V , con respecto a un observador en reposo en la estructura en U, como aparece en la figura. Explique cuantitativamente qué sucede con el extremo del remache cuando A toca el borde de U: también toca B , lo tocó antes, a qué distancia se encuentra según qué observador ¿ Explota la bomba? Debe acompañar un gráfico espacio-tiempo de la situación donde se especifique qué midió y su valor.
 - Considere las mismas preguntas, pero ahora desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al remache que ve acercarse al objeto en U. Siendo un observador sistema inercial, opina que la estructura en U se acerca con rapidez V . ¿ Explota o no la bomba, de acuerdo a este observador?
 - En definitiva, si la bomba explota NO puede depender del observador. ¿ Cómo resuelve Ud. esta paradoja?
 - En el caso i.- suponga que se conectó un dispositivo al punto A del remache tal que si A es presionado dispara un laser que corta el cable que une B con la bomba. En este nuevo escenario: ¿ Explota ésta o no?



25.- El diagrama representa un policía midiendo la velocidad de un auto mediante el efecto Doppler. Nos instalamos en el sistema de referencia de la autoridad. Del auto sólo indicamos la flecha del tiempo para no complicar el dibujo. Se indica la trayectoria de dos nodos separados por una longitud de onda (λ) emitida por la pistola del policía y la recibida después de reflejarse en el auto unos instantes más tarde. (recuerde que los largos, como la longitud de onda, se miden en intervalos tipo espacio).

i.- De la figura, demuestre (no sólo afirme, explique por qué) que: $c\Delta t = v\Delta t + \lambda_{\text{reflejado}}$, y que $c\Delta t = \lambda_{\text{incidente}} - v\Delta t$, donde v es la velocidad del auto c/r al policía.

ii.- A partir del resultado anterior obtenga ($f \equiv$ frecuencia), $f_{\text{reflejada}} = kf_{\text{incidente}}$, con $k = \frac{1+V/c}{1-V/c}$.

iii.- Suponiendo que el cambio de frecuencia es pequeño debido a que V/c es muy pequeño, muestre que $(\Delta f/f) \approx 2V/c$. Verifique cuán pequeño es si $V=120$ km/h.

iv.- El radar de la policía de Santiago, opera con una frecuencia de $10,525 \times 10^9$ ciclos/s. ¿Cuántos ciclos por segundo cambia el haz reflejado comparado con el incidente (o enviado)?

v.- ¿Qué resolución debe tener la maquinita de la policía para poder distinguir entre un automovilista que viaja a 120 km/h y otro, infractor, que guía a 121 km/h?

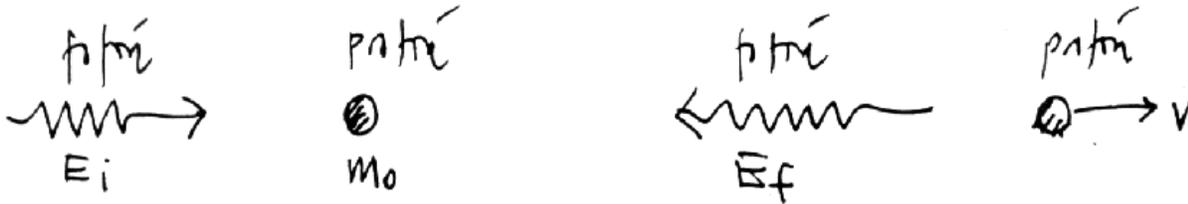
26.- a.- Si definimos la energía cinética $K = E - mc^2$, encuentre una expresión para K en función de la masa, la velocidad y c . Muestre que en el límite no relativista, $K = mv^2/2$.

b.- Considere un positrón de masa m y energía cinética $K = mc^2$, que colisiona con un electrón en reposo. El positrón tiene la misma masa en reposo que el electrón, que denominamos m . En esta colisión ambas partículas desaparecen y se forman dos fotones de alta energía. Uno de los fotones (fotón D) es capturado por un aparato ubicado a 90° con respecto a la dirección del positrón incidente. ¿Cuál es la energía del fotón C, si el fotón capturado en el detector tiene una energía igual a $E_D = mc^2$? (m es la masa del electrón y el positrón en reposo).

c.- ¿Cuál es el valor del ángulo θ ?

(recuerde: $[1 + z]^r \approx 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 - \dots$)

27.- Un fotón que inicialmente tiene energía E_i choca con un protón que está en reposo inicialmente. El protón tiene masa m_0 . Calcular la energía final del fotón.



Indicación: Recordar que $p = E/c$, para el fotón ($p \equiv$ cantidad de movimiento lineal).

$$\left(\text{Respuesta: } E_f = E_i / \left[\frac{2 E_i}{m_0 c^2} + 1 \right] \right).$$

Bibliografía

- [1] **A History of the theories of Aether and Electricity**, Sir Edmund Whittaker, 1954, Tomash Publishers, Vol VII.
- [2] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [3] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [4] **A First Course in General Relativity**, Bernard Schutz, Cambridge Press University, 2004.
- [5] **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, 2003.
- [6] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [7] **Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. Leighton and M. Sands, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Sección 18-6.
- [8] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [9] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrews, Walker and Company, New York, 1998.
- [10] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [11] **Le Temps en Physique**, M. Mashaal, La Recherche, 24, # 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la física).
- [12] **Variations in the rotation of earth**, W. E. Carter et al., Sci., 224, 1 June, page 957.
- [13] **Time Too Good to Be True**, D. Kleppner, Physics Today, **Reference Frame**, March 2006, page 10.
- [14] **Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser**, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., 45, page 2081.

- [15] **Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains**, J. C. Hafele y R. E. Keating, *Science*, **177**, 166, 1972, pag 166.
- [16] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 549.
- [17] **Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity**, 1990, D. Hils and J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **64**, page 1697.
- [18] **What is missing from Minkowski’s Raum und Zeit’lecture**, arXiv:0807.1300v1 [physics.hist-ph], 8 july2008.
- [19] **On the electrodynamics of moving bodies**, A. Einstein, June 30, 1905
- [20] **Splitting the second**, Tony Jones, IoP publishing, Bristol, 2001.
- [21] **It’s About Time: Understanding Einstein’s Relativity**, N. David Mermin, Princeton University Press, 2005.
- [22] **Special Relativity for the Enthusiastic Beginner**, David Morin, Copyright DMorin 2017. Es un libro auto editado. Está en Amazon y todas las otras compañías.
- [23] , <https://physicsworld.com/a/the-invisibility-of-length-%e2%80%afcontraction/> The invisibility of length Contraction. 13Ag2019.