

38.9 DUALIDAD ONDA-PARTICULA

Históricamente, la luz (NEWTON) era una partícula: La naturaleza corpuscular de la luz.

Los experimentos de la Doble Ranura de Young (1801) dió paso a la aceptación de la comunidad que la luz era una onda. Huyghens ya lo había propuesto pero el peso de Newton y su opinión del corpusculo de luz y sus colores no le permitió a Huygens convencer a la comunidad.

En concreto la interferencia ~~y~~ de las dos ranuras no podía ser explicada mediante los corpusculos de luz.

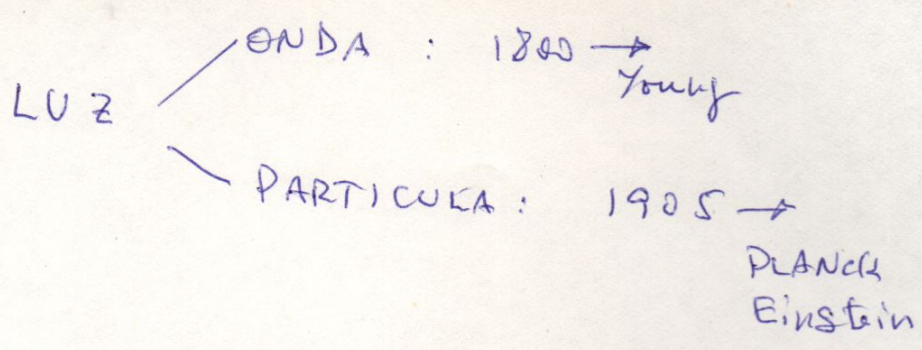
Creció la aceptación de la luz como una onda.

CONCLUSION: ONDAS — INTERFERENCIA
— DIFRACCION

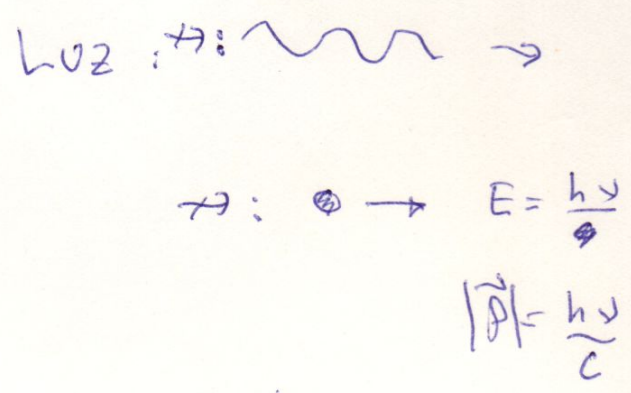
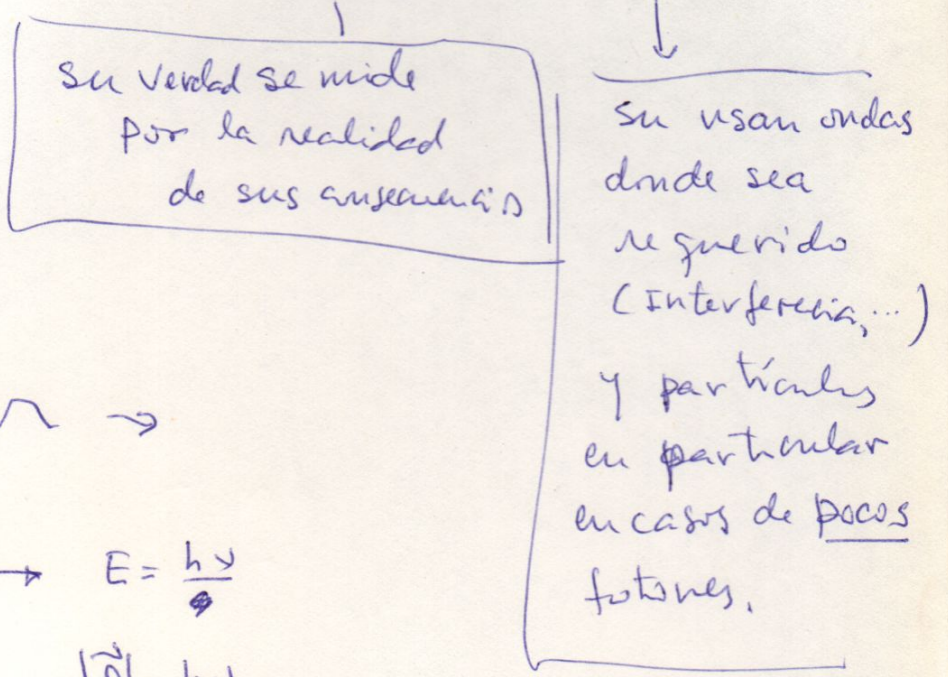
1/2



$\lambda \geq d$
ONDAS } \Rightarrow



Niels Bohr 1928 : Principio de Complementariedad



se trata como partículas en los choques con e^- , otros fotones, ...

De Broglie

Extiende la dualidad

Fotones : γ (símbolo) } ONDAS PARTICULAS

y así en el resto de las partículas n, p, \dots

e^- : partículas \leftrightarrow ONDAS (descubiertas como) part.

L. de Broglie (1924) (POSTULADO)

Sabemos que $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$ no-relativista.

Esta es la λ asociada a una ~~masa~~ partícula con masa m y velocidad v .

Si conectamos esto con

$L = n \hbar = \frac{nh}{2\pi}$ (hipótesis de Bohr)

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow |\vec{L}| = m v r$

pero $m v = \frac{h}{\lambda}$

de Broglie

$\Rightarrow \underbrace{|\vec{L}|}_{n \hbar} = \underbrace{\frac{h}{\lambda}}_{m v} r = \boxed{2\pi r = n \lambda}$
 $n = 1, 2, 3, \dots$

$$2\pi r \equiv \textcircled{\text{---}\lambda\text{---}} = n\lambda$$

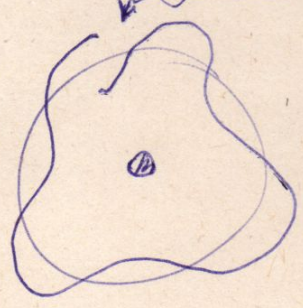
$n = 1, 2, \dots$



La \oplus se "cierra" con un número entero ($n = 1, 2, 3, \dots$) de longitudes de onda.

Esa órbita es estable

Si no se cierra, el e^- da dando vueltas alrededor del núcleo radiando ondas electro magnéticas



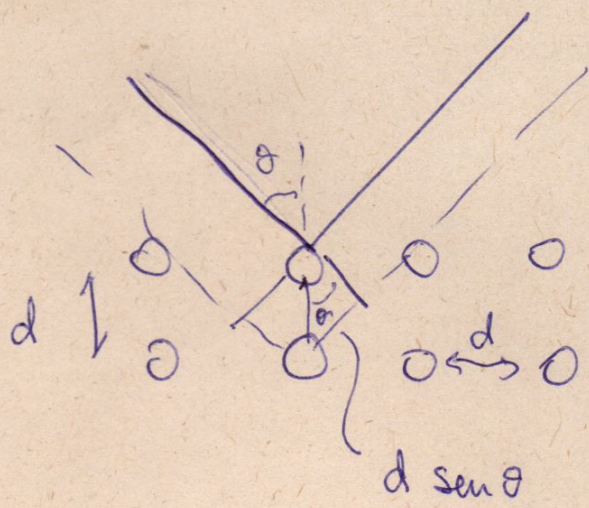
y el átomo decae \Rightarrow No existe, muere rápidamente!!

NOTA: El modelo es inventado pero coherente. Es una suma de hipótesis de las cuales las más extrañas se comprueban EXPERIMENTALMENTE!

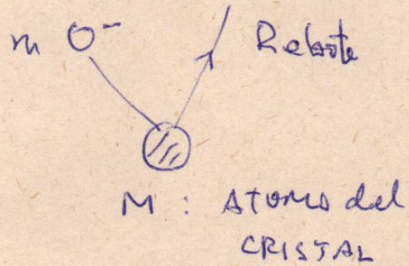
Dispositivo ~~Experimental~~ que comprueba experimentalmente el comportamiento ondulatorio del e^-

Davisson - Germer (ver [https:// ...](https://...) 3dXE)

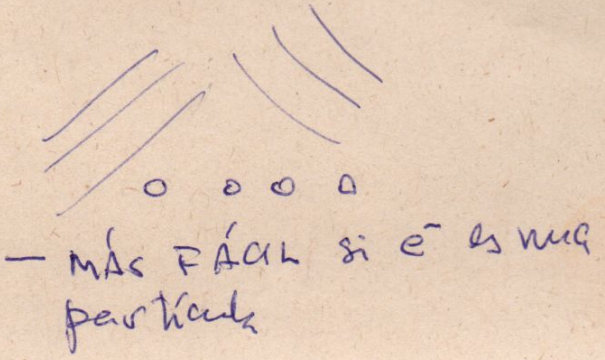
e^- bombardean un cristal ordenado (micro cristal), se comporta como una ranura



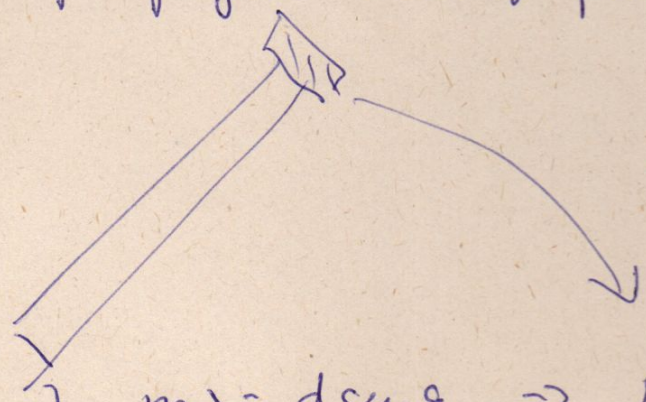
- CRISTAL ORDENADO
- lo que se indica es una caricatura muy útil!
- El fenómeno es complejo si lo miramos como una onda



pero la difracción o interferencia si lo consideramos como una onda

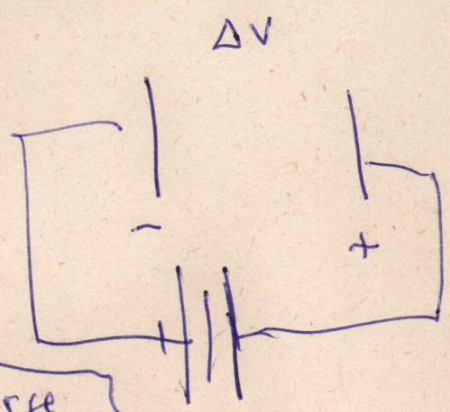


Suponemos que se mide muy lejos del lugar de la dispersión de ondas coherentes \Rightarrow las ondas dispersadas se propagan (casi!) paralelamente



$m \lambda = d \sin \theta \Rightarrow$ MÁXIMO si $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La energía cinética que gana el e^- en la diferencia de Potencial



$e \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v^2$

$v \equiv$ vel. no relativista

NOTA: Hoy se requieren velocidades

⊗ La carga de los e^- permite acelerarlos rápidamente mediante ΔV .

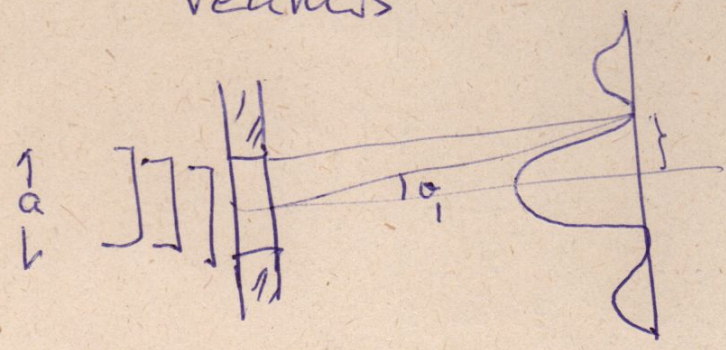
$e \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \Rightarrow p = \sqrt{2 e \cdot \Delta V \cdot m}$

$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda$

El Principio de Incertidumbre

CONEXIÓN entre el formalismo de ondas y de partículas.

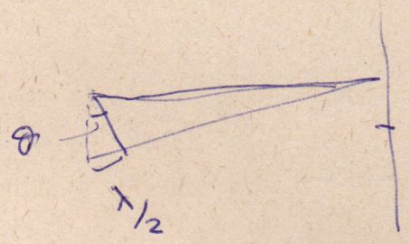
Veamos



$$\sin \theta = \frac{m \lambda}{a}$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

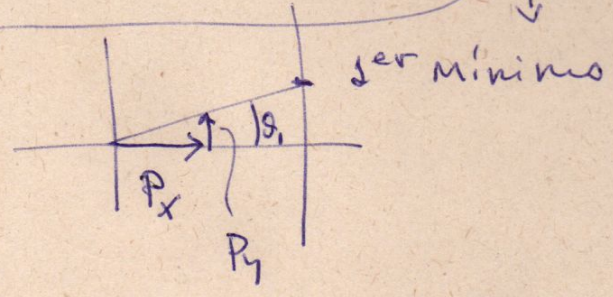
$$m=1$$



$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

NO es una demostración

ONDAS ↑



~~Se muestra~~ Se muestra que no hay contradicción en lo el formalismo de partícula

$$p_y = |\vec{p}| \sin \theta_1 \sim p_x \theta_1$$

$$\theta_1 \ll 1 \text{ (radianes)}$$

$$P_y \approx P_x \theta_1$$

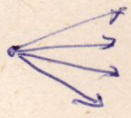
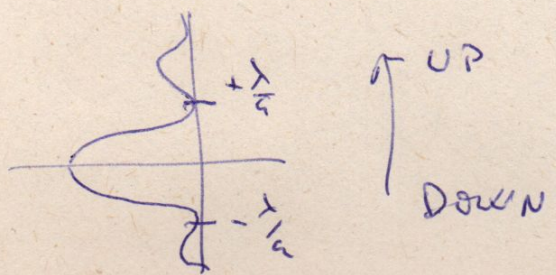
$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$$

$$P_y \approx P_x \cdot \frac{\lambda}{a}$$

(Corresponde a la zona de seguridad)

$$\lambda = \frac{h}{|p|}$$

$$\langle P_y \rangle = 0$$



MAYORITARIAMENTE (~85%)

los e⁻s en promedio van hacia arriba (UP) o DOWN

$$\left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array} P_x \cdot \frac{\lambda}{a} \right) \begin{array}{l} \text{UP} \\ \text{DOWN} \end{array}$$

Lo expresamos como la

$$\Delta P_y \approx P_x \frac{\lambda}{a}$$

NOTA:

La incertidumbre (o rango dentro del cual P_y de los e^- s debe ser MAYOR que $|\frac{\lambda}{a}|$)

$$\Rightarrow \Delta P_y \approx P_x \frac{\lambda}{a}$$

$$\Delta p_y \geq p_x \cdot \frac{h}{|\vec{p}|} \cdot \frac{1}{a} \quad (*)$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = |p_x| \sqrt{1 + \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2}$$

$$|\vec{p}| \approx p_x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^4 + \dots \right]$$

pero $\frac{p_y}{p_x} \approx \tan \theta, \sim \sin \theta, \sim \theta,$

si mantenemos a 1er orden en $\theta,$

$$\Rightarrow |\vec{p}| \sim p_x$$

Luego de (*)

$$\Delta p_y \geq p_x \frac{h}{p_x} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \Delta p_y \cdot a \geq h$$

~~Calculamos~~
resumimos
los cálculos
de la pág. 1356

INTERPRETACIÓN del Principio de
INCERTIDUMBRE.

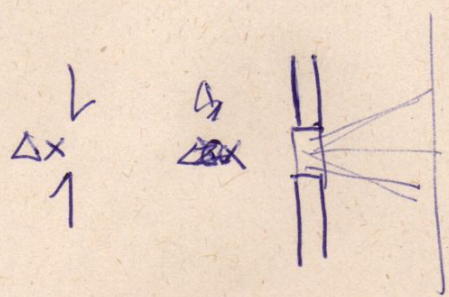
El cálculo anterior sugiere

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar \quad (\hbar \rightarrow \hbar)$$

PERO LO LEVANTAMOS a UN PRINCIPIO de la NATURALEZA

También se puede SUGERIR, USANDO las ondas, a

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$



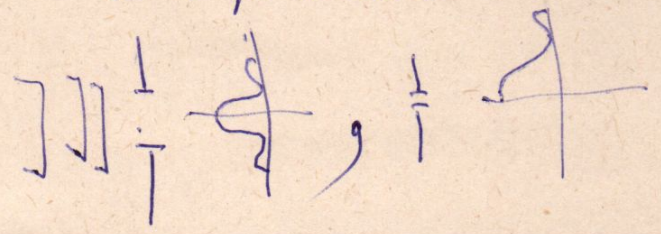
Δx indica el rango de valores entre los cuales pudo haber emergido antes de impactar la pantalla

si Δx disminuye, $\Delta p_y \uparrow$ (aumenta)

Esto está en concordia con el método de las ondas

si $\Delta x \downarrow \Rightarrow \lambda > \Delta x \Rightarrow$ el espectro

se agranda



2 Ejemplos

→ radio del átomo de Bohr

→ Una partícula dentro de una caja.

radio de Bohr

$$p_r \cdot r \sim \hbar$$

$$\langle p_r \rangle = 0$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{(p_x - \langle p_x \rangle)^2}{N=1}}$$

$$\Delta p \sim p_r$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + V(e^-)$$

$$V(e^-) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar/p_r}$$

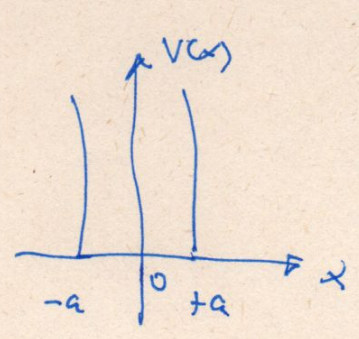
$$E = \frac{1}{2} \frac{p_r^3}{m} - \frac{e^2 p_r}{4\pi\epsilon_0 \hbar}$$

(En. Pot. negativa)
⇕
Estados ligados

$$\frac{dE}{dp_r} = 0 \quad (\text{mínimo de Energía})$$

$$p_0 = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar}, \quad \lambda_0 = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{me^2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = - \frac{e^4 m}{2\hbar^2} = -R_\infty!$$



$$\Rightarrow E_{min} \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

Brevemente: Ec. de Schrodinger

partículas ↔ ondas ⇒

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

$$\psi = A e^{i(kx - \omega t)}$$

onda plana
em 1-Dim.

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \omega \quad (\omega = 2\pi\nu)$$

$$p = \frac{\hbar}{\lambda}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \hbar k$$

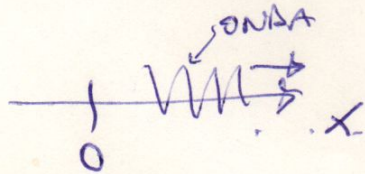
PROTOCOLO
 No s explicación

$$\psi(x,t) = A e^{i\left[\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right]}$$

↑
Amplitud
de onda

ψ : de alguna forma ~~se~~ (se concretará más adelante)
representa ~~o~~ información acerca
de la partícula.

Es una onda (del mismo tipo que
estudiamos en la ec. de ondas)
viajando hacia la derecha



Tomamos esta expresión de ψ y
queremos REPRODUCIR OBSERVABLES:
 \vec{p} : el momentum, E = la Energía

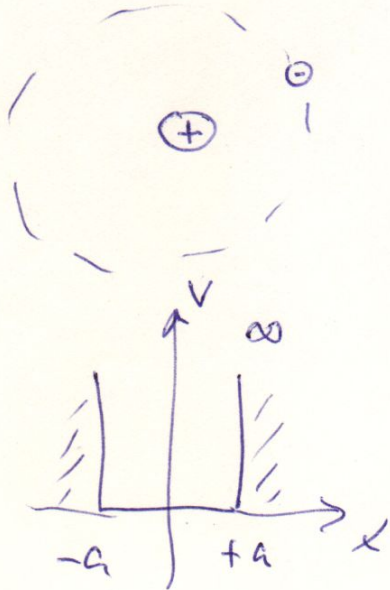
$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

ENERGIA

35

$V \equiv$ Energía Potencial que proviene - normalmente a través de un modelo físico - de la INTERACCIÓN de la partícula en su medio

Por ejemplo: $V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$



Interacción de un ~~electrón~~
 e^- con el núcleo atómico

$$V = 0 \quad |x| < a$$

$$V = \infty \quad x \geq a$$

partícula encerrada
en una caja.

La teoría ondulatoria debe reproducir la expresión de la energía

Schrodinger (1926) propuso lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) &= A_0 \frac{d}{dx} \left[e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \right] \\ &= i \frac{p}{\hbar} \left(A_0 e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \right) \\ &= i \frac{p}{\hbar} \psi(x,t) \end{aligned}$$

Definimos $\boxed{p_x \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$

p_x es un operador derivada $\frac{\partial}{\partial x}$ a x .

Por otra parte

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = A_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = + A_0 \left(\frac{-iE}{\hbar} \right) e^{i \left(\frac{p}{\hbar} x - \frac{E}{\hbar} t \right)}$$

$$= -i \frac{E}{\hbar} \psi(x, t)$$

$$\Rightarrow E \equiv i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

La energía es el operador derivada c/r a t.

Definimos:

$$V(x, t) \psi(x, t) = V(x, t) \psi(x, t)$$

El potencial solo multiplica la función de onda.

JUNTEMOS TODO

$$E = \frac{p^2}{2m} + V, \quad \boxed{\frac{p^2}{2m} + (E - V) = 0}$$

Reemplazamos por los operadores

$$\frac{p^2}{2m} \psi = \left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi$$

128

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) + V \psi(x,t) = 0$$

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x,t) \psi(x,t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

Ec. de Schrodinger. (1926)

Edad 39 años

PERO: Qué Diablos es $\psi(x,t)$

Max Born: Dio la interpretación
que permitió sacar #'s
comparar con los experimentos
(EXITOSAMENTE!!) en 1926
con 44 años.

Cual es?

$\psi(x,t) \equiv$ Amplitud de PROBABILIDAD

$$\psi \psi^* \equiv |\psi|^2$$

$ \psi ^2 dx \equiv$	Probabilidad de encontrar la partícula entre x y $(x+dx)$
----------------------	--

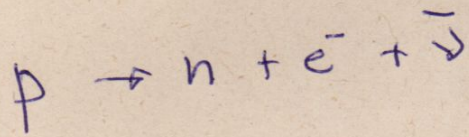
APORTE FUNDAMENTAL
 de BORN.

Con esto la teoría comienza a producir números. A parece la Teoría atómica, Molecular. se Resuelve exitosamente el átomo de Hidrógeno...

NO ES LA ÚLTIMA TEORÍA. Hay elementos que no están incluidos y por tanto no es capaz de

cuantificarlos:

- Producción de Partículas.
No hay destrucción o creación de partículas



- No relativista.