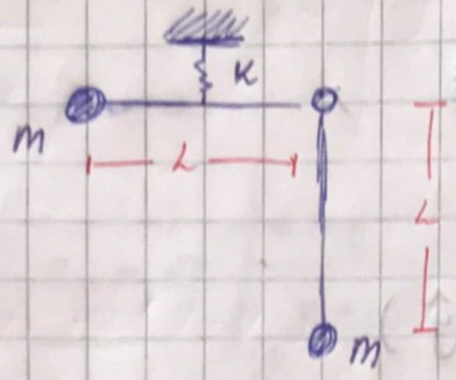


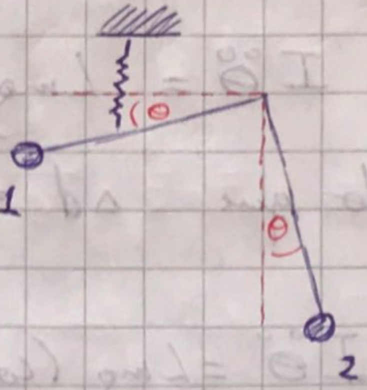
a) Sumatoria de Torque

$$0 = L m g - \frac{L}{2} K \Delta d$$

por lo tanto

$$\boxed{\Delta d = \frac{2mg}{K}}$$

b) Sumatoria de Torque



$$I \ddot{\theta} = \sum \tau$$

posición de la masa 1

$$\vec{r}_1 = -L\cos\theta\,\hat{x} - L\sin\theta\,\hat{y}$$

y la masa 2

$$\vec{r}_2 = L\sin\theta\,\hat{x} - L\cos\theta\,\hat{y}$$

El Torque que hace la masa 1 es

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (-mg\,\hat{y})$$
$$= L\,mg\cos\theta\,\hat{z} \quad ,$$

el de la masa 2 es

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (-mg\,\hat{y})$$
$$= -L\,mg\sin\theta\,\hat{z} \, ,$$

y el del resorte

$$\vec{\tau}_k = \left(-\frac{L}{2}\hat{x}\right) \times \left(k\left[\Delta d + \frac{L}{2}\theta\right]\hat{y}\right)$$
$$= -\frac{L}{2}k\left(\Delta d + \frac{L}{2}\theta\right)\hat{z} \quad .$$

Por lo tanto

$$I\ddot{\theta} = Lmg(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{L}{2}k\left(\Delta d + \frac{L}{2}\theta\right) \, ,$$

dado que $\Delta d = \frac{2mg}{k}$,

$$I\ddot{\theta} = Lmg(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{L}{2}k\left(\frac{2mg}{k} + \frac{L}{2}\theta\right) \, ,$$

para pequeñas oscilaciones, $\cos\theta \sim 1$, $\sin\theta \sim \theta$, y

$$I\ddot{\theta} = Lmg - Lmg\theta - Lmg - \left(\frac{L}{2}\right)^2 k\theta$$
$$= -\theta\left(Lmg + k\frac{L^2}{4}\right)$$

y sabemos que

$$I = 2mL^2 ,$$

de esta forma

$$\ddot{\theta} = -\theta\left(\frac{Lmg + kL^2/4}{2mL^2}\right) ,$$

y así

$$\omega = \sqrt{\frac{Lmg + kL^2/4}{2mL^2}}$$

Finalmente

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2mL^2}{Lmg + kL^2/4}}}$$

c) Si se suelta el resorte, el torque es

$$I\ddot{\theta} = Lmg(\cos\theta - \sin\theta) ,$$

por lo tanto

$$\ddot{\theta} = \frac{Lmg}{2mL^2}(\cos\theta - \sin\theta) ,$$

que es

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{2L}\left(\cos\theta - \sin\theta\right)}\ .$$

Por otra parte

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

la derivada se aplica acá

$$= \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

De esta forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{2L}\left(\cos\theta - \sin\theta\right),$$

y vamos a integrar

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\dot{\theta}^2(t)} d\dot{\theta}^2 = \frac{g}{2L}\int_{0}^{\theta} (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta \quad ,$$

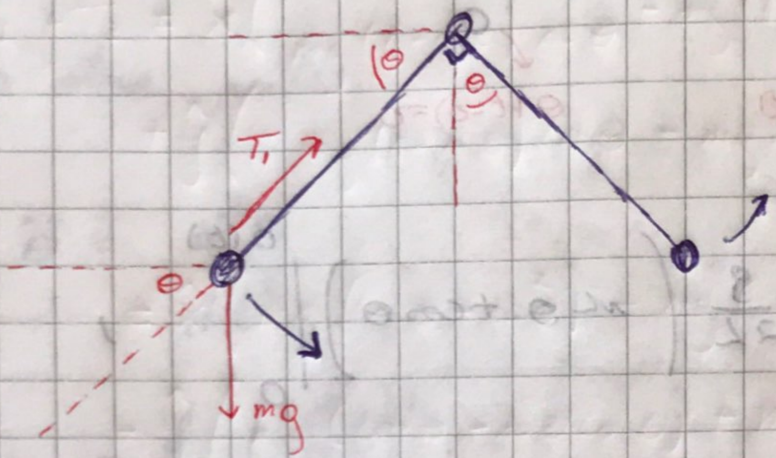
$\dot{\theta}^2(t=0)=0$ $\theta(t=0)=0$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{2L}\left(\sin\theta + \cos\theta\right)\Big|_{0}^{\theta(t)} \quad ,$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{L}\left(\sin\theta + \cos\theta - 1\right)} \; .$$

d)

Veamos en detalle la masa 1



Veamos la sumatoria de fuerzas radialmente en m_1

$$m a_r = T_1 - mg \sin\theta \quad ,$$

y $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, pero $\ddot{r} = 0$, por lo tanto $a_r = -r\dot{\theta}^2$, así que

$$T_1 = mg \sin\theta - \underbrace{m r \dot{\theta}^2}_{\text{CENTRIPETAL FORCE}} \quad , \qquad r = L$$

$$T_1 = mg\sin\theta - mL\left(\frac{g}{L}\left\{\sin\theta + \cos\theta - 1\right\}\right)$$

$$= mg\sin\theta - mg\left(\sin\theta + \cos\theta - 1\right)$$

$$= mg\left(1 - \cos\theta\right) \quad .$$

Scanned with CamScanner

Ahora veamos en la masa 2

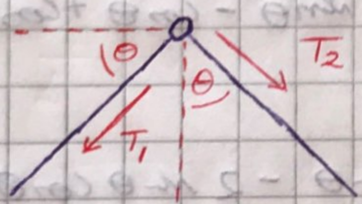
$$T_2 = mg\cos\theta - mL\dot{\theta}^2$$

$$= mg\cos\theta - mL\left(\frac{g}{L}\{\sin\theta + \cos\theta - 1\}\right)$$

$$= mg\cos\theta - mg(\sin\theta + \cos\theta - 1)$$

$$= mg(1 - \sin\theta).$$

Veamos el pivote



$$\vec{T}_1 = -T_1\cos\theta\,\hat{x} - T_1\sin\theta\,\hat{y},$$

$$\vec{T}_2 = T_2\sin\theta\,\hat{x} - T_2\cos\theta\,\hat{y},$$

así que la fuerza en el pivote es

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$= \hat{x}(T_2\sin\theta - T_1\cos\theta) + \hat{y}(-T_2\cos\theta - T_1\sin\theta).$$

Que es

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \hat{x}\left(mg(1-\sin\theta)\sin\theta - mg(1-\cos\theta)\cos\theta\right)$$
$$+\hat{y}\left(-mg(1-\sin\theta)\cos\theta - mg(1-\cos\theta)\sin\theta\right)$$

$$= \hat{x}\left(mg(\sin\theta-\sin^2\theta) - mg(\cos\theta-\cos^2\theta)\right)$$
$$-\hat{y}\left(mg(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta) + mg(\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)\right)$$

$$= mg\left[\hat{x}\left(\sin\theta - \sin\theta^2 - \cos\theta + \cos\theta^2\right)\right.$$
$$\left.-\hat{y}\left(\cos\theta + \sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right)\right].$$

La fuerza total sobre el pivote es

$$|\vec{T}_1 + \vec{T}_2| = mg\sqrt{\left(\sin\theta - \sin\theta^2 - \cos\theta + \cos\theta^2\right)^2 + \ldots}$$

$$\overline{\ldots + \left(\cos\theta + \sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right)^2}.$$

En $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $|\vec{T}_1 + \vec{T}_2|$ es máx en $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Hay maneras más sencillas de resolverlo, pero creo q' ésta es la más simple.