INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

**IN3702 - Investigación de Operaciones**
**Profesores:** F. Subiabre, D. Sauré
**Auxiliares:** P. Galaz, S. Grass, D. Iriarte, N. Toro, N. Trigo

# Pauta Control 1

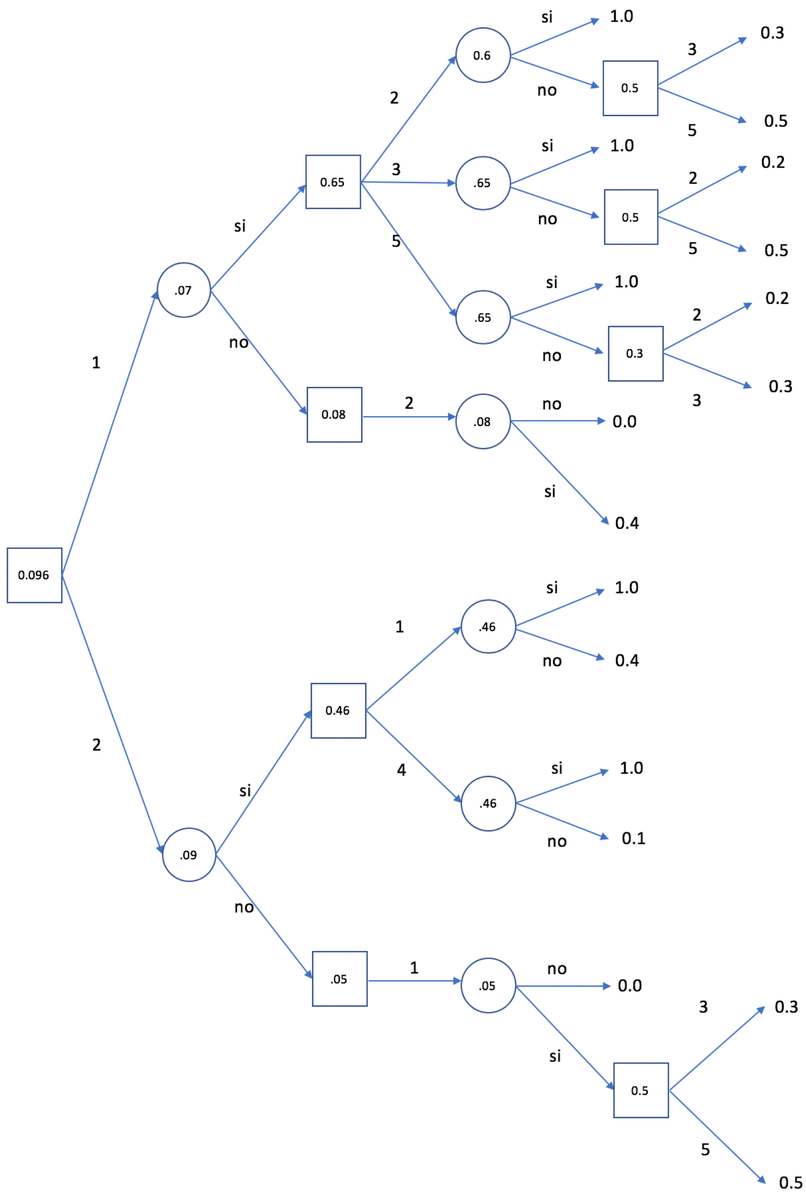
## Problema 1

Boris quiere ser elegido Primer Ministro de una nación europea, y para esto debe convencer a por lo menos $k$ otros miembros del parlamento de votar por él en la próxima sesión parlamentaria. Actualmente quedan $H$ horas hasta dicha sesión, tiempo durante el cuál Boris puede sostener reuniones individuales con los parlamentarios de su elección. Cada reunión dura exactamente una hora, y al cabo de la cual el parlamentario en cuestión compromete o no irrevocablemente su voto a Boris. En particular, Boris sabe que el parlamentario $i \in N$ compromete su voto (a favor) con probabilidad $p_i$, pero solo acepta reunirse si previo a la reunión todos los parlamentarios en un conjunto $S_i \subseteq N$ ya han comprometido su voto a Boris, donde $N$ representa el conjunto de todos los parlamentarios. Suponga que inicialmente Boris no se ha reunido con ningún parlamentario, que ningún parlamentario aceptará reunirse en más de una ocasión, y que ningún parlamentario que no se reuna con Boris votará por él.

Boris desea decidir tras cada reunión, con que parlamentario reunirse a continuación, de forma de maximizar la probabilidad de ser elegido Primer Ministro.

a) **(3.0 pts.)** Considere el caso $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \emptyset$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$,$S_5 = \{1\}$, $P_i = i/10$, $k = 2$, $H = 3$, y resuelva el problema utilizando árboles de decisión.

**Solución.**Ver el árbol en la siguiente página.




b) **(3.0 pts.)** Construya un modelo de programación dinámica para el problema general.

**Solución.**

- Períodos: cada una de las reuniones, $t \in \{1, \ldots, H\}$.
- Decisión: $i_t \in N$, parlamentario con el cual reunirse durante la reunión $t$.
- Estado: $(A_t, B_t)$ con

$$\begin{aligned} A_t &= \text{parlamentarios que comprometieron su voto a Boris previo a reunión } t \\ B_t &= \text{parlamentarios con los que Boris ya se reunio previo a reunión } t. \end{aligned}$$

- Aleatoriedad: decisión de apoyo del parlamentario $i_t$. Lo modelamos de la siguiente forma:
$$w_t = \begin{cases} i_t & \text{con prob. } p_{i_t} \\ \emptyset & \sim . \end{cases}$$
- Recurrencia:
$$A_{t+1} = A_t \cup \{w_t\}, \quad B_{t+1} = B_t \cup \{i_t\}.$$
- Bellman:
$$V_t(A_t, B_t) = \begin{cases} \max \{E[V_{t+1}(A_{t+1}, B_{t+1})] : i_t \in N \setminus B_t : S_{i_t} \subseteq A_t\} & t \leq H \\ 1\{|A_t| \geq k\} & t = H+1. \end{cases}$$

## Problema 2

Boris es el Primer Ministro de la nación de United Queendom, que recientemente ha votado salirse de su actual comunidad económica. Como apoyo a su campaña política para mantener su cargo, Boris quiere estudiar cómo evolucionará el valor de la moneda nacional hasta la eventual salida definitiva (Borexit). Para ello ha contratado a destacados economistas de las Universidades de Camford y Oxbridge, quienes luego de un arduo estudio le han presentado el siguiente modelo:

- El valor de la moneda nacional es constante durante cada día, y dado por una variable aleatoria que se puede representar como un número entero.
- La valuación de la moneda sólo puede tomar valores entre 0 y un límite $N$ fijo.
- Entre un día y el siguiente, el valor de la moneda puede permanecer constante o aumentar/disminuir en una unidad, con variaciones independientes entre días distintos.
- Si el valor de la moneda en un día dado es $i$, entonces al día siguiente su valor puede:
  1. Permanecer en $i$, con probabilidad $1/2$.
  2. Disminuir a $i-1$, con probabilidad $\frac{1}{2} \cdot \frac{i}{N}$
  3. Aumentar a $i+1$, con probabilidad $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{i}{N}\right)$

a) **(1.5 pts.)** Escriba este modelo como como una cadena de Markov a tiempo discreto, explique por qué es homogénea y dibuje el grafo asociado.

   **Solución.** Los estados corresponden a los posibles valores de la moneda, i.e. $X_n \in \{0, \ldots, N\}$, $n \geq 0$. La condición inicial no es conocida. La matriz de transición $P$ es tal que
$$P_{i,j} = \begin{cases} 1/2 & j = i \\ 1/2 \; i/N & j = i-1,\, i > 0 \\ 1/2 \; (1 - i/N) & j = i+1,\, i < N \end{cases}$$
   La cadena es homogénea pues $P(X_{n+1} = i | X_n = j) = P_{ij}$ independiente de $n$, i.e. las probabilidades de transición son homogéneas en el tiempo y no dependen del periodo.

Boris quiere conocer la distribución de probabilidad del valor de la moneda al momento del Borexit. Sin embargo, la situación política es tal que hace vaticinar que este evento se retrasará mucho, tanto así que se puede pensar que ocurrirá en un tiempo prácticamente *infinitamente lejano.*

b) **(1.5 pts.)** Justifique la existencia de un vector estacionario de probabilidades $\pi = (\pi_i)_{0\leq i\leq N}$, donde para cada $i$, $\pi_i$ representa la probabilidad de que la moneda valga $i$ en el largo plazo.

**Solución.** Notamos que todos los estados están comunicados entre si (única clase), el número de estados es finito (la clase es recurrente), y existe siempre la probabilidad de transicionar desde el estado $i$ a sí mismo (cada estado es aperíodico, y entonces la clase es aperíodica). Esto garantiza la existencia de un vector de probabilidades estacionarias.

c) **(1.5 pt.)** Justifique que $\pi$ debe ser simétrico, es decir,

$$\pi_i = \pi_{N-i} \quad \forall\ 0 \leq i \leq N.$$

Concluya que el valor esperado de la moneda nacional en el largo plazo es $N/2$.

**Solución.** Consideremos una cadena alternativa, donde el estado $i$ se convierte en el estado $N - i$, para todo $i \in \{0, \dots, N\}$. La matriz de transición $P'$ de esta nueva cadena es tal que

$$\begin{aligned}
P'_{i,j} = P_{N-i,N-j} \quad &= \begin{cases} 1/2 & N-j = N-i \\ 1/2\ (N-i)/N & N-j = N-i-1,\ N-i > 0 \\ 1/2\ (1-(N-i)/N) & N-j = N-i+1,\ N-i < N \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1/2 & j = i \\ 1/2\ (1-i/N) & j = i+1,\ N > i \\ 1/2\ i/N & j = i-1,\ i > 0 \end{cases} = P_{i,j}
\end{aligned}$$

Concluimos que $P = P'$, por lo tanto ambas cadenas tienen las mismas probabilidades estacionarias. Si llamamos $\pi'$ al vector de probabilidades de la segunda cadena, tenemos que $\pi' = \pi$. Sin embargo, el estado $i$ en la segunda cadena corresponde al estado $N - i$ de la primera, por lo que tenemos que

$$\pi_i = \pi'_i = \pi_{N-i}, \quad i \in \{0, \dots, N\}.$$

Usando lo anterior, tenemos que el valor esperado en el largo plazo $E$ es tal que

$$E = \sum_{i=0}^{N} i\ \pi_i = \sum_{i=0}^{N} i\ \pi_{N-i} = N - \left(\sum_{i=0}^{N}(N-i)\ \pi_{N-i}\right) = N - E.$$

De acá concluimos que $2E = N$, o $E = N/2$.

e) **(Bonus, 1.5 pts.)** Muestre que $\pi$ satisface la recurrencia

$$\pi_i = \left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\pi_{i-1} + \frac{i+1}{N}\pi_{i+1} \quad \forall\ 0 \leq i \leq N$$

(donde entendemos $\pi_{-1} = \pi_{N+1} = 0$). Concluya que necesariamente $\pi_i = \frac{1}{2^N}\binom{N}{i}$ para todo $0 \leq i \leq N$.

El sistema $\pi = \pi\ P$ para los estados $i = 0$ y $i = N$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1/2\pi_0 + 1/2\ 1/N \\ \pi_N &= 1/2\pi_N + 1/2\ 1/N \end{aligned}$$

Para los otros estados, toma la forma

$$\pi_i = 1/2\pi_i + 1/2\left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\pi_{i-1} + 1/2\frac{i+1}{N}\pi_{i+1} \quad \forall\ 0 \leq i \leq N$$

que, tras despejar $\pi_i$ corresponde a la formula entregada.

Para corroborar que $\pi_i = \frac{1}{2^N}\binom{N}{i}$ para todo $0 \leq i \leq N$ simplemente chequemos que cumpla la condición $\pi = \pi\ P$, y el resultado sigue de la unicidad de la probabilidad estacionaria. Entonces, reemplazando con la forma funcional, tenemos que el lado derecho es

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\pi_{i-1} + \frac{i+1}{N}\pi_{i+1} \\
&= \left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\frac{1}{2^N}\binom{N}{i-1} + \frac{i+1}{N}\frac{1}{2^N}\binom{N}{i+1} \\
&= \frac{1}{2^N}\left(\frac{N-i+1}{N}\frac{N!}{(i-1)!(N-i+1)!} + \frac{i+1}{N}\frac{N!}{(i+1)!(N-i-1)!}\right) \\
&= \frac{1}{2^N}\left(\frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-i)!} + \frac{(N-1)!}{i!(N-i-1)!}\right) \\
&= \frac{(N-1)!}{i!(N-i)!}\frac{1}{2^N}\left(i + (N-i)\right) \\
&= \frac{1}{2^N}\binom{N}{i} \\
&= \pi_i.
\end{aligned}$$