INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesores: F. Subiadre, D. Sauré
Auxiliares: P. Galaz, S. Grass, D. Iriarte, N. Toro, N. Trigo

Pauta Auxiliar #10

Preparación C2

Problema 1

Boris trabaja envolviendo regalos en una tienda en una estación de buses, donde observa que pasajeros llegan de acuedo a un proceso de Poisson de tasa λ. Cada vez que llega un pasajero, el chofer del siguiente bus por salir (siempre hay un bus listo para salir) decide partir con los pasajeros actualmente en el bus (incluyendo al que acaba de llegar) con probabilidad p.

a) Suponiendo que los buses tienen capacidad infinita, modele el número de pasajeros esperando salir como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Solución: Los estados son los enteros positivos, incluyendo el cero, que representan el número de personas esperando partir. La matriz Q que define el proceso es

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda\,(1-p) & j = i+1 \\ \lambda\, p & j = 0,\, i > 0 \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

Boris ahora decide concentrarse en su trabajo. Cuando está desocupado, conjuntos de paquetes llegan para ser envueltos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda' = \lambda(1-p)$. El número de paquetes incluidos en cada conjunto es una variable aleatoria X cuya distribución es tal que

$$P[X = i] = (1-p)^{i-1}p, \quad i \geq 1.$$

Boris demora un tiempo exponencial de media λ en envolver un paquete. Una vez envuelto un paquete, este es retirado inmediatamente de la tienda por un cliente.

b) Modele el número de paquetes esperando ser envueltos como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Solución: Los estados son los enteros positivos, incluyendo el cero, que representan el número de paquestes esperando ser envueltos. La matriz $Q*$ que define el proceso es

$$q^*_{i,j} = \begin{cases} \lambda & j = i-1,\, i > 0 \\ \lambda\,(1-p)^j p & i = 0,\, j > 0 \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

Boris, experto en cadenas de Markov, tras mucho tiempo ha notado que la fracción de tiempo π_i en que hay i personas esperando partir coincide con la fracción de tiempo en que a él le quedan i paquetes por empaquetar, cuyo valor es

$$\pi_i = p\,(1-p)^i.$$

c) Pruebe que Boris está en lo correcto. **Hint:** ¿Cómo se relacionan los procesos de las partes a) y b)?

Solución: Del hint, si probamos que

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q^*_{j,i} \quad \forall\, (i,j),$$

entonces concluimos que el proceso en a) es el reverso del de b), y más importante aun, que π es el vector de probabilidades estacionarias.

Para estados $(i,j) = (i, i+1)$, tenemos que

$$\pi_i\, q_{i,i+1} \;=\; p(1-p)^i\lambda(1-p) \;=\; p(1-p)^{i+1}\lambda \;=\; \pi_{i+1}\, q^*_{i+1,i}.$$

Para estados $(i,j) = (i,0)$ con $i > 0$, tenemos que

$$\pi_i\, q_{i,0} \;=\; (1-p)^i p\lambda\, p \;=\; \pi_0(1-p)^{i-1}p\lambda' = \;\pi_0\, q^*_{0,i}.$$

Concluimos que π es el vector de probabilidades estacionarias de ambos sistemas.

Problema 2

Pasajeros llegan a un paradero de buses de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ, mientras que los buses llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ. Cada bus tiene capacidad para llevar C personas, y partirá inmediatamente una vez que esté lleno. La subida de pasajeros a los buses es instantánea.

a) Suponga que el paradero se encuentra completamente vacío: no hay pasajeros ni buses. ¿Cuál es la probabilidad de que no queden más de n pasajeros en el paradero tras la salida del siguiente vehículo?

Solución: Podemos interpretar la cantidad de pasajeros que llegan antes que el siguiente bus como una variable aleatoria geométrica de parámetro $p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$. De esta manera, la probabilidad de que queden más de n pasajeros cuando salga el siguiente bus es $(1-p)^{C+n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}$, ya que los primeros C se subirán. Finalmente, la probabilidad buscada es

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}$$

Obs: Alternativamente, podemos definir P_j como la probabilidad de que queden j personas en el paradero tras la salida del siguiente bus. Si $j \geq 1$, P_j es igual a la probabilidad de que lleguen exactamente $C+j$ pasajeros antes de la llegada del siguiente bus, es decir

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+j} \frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \forall j \geq 1$$

Por otro lado, P_0 corresponde a la probabilidad de que a lo más lleguen C pasajeros antes que el siguiente bus:

$$P_0 = \sum_{i=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^i \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

Finalmente, la probabilidad pedida viene dada por

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} P_j &= \sum_{i=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^i \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+j} \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\
&= \frac{\mu}{\mu+\lambda} \sum_{j=0}^{C+n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^j \\
&= 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}
\end{aligned}
$$

b) Si en el paradero hay $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no ha llegado ningún bus, ¿cuánto es el tiempo esperado hasta que salga el siguiente bus?

Solución: En cualquier caso, primero se debe considerar el tiempo que demora en llegar el siguiente bus, cuya esperanza es $\frac{1}{\mu}$. Una vez que llega el bus, se debe considerar dos escenarios posibles: si ya había llegado al menos un pasajero, el bus sale inmediatamente. De lo contrario, se debe esperar un tiempo adicional de media $\frac{1}{\lambda}$. Por lo tanto, el tiempo esperado hasta que salga el siguiente bus es

$$
\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}
$$

c) Suponga que en $t=0$ había $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no había llegado ningún bus. Posteriormente, llegaron exactamente un pasajero y un bus antes del instante T. En esperanza, ¿en qué momento el bus abandonó la parada?

Solución: Sean $t_p \sim U[0,T]$ y $t_b \sim U[0,T]$ los instantes de llegada del pasajero y el bus, respectivamente. El bus salió en el momento en que ambos se encontraban en el paradero, es decir $\max\{t_p, t_b\}$. Por lo tanto, el valor buscado es

$$
\mathbb{E}(\max\{t_p, t_b\}) = \frac{2T}{3}
$$

d) Considere ahora que la tasa de llegada de pasajeros no es conocida, pero que a priori se estima que $\lambda \sim exp(\alpha)$. Si hay $C-1$ pasajeros y un bus en la parada, ¿cuál es la probabilidad que, a partir de este momento, el bus demore menos de t en salir?

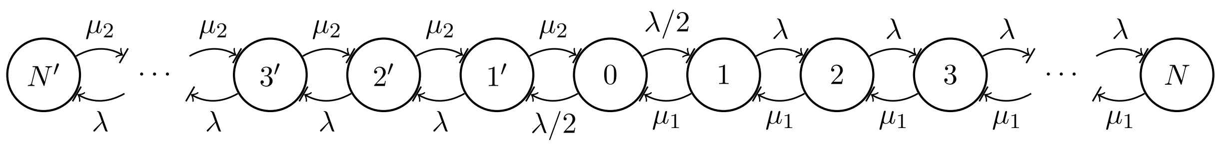
Solución: Sea T el tiempo hasta la llegada del siguiente pasajero, que es cuando saldrá el bus.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T<t) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T<t|\lambda=x) f_\lambda(x)dx \\
&= \int_0^\infty (1-e^{-xt})\alpha e^{-\alpha x}dx \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx - \int_0^\infty \alpha e^{-x(t+\alpha)}dx \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx - \frac{\alpha}{t+\alpha}\int_0^\infty (t+\alpha)e^{-x(t+\alpha)}dx \\
&= 1 - \frac{\alpha}{t+\alpha} \\
&= \frac{t}{t+\alpha}
\end{aligned}
$$

Problema 3 - Propuesto

Un par de amigos atienden una tienda de abarrotes mientras ven futbol. Cada vez que ingresa un cliente a la tienda cuando esta se encuentra vacía, los amigos tiran una moneda para decidir quién se acerca a atender a los clientes. El amigo a cargo de la atención no regresa a ver el partido sino hasta que la tienda nuevamente se desocupa de clientes. Los clientes por su lado ingresan de acuerdo a un proceso de poisson de tasa λ. Cada amigo atiende a los clientes a su propio ritmo; mientras un amigo demora un tiempo exponencial de tasa μ_1 en atender a un cliente, el otro demora un tiempo exponencial de tasa μ_2. Adicionalmente, la tienda tiene espacio para tan solo N clientes. Los clientes no ingresan si la tienda esta llena.

(a) La cadena que modela el problema es:



(b) Para encontrar las probabilidades estacionarias, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu_1 + \pi_{1'}\mu_2 \\
\pi_1(\lambda+\mu_1) &= \pi_0\frac{\lambda}{2} + \pi_2\mu_1 \\
\pi_{i-1}(\lambda+\mu_1) &= \pi_{i-2}\lambda + \pi_i\mu_1 \qquad \forall i \in \{3,\dots,N\} \\
\pi_{1'}(\lambda+\mu_2) &= \pi_0\frac{\lambda}{2} + \pi_{2'}\mu_2 \\
\pi_{k-1}(\lambda+\mu_2) &= \pi_{k-2}\lambda + \pi_k\mu_2 \qquad \forall k \in \{3',\dots,N'\} \\
\pi_0 + \sum_{i=1}^{N}\pi_i + \sum_{k=1'}^{N'}\pi_k &= 1 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

<u>Obs:</u> Para resolver el sistema se puede tomar el estado $\pi_{N'}$ como referencia y escribir las probabilidades estacionarias en función es este. Al ser un proceso de nacimiento y muerte, también se podrían haber planteado las expresiones directamente. Todos estos métodos son correctos.

Al resolverlo, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda}{\mu_1}\Big)^i\pi_0 \qquad \forall i \in \{1,\dots,N\} \qquad (2) \\
\pi_k &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda}{\mu_2}\Big)^k\pi_0 \qquad \forall k \in \{1',\dots,N'\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Utilizamos (2) y (3) en (1) y recordando que $\sum_{i=1}^{N}\rho^i = \frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho}$, despejamos el valor de π_0:

$$
\pi_0 = \Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{\lambda}{\mu_1} - \big(\frac{\lambda}{\mu_1}\big)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu_1}}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{\lambda}{\mu_2} - \big(\frac{\lambda}{\mu_2}\big)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu_2}}\Big)\Big]^{-1}
$$

(c) La proporción del tiempo que ambos amigos se encuentran viendo futbol juntos es π_0.

λ_{ef} representa el nº de clientes por unidad de tiempo que efectivamente ingresan a la tienda. Luego, sea λ_{NI} el nº de clientes por unidad de tiempo que no ingresan a la tienda:

$$\lambda_{NI} = \lambda - \lambda_{ef}$$

Por otro lado $\lambda_{ef} = \lambda(1 - (\pi_N + \pi_{N'}))$. Por lo tanto:

$$\lambda_{NI} = \lambda(\pi_N + \pi_{N'})$$

(d) La nueva cadena viene dado por: