MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 9 de agosto de 2019.

Auxiliar 1: Subsucesiones y continuidad

RESUMEN SEMANA 1

Definición 1 (Subsucesión)**.** Sea (s_n) una sucesión. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Llamaremos **subsucesión** de s_n generada por f, a la sucesión (u_n) definida por:

$$u_n = s_{f(n)}$$

Teorema 1 (Caracterización de convergencia)**.** *Sea (s_n) una sucesión y $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$s_n \to \ell \iff s_{f(n)} \to \ell, \forall s_{f(n)} \text{ subsucesión de } (s_n)$$

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en el punto $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \implies f(x_n) \to f(\overline{x})$$

Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas en un punto)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones son continuas en $\overline{x}$:*

1. $f + g$
2. $f - g$
3. λf, $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $f \cdot g$
5. $\frac{f}{g}$, *cuando* $g(\overline{x}) \neq 0$.

Teorema 4 (Composición de continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. si f es continua en $\overline{x} \in A$ y g es continua en $f(\overline{x}) \in B$, entonces $g \circ f$ es continua en $\overline{x}$.*

Teorema 5. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ ssi se cumple que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$,*

$$|x - \overline{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\overline{x})| \leq \epsilon$$

Definición 3. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

P1.-

i) Demuestre que la sucesión $a_n = cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ no converge.

ii) Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que las subsucesiones s_{2n}, s_{2n+1} y s_{3n} convergen. Demuestre que s_n converge.

iii) **(Propuesto)** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no acotada. Demuestre que existe una subsucesión a_{n_k} tal que $|a_{n_k}| \to \infty$.

P2.-

i) Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x$ es continua en el punto $\overline{x} = -1$ usando la caracterización $\epsilon - \delta$.

ii) Una función f se dice que es Lipschitz, si cumple que

$$\exists L > 0, \forall x, y \in Dom(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que toda función Lipschitz es continua.

P3.-

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es constante.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f = \left\{ \begin{array}{c|l} (x-\beta)^4 & \text{x<0} \\ \alpha & \text{x=0} \\ \frac{sen(2x)}{ln(x+1)} & \text{x>0} \end{array} \right.$$

Argumente por qué f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y determine los valores de α y β para que la función sea continua en $x = 0$.

P4.- (Propuesto) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tal que f es una función continua en $a \in \mathbb{R}$ y g cumple que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = a$. Demuestre que $\lim\limits_{x \to b} f(g(x)) = f(a)$.

Indicación: Recuerde que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \iff \forall (s_n)_n$ tal que $s_n \to \alpha$, $f(s_n) \to \beta$.