MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 15 de agosto de 2019.

Auxiliar 2: TVI y continuidad uniforme

RESUMEN SEMANA 2

Teorema 1 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Teorema 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.*

Teorema 3 (TVI). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces $\forall e \in (c, d), \exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

Teorema 4 (Weierstrass). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.*

Teorema 5. *Sea I un intervalo y $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona. Entonces $J = f(I)$ es una intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ e continua*

Definición 1. La función $f : A\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon$ tal que

$$(\forall x, y \in A), |x - y| \leq \delta_\epsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Obs: La notación δ_ϵ es solo para indicar que el delta debe depender solo del epsilon que se tome.

Teorema 6. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\overline{x} \in A$.*

P1.- Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, entonces para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, existe una subsucesión $(x_{f(n)})$ tal que $g(x_{f(n)})$ converge.

Definición 2. Dada una función f decimos que un elemento $\overline{x} \in Dom(f)$ es un **punto fijo** de la función si cumple que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

P2.- Considere la familia de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por $f_n(x) = cos^n(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

1. Demuestre que f_n tiene al menos un punto fijo,$\forall n \in \mathbb{N}$.
2. **(Propuesto)** Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que x_n es punto fijo de $f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene al menos una subsucesión convergente.

P3.-

1. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua si la definimos en el dominio $[0, 1]$.
2. **(Propuesto)** Demuestre que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua si consideramos su dominio como todo $\mathbb{R}$.
3. Demuestre que la función $f(x) = ln(x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

P4.- Demuestre que la ecuación $tan(x) = cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

P5.- Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función estrictamente creciente y epiyectiva. Demuestre que f es continua en $(0, 1)$.