Apuntes Auxiliar 5

P2) (a) Si $f(x_0) = -1 \Rightarrow f'(2) = -1 \Rightarrow \dfrac{2a+b}{(2-1)(2-4)} = -1$

$$\Rightarrow 2a+b = 2 \quad (*)$$

Luego, como $x_0 = 2$ es punto de inflexión, entonces

$f''(2) = 0$ Así,

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{a(x-1)(x-4) - (ax+b)((x-4)+(x-1))}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$$= \frac{a(x-1)(x-4) - (ax+b)(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

Luego, $f''(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(2-1)(2-4) - (2a+b)(4-5)}{(2-1)^2(2-4)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow -2a + 2a + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b=0}$$ Usando esto en $(*)$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Luego, $f'(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)} = 0$

(b) De la parte anterior, $f'(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$

	$-\infty$ 0	0 1	1 4	4 $+\infty$
x	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
$\frac{x}{(x-1)(x-4)}$	-	+	-	+

$\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente en $\Rightarrow (0,1) \cup (4,+\infty)$

y $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,0) \cup (1,4)$

PARA ANALIZAR CONVEXIDADES, hay que estudiar $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{(x-1)(x-4) - x(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

; Luego, como $(x-1)^2(x-4)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$

el signo de $f''(x)$ depende del signo de $x(x-1)(x-4) - x(2x-5)$ y

$$(x-1)(x-4) - x(2x-5) = x^2 - 5x + 4 - 2x^2 + 5x$$
$$= -x^2 + 4$$

cuyos ceros son $x_0 = 2$ y $x_0 = -2$ y además $-x^2+4$ es cóncava

ya que $(4-x^2)'' = -2 < 0$.

$\Rightarrow -x^2+4 > 0$ si $x \in (-2,2)$

$-x^2+4 < 0$ si $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

$\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ en $(-2,1) \cup (1,2)$

$f''(x) < 0$ en $(-\infty,-2) \cup (2,4) \cup (4,+\infty)$

Como $f'(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $f''(0) = \dfrac{4}{16} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ solo tiene un mínimo local en $x=0$.

(a) El desarrollo de orden 2 está dado por (entorno de 0)

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} + o((x-0)^3)$$

Luego, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = \frac{1}{4}$, por lo tanto

$$f(x) = 2 + 0 \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!}(x-0)^2 + o(x^3)$$

$$= 2 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3) \;//$$

P2) Por teorema de Taylor, sabemos que dado $x \in [x_0-1, x_0+1]$, $n \in \mathbb{N}$
$\exists \xi \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0))$ tq

$$f(x) = T_f^n(x-x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ luego}$$

$$f(x) - T_f^n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \Big/ \text{ sacando módulo}$$

$$|f(x) - T_f^n(x-x_0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \underbrace{|(x-x_0)|^{n+1}}_{\leq 1 \text{ ya que } x \in [x_0-1, x_0+1]}$$

$$\leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \quad \Big/ |f^{(n+1)}(\xi)| \leq L \text{ por enunciado}$$

$$\leq \frac{L}{(n+1)!}$$, luego tomando límite cuando $n \to \infty$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x-x_0)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

$\therefore$ Por sandwich, $\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x-x_0)| = 0 \quad \forall x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$

$\boxed{P4}$ PDQ: $\exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), (h(x) - h(0)) \cdot x < 0$

Como $h'(0) = -1$ y $h'(x)$ es continuo (ya que h es de clase C^1). Entonces $h'(x)$ es continuo en $x = 0$ y así:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x - 0| \leq \delta \Rightarrow |h'(0) - h'(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x| \leq \delta \Rightarrow |-1 - h'(x)| \leq \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ tq $|x| \leq \delta \Rightarrow |-1 - h'(x)| \leq 1$

$$\Rightarrow h'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \quad (1)$$

Luego, tomando $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, por TVM, $\exists \xi \in (\min(0,x), \max(0,x))$

tq $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = f'(\xi) \leq 0$, ya que ξ está en el intervalo entre 0 y x y $|x| \leq \delta$

$\Rightarrow |\xi| \leq \delta$ y por (1)

$h'(\xi) \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{h(x) - h(0)}{x} \leq 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

Finalmente, notando que $(h(x) - h(0)) \cdot x = \dfrac{(h(x) - h(0))}{x} x^2$

$$\Rightarrow (h(x) - h(0)) \cdot x = \underbrace{\frac{(h(x) - h(0))}{x}}_{\leq 0} \cdot \underbrace{x^2}_{\geq 0} \leq 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \ //$$

Scanned by CamScanner