MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 5 de septiembre de 2019.

Auxiliar 5

P1. [Método de Newton]

Dada una ecuación, $f(x) = 0$, con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función deriable tal que $f(a)f(b) < 0$,entonces teóricamente, por TVI ya sabemos que exsite un valor x^* tal que $f(x^*) = 0$. Ahora, sabemos que el punto que resuelve $f(x) = 0$ existe, pero, ¿Se puede obtener algoritmicamente? Es decir, ¿Podemos generar un algoritmo (En Python, Matlab,etc) tal que le entreguemos la ecuación y nos entregue el punto x^* que la satisfaga? La respuesta es si, pero con algunos contras, como tiempos de ejecución muy altos, inestabilidad si la función no es lo suficientemente suave, dependencia del punto de partida, etc.

El Método de Newton propone un algoritmo para encontrar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$ usando herramientas del cálculo diferencial. En específico, si sabemos que hay un punto x_0 cercano al punto x^*, es decir, $f(x_0) \approx 0$, entonces haciendo expansión de Taylor de 1er orden en torno a x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Igualando a 0 la expresión (1) se obtiene un nuevo punto $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ siempre que $f'(x_0) \neq 0$. Así sucesivamente se va obteniendo puntos x_n dados por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Que se puede demostrar, converge al punto esperado x^*.

P2. Una función $f : \mathbb{R}\{1,4\} \to \mathbb{R}$ es tal que $f'(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$.

a) Sabiendo que f tiene una inflexión en $x_0 = 2$ y que $f'(x_0) = -1$, calcule los valores de las constantes a y b.

b) Determine los signos de f' y f'' y uselo para concluir los crecimientos y convexidades de la función f.

c) Determine si existen mínimos o máximos.

d) **(Propuesto)** Bosqueje la función

e) Sabiendo que $f(0) = 2$, escriba el desarrollo de Taylor de orden 3 de f entorno a $x_0 = 0$.

P3. Sea f una función infinitamente derivable tal que en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$$

Donde T_f^n denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0.

P4. **(Propuesto)** Sea una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que satisface $h'(0) = -1$. Demuestre que $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x \in (-\delta, \delta)\{0\}, ((h(x) - h(0)) \cdot x < 0.$$

P5. **(Propuesto)** A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x + a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$$

RESUMEN SEMANA 4

Teorema 1. *Si $\overline{x} \in (a,b)$ es una mínimo o máximo local de una función derivable $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(c\overline{x}) = 0$.*

Teorema 2 (TVM)**.** *Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(\overline{x} = \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corolario 1. *En específico, si $g(x) = x$, entonces bajo las mismas hipótesis anteriores*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Teorema 3 (l'Hópital)**.** *Sean $f,g:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que*

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \lim_{x\to\overline{x}} g(x) = L$$

Con $L = 0$ o $L = \infty$. Si además $g(\overline{x}) \neq 0$ para too $x \in (a,b)$. Entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último bien definido.

Teorema 4. *Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$y derivable en (a,b). si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Definición 1 (Convexidad)**.** Una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si, $\forall x < z < y$,

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right](z-x)$$

Otra caracterización apañadora es

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), , y \in (a,b), \lambda \in (0,1)$$

Teorema 5. *Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ ssi f' es creciente en (a,b).*

Teorema 6. *Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$, y sea*

$$t_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + ... + \frac{f^{[k]}(\overline{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x-\overline{x}) + o((x-\overline{x})^k)$$

Proposición 1. *Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$, con $f'(\overline{x}) = ... = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\overline{x}) \neq 0, k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

(a) Si k es par y $f^{[k]} > 0$, $\overline{x}$ es un mínimo local.

(b) Si k es par y $f^{[k]} < 0$, $\overline{x}$ es un mínimo local.

(c) Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión.

Teorema 7. *Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, (k+1)-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces para todo $x > \overline{x}$ (resp. $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x},x)$ (resp. $\xi \in (x,\overline{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x-\overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x-\overline{x})^{k+1}$$

P1.-

P2.-

P3.-

P4.-

P5.-