MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 6 de diciembre de 2019.

Sesión de aprendizaje: Integrales impropias

RESUMEN SEMANA 11

Definición 1 (Integral impropia, 1ra especie)**.** Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a,\infty)$ si se cumple que:

(i) $\forall x \in (a,\infty)$, f es integrable en $[a,x]$.

(ii) Existe el límite definido por

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

Definición 2 (I. impropia, 2da especie)**.** Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a,b)$ ssi:

(i) $\forall x \in (a,b)$, f es integrable en $[a,x]$.

(ii) Existe el siguiente límite

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$$

Definición 3 (3ra especie)**.** Integrales impropias de 3ra especie se obtienen combiando integrales impropias de primera y segunda especie. Para eso hay que divir el dominio entre aquellos intervalos acotados pero la función no lo es, y donde la función es acotada pero el dominio si lo es.

Teorema 1 (Criterio de comparación)**.** *Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ tales que*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Entonces se cumple que si $\int_a^\infty g$ converge, entonces también $\int_a^\infty f$ converge. Análogamente, si $\int_a^\infty f$ diverge, también lo hace $\int_a^\infty g$

Teorema 2 (Cuociente de funciones)**.** *Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ y no negativas en $[b,\infty)$ con $b \geq a$ tales que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces $\int_a^\infty f$ converge $\iff$ $\int_a^\infty g$ converge

Definición 4 (Convergencia absoluta)**.** Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^\infty f$ es absolutamente convergente si $\int_a^\infty |f|$ converge.

Teorema 3. *Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, se tiene que $\int_a^\infty f$ converge absolutamente $\implies$ $\int_a^\infty f$ converge.*

P0.- (Ejemplo bacan) Demuestre que $\lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^u \frac{1+x}{1+x^2}dx = \pi$ y que $\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}dx$ diverge.

P1.- (Integrales impropias)

i) Aplicando la definición de integral impropia calcule:

$$\int_{-\infty}^{ln(2)} \frac{dx}{e^x + 4e^{-x}}$$

ii) Analice la convergencia de la integral

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{sen(x)}dx$$

iii) Pruebe que las integrales $\int_1^2 \frac{dx}{x(ln(x))^2}$, $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen. Pruebe que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{xln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}dx$ converge y encuentre su valor.