Aux 1

P1 Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $A+B$

$A+B$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+6 & -3+(-15) & 0+3 \\ 1+4 & 4+1 & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & -18 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

b) $-3A$

$$-3A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot(-3) & (-3)\cdot 0 \\ (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot 4 & (-3)\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -3 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $2A - 3B$

$2A - 3B$

$$= 2\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cdot 6 & 3\cdot(-15) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}$$

↳ se puede 'dejar' el '−' afuera

Scanned by CamScanner

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & -45 & 9 \\ 12 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-18 & -6-(-45) & 0-9 \\ 2-12 & 8-3 & -2-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 39 & -9 \\ -10 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

**P2** sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) calcule $A^2, A^3, A^4$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$A^3 \overset{\text{def}}{=} A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Proponga un valor para $A^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y demuestre que, en efecto, es el resultado.

Proponemos

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Demostramos por inducción:

CB

$n=2$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\therefore$ cumple

así H.I $\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

pdq $\quad A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot n+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot n+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}///$$

c) Demuestre que $A^{n+m}=A^n\cdot A^m$ usando la parte b

$$A^n\cdot A^m=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+n\cdot 0 & 1\cdot m+n\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot m+1\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & m+n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A^{n+m}$$

//

Scanned by CamScanner

P3] Sean $A \in M_{mn}$, $B \in M_{nr}$, $C \in M_{rp}$ y $D \in M_{mn}$. Demuestre que:

a) $A(BC) = (AB)C$

definimos $E = BC \therefore E \in M_{np}$

así

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{r} b_{ik} \cdot c_{kj} \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1, \_, n \\ j = 1, \_, p \end{matrix}$$

y por ende

$A(BC) = AE$ así $AE \in M_{mp}$

$$(AE)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot e_{lj} \qquad \begin{matrix} i = 1, \_, m \\ j = 1, \_, p \end{matrix}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot \sum_{k=1}^{r} b_{lk} \cdot c_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{il} \cdot b_{lk} \cdot c_{kj}$$

Scanned by CamScanner

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \cdot \underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lk}}$$ $\rightarrow$ notamos que

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \, (AB)_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} \cdot c_{kj}$$

def. $(AB) \cdot C$

$$= ((AB) \cdot C)_{ij}$$

$\therefore \quad A(BC) = (AB)C$ //

b) $(A+D)B = AB + DB$

$E = A + D \therefore E \in M_{mn}$ y

$e_{ij} = a_{ij} + d_{ij}$

$\therefore (A+D)B = EB$

Scanned by CamScanner

$$(EB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + d_{ik}) b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + d_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik} b_{kj}$$

$$= (AB)_{ij} + (DB)_{ij}$$

$$\Rightarrow (A+D)B = AB + DB$$

$\boxed{P4}$ Sean $A, B \in M_{nn}$ matrices

a) si $A, B$ triangulares superiores entonces $A+B$ es triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

así $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & a_{22}+b_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots \\ & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$

$\therefore$ $A+B$ es triangular superior.

Otra forma

$$A = \begin{cases} a_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} b_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

así

$$A+B = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

$\therefore$ $A+B$ triangular superior //

Scanned by CamScanner

b) Si $A, B$ son invertibles demuestre que $AB$ es invertible con inversa

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Por unicidad del inverso basta probar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

Por otro lado por def. de inverso hay que probar $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB)$
$= I$

Pero en realidad basta probarlo para un lado. es decir

$AB = I \Rightarrow BA = I$ (lo veremos mas adelante con demostración)
(del curso)

así veamos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \overset{\text{asoc.}}{=} A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Scanned by CamScanner

$\therefore$ el inverso de $AB$ es $B^{-1} \cdot A^{-1}$ //

P5) sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

a) Si $A$ verifica $A^3 + 3A^2 + 2I = 0$ Pruebe entonces que $A$ es invertible y encuentre su inversa.

notamos que

$$A^3 + 3A^2 + 2I = 0$$

$$A^3 + 3A^2 = -2I$$

$$A(A^2 + 3A) = -2I$$

$$\frac{A(A^2 + 3A)}{-2} = I$$

$\therefore$ si definimos $C = \frac{A^2 + 3A}{-2}$ vemos que $AC = I$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^2 + 3A}{-2} \quad //$$

Scanned by CamScanner

b) Si existe $m \in \mathbb{N}$ tq $A^m = 0$ pdq $I_n - A$ es invertible con inversa $I_n + A + A^2 + \dots + A^{m-1}$ ($I_n$ es la identidad de las matrices $n \times n$)

así basta mostrar

$$(I_n - A) \cdot \sum_{i=0}^{m-1} A^i = I$$

$$(I_n - A) \cdot \sum_{i=0}^{m-1} A^i$$

$$= I_n \cdot \sum_{i=0}^{m-1} A^i - A \cdot \sum_{i=0}^{m-1} A^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} A^i - \sum_{i=0}^{m-1} A^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} A^i - \sum_{i=1}^{m} A^i$$

Scanned by CamScanner

$$= A^0 - A^m = I - 0 = I$$ //

así $\sum_{i=0}^{m-1} A^i$ es la inversa //

$\boxed{P_6}$ Sea la matriz de coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ resuelva la ecuación $Ax = 0$. Donde $x \in \mathbb{R}^3$

metodo 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{matriz}$$

$$\begin{pmatrix} x + y + z \\ ax + by + cz \end{pmatrix} = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$ax + by + cz = 0$$

Scanned by CamScanner

$$x = -y - z$$

$$ax + by + cz = 0$$

$$a(-y - z) + by + cz = 0$$

$$-ay - az + by + cz = 0$$

$$(b - a)y + (c - a)z = 0$$

$$(b - a)y = (a - c)z$$

$\underline{a = b}$

$$(a - c)z = 0$$

$\underline{a = c}$

$z, y$ cualquiera

$$x = -y - z$$

$\underline{a \neq c}$

$$z = 0$$

$$x = -y$$

$y$ cualquiera

Scanned by CamScanner

$a \neq b$

$$y = \frac{a-c}{b-a} z$$

$$x = -y - z$$

$$y = \frac{a-c}{b-a} z$$

$z$ cualquiera

metodo 2

Escalonar

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{array} \xrightarrow{f_2' = f_2 - a f_1 \; *} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \end{array}$$

* nueva fila 2 = fila 2 − a veces fila 1

asi $x + y + z = 0$

$(b-a)y + (c-a)z = 0$ y analisis anterior,

Scanned by CamScanner

P7) Se define la Función Traza $(T)$ como $T(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ donde

$C$ es una matriz de $n \times n$ y

$C = (c_{ij})$. Sean $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ y

$\lambda \in \mathbb{R}$

a) Probar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$

$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\therefore \; C = A+B \Rightarrow c_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$

así $T(A+B) = T(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= T(A) + T(B)$$

Scanned by CamScanner

b) probar que $T(\lambda A) = \lambda T(A)$

si $C = \lambda A$ $\quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$

así

$$T(\lambda A) = T(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda T(A)$$

c) Probar que $T(AB) = T(BA)$

$C = AB$ $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

$$T(AB) = T(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk}$$

con $d_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{ik}$ así si $D = BA$

Scanned by CamScanner

$$\sum_{k=1}^{m} d_{kk} = T(D) = T(BA)$$

$$T(AB) = T(BA)$$

d) Sea $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible.
Probar que

$$T(A) = T(PAP^{-1})$$

$$T(PAP^{-1}) \overset{\text{asoc.}}{=} T((PA)\cdot P^{-1})$$

$$= T(P^{-1}\cdot(PA)) \quad ; \text{parte } c$$

$$= T((P^{-1}P)\cdot A) \quad ; \text{asoc.}$$

$$= T(I\cdot A)$$

$$= T(A)$$

Scanned by CamScanner

e) Probar que $t(AA^t) \geq 0$

y que $t(AA^T) = 0 \iff A = 0$

$$T(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a^T_{ki} \right)}_{(AA^T)_{ii}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{ik}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

así como $a_{ik}^2 \geq 0$

$\Rightarrow t(AA^T) \geq 0$

Por otro lado

si $A = 0 \Rightarrow a_{ik} = 0 \ \forall i k$ así

$a_{ik}^2 = 0 \ \forall i k \therefore T(AA^T) = 0$

Scanned by CamScanner

si $T(\theta\theta^t)=0$ entonces tenemos

$$0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2 \quad [\text{suma de positivos}]$$

$\Rightarrow a_{ik}=0$ así $A=0$ //

$\boxed{P8}$ sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal en las variables $x_1, x_2, x_3$

$$x_1+2x_2+3x_3=1$$
$$2x_1+3x_2+4x_3=\beta$$
$$3x_1+4x_2+\alpha x_3=1$$

pasandolo a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Determine los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los cuales el sistema tiene

a) Una única solución

b) Ninguna solución

c) Infinitas soluciones

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \beta \\ 3 & 4 & \alpha & 1 \end{array}$$

$f_2' = f_2 - 2f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & -2 & \alpha-9 & -2 \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

$f_3' = f_3 - 2f_1$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & -2-2(\beta-2) \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & 2-2\beta \end{array}$$

↳ escalonada

asi

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$-x_2 - 2x_3 = \beta - 2$$

$$(\alpha - 5)x_3 = 2(1-\beta)$$

Scanned by CamScanner

$\underline{\alpha = 5}$

$0 = 2(1-\beta)$

así $\beta = 1$

$\therefore$ si $\alpha = 5$ y $\beta \neq 1$ <u>no</u> hay

solución

si $\alpha = 5$ y $\beta = 1$ <u>sí</u> hay

solución ~~y~~ a que

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$-x_2 - 2x_3 = -1$

así $x_2 = 1 - 2x_3$

$x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2$

$= 1 - 3x_3 - 2[1 - 2x_3] = -1 + x_3$

Scanned by CamScanner

y $x_3$ es cualquiera.

$\alpha \neq 5$, entonces

$$x_3 = \frac{2(1-\beta)}{\alpha-5}$$

$$x_2 = 2 - 2x_3 - \beta$$

$$= 2 - 2\left(\frac{2(1-\beta)}{\alpha-5}\right) - \beta$$

$$= 2 - \frac{4(1-\beta)}{\alpha-5} - \beta$$

$$x_1 + 2\left(2-\beta-\frac{4(1-\beta)}{\alpha-5}\right) + \frac{6(1-\beta)}{\alpha-5} = 1$$

Scanned by CamScanner

$$x_1 = 1 - \frac{6(1-\beta)}{\alpha-5} - 2\left(2-\beta - \frac{4(1-\beta)}{\alpha-5}\right)$$

Solución única

P9) Sea $A \in M_{mm}$. Identifique que representan las siguientes sumas y que condiciones deben cumplir m y n para que la sumatoria esté bien definida.

a) $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj}$

si $m = m$ notamos que

$$(A \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot a_{kj}$$

Scanned by CamScanner

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$

observamos que $a_{jk} = a^T_{kj}$

así $(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$

y $A \in M_{mn}$ $A^T \in M_{nm}$ por lo que está bien definido para cualquier $m$ y $n$

c) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}}_{(A^2)_{ij} \text{ por 'a'}} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

así que $n=m$ y $\begin{Bmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix} = I$

Scanned by CamScanner

$\therefore A^2 = I$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}}$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (A^2)_{ii} \rightarrow$ por "a" si $n = m$

$= T(A^2) \rightarrow$ definido en la P7 //