Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 2 Álgebra Lineal
14 de Agosto 2019

Pseudo Pauta Auxiliar #2: Sistemas de Ecuaciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

(a) Escriba el sistema anterior en forma matricial, es decir, de la forma $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.
R:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre x tal que $Ax = b$, con A y b encontrados en la parte anterior.

Utilizando las elementales $E_{12}(-4), E_{13}(-3), E_{23}(\frac{-5}{3})$, se llega al sistema aumentado $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix}$

Cuya solοción se encuentra iterando y está dada por $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = 3$.

P2. Considere el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & \alpha x_2 & & & - & \beta x_4 & = & 0 \\ & & \alpha x_2 & + & x_3 & + & \beta x_4 & = & \alpha \\ \beta x_1 & + & \alpha x_2 & + & \beta x_3 & & & = & \beta \\ \alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

donde x_1, x_2, x_3 y x_4 son las incógnitas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son los parámetros.
Determine los valores de α y β para que el sistema:

(a) Tenga infinitas soluciones

(b) No tenga soluciones

(c) Tenga una solución

R: Escribimos el sistema en forma matricial $(A|b)$, para ello recordamos que gracias a la definición del producto matricial es solo cosa de poner los coeficientes de cada ecuación

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & | & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Luego escalonamos el sistema:

$$(A|b) \xrightarrow{E_{13}(-\beta)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ 0 & \alpha(\beta+1) & \beta & \beta^2 & | & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ 0 & \alpha(\beta+1) & \beta & \beta^2 & | & \beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \beta\alpha & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-(\beta+1))} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & | & -\alpha(\beta+1)+\beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \beta\alpha & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & | & -\alpha(\beta+1)+\beta \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & | & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{34}(-(\beta-\alpha))} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & | & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & | & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & | & -\alpha(\beta+1)+\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta(\beta-\alpha) & | & -\alpha^2+(\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\alpha\beta) \end{pmatrix}$$

(a) Para que tenga infinitas soluciones la primera opción es que haya una fila de puros $0s$, como las primeras tres tienen un número esto no es posible en esas, por ende, basta revisar solo la cuarta. Veamos que ocurre si es que $-\beta(\beta-\alpha)=0$

- La primera opción es que $\beta = 0$, entonces $-\alpha^2+(\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\alpha\beta) = -\alpha^2 - \alpha\cdot -\alpha = 0$, esto es justamente lo deseado.
- La otra es que $\beta = \alpha$, entonces $-\alpha^2+(\alpha-\alpha)(\alpha-\alpha-\alpha^2) = -\alpha^2$. Por ende para tener infinitas soluciones, en este caso, necesitamos que $\beta = \alpha = 0$.

La otra opción para tener infinitas soluciones es que podamos eliminar una fila, debido a los $1s$ existentes las únicas que podrían llegar a cancelarse son las filas 2 y 3. Si suponemos que $\alpha = 0$, llegamos a que $a_{21} = 0 = a_{31}, a_{22} = 0 = a_{32}, a_{23} = 1 = -a_{33}$ y $a_{24} = \beta = -a_{34}$. Por ende solo necesitamos que $\alpha = 0 = -(-\alpha(b+1)+\beta) = \beta$, es decir volvemos al caso $\alpha = \beta = 0$. Por ende concluimos que hay infinitas soluciones si y solo sí $\beta = 0$ (y α libre), o bien, $\alpha = \beta$ (en cuyo caso ambos son 0).

(b) Del mismo análisis anterior sabemos que si $\alpha = \beta \neq 0$, la cuarta fila se vuelve incompatible. Por otro lado si $\alpha = 0 \neq \beta$, las filas 2 y 3 tampoco permiten solución.

(c) Por último concluimos que hay una solución caundo no se cumplen ninguno de los casos anteriores, esto es: $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

P3. Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo que para toda matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & d \end{pmatrix}.$$

Justifique su respuesta ya sea encontrando explícitamente M o por el contrario demostrando que no existe.

R: La respuesta es no, para demostrarlo reducir el problema a un sistema de ecuaciones y buscar matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ convenientes (no muy complicadas) que permitan calcular los coeficientes lo que lleve a una contradicción. Por ejemplo, si sabemos que

$$(a_1 - 1)a + a_2 c = 0 \ \forall a, c \in R,$$

tomando $a = 1$ y $c = 0$ concluimos que $a_1 = 1$, de la misma forma tomando $a = 0$ y $c = 1$, concluimos que $a_2 = 0$.

P4. **(a)** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

(i) A es invertible si y sólo si AA^t lo es.
R: $(\Rightarrow)$, recordar que si A es invertible entonces A^t también lo es y la conocemos.
$(\Leftarrow)$ Utilizar asociatividad convenientemente y recordar que basta encontrar inversa por un solo lado.

(ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$. Para el caso A invertible encuentre A y B.
R: Aplicar distributividad. Para el caso invertible aplicar A^{-1} convenientemente.

(b) Demuestre que si existe $k \geq 1$ tal que $A^k = I$, entonces A es invertible.
R: Analizar por separado $k = 1$, y luego utilizar asociatividad.

P5. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Se tiene interés en encontrar la temperatura en los puntos interiores de la placa. Considere el siguiente diagrama de la figura $N°1$

Se quieren encontrar aproximaciones para los puntos T_1 a T_4, o sea la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de los cuatro puntos que lo rodean, arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda. Usando esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones y su solución, considerando primero el punto T1, luego el punto T2 y así siguiendo. Rescriba las ecuaciones de manera que todas las variables queden de un lado de la ecuación. Por ejemplo

$$T_1 = \frac{100 + T_2 + T_3 + 50}{4} \rightarrow 4T_1 - T_2 - T_3 = 150$$

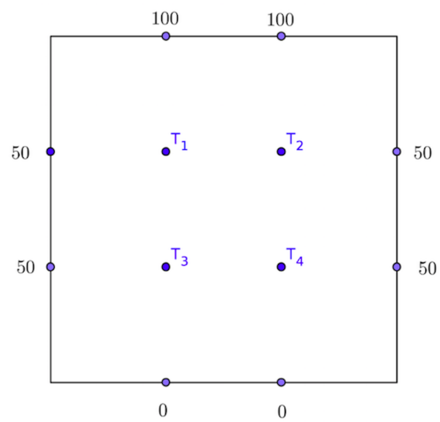

Figura 1: Figura de placa rectangular

R: Haciendo caso de las instrucciones llegar al sistema aumentado $(A|B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & | & 150 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & | & 150 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & | & 50 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & | & 50 \end{pmatrix}$,

luego utilizando las matrices elementales $E_{12}(\frac{1}{4}), E_{23}(\frac{1}{15}), E_{24}(\frac{4}{14}), E_{34}(\frac{4}{14})$, llegar a $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & | & 150 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{-1}{4} & -1 & | & \frac{750}{4} \\ 0 & 0 & \frac{224}{60} & \frac{-16}{15} & | & 100 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} & | & \frac{900}{7} \end{pmatrix}$,

finalmente iterando llegar a la solución $T_1 = \frac{125}{2}, T_2 = \frac{125}{2}, T_3 = \frac{75}{2}, T_4 = \frac{75}{2}$.