Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 2 Álgebra Lineal
21 de Agosto de 2019

Clase Auxiliar #3: Cálculo de Inversas

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

P2. Criptografía

El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de desencriptar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoríade números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño.

Se debe establecer una matriz M invertible, que sólo la conocen quienes trasmiten y quienes reciben los mensajes. En este caso, consideraremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el mensaje a encriptar es ”HOLA MUNDO”.

Se reemplaza cada letra por el el lugar que ocupa en el abecedario representando el espacio con 0. El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números

$$8, 16, 12, 1, 0, 13, 22, 14, 4, 16$$

que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 22 & 16 \\ 16 & 0 & 14 & 0 \\ 12 & 13 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Para deformar el mensaje se premultiplica por la matriz M, que es el código que conocen ambas partes, y se envía la sucesión de números obtenido.

Suponga que recibe la siguiente sucesión de números

$$18, 19, -12, 17, 18, -11, -5, -4, 23, -5, -2, 19, -3, -10, 29, 7, 9, 17, 20, 8, -12.$$

¿Cuál es el mensaje encriptado?

P3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & \alpha y & - & \alpha z & = & 0 \\ 4x & + & \alpha y & & & = & 0 \end{cases}$$

(a) Discutir, en función de α, cuando existen infinitas, ninguna, única solución.

(b) Resolverlo cuando sea compatible.

(c) Para el caso con infinitas soluciones, encontrar $p \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$, tales que la solución general del sistema sea de la forma pv. ¿Es única esta descomposición?

(d) Sabiendo que x_1 y x_2 son soluciones del sistema, ¿Qué puede decir de $\delta x_1 + x_2$, con $\delta \in \mathbb{R}$ cualquiera.

(e) Si el lado de la derecha del sistema fuese un $b \in R^3 \setminus \{0\}$, ¿Seguría cumpliendose lo de la parte anterior?, por lo tanto ¿Es posible encontrar una descomposición pv en ese caso?

P4. Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ no invertible tal que satisface que $B^3 = 0$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $M(\alpha) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por:

$$M(\alpha) = I + \alpha B + \tfrac{\alpha^2}{2} B^2$$

(a) Pruebe que:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ M(\alpha + \beta) = M(\alpha) \cdot M(\beta)$$

y deduzca que $M(\beta) \cdot M(\alpha) = M(\alpha) \cdot M(\beta)$.

(b) Pruebe que $M(\alpha)$ es invertible, y que $M(\alpha)^{-1} = M(-\alpha)$.