Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
12 de Septiembre de 2019

Pseudo Pauta Clase Auxiliar # 5: Generadores, Bases y Dimensión

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Sea E el s.e.v de $\mathbb{R}^4$ generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ Encuentre una base de E y su dimensión.

R:

$$3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0.$$

$$\therefore\ \text{una base es }\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\text{ y es de dimensión 2}$$

P2. Sea $h=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $W_h=\{M\in\mathbb{R}^{2,2}\ /\ Mh=0\}$.

(i) Demuestre que W_h es s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.
R: $0\in W_h\subseteq\mathbb{R}^{2,2}$. Además $(\alpha M_1+M_2)h=0$ (Distributividad).

(ii) Encuentre una base para W_h y calcule su dimensión.
R: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}h=0\Rightarrow a=-b\ \wedge\ c=-d$ Luego $W_h=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, y por lo tanto la dimensión es 2 (falta demostrar li).

(iii) Complete la base de W_h encontrada en la parte anterior hasta obtener una base de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.
R: $\mathbb{R}^{2,2}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, pues es un subespacio de la misma dimensión (falta demostrar li).

P3. En el siguiente problema $\mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ denota el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3. Considere $U=\{p\in\mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})\ /\ p(1)=p'(1)=0\}$.

(a) Encuentre una base de U y su dimensión.
R: Sea $p\in U$.

$$p(x)=a_3x^3+a_2^2+a_1x+a_0\Rightarrow p(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=0\Rightarrow a_0=-a_3-a_2-a_1$$
$$p'(x)=3a_2x^2+2a_2x+a_1\Rightarrow p'(1)=3a_3+2_a2+a_2=0\Rightarrow a_1=-3a_3-2a_2$$
$$\Rightarrow a_0=-a_3-a_2+3a_3+2a_2=2a_3+a_2$$
$$\Rightarrow p(x)=a_3x^2+a_2x^2+(-3a_3-2a_2)x+2a_3+a_2=a_3(x^3-3x+2)+a_2(x^2-2x+1).$$

Es decir todo polinomio en U, se puede escribir como combinación lineal de x^3-3x+2 y x^2-2x+1, ie $U=\langle\{x^3-3x+2,x^2-2x+1\}\rangle$. Además como uno de estos elementos es de grado 3 y el otro de grado 2, es directo que el conjunto es li y por lo tanto $\{x^3-3x+2,x^2-2x+1\}$ es una base de dimensión 2 (que corresponde a la cantidad de vectores).

(b) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in \mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R}) \ / \ p''(0) = 0\}$

(i) Encuentre una base de W y su dimensión.
R: Sea $p \in W$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
p'(x) &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_2 \\
p''(x) = 6a_3x + 2a_2 &\Rightarrow p''(0) = 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\
&\Rightarrow p(x) = a_3x^3 + a_1x + a_0
\end{aligned}
$$

Es decir, todo polinomio en H, se escribe como combinación lineal de los vectores x^3, x y 1, ie $H = \langle\{x^3, x, 1\}\rangle$. Además como todos son de grados distintos, es directo que el conjunto es li y por lo tanto $\{x^3, x, 1\}$ es una base de dimensión 3 (que corresponde a la cantidad de vectores).

(ii) Encuentre una base de $U \cap W$ y su dimensión.
R: Sea $p \in U \cap H$, entonces debe cumplir las reglas de ambos conjuntos, en particular estar en H hace que $a_2 = 0$. Luego, repitiendo exactamente el mismo procedimiento que en a), pero agregando que $a_2 = 0$, se llega a que $p(x) = a_3(x^3 - 3x + 2)$. Es decir, todo polinomio en $U \cap H$, se escribe como combinación lineal del vector $x^3 - 3x + 2$, ie $U \cap H = \langle\{x^3 - 3x + 1\}\rangle$. Como este contiene un solo vector (no nulo), es directo que $\{x^3 - 3x + 1\}$ es una base y su dimensión es 1.

(c) Extienda la base de U a una base de $\mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$.
R: Sabemos que $\mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R}) = \langle\{x^3, x^2, x, 1\}\rangle$, es decir es de dimensión 4, luego hay que agregar dos vectores a la base de U, que sean li entre ellos y con respecto a los que ya tenemos, pues este nuevo conjunto generará un subespacio F de $\mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ cuya dimensión también sería 4, y por lo tanto no queda otra que $F = \mathbb{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$. Como la base de U que ya se tenía tenía un polinomio de grado 3 y otro de grado 2, basta agregar dos de grados distintos y serán lí. Así, por ejemplo, una base que serviría sería $\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, x, 1\}$

P4. Considere los espacios vectoriales

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\},$$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n | x_2 = ... = x_n = 0\}$$

Considere $W = U + V$, ¿quién es W? ¿Es una suma directa?
R: $W = \mathbb{R}^n$ y si es directa. Pues sea $x \in R^n$, definiendo $y = (0, x_2, ..., x_n), z = (x_1, 0, ..., 0)$, se tiene que $x = y + z$, con $y \in U, z \in V$. Además si $x \in U \cap V$, el estar en U obliga a que la primera coordenada sea 0, y el estar en V obliga a que las otras también lo sean, así $x = 0$, y por lo tanto $\mathbb{R}^n = U \oplus V$