Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
25 de Septiembre de 2019

Clase Auxiliar - Guía # 6: Preparación C1

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: ~~Juan Pedro Ross~~ Natacha Astromujoff

A continuación viene un listado de problemas que abarca toda la materia del control 1. Claramente en clase auxiliar no se alcanzará a resolver todo, la idea es que para ese día hayan intentado de todo un poco para que tengan dudas concretas y con el auxiliar revisen las preguntas que sean más conflictivas.

P1. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se define la *traza* de A, denotada por $\operatorname{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Por otra parte se define la función $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$f(A) = \operatorname{tr}(AA^t)$$

Pruebe que:

(a) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(b) $f(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

donde 0 es la matriz nula de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

(c) $f(A) = \operatorname{tr}(A^t A)$.

(d) Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define:

$$W_\alpha = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) |\ tr(A) = \alpha\}$$

Pruebe que W_α es s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ si y solo si $\alpha = 0$.

P2. Se dice que $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

(a) Muestre que la única matriz de proyección invertible es la identidad.

(b) Pruebe que si P es de proyección, entonces $\forall k \in \mathbb{N},\ P^k = P$.

(c) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $(I_n - P)$ también lo es, donde $I_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es la matriz identidad. Concluya que $(I_n - P)^k = I_n - P,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

(d) Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Muestre que si $P_1 = P_1P_2$ y $P_2 = P_2P_1$, entonces son de proyección.

(e) Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = 0$ y $P(I_n - P)^2 = 0$

P3. Sean α, β reales. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & - & \alpha x_3 & & & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2\alpha x_4 & = & 2+\alpha \\ -x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right.$$

(a) Determine los valores α y β para los cuales el sistema tiene:

(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.
(c) No tiene soluciones.

(b) Para $\alpha = 1$, encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal, y con ella encuentre $p, q \in \mathbb{R}^4$ tales que la solución del sistema sea $x = p\beta + q$.

P4. Sea W un subespacio de V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Para $v \in V$ definimos el conjunto $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$, se llama *co-conjunto de W que contiene a v*. Es frecuente expresar este co-conjunto como $v + W$. Demuestre que

(a) $v + W = W$ si y solo si $v \in W$. Concluya que $v + W$ es un subespacio de V si y solo si $v \in W$

(b) $v_1 + W = v_2 + W$ si y solo si $v_1 - v_2 \in W$

P5. Sean U y W s.e.v's de un espacio vectorial V tal que $dim(V) = 3$, $dim(U) = dim(W) = 2$ y $U \neq V$. Pruebe que $dim(U \cap W) = 1$.

P6. Considere los siguientes s.e.v. de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ (polinomios de grado a lo más 4)

$$W_1 = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p \text{ tiene 1 como raíz } \},$$
$$W_2 = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p \text{ tiene a 2 como raíz}\}.$$

(a) Demuestre que efectivamente son sub espacios vectoriales.

(b) Encuentre bases de W_1 y W_2 y calcule sus dimensiones.

(c) Demuestre que $W_1 + W_2 = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. ¿Es suma directa?.