Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
25 de Septiembre de 2019

Pauta Clase Auxiliar - Guía # 6: Preparación C1

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: ~~Juan Pedro Ross~~ Natacha Astromujoff

P1. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se define la *traza* de A, denotada por $\text{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Por otra parte se define la función $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$f(A) = \text{tr}(AA^t)$$

Pruebe que:

(a) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

R: $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji} = \sum_{j=1}\sum_{i=1}^{n} B_{ji}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = tr(AB)$

(b) $f(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

donde 0 es la matriz nula de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

R: $f(A) = tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}(AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}A^t_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^2_{ij} \geq 0.$

Supongamos $f(A) = 0$, como es la suma de puras cosas positivas la única forma de que la suma sea 0 es que cada término es cero así $f(A) = 0 \Leftrightarrow A^2_{ij} = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow A_{ij} = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow A = 0.$

(c) $f(A) = \text{tr}(A^tA)$.

R: $f(A) = tr(AA^t) = tr(A^tA)$ esto por la parte i).

(d) Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define:

$$W_\alpha = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) |\ tr(A) = \alpha\}$$

Pruebe que W_α es s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ si y solo si $\alpha = 0$.

R: $(\Rightarrow)$, Si W_α es *sev* entonces $0 \in W_\alpha \Rightarrow \alpha = tr(0) = 0$. $(\Leftarrow)$, Como asumimos que $\alpha = 0$, entonces es claro que $0 \in W_\alpha$ y por lo tanto $W_\alpha \neq \emptyset$. Además por definición $W_\alpha \subseteq M_{nn}$, por propiedad compacta solo es necesario ver que $A, B \in W_\alpha, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda A + B) \in W_\alpha$. En efecto, sean $A, B \in W_\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, y calculemos

$$tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda A + B)_{ii}.$$

Por definición de suma de matrices y de ponderación por escalar, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda A + B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda A)_{ii} + B_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\lambda(A)_{ii} + B_{ii} = \lambda\sum_{i=1}^{n}A_{ii} + B_{ii} = \lambda\sum_{i=1}^{n}A_{ii} + \sum_{i=1}^{n}B_{ii} = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Por ende $tr(\lambda A + B) = 0$ y como sumar matrices y multiplicar por escalar no cambian las dimensiones, se tiene que también es de tamaño nxn, y que por lo tanto $\lambda A + B \in W_\alpha$, con lo que se concluye que es sev.

P2. Se dice que $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

(a) Muestre que la única matriz de proyección invertible es la identidad.
R: $P = P^2 \Leftrightarrow P(P-I) = 0$, si P es invertible mutiplico por P^{-1} y queda $P^{-1}P(P-I) = 0 \Leftrightarrow I(P-I) = 0 \Leftrightarrow P - I = 0 \Leftrightarrow P = I$

(b) Pruebe que si P es de proyección, entonces $\forall k \in \mathbb{N},\ P^k = P$.
R: Por inducción: CB, listo por enunciado, PI: $P^{k+1} = PP^k = PP = P^2 = P$ donde el segundo igual fue por HI, y el último por enunciado.

(c) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $(I_n - P)$ también lo es, donde $I_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es la matriz identidad. Concluya que $(I_n - P)^k = I_n - P,\ \forall k \in \mathbb{N}$.
R: $(I_n - P)(I_n - P) = I_n - I_nP - PI_n + P^2 = I_n - P - P + P^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P$, donde el penúltimo igual fue pues P es matriz de proyección. La conclusión sigue de la parte anterior.

(d) Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Muestre que si $P_1 = P_1P_2$ y $P_2 = P_2P_1$, entonces son de proyección.
R: $P_1^2 = P_1P_1 = P_1P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$ Por otro lado $P_2^2 = P_2P_2 = P_2P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$

(e) Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = 0$ y $P(I_n - P)^2 = 0$
R: Si P es de proyección, entonces $P^2(I_n - P) = P^2 - P = P - P = 0$ por otro lado, como P es de proección por iii) tenemos que $(I_n - P)$ también lo es, así $P(I_n - P)^2 = P(I_n - P) = P - P^2 = P - P = 0$.
Para la otra implicancia, $P^2(I_n - P) = P^2 - P^3 = 0 \Leftrightarrow P^2 = P^3$, utilizando esto en la otra tenemos que: $P(I_n - P)^2 = P(I_n^2 - I_nP - PI_n + P^2) = P(I_n - 2P + P^2) = P - 2P^2 + P^3 = P - 2P^2 + P^2 = P - P^2 = 0 \Leftrightarrow P = P^2$, es decir es de proección.

P3. Sean α, β reales. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - \alpha x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2\alpha x_4 = 2 + \alpha \\ -x_1 + \alpha x_3 + (\alpha+1)x_4 = 2\beta + \alpha - 2 \end{cases}$$

(a) Determine los valores α y β para los cuales el sistema tiene:

(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.
(c) No tiene soluciones.

R: Escribimos el sistema matricial y escalonamos...

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right) \xrightarrow{I_{21}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2\alpha-2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{14}(1/2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2\alpha-2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha/2 & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 2\alpha+2 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha/2 & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{34}(-1/4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 2\alpha+2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha/2+1/2 & 2\beta+3\alpha/4-1 \end{array}\right)$$

Ahora que ya está escalonada podemos analizar las soluciones, los peldaños de las dos primeras filas no tienen ninguna forma de hacerse cero, por lo que no hay que analizarlos. Luego, al pasar a la tercera fila, es claro que si $\alpha = 0$ entonces se forma un escalón de largo 2 y como el lado derecho de esa ecuación también se hace cero, se tienen infinitas soluciones. Por último, si $\alpha = -1$, el último peldaño se anula y pasa a tener relevancia el lado derecho. Si es que $2\beta - 7/4 = 0$, es decir $\beta = 7/8$, también hay infinitas soluciones. Mientras que si $\beta \neq 7/8$ no hay ninguna solución. Así el resumen sería:

i) Solución única: $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$.
ii) Infinitas soluciones: $\alpha = 0$ o $\alpha = -1 \wedge \beta = 7/8$.

iii) Ninguna solución: $\alpha = -1 \wedge \beta \neq 7/8$.

(b) Para $\alpha = 1$, encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal, y con ella encuentre $p, q \in \mathbb{R}^4$ tales que la solución del sistema sea $p\beta + q$.
Escalonamos la matriz de coeficientes del sistema pero con la matriz aumentada por la identidad:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{I_{21}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{E_{13}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{E_{14}(1/2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{E_{23}(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{E_{34}(-1/4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{E_{43}(-4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{E_{42}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3/2 & -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{E_{32}(-1/2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{E_{31}(1/2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{Diag(1/2,1,1/2,1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último la solución al sistema correspondería a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2\beta - 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \beta + A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/4 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

P4. Sea W un subespacio de V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Para $v \in V$ definimos el conjunto $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$, se llama *co-conjunto de W que contiene a v*. Es frecuente expresar este co-conjunto como $v + W$. Demuestre que

(a) $v + W = W$ si y solo si $v \in W$. Concluya que $v + W$ es un subespacio de V si y solo si $v \in W$
R: Si $v + W = W$, es porque $\forall w \in W, \exists \overline{w} \in W : v + w = \overline{w} \Rightarrow v = \overline{w} - w \in W$ es decir $v \in W$. Para la otra implicancia notemos que si $v \in W$ es gratis que $v + W \subseteq W$ pues es un sev, además todo $w \in W : w = v + (-v + w) \in v + W$, es decir $W \subseteq v + W$ y por lo tanto $W = v + W$.
Para la conclusión, supongamos que $v + W$ es s.e.v, necesariamente tiene que estar el 0 y por lo tanto debe existir un $\overline{w} \in W : v + \overline{w} = 0 \Leftrightarrow v = -\overline{w} \in W \Rightarrow v \in W$. Para la otra implicancia utilicemos lo que acabamos de demostrar, como $v \in W \Leftrightarrow v + W = W$ y como W es sev, tenemos que $v + W$ es sev.

(b) $v_1 + W = v_2 + W$ si y solo si $v_1 - v_2 \in W$
R: $v_1 + W = v_2 + W \Leftrightarrow \forall w_1 \in W \exists w_2 \in W : v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in W \Rightarrow v_1 - v_2 \in W$.
Para la otra implicancia: $v_1 - v_2 \in W \Rightarrow \exists \overline{w} : v_1 - v_2 = \overline{w} \Leftrightarrow v_1 = v_2 + \overline{w}$, luego sea $x \in v_1 + W \Leftrightarrow \exists w_1 : x = v_1 + w_1 \Rightarrow x = v_2 + \overline{w} + w_1 \in v_2 + W$ por lo tanto $v_1 + W \subseteq v_2 + W$, y la otra inclusión es análoga.

P5. Sean U y W s.e.v's de un espacio vectorial V tal que $dim(V) = 3$, $dim(U) = dim(W) = 2$ y $U \neq V$. Pruebe que $dim(U \cap W) = 1$.

R: Por hipótesis existen $u_1, u_2 \in V$ tales que $\{u_1, u_2\}$ es base de U, como $U \neq W$ existe $w \in W$ tal que $w \notin U = \langle\{u_1, u_2\rangle\}$. Por ende w es li con respecto a u_1, u_2, así $\{u_1, u_2, w\}$ es un conjunto de tres elementos li que perteneces a un espacio de dimensión 3, es decir es una base. En consecuencia $V = U + W$, y por lo tanto $3 = dim(V) = dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - dim(U \cap W) \Rightarrow dim(U \cap W) = 1$.

P6. Considere los siguientes s.e.v. de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ (polinomios de grado a lo más 4)

$$W_1 = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p \text{ tiene 1 como raíz } \},$$
$$W_2 = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p \text{ tiene a 2 como raíz}\}.$$

(a) Demuestre que efectivamente son sub espacios vectoriales.

R: En efecto, $p(x) \equiv 0 \in W_1, W_2$, por ende ninguno de los dos es vacío, además por defínción están contenidos en $\mathcal{P}_4$. Sea $q_1, q_2 \in W_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, como el 1 es raíz de q, estos se pueden factorizar por $(x - 1)$, es decir existen p_1, p_2 polinomios tales que $q_i(x) = p_i(x)(x - 1)$, luego $\lambda q_1 + q_2 = (\lambda p_1 + p_2)(x - 1)$, es decir 1 es raíz de la combinación lineal. Con lo que se concluye que $\lambda q_1 + q_2 \in W_1$, y que por ende este es un *sev*. La demostración para W_2 cambiando $(x - 1)$ por $(x - 2)$.

(b) Encuentre bases de W_1 y W_2 y calcule sus dimensiones.

R: Sea $p \in W_1 \Rightarrow p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, como $p(1) = 0 \Rightarrow a_0 = -(a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$ y por lo tanto $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x - (a_4 + a_3 + a_2 + a_1) = a_4(x^4 - 1) + a_3(x^3 - 1) + a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1)$, se concluye que $W_1 = \langle\{x^4 - 1, x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}\rangle$. Como todos son polinomios de grados distintos, son li, por lo tanto $\{x^4 - 1, x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$ es una base, y la dimensión de W_1 es 4.

Sea $p \in W_2 \Rightarrow p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, como $p(2) = 0 \Rightarrow a_0 = -(16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1)$ y por lo tanto $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x - (16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1) = a_4(x^4 - 16) + a_3(x^3 - 8) + a_2(x^2 - 4) + a_1(x - 2)$, se concluye que $W_2 = \langle\{x^4 - 16, x^3 - 8, x^2 - 4, x - 2\}\rangle$. Como todos son polinomios de grados distintos, son li, por lo tanto $\{x^4 - 1, x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$ es una base, y la dimensión de W_1 es 4.

(c) Demuestre que $W_1 + W_2 = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. ¿Es suma directa?.

R: Como $\mathcal{P}_4$ tiene dimensión 5, si le agregamos cualquier vector *li* a la base de W_1, se tendrá que este nuevo conjunto será base de $\mathcal{P}_4$. En particular podemos tomar $(x - 2) \in W_2$, el cual es claramente li con respecto a $\{x^4 - 1, x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$, pues es de distinto grado que los primeros 3 elementos y si $\alpha(x - 1) + \beta(x - 2) = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)x - (\alpha + 2\beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 = \alpha + 2\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Así $\mathcal{P}_4 = W_1 + \langle\{x - 1\}\rangle \subseteq W_1 + W_2 \subseteq \mathcal{P}_4 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathcal{P}_4$. No es suma directa, pues $(x - 1)(x - 2) \in W_1 \cap W_2$ y no es el polinomio nulo.