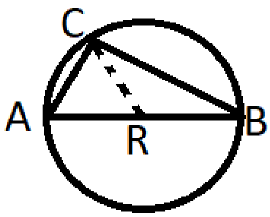
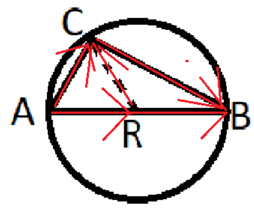
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
2 de Octubre del 2019.

Pauta Clase Auxiliar #7

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Pruebe que todo ángulo inscrito en una circunferencia es recto.
R: En primer lugar dibujamos la figura, y tiramos un radio auxiliar. Luego Describimos exactamente la misma figura pero con vectores, tal como se muestran en las siguientes imágenes.
Queremos probar que el ángulo ACB es rectángulo, esto es lo mismo que $\langle AC, CB\rangle = 0$. En efecto, $AC =$



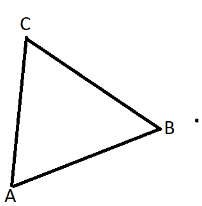


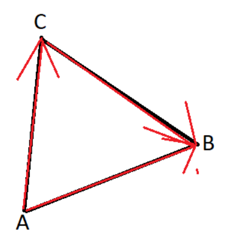
$AR + RC$, mientras que $CB = RB - RC$, adempas como estamos trabajando con vectores $AR = RB$, así, utilizando las propiedades del producto punto, llegamos a que

$$\langle AC, CB\rangle = \langle AR + RC, AR - RC\rangle = \langle AR, AR\rangle - \langle AR, RC\rangle + \langle RC, AR\rangle - \langle RC, RC\rangle$$
$$= \langle AR, AR\rangle - \langle AR, RC\rangle + \langle AR, RC\rangle - \langle RC, RC\rangle = \langle AR, AR\rangle - \langle RC, RC\rangle = ||AR||^2 - ||RC||^2 = 0$$

Donde el primer igual fue gracias a la propiedad distributiva, el segundo por simetría y el último porque la $||AR||$ corresponde a la medida del vector AR, la cual corresponde a un radio, al igual que en el caso de RC.

(b) Pruebe que si un triángulo cumple el teorema de pitágoras, entonces es rectángulo.
R: Nuevamente, partimos dibujando la situación y luego aplicando vectores. SPG: vamos a asumir que se cumple que $||AB||^2 + ||AC||^2 = ||CB||^2$, y veamos que $\langle AC, AB\rangle = 0$. En efecto, aplicamos la hipótesis y las





propiedades del producto para llegar a que:

$$\langle AB, AB\rangle + \langle AC + AC\rangle = ||AB||^2 + ||AC||^2 = ||CB||^2 = \langle CB, CB\rangle$$
$$= \langle AC - AB, AC - AB\rangle = \langle AC, AC\rangle - \langle AB, AC\rangle - \langle AC, AB\rangle + \langle AB, AB\rangle$$
$$= \langle AC, AC\rangle - \langle AB, AC\rangle - \langle AB, AC\rangle + \langle AB, AB\rangle = \langle AC, AC\rangle - 2\langle AB, AC\rangle + \langle AB, AB\rangle.$$
$$\Rightarrow \langle AB, AC\rangle = 0.$$

P2. Un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice conjunto ortogonal si:

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

Sea $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto ortogonal tal que $\|x_i\| = 1 \ \ \forall i \in \{1, \cdots, r\}$.

(a) Se define:

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto ortogonal.

R: Sean x_i, x_j en el conjunto, sabemos por enunciado que si $i \leq r$ y $j \leq r$ tenemos que: $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$, luego solo basta ver el caso $i = r+1, j \leq r$ (sabemos que el producto punto es conmutativo, por lo que basta analizar eso)

$$\begin{aligned} \langle x_{r+1}, x_i \rangle &= \left\langle y - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k \ , \ x_j \right\rangle = \langle y \ , \ x_j \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k \ , \ x_j \right\rangle \\ &= \langle y \ , \ x_j \rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle \langle x_k \ , \ x_j \rangle = \langle y, x_j \rangle - \langle y, x_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es por que el producto punto distribuye sobre la suma, la tercera es porque saca las sumas y porque $\langle y, x_k \rangle$ es un escalar y el producto punto saca los escalares, finalmente el cuarto igual es porque en esa suma todos los términos que no son el j valen 0 pues serán de la forma $\langle x_i, x_j \rangle \ \ i \neq j, \ i, j \leq r$, y por enunciado sabemos que eso vale 0.

(b) Demuestre que si un conjunto es ortogonal entonces es linealmente independiente. ¿Es cierta la otra implicancia?
R: Sean $\alpha_1, ..., \alpha_r$ tales que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0$, luego:

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0, 0 \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left\langle x_k, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^2 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i \in \{1, 2, ..., r\} \end{aligned}$$

Nuevamente se utilizó que el p.p. saca las sumas y los escalares, y que solo sobrevive el término k de la segunda suma porque son vectores ortogonales. Por otra parte la conclusión es porque la única forma de que suma de términos positivos sea nula, es que cada uno sea 0.

P3. Considere:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad L_2 : \begin{cases} x + z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que L_1 y L_2 son dos s.e.v.a. paralelos y distintos.
R: Como se desea ver paralelismo, lo mejor es escribir L_2 de forma paramétrica, para ello resolvemos el sistema.

$$x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z, x - y - z = -1 \Rightarrow y = x - z + 1 = 1 - z - z + 1 = 2 - 2z.$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z \\ 2 - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, se llega a que $L_2 : \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ Luego, ambos directores son paralelos, ya que uno es ponderación del otro. Pero no son coincidentes pues $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \notin L_2$, en efecto. Si perteneciese, entonces existe un r tal que

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

de la segunda coordenada se deduce que $r = 0$, lo que contradice las otras dos.

(b) Encuentre la ecuación vectorial del plano π que pasa por $P = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ y es paralelo al plano que contiene a L_1 y L_2 **R:** Lo primero es calcular los vectores directores, el primero es simple, pues es el de cualquiera de las dos rectas, es decir, $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, el otro lo calculamos con la resta de dos puntos, uno en cada recta, así uno que serviría sería $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, por último imponiendo que debe pasar por el punto especificado se concluye que $\pi : \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

P4. (a) Sea $\pi_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, $\pi_2 := \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Encuentre $\pi_1 \cap \pi_2$, subespacio afín de $\mathbb{R}^4$

R: Los puntos que viven en ambos planos, deben cumplir ambas ecuaciones, es decir deben existit r, s, r', s' tales que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + r + s = 2 + 2r' + s' \\ x_2 &= 0 = 0 \\ x_3 &= 1 = 1 + 3s' \\ x_4 &= s = 1 + s' \end{aligned}$$

De las segunda ecuación, se llega a que $x_2 = 0$, de la tercera que $s' = 0$ y por ende, $x_4 = s = 1$, luego reemplazanado en la primera se llega a que $x_1 = 1 + r$, con esto $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+r\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, es decir que $\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

(b) Sea ahora $\pi_3 := \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Encuentre $\pi_1 \cap \pi_3$.

R: Como estamos en puntos que viven en π_1, se debe cumplir que $x_2 = 0$, pero por estar en π_3, $x_2 = 1$, esto claramente es una contradicción y por ende la intersección es vacía.

(c) Sea $\pi_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Encuentre $\pi_1 \cap \pi_4$.

R: Los puntos deben cumplir ambas ecuaciones, así tienen que existir r, s, r', s' tales que:

$$\begin{gathered} x_1 = 1 + r + s = r' + s' \\ x_2 = 0 = 0 \\ x_3 = 1 = 3 + r' \\ x_4 = 0 \end{gathered}$$

resolviendo el sistema, de la misma forma que en a), se concluye que: $\pi_1 \cap \pi_4 : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$