Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Pauta Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

R: Para ver que no son colineales basta ver que los vectores directores entre cada par de puntos no son paralelos, así:

$$P - Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P - R = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la ecuación cartesiana se puede resolver el sistema, o utilizar el siguiente resultado

$$P - Q \times P - R = \left| \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right| = (2 \cdot -1 \cdot 0)\hat{i} - (2 \cdot -3 - 1 \cdot 3)\hat{j} + (2 \cdot 0 - 2 \cdot 3)\hat{k} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \pi_1$ Tiene por ecuación:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow -6x + 9y - 6z = -15 \Leftrightarrow -2x + 3y - 2z = -5$$

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

R: Escribimos de forma paramética la segunda: $3x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -3x - 4 \Rightarrow L_2 : \begin{pmatrix} x \\ -3x - 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, la cual tiene el mismo vector director que L_1 y por ende son paralelas, distintas pues la tercera coordenada de cualquiera en L_1 es 1 y en L_2 es -5.

Luego, $\pi_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -1 + 4 \\ 1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ Para la cartesiana razonamos como antes:

$$d_1 \times d_2 = \left| \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \right| = (-3 \cdot 6 - 0 \cdot 3)\hat{i} - (1 \cdot 6 - 0 \cdot 1)\hat{j} + (1 \cdot 3 + 3 \cdot 1)\hat{k} = \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \pi_2$ Tiene por ecuación:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow -18x - 6y + 6z = -6 \Leftrightarrow -3x - y + z = -1$$

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.
R: Intersectamos las rectas, es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{gathered} -2x + 3y - 2z = -5 \wedge -3x - y + z = -1 \\ \Rightarrow -2x + 3(-3x + z + 1) - 2z + 5 = 0z = -8 + 11x \Rightarrow y = -3x + 11x - 8 + 1 = 8x - 7 \\ \Rightarrow L : \begin{pmatrix} x \\ 8x - 7 \\ 11x - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.
Buscamos t y x tales que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -2/11, x = 9/11 \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + 9/11 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/11 \\ -5/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se cumple que $-2 \cdot 9/11 + 3 \cdot -5/11 - 2 \cdot 1 = -5$

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.
R: Primero calculamos la recta que pasa por Q y R. Como ya es clásico, el vector director está dado por

$$Q - R = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así esta está dada por

$$L_{QR} : \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para la distancia, primero calculamos la proyección, hay que encontrar el punto P_0 tal que 1) P_0 pertenezca a la recta, y 2)$P - P_0$ sea ortogonal al vector director. Así esto se resume a encontrar α tal que:

$$\begin{gathered} \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\alpha - 5 \\ 2\alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -4\alpha + 1 \\ 3 - 2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow -16\alpha + 4 + 16 - 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1/2. \end{gathered}$$

Con esto $P_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalmente la distancia está dada por:

$$||P - P_0|| = \sqrt{\langle P - P_0, P - P_0 \rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{6}$$

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 (Proyección de P) y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

R: Calculamos el plano que contiene a los puntos:

$$\pi_{PQR} : \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \beta \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, como L va a ser perpendicular al plano recién calculado, sabemos que su vector director está dado por:

$$d_1 \times d_2 = \left| \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = (-3 \cdot 0 - 2 \cdot -1)\hat{\imath} - (-1 \cdot 0 - 4 \cdot -1)\hat{\jmath} + (-1 \cdot 2 - 4 \cdot -2)\hat{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Así $L : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Por último, notemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$, es decir el punto pertenece a la recta ortogonal al plano, y por ende la distancia es simplemente $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 16 + 100} = \sqrt{120}$.

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \ L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.
R:
(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.
(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.
(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.
(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.
R: $T(\alpha p + q)(x) = 2(\alpha p + q)'(x) + \int_0^x 3(\alpha p(t) + q(t))dt = 2((\alpha p)'(x) + q'(x)) + \int_0^x 3\alpha p(t) + \int_0^x 3q(t)dt = \alpha \cdot 2p'(x) + \alpha \int_0^x 3p(t)dt + 2q'(x) + \int_0^x 3q(t)dt = \alpha T(p)(x) + T(q)(x)$.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.
R: Sabemos que para ver la inyectividad basta estudiarla en las bases del espacio vectorial, además es conocido que $\mathcal{P}_2 = \langle 1, x, x^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} T(1) =& 3 \cdot 1' + \int_0^x 3 \cdot 1dt = 3 \cdot 0 + 3x = 3x \\ T(x) =& 2x' + 3\int_0^x tdt = 2 + \frac{3x^2}{2} \\ T(x^2) =& 2(x^2)' + 3\int_0^x t^2dt = 4x + x^3 \end{aligned}$$

Como los polinomios son distintos, concluimos que es inyectiva. Además sabemos que la imágen de una base es la base de la imágen es decir $Im(T) = \left\langle 3x, 2 + \frac{3}{2}x^2, 4x + x^3 \right\rangle$, y esta tiene dimensión 3 en cambio $\mathcal{P}_3$ tiene dimensión 4, así $Im(T) \neq \mathcal{P}_3$, y por lo tanto no es sobreyectiva.