Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 2 Álgebra Lineal
16 de Octubre de 2019

Clase Auxiliar # 9

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Sea $T : \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+d \\ b+d & f \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre bases y dimensiones para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

P2. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\mathrm{Ker}(L) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre L explícitamente.

(b) Encuentre una base de $\mathrm{Im}(L)$ y el rango de L.

(c) Estudie Inyectividad y Epiyectividad

P3. Sea $T : U \to V$, una transformación lineal, y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ base de U.

(a) Demuestre que $\langle T(\beta_U)\rangle = Im(T)$. ¿Es necesariamente una base?

(b) Demuestre que si $T(\beta_U)$ es li, entonces T es inyectiva.

(c) Demuestre que T es biyectiva si y solo sí, $T(\beta_U)$ es base de V

P4. **(a)** Sea V un ev de dimensión n, y $T : V \longrightarrow V$ lineal. Si $dim(Im(T)) = dim(Im(T^2))$, demostrar que

$$Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}.$$

(b) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal. Muestra que o bien T es sobreyectiva o es identicamente nula.

(c) Sea V un e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $L : V \to V$ una función lineal para la cual existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un punto $x_0 \in V$ tal que

$$L^n(x_0) = 0 \text{ y } L^{n-1}(x_0) \neq 0.$$

Demuestre que el conjunto $\{x_0, L(x_0), L^2(x_0), \ldots, L^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente