Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 2 Álgebra Lineal
16 de Octubre de 2019

Clase Auxiliar # 9

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Sea $T : \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+d \\ b+d & f \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.
R: $T \left[\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha b_1 + b_2 + \alpha f_1 + f_2 & \end{pmatrix} = \alpha T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix}.$

(b) Encuentre bases y dimensiones para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
R:

$$T(A) = 0 \Rightarrow A = d \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{pmatrix},$$

y por el otro lado

$$T(A) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P2. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\mathrm{Ker}(L) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre L explícitamente.
R: Notemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Luego toda funció lineal queda completamente determinada por los valores en esta. De esta forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \left[(x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (x-y) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z) T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre una base de $\mathrm{Im}(L)$ y el rango de L.
R: Es claro que $Im(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, por ende $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es base. Por último, el rango corresponde a la dimensión de la imágen, que claramente es 1.

(c) Estudie Inyectividad y Epiyectividad
R: No es inyectiva, pues hay dos elementos que van al 0. No es sobretectiva, pues la imagen tiene dimensión 1 y el espacio de llegada tiene dimensión 2.

P3. Sea $T : U \to V$, una transformación lineal, y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ base de U.

(a) Demuestre que $\langle T(\beta_U) \rangle = Im(T)$. ¿Es necesariamente una base?
R: Si y está en la imagen, tiene pre-imágen, esta se puede descomponer en la base y con propiedades de linearidad concluir. Para responder la pregunta estudiar $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$.

(b) Demuestre que si $T(\beta_U)$ es li, entonces T es inyectiva.
R: Si $T(x) = T(y) \Rightarrow T(x-y) = 0$, descomponiendo x e y en la base (por separado) y usando propiedades de linearidad se concluye.

(c) Demuestre que T es biyectiva si y solo sí, $T(\beta_U)$ es base de V
R: Una implicancia viene de las partes a) y b) directamente. Para la otra, como sabemos es sobreyectiva, si agregamos a) ya tenemos que $T(\beta_U)$ genera a V. Por otro lado la inyectividad y las propiedades de la linealidad darán que el conjunto es li.

P4. **(a)** Sea V un ev de dimensión n, y $T : V \longrightarrow V$ lineal. Si $dim(Im(T)) = dim(Im(T^2))$, demostrar que

$$Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}.$$

R: $Im(T^2) \subseteq Im(T)$ y $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$, teorema de núcleo e imagen, más la igualdad de dimensiones indica que realmente se tiene igualdad en ambos casos. Luego tomar un $y \in Im(T) \cap Ker(T)$ y estudiar $T(y)$.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal. Muestra que o bien T es sobreyectiva o es identicamente nula.
R: Sea x tal que $T(x) \neq 0$, entonces $y = yT(x)/T(x) = T(yT(x)/T(x))$ ¿Por qué podemos meter todo dentro de T?

(c) Sea V un e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $L : V \to V$ una función lineal para la cual existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un punto $x_0 \in V$ tal que

$$L^n(x_0) = 0 \text{ y } L^{n-1}(x_0) \neq 0.$$

Demuestre que el conjunto $\{x_0, L(x_0), L^2(x_0), \ldots, L^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente
R:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^i(x_0) = 0 \Rightarrow L(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^i(x_0)) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^{i+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i L^{i+1}(x_0)$$

Se puede iterar hasta $\alpha_0 L^{n-1}(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$, reemplazando en el paso anterior $\alpha_1 = 0$, y así sucesivamente hasta $\alpha_{n-1} = 0$.