Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
de Octubre de 2019

Clase Auxiliar # 10: Repaso C2

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Demuestre que $\{x^2, x^2-2x, x^2+x+4\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y que $\{x^3, x^3-x, x^3+2x^2-x, x^3+2\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

(b) Encuentre la matriz representante de la función lineal, con respecto a las bases anteriores, de

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \text{ tal que } f(p)(x) = 2p'(x) + 3\int_0^x p(t)dt.$$

(c) Utilizando lo anterior, calcule $f(p)(x)$, para un $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, cualquiera.

P2. Sea π_0 el plano que pasa por el origen y tiene vectores directores $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

(a) Escriba la ecuación normal del plano π_0.

(b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano π que pasa por $P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y no corta a π_0.

(c) Calcule la proyección de P sobre π_0.

(d) Calcule la distancia entre π y π_0.

P3. Considere las siguientes rectas:

- $L_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ es el eje X
- $L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es la recta que pasa por los $(1, 2, 0)$ y $(-1, 3, -1)$.

(a) Describa las rectas por sus ecuaciones paramétricas.

(b) Encuentre una tercera recta $L_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a L_1 y L_2 y que además intersecte a ambas rectas.

P4. Sea $\mathcal{P}_3(R)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)x^2 + 2a_3x^3$$

(a) Pruebe que T es una transformación lineal inyectiva.

(b) Pruebe que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = Ker((T - 2id)^3) \oplus Ker(T - id)$
Obs: $(T - 2id)^3 = (T - 2id) \circ (T - 2id) \circ (T - 2id)$

P5. Sean X,Y espacios vectoriales y $f : X \to Y$ lineal.

(a) Suponiendo que $A \subseteq X$ es s.e.v. ¿Será $f(A)$ s.e.v?

(b) Suponiendo que $A \subseteq Y$ es s.e.v. ¿Será $f^{-1}(A)$ s.e.v?

P6. Sean U, V y W espacios vectoriales y considere $g : U \longrightarrow V$ y $f : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Pruebe que:

(a) $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f \circ g)$

(b) Si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f \circ g)$

(c) $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$

(d) Si $\text{Im}(g) = V$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$