Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
Diciembre de 2019

Clase Auxiliar # 11: Cambio de base y Diagonalización

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. [Un cambio de base sin conocer T]
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en la partida y en la llegada es

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y la canónica en la llegada.

(b) ¿Existen bases β_1, β_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta_1\beta_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

P2. [Una lineal que utiliza trigonométricas]
Sea $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales. Considere las aplicaciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{F}$ y $G : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$F(a, b, c) = a \sin^2 x + b \cos^2 x + c$$
$$G(f) = (f(0), f(-\pi/2))$$

(a) Compruebe que F y G son lineales y calcule sus núcleos e imágenes.

(b) Si $U \subseteq \mathcal{F}$ es el s.e.v. de las funciones constantes, hallar $F^{-1}(U)$.

(c) Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ y de $F(\mathbb{R}^3)$ respecto de las que la matriz de F sea la canónica.

(d) Halla la ecuación y el núcleo de la aplicación $G \circ F$.

P3. [Representante + cambio de base: $\mathbb{R}^4$]
Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre bases de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(b) Dadas las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \right\}$$

Encuentre las matrices de pasaje que permitan calcular la matriz representante de T con respecto a las bases B y B', pasando por la base canónica tanto en la partida como en la llegada. Luego calcule dicha matriz representante usando las matrices de pasaje encontradas.

P4. [Cálculo de determinante: Trigonométrica]

Sea

$$C = \begin{pmatrix} \cos(x+a_1) & \cos(x+a_2) & \cos(x+a_3) \\ \sin(x+a_1) & \sin(x+a_2) & \sin(x+a_3) \\ \sin(a_2-a_3) & \sin(a_3-a_1) & \sin(a_1-a_2) \end{pmatrix}.$$

Pruebe que el determinante no depende de x. Además, si a_1, a_2 y a_3 pertenecen al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, encuentre la relación entre ellos para que el determinante de C sea nulo.

P5. [Soluciones no nulas...]

(Piense en el contexto que está este problema) Determine los $a \neq 1$ tales que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & ax_4 & = & 0 \\ ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & ax_4 & = & 0 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & = & 0 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

tenga soluciones no triviales.

P6. [Diagonalización 3x3]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebráicas.

(ii) Determinar los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

(iii) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.