

Elementos de Algebra MA3101

Profesor: Ángel Pardo J.

Auxiliares: Alonso Cancino T.

Juan Pedro Ross O.

Fecha: Viernes 23 de Agosto 2019



Auxiliar 3

P1. (Teorema de Lagrange Generalizado) Sea G un grupo (no necesariamente finito) y $H \leq G$, entonces $|G| = |G/\approx_H| \times |H|$.

P2. (Relación de Conjugación) Sea \mathcal{C} la relación definida en $(G, *)$ por $a\mathcal{C}b : \exists g \in G, ag = gb$.

a) Demuestre que \mathcal{C} es de equivalencia.

b) Sea $H \leq G$, demuestre que

$$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow H = \bigcup_{\substack{T \in G/\mathcal{C} \\ T \cap H \neq \emptyset}} T$$

P3. (Clases laterales) Sea G grupo, $a, b \in G$ y $H, K \leq G$. Muestre que si $Ha \cap Kb \neq \emptyset$, entonces $\exists c \in G$ tal que $Ha \cap Kb = (H \cap K)c$.

P4. Grupos residualmente finitos) Un grupo G se dice residualmente finito ssi

$$\forall g \in G \setminus \{e_G\}, \exists F \text{ grupo finito y } \varphi : G \rightarrow F \text{ morfismo tal que } \varphi(g) \neq e_F.$$

a) Demuestre que todo grupo finito es residualmente finito.

b) ¿Lo es también \mathbf{Z} ?

c) ¿Es cierto que si $H \leq G$, entonces H también lo es?

d) Sea $H \leq G$ con $[G : H] < \infty$. Encuentre $N \trianglelefteq G : N \subseteq H$ y $[G : N] < \infty$.

e) Concluya que

$$M = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ [G:H] < \infty}} H = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ [G:N] < \infty}} N \text{ y que } M \trianglelefteq G.$$

f) Demuestre que G es residualmente finito ssi $M = \{e_G\}$.

Pr) Sea G grupo y $H \leq G$

$$\rightarrow |G| = |G/\sim_H| \times |H|$$

Sabemos que $G/\sim_H = \{Hg : g \in G\}$ forma una partición. Fijemos \bar{h}_g en cada Hg , resguardando

$$\text{que si } Hg_1 = Hg_2 \Rightarrow \bar{h}_{g_1} = \bar{h}_{g_2}$$

$$\text{Sea } f: G \rightarrow G/\sim_H \times H$$

$$g \rightarrow Hg \times \bar{h}_g \cdot g^{-1}$$

1º Esta bien def pues $\bar{h}_g \in Hg \Rightarrow \bar{h}_g g^{-1} \in H$

2º Es inyectiva pues

$$Hg_1 = Hg_2 \Rightarrow \bar{h}_{g_1} = \bar{h}_{g_2} \Rightarrow (\bar{h}_{g_1} g_1^{-1} = \bar{h}_{g_2} g_2^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2)$$

3º Es sobreyectiva pues sea $H\bar{g} \in G/\sim_H \wedge h \in H$

$$\text{Sea } g \in Hg \quad h = h\bar{g} * g^{-1} \quad (\text{ie } g = h^{-1} h\bar{g})$$

$$\Leftrightarrow h\bar{g} \sim_H g \Leftrightarrow Hh\bar{g} = H\bar{g} = Hg //$$

$$\Rightarrow f(h^{-1} h\bar{g}) = (Hh^{-1} h\bar{g}, h\bar{g} h\bar{g}^{-1} h) \\ = (Hh\bar{g}, h) = (Hg, h)$$



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona						
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras						
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos						
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión						
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo						
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)						
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos						

¡Muchas gracias por su participación!

12) a) $a \notin b \Leftrightarrow \exists g \in G: ag = gb$

$a \notin a ; g = e$

$a \notin b \wedge b \notin a \Rightarrow ag_1 = g_1b \wedge bg_2 = g_2a$

$\Rightarrow ag_1 = g_1g_2ag_2^{-1}$

$\Rightarrow a \underbrace{g_1g_2}_{\in G} = \underbrace{g_1g_2}_{\in G} a$

4

$a \notin b \Rightarrow ag_1 = g_1b$

$\Rightarrow g_1^{-1}a = bg_1^{-1}$

$\Rightarrow b \notin a //$

b) Sea $H \leq G$ demostrar

$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow H = \bigcup_{\substack{T \in G/\phi \\ T \cap H \neq \emptyset}} T =: \tilde{N}$

\Rightarrow [c] Sea $h \in H \Rightarrow h \in [h] \wedge [h] \cap H \neq \emptyset$

$\Rightarrow h \in \tilde{N} \Rightarrow H \subseteq \tilde{N} //$

\exists Sea $l \in \tilde{N} \Rightarrow \exists T \in G/\phi$ s.t. $l \in T \wedge T \cap H \neq \emptyset$

Sea $h \in T \cap H \Rightarrow h \in T \Rightarrow \exists g \in G: lg = gh = \bar{h}g \Rightarrow l = \bar{h} \in H //$
 $\exists g \in G: Hg = gH$
 pres. HAG



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona						
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras						
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos						
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión						
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo						
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)						
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos						

¡Muchas gracias por su participación!

⇐ Me gustaría que $\forall u \in H \quad ghg^{-1} \in H$,

pero $ghg^{-1} \in [u]_{\mathcal{C}} \subseteq \tilde{N} = H //$

P3 Recordemos que $H, K \leq G \Rightarrow HNK \leq G$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{c \in G} (HNK)c$$

Sea $x, y \in H \cap K b \Rightarrow \exists c_x, c_y$ t.q $x \in (HNK)c_x$
 $y \in (HNK)c_y$

PR: $(HNK)c_x = (HNK)c_y$.

$$\Leftrightarrow c_x c_y^{-1} \in HNK.$$

Sabemos:

$$x \in (HNK)c_x \Rightarrow x c_x^{-1} \in HNK \quad (1)$$

$$y \in (HNK)c_y \Rightarrow y c_y^{-1} \in HNK \quad (2)$$

$$x \in H \cap K b \Rightarrow x b^{-1} \in K \cap x a^{-1} \in H \quad (3)$$

$$y \in H \cap K b \Rightarrow y a^{-1} \in H \cap y b^{-1} \in K. \quad (4)$$

$$x c_x^{-1} \in H \Rightarrow c_x x^{-1} \in H \Rightarrow c_x x^{-1} x a^{-1} \in H \Rightarrow c_x a^{-1} a y^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow c_x y^{-1} y c_y^{-1} \in H.$$

$$x c_x^{-1} \in K \Rightarrow c_x x^{-1} \in K \Rightarrow c_x x^{-1} x b^{-1} \in K \Rightarrow c_x b^{-1} b y^{-1} \in K$$
$$\Rightarrow c_x y^{-1} y c_y^{-1} \in K.$$

$$\Rightarrow c_x c_y^{-1} \in HNK //$$



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona					
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras					
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos					
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión					
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo					
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)					
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos					

¡Muchas gracias por su participación!

~~ojo~~ ~~esta~~

⇒ Fijando cualquiera de los $Cx = c$
se tiene que $H_a \cap H_b \subseteq (HNK)_c$

Luego, sea $l \in (HNK)_c$

$$\Leftrightarrow lc^{-1} \in H \quad \wedge \quad lc^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow l \in H_c \cap K_c$$

$$\Rightarrow \phi \neq H_a \cap K_b \subseteq (HNK)_c \subseteq H_c \cap K_c$$

$$\Rightarrow H_a \cap H_c \neq \phi \Rightarrow H_a = H_c \quad \wedge \quad K_b = K_c$$

$$\therefore H_a \cap K_b = (HNK)_c //$$



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona						
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras						
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos						
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión						
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo						
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)						
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos						

¡Muchas gracias por su participación!

PH) G rf ssi $\forall g \in G \exists h \in G \exists F$ finito $\times \varphi: G \rightarrow F$
 morf $\times \varphi(g) \neq e_G$

a) $\varphi = \text{Id}_G$

b) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ con $m > n$ para asegurar
 $n \rightarrow n$ que $n \neq 0$

c) Si, tomamos el mismo morf pero lo restringimos

d) Sea $\varphi: G \rightarrow \text{Biyectivas}(G/\sim_H)$
 $g \rightarrow \varphi_g: G/H \rightarrow G/H$
 $Hx \rightarrow Hxg^{-1}$ $\swarrow H^2 = H$

Bien def: $\varphi_g(Hx_1) = \varphi_g(Hx_2) \Rightarrow Hx_1g^{-1} = Hx_2g^{-1}$ // $\varphi_g(Hag) = Ha$ //
 φ es morfismo pues.

$\varphi(g_1g_2)(x) = \varphi_{g_1g_2}(x) = Hx(g_1g_2)^{-1} = Hxg_2^{-1}g_1^{-1} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x)$ //

Luego $G/\underbrace{\text{Ker } \varphi}_N \cong \text{Im } \varphi \leq \text{Biy}(G/\sim_H)$
 \uparrow
 finito $\Rightarrow [G:N] < +\infty$
 finito.

$\wedge \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$ //

\wedge si $g \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi_g = \text{Id}_{G/\sim_H}$ $\forall x \Rightarrow Hxg^{-1} = Hx \Rightarrow Hg^{-1} = H \Rightarrow g \in H$ //



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona						
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras						
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos						
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión						
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo						
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)						
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos						

¡Muchas gracias por su participación!

e) Concluya que

$$\bigcap_{\substack{H \leq G \\ [G:H] < +\infty}} H = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ [G:N] < +\infty}} N$$

\subseteq ✓ Hay más conjuntos a la izquierda.

\supseteq Si $x \notin \bigcap H \Rightarrow x \notin N_H \Rightarrow x \notin \bigcap N //$

f) G es rf ssi $M = \ker \varphi$.

\Rightarrow Sea $g \in M \setminus \ker \varphi \Rightarrow \exists F$ finito, $\varphi: G \rightarrow F$

$\varphi(g) \neq e_F \Rightarrow g \notin \ker \varphi \Rightarrow g \notin M$

↑
mismo argumento
que antes.

\Rightarrow $g \in G \setminus \ker \varphi$

$\Leftarrow \exists N \trianglelefteq G : [G:N] < +\infty : g \notin N$

$\varphi: G \rightarrow G/N$

$g \rightarrow Ng \neq N$ pues $g \notin N //$



La habilidad matemática es algo que permanece relativamente fija a través de la vida de la persona						
Los problemas matemáticos se pueden solucionar correctamente de muchas maneras						
Sólo los alumnos más capaces pueden participar en actividades de resolución de problemas que requieren múltiples pasos						
Lo fundamental de las Matemáticas es su rigor lógico y su precisión						
Las Matemáticas son una asignatura en que la habilidad innata es bastante más importante que el esfuerzo						
Si uno se involucra en tareas matemáticas, puede descubrir cosas nuevas (por ejemplo, conexiones, fórmulas, conceptos)						
Las Matemáticas suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos						

¡Muchas gracias por su participación!