Auxiliar 3

Direcciones Extremas y Teorema de Caracterización

Prof: Jorge Amaya
Auxiliar: Diego Reyes Troncoso, Javier Monreal Bernal

Resumen

1. ***Def:*** Se dice que C es un conjunto convexo si cumple que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, $\forall y, z \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$.

2. ***Def:*** Sea C un conjunto convexo. Un punto $x \in C$ se dice *punto extremo* si no existen dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ para algún $\lambda \in (0,1)$.

3. ***Def:*** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es de rango m y $b \in \mathbb{R}^n$. Un punto x es extremo de $P \iff A = [B, N]$, donde $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es invertible, $N \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{R})$, $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B^{-1}b \geq 0$.

4. ***Def:*** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es de rango m y $b \in \mathbb{R}^n$.Una dirección $\hat{d}$ es extrema de $P \iff A = [B, N]$, donde $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es invertible, y $\hat{d}$ es un multiplo positivo de $d = \begin{pmatrix} B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ y $-B^{-1}a_j \geq 0$.

P1. Modelamiento.

Un aeropuerto ubicado en Santiago, realiza solo vuelos nacionales. Este cuenta con una dotación de pilotos para realizar los vuelos programados para cada uno de los días de la semana. Considere que el set de pilotos, vuelos, y días es $P = \{1, \ldots, P\}, V = \{1, \ldots, V\} y D = \{1, \ldots, D\}$, respectivamente; una semana inicia el día lunes y finaliza el día domingo (note que $D = 7$). Para ser más preciso, un vuelo $v \in V$ corresponde a la ida y vuelta desde Santiago hacia un destino en particular. Asuma por simplicacidad que la ida y vuelta ocurren dentro de un mismo día $d \in D$. Además, un vuelo no está asociado a un día particular de la semana. Por ejmplo, si tenemos el vuelo 1, podríamos tener este vuelo dos veces el día lunes, una vez el día martes, etc. Asimismo, existen dos tipos de aviones. Sea $I = \{A, B\}$ el conjunto de los dos tipos de aviones que hay.

El bienestar que obtiene cada piloto p por cada vuelo v está determinado mediante el parámetro u_{pv}. Por otro lado, el parámetro b_{pi} vale 1 si el piloto p sabe pilotar el avión de tipo i, y 0 en caso contrario. El tiempo que tarda cada vuelo v está determinado mediante el parámetro t_v, mientras que el parámetro a_{vi} vale 1 si el vuelo v usa un avión de tipo i, y 0 si no.

Considere que la cantidad de vuelos v programados para cada día d viene dada por el parámetro n_{vd}. Además, considere que con el objetivo de brindar seguridad a los pasajeros y cumplir con las condiciones laborales, a un piloto se le permite pilotar a lo más un vuelo por día y trabajar a lo más 16 horas semanales . Se deben realizar todos los vuelos programados durante la semana, y cada uno de ellos debe estar a cargo de un piloto que sepa pilotar el tipo de avión requerido, el cual puede ser tipo A o tipo B.

P2. Puntos Extremos y Direcciones Extremas.

a) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in C$. Demostrar que x es punto extremo $\iff C \setminus \{x\}$ es convexo.

b) Encontrar los Puntos Extremos y Direcciones Extremas de:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \tag{1}$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0 \tag{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{3}$$

c) Considere el poliedro P definido por: $x_1 - x_2 - 1 \geq 0, x_1 - 2x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \geq 0$. Determine todos los puntos y direcciones extremas de P, usando los teoremas de caracterización.