

MA4006-1 Combinatoria

Profesor: José Soto

Auxiliares: Vicente Salinas

Dudas: vsalinas@dim.uchile.cl



Auxiliar 3

16 de Agosto de 2019

P1. Pruebe las siguientes identidades usando su interpretación como caminos crecientes en el plano:

a)

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

b)

$$\binom{a+b+1}{a} = \sum_{k=0}^a \binom{k+b}{b}$$

P2. Los siguientes resultados involucran los números de Catalán:

a) Sea \hat{C}_n el número de formas correctas de colocar $2n$ paréntesis (n abre paréntesis y n cierra paréntesis), pruebe $\hat{C}_n = C_n$.

b) Considere un círculo formado por $2n$ personas, sea \hat{C}_n el número de formas en que n parejas pueden darse la mano simultáneamente sin que los apretones se crucen, demuestre que $\hat{C}_n = C_n$.

Indicación: Demuestre que ambas cantidades se definen por la siguiente recurrencia con caso base $C_0 = 1$.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \forall n \geq 1$$

P3. Considere f_n las particiones de $[1, n-1]$ en monominós y dominós, pruebe que:

$$f_{n+m} = f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1}$$

P4. Pruebe combinatorialmente que el número de particiones de enteros con a lo más a partes y con cada parte menor o igual que b es igual a $\binom{a+b}{a}$

P5. Demuestre combinatorialmente los siguientes resultados en relación a las particiones de un entero:

$$p_k(n+k) = \sum_{i=0}^k p_i(n)$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1),$$

[Propuesto]

De el número de soluciones enteras no negativas, del siguiente sistema:

$$x_1 + \dots + x_k = n$$

con todos los x_i impares. De su solución en función de n y k .

Un número se dice libre de cuadrados si es el producto de primos distintos. Por ejemplo 30 es libre de cuadrados, pero 50 no lo es. Sea N un número libre de cuadrados que es el producto de n primos ¿Cuántas formas de factorizar N como producto de números enteros mayores que 1 existen, donde dos factorizaciones se consideran iguales si tienen los mismos factores, pero en distinto orden.