MA4006. Combinatoria. 2019.
Profesor: José Soto.

Tarea 1 ver 03.

Fecha límite entrega: ~~Domingo 18 de agosto~~ Martes 20 de agosto, **13:29**. (Plazo extra por los errores de tipeo)
Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).
Cada hora de atraso descuenta 10 puntos de su puntaje. Puntaje mínimo: $M = 30$
La nota del control 2 se calculará como sigue, donde C_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{mín}(C_1, C_2, C_3) & \text{si } \text{mín}(C_1, C_2, C_3) \leq M, \\ \text{mín}(70, \frac{C_1+C_2+C_3}{3}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (LEALA en el archivo admin.pdf en ucursos). Si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase sin colaboración.

Ejercicio 1. Para $\emptyset \neq B \subseteq A^*$, llamamos prefijos de B a todas las palabras $w \in A^*$ tal que existe $w' \in A^*$ tal que $ww' \in B$. Note que como $B \neq \emptyset$, ε es prefijo de B. Demuestre, reduciéndose al principio del producto, o por inducción, el siguiente **principio general del producto**, teniendo cuidado al describir las biyecciones que usa.
Principio general del producto. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\emptyset \neq B \subseteq A^k$. Si existen valores $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $1 \leq j \leq k$ y todo w prefijo de B con $|w| = j - 1$, $|\{\sigma \in A\colon w\sigma \text{ es prefijo de } B\}| = s_j$, entonces $|B| = \prod_{j=1}^{k} s_j$.

Ejercicio 2. Sean $n, k \geq 1$. Determine expresiones simples para el cardinal de los siguientes lenguajes.

$$L_1 = \{w \in [n]^k \colon \forall i \in [k-1], w_i \neq w_{i+1}\},$$
$$L_2 = \{w \in [n]^k \colon \forall i \in [k], w_i + w_{k+1-i} = n+1\},$$
$$L_3 = \{w \in [2n-1]^k \colon \forall i \in [k], w_i \text{ tiene distinta paridad que } w_{i+1}\}.$$

Ejercicio 3.

(i) Encuentre, para todo $n \in \mathbb{N}$, la cantidad de conjuntos de números enteros entre $-n$ y n (inclusive) que no contienen dos elementos con el mismo valor absoluto.

(ii) Determine la cantidad de subconjuntos de $\mathbb{N}_{100} = \{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 99\}$ que no contengan ningún trío de números x, y, z distintos con el mismo dígito final (en su expresión normal en base 10). Por ejemplo $\{0, 3, 42, 53, 77, 83, 93\}$ no satisface la condición pues 3, 53 y 83 terminan en 3.

Ejercicio 4. Sea A un alfabeto finito, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $w \in A^p$ una palabra. Decimos que v es una rotación de w si existen palabras s, t tal que $w = st$ y $v = ts$ y llamamos $\text{Rot}(w)$ al conjunto de sus rotaciones. Por ejemplo, $\text{Rot}(ababcd) = \{ababcd, babcda, abcdab, bcdaba, cdabab, dababc\}$ y $\text{Rot}(ababab) = \{ababab, bababa\}$.

(i) Demuestre que para todo $w \in A^p$, $|\text{Rot}(w)|$ divide a p. Además pruebe que $|\text{Rot}(w)| = 1$ si y solo si todos los símbolos de w son iguales.

(ii) Use lo anterior para dar una demostración por multiconteo del pequeño teorema de Fermat: Para todo p primo y todo $a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a \mod p$. **Indicación:** Estudie el conjunto de palabras de A^p que no tienen todos sus símbolos iguales.

Ejercicio 5.

(i) Demuestre combinatorialmente la desigualdad de Bernoulli siguiente: $\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad (1+n)^k \geq 1 + nk$.

(ii) Demuestre combinatorialmente la desigualdad siguiente: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^+, \quad (a+b)^c \geq a^c + b^c$.

Ejercicio 6.

(i) Encuentre, usando multiconteo, valores enteros $a(n,k)$ y $b(n,k)$ tal que para todo $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} a(n,k) = \binom{n}{k+1} b(n,k).$$

y deduzca, manipulando dichos términos que $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$ para todo $k < n/2$.

(ii) Para A conjunto, llame $\mathcal{P}_k(A) = \{x \in \mathcal{M}(A) \colon x_a \leq k, \forall a \in A\}$ al conjunto de los multiconjuntos que tienen a cada símbolo a lo más k veces, de modo que $\mathcal{P}_1(A) = \mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(A)$. Pruebe combinatorialmente que $|\mathcal{P}_k(A)| = (k+1)^{|A|}$.

Ejercicio 7. Un conjunto de k personas se encuentra comprando en un supermercado, a la espera que abran las cajas. Suponga que n cajas abren simultáneamente. Llamemos $[n]^{\overline{k}}$ al conjunto de todas las maneras que tienen las k personas de formarse en filas tras las cajas (en otras palabras, en cada caja se ubica una fila de personas, posiblemente vacía). Llame $n^{\overline{k}}$ al cardinal de $[n]^{\overline{k}}$. Pruebe por inducción[1] en k que

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1) = \prod_{i=n}^{n+k-1} i = (n+k-1)^{\underline{k}}.$$

Demuestre combinatorialmente[2] que $n^{\overline{k}} = (n+k-1)^{\underline{k}}$.

Ejercicio 8. Demostrar **combinatorialmente**[3] las siguientes identidades

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}, \qquad \left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{i}\!\!\right),$$

$$\sum_{i \geq 0} i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}, \qquad \sum_{i \geq 0} i^{\underline{k}} \binom{n}{i} = n^{\underline{k}} 2^{n-k}.$$

Ejercicio 9.

(i) Pruebe combinatorialmente que $\mathrm{com}(n,k) = \mathrm{com}(n, n+1-k)$.

(ii) Pruebe combinatorialmente que

$$\mathrm{wcom}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{com}(n,j).$$

Ejercicio 10. Pruebe combinatorialmente[4] que f_{n+2} cuenta el número de palabras en $\{0,1\}^*$ de largo n que no tienen a 00 como subpalabra. Compruebe nuevamente el resultado demostrando que este conjunto satisface la recurrencia que define a f_n.

[1] Piense que los clientes se forman uno a uno no necesariamente al final de cada fila, sino que permite colarse.
[2] Para el lado derecho puede servirle pensar en revelar iterativamente la identidad de la persona frente a cada uno de los k clientes.
[3] ¡Sin manipular algebráicamente ningún término!
[4] Recuerde que por definición $f_{n+1} = d_n$ cuenta las composiciones de Fibonacci de n.